Министерство образования и науки Украины
Национальный авиационный университет

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Практикум
для студентов специальности 6.070103

“Обслуживание воздушных судов”

Киев 2015

УДК 512.64, 514.742.2, 514.123 (076.5)
ББК

Составители *Я.Г.Ляшенко* – к-т физ.-мат. наук, доц.
Т.А.Погребецкая – ст. препод.
Н.П.Тупко – к-т физ.-мат. наук, доц.

Рецензент *Т.А.Олешко,* к-т физ.-мат. наук, доц.,
Национальный авиационный университет

Утверждено методическо-редакционным советом Национального авиационного университета (протокол № от 2015 р.).

Элементы линейной и векторной алгебры и аналитической геометрии: практикум/ составители *Я.Г.Ляшенко, Т.А.Погребецкая, Н.П.Тупко.* – К.: НАУ, 2015. – 48с.

Практикум состоит из трех частей: 1) элементы линейной алгебры, 2) элементы векторной алгебры, 3) элементы аналитической геометрии. Каждая часть содержит краткое изложение основных теоретических данных, приведены примеры решения типовых задач и достаточное число заданий для аудиторной и самостоятельной работы студентов направления 6.070103 «Обслуживание воздушных судов».

Учебное издание

ВВЕДЕНИЕ

Высшая математика является очень мощным современным инструментом для исследования широкого спектра прикладных задач в разных отраслях человеческой деятельности и эффективным инструментом оптимизации инженерных конструкций. Современный инженер должен владеть аппаратом линейной алгебры, векторной алгебры и аналитической геометрии. Основной целью предложенного набора практических заданий есть формирование у студентов навычек практической реализации теоретического аппарата при решении конкретных задач, которые могут быть эффективно применены в разных областях инженерной деятельности. Кроме того, этот практикум также может рассматриваться и как фундамент при дальнейшем изучении более сложных и узкоспециализированных спецкурсов.

Практикум состоит из трех частей: элементы линейной алгебры, элементы векторной алгебры, элементы аналитической геометрии. Каждая часть содержит краткое изложение основных теоретических материалов, примеры решения типовых задач и задания для аудиторной и самостоятельной работы студентов с приведенными к ним ответами.

У практикуме рассматривается найболее актуальный для будущих инженеров набор практически важных задач соответственно до учебной программы по курсу "Высшая математика" для специальности 6.070103 ”Обслуживание воздушных судов“. В то же время, благодаря универсальности теоретической базы представленных проблем, она может быть полезна и для студентов других специальностей.

Общий порядок решения практических заданий

1. Рассмотреть необходимый объем теоретического материала, который соответствует названию, цели и проблематике текущего практического задания.
2. Внимательно прочитать условие задачи, проанализировать исходные данные и выбрать соответствующие формулы, определения либо теоремы для ее решения.
3.Решить задачу, непостредственно используя соответствующий теоретический аппарат.
4. Проанализировать полученные результаты.

Практическое занятие 1. Системы линейных алгебраических уравнений. Вычисление определителей. Правило Крамера.

Выражение $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (1.1)

называется *определителем второго порядка*.

Рассмотрим систему двух линейных неоднородных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.2)$$

Применяя метод исключения неизвестных и обозначив через $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ получаем:

I. Если $\Delta \neq 0$, то система (1.2) имеет единственное решение, которое находится по *формулам Крамера*: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$. (1.3)

II. Если $\Delta = 0$, то 1) при $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ система (1.2) имеет бесконечное множество решений; 2) если хотя бы один из определителей $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ не равен нулю, то система (1.2) решений не имеет, т.е. несовместна.

Выражение

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix} \quad (1.4)$$

называют *определителем третьего порядка*.

Пусть дана система трех линейных неоднородных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.5)$$

Определитель, составленной из коэффициентов при неизвестных данной системы

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ называют главным определителем системы (1.5)

А определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

– вспомогательными определителями.

Если I. $\Delta \neq 0$, то система (1.5) имеет единственное решение, которое можно найти по *формулам Крамера*: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$,

$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, (1.6) II. $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система (1.4) имеет бесконечное множество решений III. $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей $\{\Delta_1, \Delta_2, \ \Delta_3\}$ не равен нулю, то система (1.5) несовместна.

Определители 2-го и 3-го порядка есть частные случаи определителя n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a_{ij} - элементы определителя, первый индекс i - номер строки, второй j - номер столбца.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из данного вычеркиванием i-той строки и j-го столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \qquad (1.7)$$

Определитель n-го порядка Δ равен:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1,2, \dots n)$$

или (1.8)

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{jn} \qquad (j = 1,2, \dots n)$$

Такой метод вычисления определителя называют разложением по i-той строке (j-тому столбцу).

Значение определителя не изменится, если к какой-либо строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на произвольное число. Используя это свойство, можно сделать все элементы строки (столбца), кроме одного, нулевыми.

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$,

Решение. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-4) = 10 + 12 = 22.$

Пример 2. Исследовать системы и, в случае совместности найти их решения.

а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 22 \\ x_1 - 2x_2 = 19 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 2 \\ 6x_1 + 9x_2 = 3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 = 3 \end{cases}$; г) $\begin{cases} ax_1 - 9x_2 = 6 \\ 10x_1 - bx_2 = 10 \end{cases}$;

Решение а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 22 \\ x_1 - 2x_2 = 19. \end{cases}$ Находим $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$

Т.к. $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Находим $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 22 & 1 \\ 19 & -2 \end{vmatrix} = -63$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 22 \\ 1 & 19 \end{vmatrix} = 35$.

Тогда по формулам Крамера (1.3) $x_1 = \frac{-63}{-7} = 9$; $x_2 = \frac{35}{-7} = -5$.

б) $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 2 \\ 6x_1 + 9x_2 = 3 \end{cases}$; $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$. Т.к. $\Delta = 0$, пока нельзя делать вывод о совместности данной системы. Находим $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Т.к. $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то система имеет бесконечное множество решений. Разделив обе части первого уравнения на 2, а второго на 3, приходим к одному и тому же уравнению
$2x_1 + 3x_2 = 1$, из которого $x_1 = \frac{1-3x_2}{2}$, x_2 – любое, т.е. система имеет бесконечное множество решений.

в) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 = 3 \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2$.

Т.к. $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$, то система несовместима.

г) $\begin{cases} ax_1 - 9x_2 = 6 \\ 10x_1 - bx_2 = 10 \end{cases}$, $\Delta = \begin{vmatrix} a & -9 \\ 10 & -b \end{vmatrix} = -ab + 90$. Если $\Delta \neq 0$, т.е. ab$\neq 90$, то система имеет единственное решение.

Пусть $\Delta = 0$, то есть $ab = 90$. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 10 & -b \end{vmatrix} = -6b + 90$;

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 6 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} = 10a - 60$

Если $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, т.е. $\begin{cases} -6b + 90 = 0 \\ 10a - 60 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = 15 \\ a = 6 \end{matrix}$, то система имеет бесконечное множество решений. Если $ab = 90$, но $a \neq 6$, $b \neq 15$, то система несовместна.

Пример 3. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

Решение. $\Delta = 1 \cdot (-2) \cdot 4 + (-5) \cdot 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \cdot 0 -$
$-0 \cdot (-2) \cdot (-2) - (-5) \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = -8 + 20 + 60 - 2 = 70$

Пример 4. Решить систему: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6$. Т.к. $\Delta \neq 0$, то систему решаем по формулам Крамера. (1.6) Находим

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 12$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12$

Тогда $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-12}{6} = -2$.

Пример 5. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 19 & 11 \\ 2 & -3 & -2 & 9 \end{vmatrix}$;

Решение. *Первый способ*. Имеем определитель 4-*го* порядка. Разложим его, например, по элементам третьей строки, используя формулу (1.8) (i=3).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 19 & 11 \\ 2 & -3 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 9 \end{vmatrix} +$$

$$+(-8) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 9 \end{vmatrix} + 19 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 9 \end{vmatrix} +$$

$$+11 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

Вычислив определители третьего порядка, получаем:

$\Delta = 3 \cdot 19 + 8 \cdot (-6) + 19 \cdot 1 - 11 \cdot 2 = 6$

Второй способ: Чем больше нулей в какой-либо строке (столбце), тем проще вычислить определитель. Если $a_{ij} = 1$, то можно получить все нули в i-той строке (j-том столбце) кроме элемента a_{ij}. Выберем $a_{11} = 1$ и получим нули в первой строке. Для этого ко второму столбцу прибавим первый, умноженный на 2, к третьему столбцу прибавим первый и к четвертому – первый, умноженный на (-3). Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 19 & 11 \\ 2 & -3 & -2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 22 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Раскрываем полученый определитель по элементам первой строки

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 22 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = |2 \text{ строка } + 11 \cdot 1 \text{ строку} \to| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 9 & 0 & 24 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 9 & 24 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(27 - 24) = 6.$$

Задания для аудиторной и самостоятельной работы

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ -8 & 8 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 8 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 20 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 9 \\ 9 & 15 & -62 & 8 \end{vmatrix}$;8) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 & -2 \\ 8 & 65 & 27 & -12 \\ 0 & 1 & 11 & 12 \\ -2 & -18 & -4 & 1 \end{vmatrix}$;9) $\begin{vmatrix} 27 & 2 & 19 & 23 & 27 \\ 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 1 & 9 & -7 & -37 & -4 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 18 & 4 & 38 & 44 & 18 \end{vmatrix}$.

Иследовать системы и, в случае совместимости, найти их решения.

10) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 = 10 \end{cases}$;11) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$;12) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1 \\ 8x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 = 2 \end{cases}$;

13) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - 5x_2 = 11 \end{cases}$;14) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 = -12 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases}$;15) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = b \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \end{cases}$.

Ответы: 1)120; 2)$-4ab$; 3)-3; 4)45; 5)0; 6)1; 7)45; 8)-24; 9)100;
10) $x_2 = 2x_1 - 5, x_1$ любое; 11) $(3; -2; 2)$; 12) несовместна; 13){1;-2};
14) $x_1 = 8x_2 + 26,\ x_3 = -14x_2 - 44$, x_2– любое;
15) при $a \neq -3$ – ед. решение; $a = -3; b \neq \frac{1}{3}$ – несовместна;
$a = -3; b = \frac{1}{3}$ – бесконечное множество решений.

Практическое занятие 2. Матрицы, действия над матрицами. Обратная матрица. Матричные уравненя.

Матрицей называют прямоугольную таблицу чисел и обозначают

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

a_{ij} – элементы матрицы, i – номер строки, j – номер столбца.
Матрица, у которой m строк и n столбцов, называется прямоугольной матрицей размерности $(m \times n)$ и обозначается $A = \|a_{ij}\|_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ Если $m = n$, то матрица называется квадратной или n-го порядка. Квадратная матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ называется единичной матрицей.

Любой квадратной матрцице A можно поставить в соответствие определитель n-го порядка $\det(A)$, элементами которого являются элементы данной матрицы. Если $\det(A) \neq 0$, то матрицу A называют невырожденной, если $\det(A) = 0$, то – вырожденной.

Пусть $A = \|a_{ij}\|_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ и $B = \|b_{ij}\|_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$.

Суммой матриц A и B есть матрица $C = \|c_{ij}\|_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ той же размерности, что A и B, причем $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Произведением матрицы $A = \|a_{ij}\|_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ на число α называется матрица $C = \|c_{ij}\|_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$, где $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Разность двух прямоугольных матриц одинаковой размерности определяется равенством

$$A - B = A + (-1) \cdot B.$$

Произведением двух матриц $A = \|a_{ij}\|_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ и $B = \|b_{ij}\|_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,k}}}$ называется матрица $C = \|c_{ij}\|_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,k}}}$, у которой $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + $ $+a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$, где $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,k}$.

Умножение всегда выполнимо, если оба сомножителя квадратные матрицы одного порядка. Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются перестановочными. Если A и E одной размерности, то $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Матрица A^{-1} называется *обратной* для невырожденной матрицы A, если $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Обратная матрица может быть найдена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (2.2)$$

где $\Delta = \det(A)$, A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij}.

Понятие обратной матрицы позволяет рассматривать и решать матричные уравнения. 1) $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$ (2.3) 2) $X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$ (2.4) 3) $A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$ (2.5) при условии, что в (2.3) и (2.4) матрица A невырожденная, а в (2.5) A, B и C– квадратные одной размерности, а A и B– невырожденные.

Примеры решения зедач

Пример 1. Найти $A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -5 \\ 16 & 24 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Решение. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -5 \\ 16 & 24 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 7 + 2(-1) & 2\cdot 3 + 2(-2) & 2\cdot 4 + 2(-3) \\ (-1)\cdot 7 + (-5)(-1) & (-1)\cdot 3 + (-5)(-2) & (-1)4 + (-5)(-3) \\ 16\cdot 7 + 24(-1) & 16\cdot 3 + 24(-2) & 16\cdot 4 + 24(-3) \\ 8\cdot 7 + 16(-1) & 8\cdot 3 + 16(-2) & 8\cdot 4 + 16(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14-2 & 6-4 & 8-6 \\ -7+5 & -3+10 & -4+15 \\ 112-24 & 48-48 & 64-72 \\ 56-16 & 24-32 & 32-48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 2 \\ -2 & 7 & 11 \\ 88 & 0 & -8 \\ 40 & -8 & -16 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти $f(A)$, если А=$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ и $f(x) = (2x^2 - 3)(x + 2)$

Решение.Если $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ и А – квадратная матрица, то по определению

$f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nE$.

В нашем случае $f(A) = (2A^2 - 3E)(A + 2E)$

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & -10 & 13 \\ 42 & 12 & -35 \\ 28 & -28 & 68 \end{pmatrix};$$

$$2\cdot A^2 - 3\cdot E = 2\begin{pmatrix} 32 & -10 & 13 \\ 42 & 12 & -35 \\ 28 & -28 & 68 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 64 & -20 & 26 \\ 84 & 24 & -70 \\ 56 & -56 & 136 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 & -20 & 26 \\ 84 & 21 & -70 \\ 56 & -56 & 133 \end{pmatrix}$$

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -4 \\ 7 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 61 & -20 & 26 \\ 84 & 21 & -70 \\ 56 & -56 & 133 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 & -4 \\ 7 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 287 & 105 & -420 \\ 735 & -133 & 105 \\ 0 & 420 & -1078 \end{pmatrix}$$

Пример 3. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. По определению матрица $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ будет перестановочной с A, если$\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

Или $\begin{pmatrix} 7a - 3c & 7b - 3d \\ 5a - 2c & 5b - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a + 5b & -3a - 2b \\ 7c + 5d & -3c - 2d \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 7a-3c=7a+5b \\ 7b-3d=-3a-2b \\ 5a-2c=7c+5d \\ 5b-2d=-3c-2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5b+3c=0 \\ 3a+9b-3d=0 \\ 5a-9c-5d=0 \end{cases}$$ Отсюда $c=-\frac{5}{3}b$, $d=a+3b$, где a и b принимают произвольные значения. Подставив в B получим $B=\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{5}{3}b & a+3b \end{pmatrix}$. Если $a=b=0$, то имеем нулевую матрицу, а при $a=1$, $b=0$ - единичную, которые перестановочны с любой матрицей.

Пример 4. Найти обратную матрицу A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

Решение. Находим $\Delta=\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}=-22\neq 0$

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=-12$; $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=5$; $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-3$;

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=6$; $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-8$; $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-4$;

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-2$; $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$; $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=5$;

По формуле (2.2) имеем

$$A^{-1}=-\frac{1}{22}\begin{pmatrix} -12 & 6 & -2 \\ 5 & -8 & -1 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{22} & \frac{4}{11} & \frac{1}{22} \\ \frac{3}{22} & \frac{2}{11} & -\frac{5}{22} \end{pmatrix}$$

Пример 5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Решение.Вычисляем $\det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ и

$\det\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}==\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=-2\neq 0$. Находим

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ и

$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

По формуле (2.5) имеем

$$X=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Задания для аудиторной и самостоятельной работы

Найти произведения матриц

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 35 & 17 & -52 \\ 26 & 13 & -34 \\ 51 & 25 & -70 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 3 \\ -23 & 15 & -8 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить

5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^n$; 6) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

Найти $f(A)$, если

7) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 2x - 1$; 8) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = (x-5)(x^2+1)$;

Найти все матрицы B, перестановочные с матрицей A

9) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 10) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

Найти обратные матрицы для следующих матриц

11) $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;12) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$;13) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;14) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

Решить матричноые уравнения

15) $X\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -5 \\ -3 & 19 \end{pmatrix}$; 16) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}X\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -1 & 23 \\ 4 & -14 & 70 \\ 31 & 8 & -117 \end{pmatrix}$.

Ответы

1) $\begin{pmatrix} -7 \\ 27 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 5 \\ 5 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 40 & 0 \\ -2 & -11 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -370 & 238 & -132 \\ -86 & 65 & -31 \\ 298 & -190 & 108 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при n – четном, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ при n – нечетном;

6) $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 7 & -13 & 13 \\ 1 & -2 & 6 \\ 5 & -6 & 11 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 1 & 22 & 34 \\ 41 & -38 & 16 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

9) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, a и b любые; 10) $B = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}$, a и b любые; 11) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{3}{22} & \frac{5}{22} \end{pmatrix}$;

12) $-\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 15 & -6 & 6 \\ -16 & -2 & -5 \\ 18 & -3 & 3 \end{pmatrix}$; 13) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

15) $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; 16) $X = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; 17) $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Практическое занятие 3. Метод Гаусса и матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений.

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3.1)$$

Метод Гаусса решения системы (3.1) состоит из прямого и обратного хода. Прямой ход метода Гаусса основан на преобразованиях системы, которые не меняют решений системы, а именно: 1) перестановка уравнений местами; 2) умножение обеих частей уравнения на ненулевой множитель; 3) почленное прибавление к элементам какого-либо уравнения системы другого уравнения, умноженного на произвольный множитель. В результате прямого хода метода Гаусса систему (3.1) приводят к виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \dots + a_{1k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 \dots + a'_{2k-1}x_{k-1} + a'_{2k}x_k + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a'_{k-1,k-1}x_{k-1} + a'_{k-1,k}x_k + \cdots + a'_{k-1,n}x_n = b'_{k-1} \\ \qquad\qquad\qquad a'_{kk}x_k + \cdots + a'_{kn}x_n = b'_k \end{cases} \qquad (3.2)$$

Здесь $a_{11} \neq 0$; $a'_{22} \neq 0, \dots\ a'_{kk} \neq 0, k \leq m$ и $k \leq n$. В этом случае система совместна. Далее осуществляют обратный ход метода Гаусса. При $k = n$ из последнего уравнения находят x_n. Подставляют x_n в предыдущие уравнение и находят из него x_{n-1}. И т.д., пока из первого уравнения не находят x_1. Т.е. при $k = n$ система имеет единственное решение.

При $k < n$ из последнего уравнения выражают одну из неизвестных через остальные, например x_k через $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_n$. Подставляют найденное выражение для x_k в предыдущее уравнение и выражают из него x_{k-1} через $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_n$ и т.д. пока не выразят x_1. Неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_n$ называют свободными неизвестными. Они могут принимать любые значения. Т.е. при $k < n$ система имеет бесконечное множество решений.

Если коэффициенты в левой части какого-либо уравнения системы (3.2) обращаются в ноль, а правая часть будет отличной от нуля, то система несовместна.

Рассмотрим систему, у которой число уравнений совпадает с числом неизвестных, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3.3)$$

Систему (3.3) запишем в виде матричного уравнения $A \cdot X = B$(3.4),

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

Если A невырожденная матрица, то решение уравнения (3.4), как известно, имеет вид $X = A^{-1}B$.

Этот метод называют *матричным* методом решения системы (3.3).

Примеры решения задач

Пример 1. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 18 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$

Решение. а)Для сокращения записей перепишем систему в виде таблицы, оставив только коэффициенты при неизвестных и свободные члены. Производя элементарные преобразования над строками, не меняющими решения системы, приведем ее к виду, когда все элементы под главной диагональю будут нулями:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -10 & 5 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&0&3\\0&-1&1&1&6\\0&-3&2&1&1\\0&-6&3&1&-4\\0&-10&5&2&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&0&3\\0&-1&1&1&6\\0&0&-1&-2&-17\\0&0&-3&-5&-40\\0&0&-5&-8&-63\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&0&3\\0&-1&1&1&6\\0&0&-1&-2&-17\\0&0&0&1&11\\0&0&0&2&22\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&0&3\\0&-1&1&1&6\\0&0&-1&-2&-17\\0&0&0&1&11\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2=3\\-x_2+x_3+x_4=6\\-x_3-2x_4=-17\\x_4=11\end{cases}$$

Обратный ход метода Гаусса. Подставим x_4 в третье уравнение. Имеем $-x_3-22=-17$.Отсюда $x_3=-5$. Далее подставляем x_4 и x_3 во второе уравнение и из него находим $x_2=0$. И наконец из первого уравнения получаем $x_1=3$.

Т.о. решение исходной системы: $x_1=3$; $x_2=0$; $x_3=-5$; $x_4=11$.

б) Прямой ход метода Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c}3&2&2&2&2\\2&3&2&5&3\\9&1&4&-5&1\\2&2&3&4&5\\7&1&6&-1&7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&-3&-1\\2&3&2&5&3\\9&1&4&-5&1\\2&2&3&4&5\\7&1&6&-1&7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&-3&-1\\0&5&2&11&5\\0&10&4&22&10\\0&4&3&10&7\\0&8&6&20&14\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&-3&-1\\0&5&2&11&5\\0&4&3&10&7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&-3&-1\\0&1&-1&1&-2\\0&4&3&10&7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&-3&-1\\0&1&-1&1&-2\\0&0&7&6&15\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x_1-x_2-3x_4=-1\\x_2-x_3+x_4=-2\\7x_3+6x_4=15\end{cases}$$ Обратный ход метода Гаусса: из последнего уравнения выражаем x_3 через x_4, приняв тем самым x_4 за свободную неизвестную $x_3=(15-6x_4)/7$. Подставляем найденное x_3 во второе уравнение. Получаем x_2= $(1-13x_4)/7$. И, наконец, из первого уравнения $x_1=(-6+8x_4)/7$.Т.о. система имеет бесконечное множество решений: $x_1=(-6+8x_4)/7$; x_2=$(1-13x_4)/7$; $x_3=(15-6x_4)/7$; x_4 – любое.

Пример 2. Решить систему матричным методом

$$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=31\\5x_1+x_2+2x_3=29\\3x_1-x_2+x_3=10\end{cases}$$

Решение. Вводим матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\5&1&2\\3&-1&1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}31\\29\\10\end{pmatrix}$ и $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

Тогда система перепишется в виде $A\cdot X=B$

$\det(A)=\begin{vmatrix}1&2&4\\5&1&2\\3&-1&1\end{vmatrix}=-27\neq0$, A^{-1}=$-\frac{1}{27}\begin{pmatrix}3&-6&0\\1&-11&18\\-8&7&-9\end{pmatrix}$, тогда

$$X = A^{-1}\cdot B.\ X = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -11 & 18 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 31 \\ 29 \\ 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -81 \\ -108 \\ -135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Решение системы: $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5$.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы

Решить системы методом Гаусса

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -20 \\ -x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 18 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -19 \\ x_1 + 7x_2 = 23 \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 = -46 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 9x_4 + 2x_5 = 11 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 11x_4 - 3x_5 = 19 \end{cases}$;

Решить системы матричным методом

4) $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 12 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 14 \\ 10x_1 - 12x_2 + 7x_3 = 39 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 25 \\ 7x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4 \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 = -1 \end{cases}$;

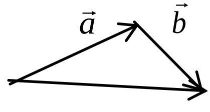
6) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 6 \\ x_1 + 4x_3 = 21 \\ 10x_1 + 5x_2 - x_3 = -10 \end{cases}$; 7) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_4 = -4 \end{cases}$;

Ответы

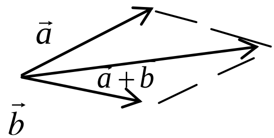
1) $\{2;\ 3; -5\}$. 2) $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4;\ \ x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$. 3)Система несовместна. 4)$\{2;\ -1; 1\}$. 5)$\{2;\ 3; 4\}$. 6)$\{1;\ -3; 5\}$. 7) $\{-1;\ 1; -1; 1\}$.

Практическое занятие 4. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Векторы в декартовой системе координат на плоскости и в пространстве.

• Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, который соединяет начало вектора $\vec{a}$ с концом $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$. (*правило треугольника*)



Сумму двух векторов можно также построить по *правилу параллелограмма*.



- Разницей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют вектор $\vec{d} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$
- Произведением вектора $\vec{a}$ на скаляр λ называют вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$:

1) $|\vec{b}| = |\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$; 2) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, при $\lambda > 0$ и $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, при $l < 0$.

- Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называют положительное число $\left|\overline{A_1B_1}\right|$, если ось l и вектор $\overline{A_1B_1}$ одинаково направлены (рис.4.1) и отрицательное число $-\left|\overline{A_1B_1}\right|$, если ось l и вектор $\overline{A_1B_1}$ противоположно направлены (рис.4.2). Обозначают $np_l\vec{a}$.

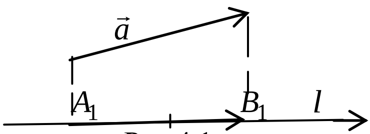


Рис.4.1

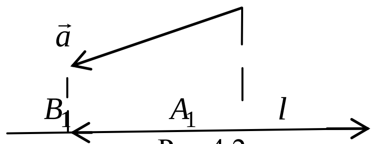


Рис.4.2

- Представление вектора в декартовой системе координат в пространстве имеет вид: $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = (a_x, a_y, a_z)$, где $a_x = np_{ox}\vec{a}$, $a_y = np_{oy}\vec{a}$, $a_z = np_{oz}\vec{a}$ - координаты вектора; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты прямоугольной декардовой системы координат. $|\vec{a}|$-длина вектора $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$ $\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$ - направляющие косинусы вектора $\vec{a}$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$; $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - орт. вектора $\vec{a}$.

- Если известны $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\vec{AB}$ находятся за формулой $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.
- Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

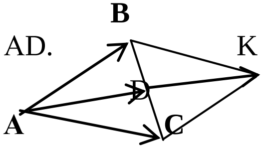
1) $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$; 2)для $\forall\alpha : \alpha\vec{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$

Признак коллинеарности двух векторов: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

- Разложение вектора $\vec{c} = (x_3, y_3)$ на плоскости в произвольном базисе $\vec{a}=(x_1,y_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2)$ имеет вид: $\vec{c}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}$ и соответственно в координатной форме $\begin{cases} x_3=\alpha\cdot x_1+\beta\cdot x_2 \\ y_3=\alpha\cdot y_1+\beta\cdot y_2 \end{cases}$.

Аналогично разложение вектора в пространстве.

Примеры решения задач.



Пример 1. Дан треугольник ABC, с медианой AD. Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.
Решение. Согласно правилу параллелограмма: $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Т.к. диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Пример 2. Заданы координаты точек $A(-1,2,)$, $B(3,-3)$ и $C(-1,4)$ Найти:1)координаты вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$;2) длину, орт и направляющие косинусы вектора $\vec{a}$. **Решение.** Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}=(3+1;-3-2)=(4;-5)$, $\overrightarrow{AC}=(-1+1;4-2)=(0;2)$, тогда $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(4+0;-5+2)=(4;-3)$.

Длина вектора $|\vec{a}|=\sqrt{4^2+(-3)^2=5}$, направляюще косинусы $\cos\alpha=\frac{4}{5}, \cos\beta=\frac{-3}{5}$ и соответственно орт вектора $\vec{a}^0=\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$

Пример 3. Даны три точки $A(3;-1,5)$, $B(0;5;-4)$, $C(1;3,-1)$. Проверить, лежат ли они на одной прямой. **Решение.** Если точки *A, B, C* лежат на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллиниарны. $\overrightarrow{AB}=(-3;6;-9)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;4;-6)$. Так как координаты векторов пропорциональны: $\frac{-3}{-2}=\frac{6}{4}=\frac{-9}{-6}$, то векторы коллинеарны, а значит три точки лежат на одной прямой.

Пример 4. Даны три вектора $\vec{a}=(-3,-4), \vec{b}=(5,-6)$, $\vec{c}=(-11,-2)$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, т.к. $\frac{3}{5}\neq\frac{4}{6}$, поэтому они образуют базис на плоскости и можно записать вектор $\vec{c}$ в виде их линейной комбинации $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$. В координатной форме: $\begin{cases} -11 = -3 \cdot \alpha + 5 \cdot \beta \\ -2 = -4 \cdot \alpha - 6 \cdot \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}$. Таким образом $\vec{c} = 2 \cdot \vec{a} - 1 \cdot \vec{b}$.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы.

1.Заданы координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2} = (-1;2)$ и координаты точки $A_1 = (3;2)$. Найти: 1)координаты точки A_2; 2)длину, направляющие косинусы, орт вектора $\vec{a}$.

2.Даны векторы $\vec{a} = (-1;2;-3)$, $\vec{b} = (5;-3;6)$, $\vec{c} = (6;8;-5)$. Найти вектор $3\vec{a} - 8\vec{b} - \vec{c}$.

3.Вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями Ох и Оу углы α=60^0, β=120^0. Вычислить его координаты при условии, что $|\vec{a}| = 2$.

4.Дан модуль вектора $|\vec{a}| = 2$ и углы α=45^0, β=60^0, $\gamma = 120^0$. Вычислить проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

5.Даны три последовательные вершины параллелограмма A(1;-2;3), B(3; 2; 1), C(6; 4; 4). Найти его четвёртую вершину.

6. Найти такие значения α и β, при которых коллинеарны векторы $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = 7\vec{i} - 42\vec{j} + \beta \cdot \vec{k}$.

7. Заданы векторы $\vec{a}$ =(2; 4) и $\vec{b}$ =(3; -2). Проверить, могут ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образовывать базис. Найти координаты вектора $\vec{c}$ = (13; 18) в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, если такой базис существует.

Ответы. **1.** $A_2(2;4)$; $|\vec{a}| = \sqrt{5}; \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\vec{a}^0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

2. $(-49;22;-52)$. **3.** $\vec{a} = (1;-1)$; **4.** $np_{ox}\vec{a} = \sqrt{2}$, $np_{oy}\vec{a} = 1$, $np_{oz}\vec{a} = -1$. **5.** $D(4;0;6)$. **6.** $\beta = 70, \alpha = 0{,}5$. **7.** $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$.

Практическое занятие 5. Скалярное произведение двух векторов. Условия коллинеарности и перпендикулярности двух векторов.

- Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, т.е. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$, (5.1)

где φ - это угол между векторами.

Если $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, то их скалярное произведение:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2\,. \tag{5.2}$$

• Геометрический смысл скалярного произведения: $np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

В координатной форме $\quad np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.

• Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, в координатной форме

$$x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0\,. \tag{5.3}$$

• Угол φ между векторами: $\quad \cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. (5.4)

в координатной форме $\cos\varphi=\dfrac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_{11}^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$. (5.5)

• Условие параллельности двух векторов: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

Примеры решения задач.

Пример 1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, зная, что: 1) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=8$, угол между векторами $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$; 2) $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=1$, угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\dfrac{\pi}{3}$, $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=5\vec{p}-\vec{q}$. **Решение.**1)По определению $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=$ $=3\cdot8\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}=12\sqrt{2}.$ 2) Согласно алгебраическим свойствам скалярного произведения: $\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{p}+3\vec{q})\cdot(5\vec{p}-\vec{q})=$

$$= 5\vec{p}\cdot\vec{p} - \vec{p}\cdot\vec{q} + 15\vec{q}\cdot\vec{p} - 3\vec{q}\cdot\vec{q} = = 5|\vec{p}|^2 + 14|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cos\frac{\pi}{3} - 3|\vec{q}|^2 =$$

$$= 5\cdot 2^2 + 14\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} - 3\cdot 1^2 = 31.$$

Пример 2. Заданы векторы $\vec{a} = (2;-1;1)$ и $\vec{b} = (8;2;5)$. Найти: 1) скалярное произведение векторов $2\vec{a} + \vec{b}$ и $2\vec{a} - \vec{b}$; 2) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; 3) найти проекцию вектора $\vec{a} + \vec{b}$ на вектор $\vec{a} - \vec{b}$. **Решение.**1) Найдём векторы $2\vec{a} + \vec{b}$ и $2\vec{a} - \vec{b}$:

$2\vec{a} + \vec{b} = (2\cdot 2 + 8; 2\cdot(-1) + 2; 2\cdot 1 + 5) = (12;0;7)$,

$2\vec{a} - \vec{b} = (2\cdot 2 - 8; 2\cdot(-1) - 2; 2\cdot 1 - 5) = (-4;-4;-3)$

По формуле (5.2): $(2\vec{a} + \vec{b})\cdot(2\vec{a} - \vec{b}) = 12\cdot(-4) + 0\cdot(-4) + 7\cdot(-3) = -69$.

2) Согласно формуле (5.5): $\cos\varphi = \dfrac{2\cdot 8 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot 5}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{8^2 + 2^2 + 5^2}} =$

$= \dfrac{19}{3\sqrt{62}}$. 3) Найдём векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$:

$\vec{a} + \vec{b} = (2 + 8; -1 + 2; 1 + 5) = (10;1;6)$,

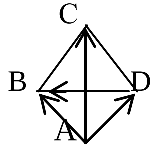
$\vec{a} - \vec{b} = (2 - 8; -1 - 2; 1 - 5) = (-6;-3;-4)$. По формуле:

$$np_{(\vec{a}-\vec{b})}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{10\cdot(-6) + 1\cdot(-3) + 6\cdot(-4)}{\sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + (-4)^2}} = -\frac{87}{\sqrt{61}}.$$

Пример 3. Определить при каком значении α векторы $\vec{a} = \alpha\cdot\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\cdot\vec{i} + \alpha\cdot\vec{j} + \vec{k}$ взаимно перпендикулярны. **Решение.** Найдём скалярное произведение векторов: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \alpha\cdot\alpha + 2\cdot\alpha - 3\cdot 1 = \alpha^2 + 2\alpha - 3$. Используя необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов**,** имеем**:** $\alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1 \quad \text{или} \quad \alpha_2 = -3$.

Пример 4. Методами векторной алгебры доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Решение. Пусть ABCD – ромб. На сторонах AB, AD и диагоналях AC, DB ромба построим



соответственно векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$.
Согласно правилу параллелограмма и разницы векторов:
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. Найдём скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AD}\right|^2$. Поскольку $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right|$, т.к. это стороны ромба, то $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$, а это означает перпендикулярность диагоналей ромба.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы.

1.Дано векторы $\vec{a} = (1;-2;1)$ и $\vec{b} = (-1;2;2)$. Найти $2\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 5\vec{b}^2$.

2.Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\frac{2\pi}{3}$. Найти длину вектора $\vec{d} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 2$.

3. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\vec{a} = (2;1;3)$ и $\vec{b} = (-3;1;2)$.

4.Даны векторы $\vec{a} = (2;-2;3)$ и $\vec{b} = (-3;1;2)$. Найти проекцию вектора $2\vec{a} + 5\vec{b}$ на вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

5. Даны вершины четырехугольника A(1; -2; 2), B(1; 4; 0), C(-4;1;1), D(-5; -5; 3). Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

6. Точки A(–1; 2; 3), B(1; 1; 1) и C(0; 0; 5) являются вершинами треугольника ABC. Найти внутренний угол треугольника при вершине A.

7. Каким должно быть число α, чтобы вектора $\vec{a} = (\alpha;2;5)$ и $\vec{b} = (-3;\alpha;2)$ были перпендикулярны?

8. Методами векторной алгебры доказать, что в параллелограмме сумма квадратов его сторон равна сумме квадратов диагоналей.

Ответы. 1.*69*. **2**. $\sqrt{7}$. **3**. $\frac{1}{14}$. **4.** $-\frac{42}{\sqrt{35}}$. **6**. $\frac{\pi}{2}$. **7**.*10*

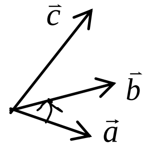
Практическое занятие 6. Векторное произведение двух векторов. Смешанное произведение трёх векторов. Применение

произведений в геометрии.

• Векторным произведением $\vec{a} \times \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку, т.е. если смотреть с конца результирующего вектора $\vec{c}$, то кратчайшего поворота от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден против часовой стрелки;



3) $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, где $\varphi = \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$. (6.1)

• Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то их векторное произведение может быть вычислено по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (6.2)$$

• Геометрический смысл векторного произведения: модуль векторного произведения равняется площади параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е.

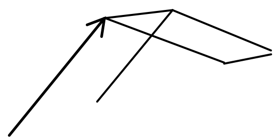
$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| \qquad (6.3)$$

Условие параллельности двух векторов двух векторов: $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

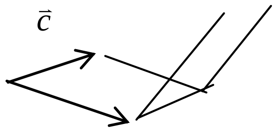
• Смешанным произведением трёх векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, равное векторному произведению $\vec{a} \times \vec{b}$, умноженному скалярно на вектор $\vec{c}$, то есть $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

• Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то их смешанное произведение может быть вычислено по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (6.4)$$



• Геометрический смысл векторного произведения: модуль смешанного произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ численно равняется объёму параллелепипеда, построенного на приведённых к общему началу векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$,



то есть $\quad V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$. (6.5)

• Условие компланарности векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ (6.6)

Примеры решения задач.

Пример 1 . На векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведённых к общему началу, как на сторонах, построен параллелограмм. Найти площадь параллелограмма, если $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 10$, $|\vec{q}| = 1$, а угол φ между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/6$. **Решение.** Площадь параллелограмма, согласно формуле (6.3): $S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$. Найдём вначале векторное произведение векторов: $\vec{a} \times \vec{b} =$
$= (3\vec{p} - \vec{q}) \times (5\vec{p} + \vec{q}) = 3\vec{p} \times \vec{p} + 3\vec{p} \times \vec{q} - 5\vec{q} \times \vec{p} - \vec{q} \times \vec{q} =$
$= 3\vec{p} \times \vec{q} + 5\vec{p} \times \vec{q} = 8\vec{p} \times \vec{q}$. $\left|\vec{p} \times \vec{q}\right| = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin\varphi$;

$\left|\vec{p} \times \vec{q}\right| = 10 \cdot 1 \cdot \sin\dfrac{\pi}{6} = 5$. Площадь параллелограмма:

$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 8\left|\vec{p} \times \vec{q}\right| = 8 \cdot 5 = 40$.

Пример 2.Найти площадь треугольника с вершинами $A(3;0;-1)$, $B(2;2;1)$, $C(1;1;-2)$ и длину высоты,которая опущена из вершины А.

Решение. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$, согласно (6.4) . Т. к $\overrightarrow{BA} = (3-2;0-2;-1-1) = (1;-2;-2)$, $\overrightarrow{BC} = (1-2;1-2;-2-1) = (-1;-1;-3)$,

то $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Отсюда $\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(4)^2+(5)^2+(-3)^2}=5\sqrt{2}$ и следовательно $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{5\sqrt{2}}{2}$. Найдём $\left|\overrightarrow{BC}\right|$:

$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{11}$. Поскольку площадь треугольника можно найти по формуле $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot h$, где h - это высота, опущенная из вершины A, то

$$h=\frac{2\cdot S_{\Delta ABC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{2\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{11}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{11}}=\frac{5\sqrt{22}}{11}.$$

Пример 3 . Даны точки $A(3;2;-1)$, $B(2;-3;1)$, $C(1;0;-2)$, $D(1;1;-1)$. Проверить, принадлежат ли эти точки одной плоскости.

Решение. Если точки A,B,C,D принадлежат одной плоскости, то векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарны, а согласно формуле (6.9), определитель составленный из координат векторов обращается в ноль. $\overrightarrow{AB}=(2-3;-3-2;1+1)=(-1;-5;2)$,

$\overrightarrow{AC}=(1-3;0-2;-2+1)=(-2;-2;-1)$, $\overrightarrow{AD}=(1-3;1-2;-1+1)=(-2;-1;0)$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-1 & -5 & 2\\ -2 & -2 & -1\\ -2 & -1 & 0\end{vmatrix}=-13\neq 0$$

Векторы не компланарны, а значит эти точки не лежат в одной плоскости.

Пример 4. Найти объём тетраэдра с вершинами в точках $A(1;1;-1)$, $B(2;-3;1)$, $C(1;2;-2)$, $D(2;1;-1)$. **Решение.**Рассмотрим векторы :

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(2-1;-3-1;1+1)=(1;-4;2)$,

$\vec{b}=\overrightarrow{AC}=(1-1;2-1;-2+1)=(0;1;-1)$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}=(2-1;1-1;-1+1)=(1;0;0)$.

Согласно формуле (6.8) объём тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равняется $V=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$:

$$V=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}.$$

Задания для аудиторной и самостоятельной работы.

1.Найти векторное произведение векторов $\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$, где $\vec{a}=(-2;1;3),\ \vec{b}=(3;1;1)$.

2. Задан треугольник с вершинами A(1; -1; 2), B(5; -6; 2),C(1; 3; -1). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

3.На векторах $\vec{a}=(-4;5;3),\ \vec{b}=(3;-1;1)$, отложенных из одной точки, построен треугольник. Найти площадь этого треугольника.

4. Доказать, что точки A(1; 2; -1), B(0; 1; 5), C(-1; 2; 1), D(2; 1; 3) лежат в одной плоскости.

5. Найти значение α , при котором векторы $\vec{a}=(2\alpha-1;5-4\alpha;3\alpha),\ \vec{b}=(2;5;4),\ \ \vec{c}=(1;-3;2)$ компланарны.

6. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках A(2; -1; 1), B(5; 5; 4), C(3; 2; -1), D(4; 1; 3).

7. На векторах $\overrightarrow{AB}=(4;3;0),\ \ \overrightarrow{AC}=(2;1;2),\ \ \overrightarrow{AD}=(2;-2;5)$, как на сторонах построен параллелепипед. Найти: 1) объем параллелепипеда; 2) высоту параллелепипеда, проведенную из точки B.

Ответы. 1. $(-8;44;-20)$. **2.** *5*. **3.** $\sqrt{354}$ /2; **5**. *2*. **6**. *3*. **7.**1) *18*; 2) $\dfrac{18}{\sqrt{153}}$.

Практическое занятие 7. Прямая на плоскости. Общее уравнение прямой. Каноническое и параметрические уравнения. Уравнение прямой, которая проходит через две точки. Уравнение прямой в отрезках. Пусть $M_0(x_0,y_0)$ – точка на прямой, $\vec{n}=(A;B)$ – нормальный вектор, $\vec{s}=(l;m)$ – направляющий вектор, t – параметр.

- Общее уравнение прямой: $$Ax+By+C=0. \quad (7.1)$$
- Уравнение прямой $$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \quad (7.2)$$
- Каноническое уранение прямой $$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}. \quad (7.3)$$

- Параметрические уравнения прямой

$$x = x_0 + lt, \qquad y = y_0 + mt. \qquad (7.4)$$

- Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (7.5)$$

- Уравнение прямой в отрезках на осях $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. (7.6)

Примеры решения задач.

Пример 1. В треугольнике, заданном вершинами $A(2;1)$, $B(-3;2)$, $C(-5;4)$, найти: 1) параметрические уравнения медианы AM; 2)уравнение высоты BH; 3) записать уравнение высоты BH в отрезках. **Решение.** 1) Точка M – середина стороны BC, тогда $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-3-5}{2} = -4$; $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$. Таким образом, координаты точки *M* таковы: $M(-4;3)$. Используя уравнение (7.5) прямой, которая проходит через две данные точки *A* и *M*, запишем: $\frac{x-2}{-4-2} = \frac{y-1}{3-1}$, откуда $\frac{x-2}{-6} = \frac{y-1}{2}$ – каноническое уравнение медианы *AM*. Параметрические уравнения легко найти, использовав формулы (7.4): $x = 2 - 6t$, $y = 1 + 2t$.

2) Для того, чтобы найти уравнение высоты *BH*, сначала составим уравнение стороны AC: $\frac{x-2}{-5-2} = \frac{y-1}{4-1}$, откуда $\frac{x-2}{-7} = \frac{y-1}{3}$. Из этого уравнения имеем координаты направляющего вектора $\bar{s} = (-7;3)$. Известно, что высота треугольника перпендикулярна к основанию, на которое она падает. То есть, в данном случае $BN \perp AC$. Из этого следует, что направляющий вектор стороны AC коллинеарен с нормальным вектором высоты *BH*, то есть, можно записать $\bar{s}_{AC} = \bar{n}_{BN} = (-7;3)$. Используя уравнение (7.2), получим $-7(x-(-3)) + 3(y-2) = 0$. После упрощения получим общее уравнение высоты *BH:* $7x - 3y + 27 = 0$.

3) Перенесем свободный член общего уравнения высоты BH в правую часть и разделим обе части на (-27). Имеем $\frac{7x}{-27}-\frac{3y}{-27}=1$. Полученное уравнение перепишем в виде $\frac{x}{-27/7}-\frac{y}{-27/3}=1$, которое и есть уравнением прямой в отрезках. Здесь $a=-27/7,\ \ b=-27/3=-9$.

Пример 2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(2,-3) и точку пересечения прямых $2x-y-5=0$ и $x+y-1=0$.

Решение. Во-первых, находим точку пересечения двух прямых, как решение системы двух уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$. Воспользовавшись уравнением (7.5), запишем $\frac{x-2}{2-2}=\frac{y-(-3)}{-1-(-3)}$. Отсюда $\frac{x-2}{0}=\frac{y+3}{2}$. Не воспринимаем запись в левой части полученного уравнения, как деление на ноль. Геометрически это значит, что прямая имеет направляющий вектор с координатами $\bar{s}=(0;2)$, а значит, параллельна оси Ox.

Пример 3. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $3x+2y-7=0$, $2x-3y+5=0$ и одна из его вершин $A(2;-3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

Решение. Обозначим первую данную в условии сторону прямоугольника l_1, вторую l_2. Подставив координаты точки A в уравнения прямых, проверяем, что эта точка не лежит ни на одной из данных прямых. То есть, $3\cdot 2+2\cdot(-3)-7=-7\neq 0$, $2\cdot 2-3\cdot(-3)+5=18\neq 0$. Поскольку в условии дано общее уравнение прямой l_1, то нам известен ее нормальный вектор $\bar{n}_{l_1}=(3;2)$. Одна из искомых сторон (обозначим ее l_3) проходит через точку A и параллельна стороне l_1, а значит, их нормальные векторы коллинеарны, то есть можно использовать уравнение (7.2): $3(x-2)+2(y+3)=0$. Отсюда $3x+2y=0$.

Другая из искомых сторон (обозначим ее l_4) параллельна стороне l_2, и ее уравнение может быть найдено аналогично изложенному выше методу. С другой стороны l_4 перпендикулярна l_1. Тогда нормальный вектор прямой l_1 можно рассматривать как направляющий вектор прямой l_4: $\bar{s}_{l_4}=(3;2)$. Тогда исходя из уравнения (7.3), получим: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{2}$. Отсюда $2x-3y-13=0$.

Пример 4. Через точку $Q(5;2)$ провести прямую: 1) отсекающую равные отрезки на осях координат; 2) параллельную оси *Ox*.
Решение. 1) Воспользуемся уравнением прямой в отрезках (7.6). Поскольку отсекаемые отрезки должны быть равны, и известно, что точка Q лежит на искомой прямой, получим уравнение с одним неизвестным: $\dfrac{5}{a}+\dfrac{2}{a}=1 \quad x+y-7=0 \Rightarrow a=7$. Значит, уравнение искомой прямой $\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{7}=1$.

2) Параллельные прямые имеют коллинеарные направляющие вектора. Направляющий вектор оси *Ox*: $\bar{s}=(1;0)$. Таким образом, используя каноническое уравнение прямой (7.3), имеем $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-2}{0}$. Отсюда $y=2$.

Замечание. Везде в задачах под уравнением сторон имеются в виду уравнения прямых, на которых лежат стороны.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы.

1. Определить, какие из точек $A(3;1)$, $B(2;3)$, *C(-3;-3), D(-2;1), E(6;3)* лежат на прямой $2x-3y-3=0$ и какие не лежат на ней.

2. Стороны треугольника ABC даны уравнениями $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Определить координаты его вершин.

3. Заданы уравнение прямой $y-2x-1=0$ и координаты точки $A\left(-1;2\right)$. Написать уравнения прямой, проходящей через точку *A*: 1) параллельно заданной прямой; 2) перпендикулярно заданной прямой.

4. Найти проекцию точки $P(-8,12)$ на прямую, которая проходит через точки $A(2,-3)$ и $B(-5,1)$.

5. Через точку пересечения прямых $6x-4y+5=0$, $2x+5y+8=0$ провести прямую, параллельную оси абсцисс.

6. Даны вершины треугольника $A(2;1)$, $B(-2;-3)$, $C(6;-1)$. Составить уравнения его высот.

7. Стороны треугольника даны уравнениями $4x-y-7=0$, $x+3y-31=0$, $x+5y-7=0$. Определить точку пересечения его высот.

Ответы. 1. *A, C, E* лежат, *B, D* – нет. **2.** *(-1;3), (2;-1), (2;4).* **3.** 1) *2x-y+4=0, x+2y-3=0.* **4.** *(-12;5).* **5.** *2x+3=0.* **6.** *2x-y+1=0, x+y-5=0, 4x+y-9=0.* **7.** *(4;9).*

Практическое занятие 8. Прямая на плоскости. Прямая с угловым коэффициентом. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки к прямой

- Уравнение прямой с угловым коэффициентом $k=\operatorname{tg}\alpha$:

$$y=kx+b. \tag{8.1}$$

- Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ с коэффициентом *k:*

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{8.2}$$

Из уравнения (7.1) можно найти $k=-A/B$.

Взаимное размещение прямых на плоскости

- Если прямые на плоскости заданы: $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}$,

то угол φ между ними: $cos\varphi=\dfrac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$.

Условие параллельности $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$.

Условие перпендикулярности $l_1l_2+m_1m_2=0$.

- Если прямые на плоскости заданы: $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то угол φ между ними: $cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

Условие параллельности $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$.

Условие перпендикулярности $A_1A_2+B_1B_2=0$

- Если прямые на плоскости заданы уравнениями: $y=k_1x+b_1$ и

$y = k_2 x + b_2$, то угол φ между ними: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

Условие параллельности $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности $k_2 = -1/k_1$ или $(1 + k_1 k_2 = 0)$.

- Нормальное уравнение: $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$. (8.3)
- Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ к прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (8.4)$$

Примеры решения задач.

Пример 1. Дано общее уравнение прямой $5x + 3y - 4 = 0$. Написать: а) уравнение с угловым коэффициентом; б) нормальное уравнение.

Решение. а) Разрешив данное общее уравнение относительно *y*, получаем уравнение прямой с угловым коэффициентом: $3y = -5x + 4 \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$. Здесь, согласно (8.1), угловой коэффициент прямой $k = -5/3$, $b = 4/3$ – отрезок, отсекаемый прямой на *Oy*.

б) Находим нормирующий множитель $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5^2 + 3^2}} =$ $= 1/\sqrt{34}$. Берем μ со знаком "+", поскольку свободный член общего уравнения $C = -4$ отрицательный. Умножив обе части общего уравнения на этот множитель, получим нормальное уравнение $\dfrac{5}{\sqrt{34}}x + \dfrac{3}{\sqrt{34}} - \dfrac{4}{\sqrt{34}} = 0$. Здесь, согласно (8.3), $\cos\varphi = 5/\sqrt{34}$, $\sin\varphi = 3/\sqrt{34}$, $p = 4/\sqrt{34}$.

Пример 2. Какие из двух прямых параллельные, перпендикулярные, совпадают либо пересекаются? Если прямые пересекаются, найти угол между ними.

а) $3x - y + 5 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$; б) $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$

в) $3x + 5y - 4 = 0$, $6x + 10y + 7 = 0$; г) $3x + 5y - 4 = 0$, $6x + 10y - 8 = 0$. **Решение.** а) Прямые заданы общими уравнениями. Подставим коэффициенты в условие параллельности:

$\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{3}$. Отсюда вывод, что прямые не параллельны. Теперь подставим коэффициенты в условие перпендикулярности: $3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 0$. Таким образом, прямые перпендикулярны.

б) Аналогично, проверяем условие параллельности $\frac{5}{3} \neq \frac{3}{2}$. Значит, прямые пересекаются, и угол между ними находится, как угол между их нормальными векторами. То есть, $cos\varphi = \frac{5 \cdot 3 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{13}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi/4$. в) Проверяем условие параллельности $\frac{3}{6} = \frac{5}{10} \neq \frac{-4}{7}$. Отсюда, прямые параллельны. г) Для этого случая имеем $\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{-4}{-8}$. Таким образом, прямые совпадают.

Пример 3. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A(4, -1)* под углом 45^o к данной прямой. **Решение.** Обозначим данную прямую l_1, а искомую l_2. После преобразований уравнение прямой l_1 имеет вид $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$, из которого легко увидеть, что $k_1 = -2/3$ – ее угловой коэффициент. Найдем угловой коэффициент k_2 прямой l_2 по формуле $\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, где φ – угол между прямими, в данном случае $\varphi = 45^o$. После подстановки φ и k_1 получим уравнение с одной неизвестной $\mathrm{tg}\,45^o = \frac{k_2 - (-2/3)}{1 + (-2/3)k_2} \quad \Rightarrow k_2 = 1/5$. Воспользовавшись формулой (8.2), запишем уравнение прямой, проходящей через данню точку с данням угловым коэффициентом: $y - (-1) = \frac{1}{5}(x - 4)$ $\Rightarrow x - 2y - 25 = 0$ – уравнение искомой прямой l_2. С другой стороны, существует еще одна прямая, образовывающая угол 45^o к данной прямой и проходящая через точку *A(4, -1)* (обозначим ее

l_3). В то же время, прямая l_3 перпендикулярна к l_2. Из условия перпендикулярности получим $k_3 = -1/k_2 = -5$. Согласно (8.2) имеем уравнение прямой l_3: $y-(-1)=5(x-4) \Rightarrow 5x-y-21=0$.

Пример 4. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x-4y-10=0$ и $6x-8y+5=0$. **Решение.** Расстояние между параллельными прямыми можно найти как расстояние от любой точки, лежащей на одной из этих прямых, к другой прямой. Обозначим данные прямые l_1 и l_2 соответственно. Выберем любую точку, лежащую на прямой l_1. Для этого зафиксируем любое значение координаты *x*, например, $x=2$. Подставим это значение в уравнение прямой l_1: $3\cdot 2-4y-10=0$, отсюда найдем координату $y=-1$. Имеем точку $M(2;-1)$, лежащую на l_1. Согласно формуле (8.4) расстояние от точки *M* к прямой l_2:

$$d=\frac{\left|6\cdot 2+(-8)\cdot(-1)+5\right|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{25}{\sqrt{100}}=2{,}5.$$

Задания для аудиторной и самостоятельной работы.

1. Найти угловой коэффициент *k* и отрезок *b*, который отсекает прямая на оси *Oy*, если она задана уравнениями: *а*) $2x+3y-6=0$, б) $3x-4y-12=0$, в) $y-3=0$.

2. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку *M(0;1)* под углом 45° к заданной прямой $x+y+1=0$.

3. Определить угол между двумя прямыми:

а) $x-2y-4=0$, $2x-7y+1=0$; б) $y=2x-3$, $y=-7x+2$;

в) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}$, $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-1}{-2}$.

4. Установить, какие из следующих пар прямых перпендикулярны, параллельны, совпадают:

а) $7x-2y+1=0$, $-14x+4y-15=0$; б) $6x-15y+7=0$, $10x+4y-3=0$; в) $2x+y-7=0$, $4x+2y-14=0$.

5. Вычислить расстояние между параллельными прямыми:

а) $5x-12y+4=0$, $10x-24y-11=0$; б) $4x-3y+15=0$, $8x-6y+25=0$.

6. Привести общее уравнение прямой к нормальному в каждом из случаев: а) $12x-5y+13=0$; б) $5x-2y-7=0$; в) $x+3y+5=0$.

7. Даны вершины треугольника: *A(-8; -3), B(0;3), C(2;1).* Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины *B* на медиану, проведенную из вершины *C*.

Ответы. 1. а) *k=-2/3, b=2; б) k=3/4, b=-4; в) k=0, b=3.* **2.** *y-1=0.* **3.** а)*arccos(*$16/\sqrt{265}$*); б) arccos(9/13); в) arccos(*$7/\sqrt{65}$*).* **4.** а) параллельны; б) перпендикулярны; в) совпадают. **5.** а) *83/26;* б) *1/2.* **6.** а) $-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-1=0$; б) $\frac{5}{\sqrt{29}}x+\frac{2}{\sqrt{29}}y-\frac{7}{\sqrt{29}}=0$;

в) $-\frac{1}{\sqrt{10}}x-\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{5}{\sqrt{10}}=0$. **7.** $14/\sqrt{37}$.

Практическое занятие 9. Плоскость в пространстве. Способы задания плоскости. Виды уравнений плоскости

Пусть $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка на плоскости, $\vec{n}=(A;B;C)$ – нормальный вектор.

- Общее уравнение плоскости: $Ax+By+Cz+D=0$.(9.1)
- Уравнение плоскости: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. (9.2)
- Уравнение плоскости, которая проходит через три данные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (9.3)$$

- Уравнение плоскости в отрезках на осях $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. (9.4)
- Нормальное уравнение плоскости:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \qquad (9.5)$$

- Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ равна $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. (9.6)

Примеры решения задач.

Пример 1. Найти длину высоты BB_1 треугольной пирамиды, заданной вершинами $A(1;-2;2)$, $B(2;-3;-6)$, $C(5;1;4)$ и $D(0;-4;4)$. **Решение.** Длина высоты BB_1 треугольной пирамиды *ABCD* – это расстояние от точки *B* до плоскости *ACD*, проходящей через три заданные точки *A*, *C* и *D*. Запишем уравнение плоскости в виде (9.3): $\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-2 \\ 5-1 & 1+2 & 4-2 \\ 0-1 & -4+2 & 4-2 \end{vmatrix}=0$. Раскрыв этот определитель, найдем общее уравнение плоскости *ACD*: $2x-2y-z-4=0$. Тогда согласно формуле (9.6), имеем

$$|BB_1|=\frac{|2\cdot 2-2(-3)-(-6)-4|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{12}{\sqrt{9}}=4.$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к оси *Oy* и проходящей через точку *A(2;-1;3)*. **Решение.** Плоскость, перпендикулярная к оси *Oy*, есть параллельной к координатной плоскости *Oxz* и ее уравнение имеет вид *By+D=0* (*). Подставляя в это уравнение координаты точки *A*, получим $B\cdot(-1)+D=0 \Rightarrow D=B$. Подставив полученный результат в уравнение (*), получим *By+B=0* $\Rightarrow B(y+1)=0$. Таким образом, $y+1=0$ – уравнение искомой плоскости.

Пример 3. Привести уравнение плоскости $6x-3y-2z+14=0$ к: а)нормальному виду; б) уравнению в отрезках на осях. **Решение.** а) Находим нормирующий множитель

$\mu=-\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}= \;=-\dfrac{1}{\sqrt{6^2+(-3)^2+(-2)^2}}=-\dfrac{1}{7}$. Знак ”-”, потому что свободный член $D=15>0$. Таким образом, нормальное уравнение заданной плоскости имеет вид $-\dfrac{6}{7}x+\dfrac{3}{7}y+\dfrac{2}{7}z-2=0$.

б) Записав заданное уравнение в виде $6x-3y-2z=-14$ и разделив его на *(-14)*, получим уравнение в отрезках на осях: $\dfrac{x}{-14/6}+\dfrac{y}{14/3}+\dfrac{z}{14/2}=1$.

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-3;1)$ паралельно двум векторам $\overline{a}_1=(0;2;-1)$, $\overline{a}_2=(-3;1;4)$. **Решение.** Поскольку искомая плоскость параллельна данным векторам, то нормальный вектор искомой плоскости есть перпендикулярным к этим векторам. В свою очередь, векторное произведение двух векторов есть вектор, перпендикулярный к векторам-сомножителям. Поэтому за нормальный вектор можно взять векторное произведение векторов $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$, то есть

$\overline{n}=\overline{a}_1 x \overline{a}_2=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}=9\overline{i}+3\overline{j}+6\overline{k}$. Используя уравнение (9.2), получим $9(x-2)+3(y-(-3))+6(z-1)=0 \Rightarrow 3x+y+2z-4=0$.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы.

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $\overline{n}=(4;-3;1)$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-5;2;-3)$ параллельно двум векторам $\overline{a}_1=(-2;-1;-3)$, $\overline{a}_2=(3;0;-4)$.

3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через три заданные точки $M_1(1;2;0)$, $M_2(2;1;1)$, $M_3(3;0;1)$.

4. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(-3;-2;1)$ параллельно плоскости *Oxy*.

5. Дано уравнение плоскости $3x-4y+z-12=0$. Привести данное уравнение к уравнению в отрезках и нормальному виду.

6. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к оси *Ox* и проходящей через точку *A(-4;3;1).*

7. Найти расстояние от точки $M(1;0;2)$ до плоскости, которая отсекает на координатных осях отрезки $a=1$, $b=5$ и $c=4$.

Ответы. 1. *4x-3y+z=0.* **2.** *4x-y+3z+31=0.* **3.** *x+y-3=0.* **4.** *z-1=0.* **5.** $\frac{3}{\sqrt{26}}x-\frac{4}{\sqrt{26}}y+\frac{1}{\sqrt{26}}z-\frac{12}{\sqrt{26}}=0$. **6.** *x+4=0.* **7.** *10/21.*

Практическое занятие 10. Прямая в пространстве

- Канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (10.1)$$

- Параметрические уравнения прямой:

$$x=x_0+lt,\ \ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt. \qquad (10.2)$$

- Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1,y_1;z_1)$, $M_2(x_2,y_2;z_2)$: $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (10.3)$$

- Общее уравнение прямой в пространстве:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}. \qquad (10.4)$$

Примеры решения задач.

Пример 1. Написать канонические и параметрические уравнение прямой, которая проходит через две заданные точки $M_1(3;0;-4)$, $M_1(-1;2;-5)$. **Решение.** Воспользовавшись уравнением (10.3), получим $\frac{x-3}{-1-3}=\frac{y-0}{2-0}=\frac{z-(-4)}{-5-(-4)}\Rightarrow\frac{x-3}{-4}=\frac{y}{2}=\frac{z+4}{-1}$ – канонические уравнения прямой, где $\vec{s}=(-4;2;-1)$ – направляючий вектор прямой. Воспользовавшись уравнениями (10.2), напишем параметрические уравнения: *x=3-4t, y=2t, z=-4-t.*

Пример 2. Привести к каноническому виду общие уравнение прямой $\begin{cases}x-2y+3z+15=0\\ 2x+3y-4z-12=0\end{cases}$. **Решение.** Так как направляющий вектор прямой $\bar{s}$ должен быть перпендикулярным к нормальным векторам заданных плоскостей $\bar{n}_1=(1;-2;3)$, $\bar{n}_2=(2;3;-4)$ соответственно, то $\bar{s}=\bar{n}_1x\bar{n}_2=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -4\end{vmatrix}=-\bar{i}+10\bar{j}+7\bar{k}$. Таким образом, направля-ющий вектор прямой $\bar{s}=(-1;10;7)$. Необходимо еще найти точку, лежащую на данной прямой. Зафиксируем одну из координат, например $z_0=0$, и подставим ее значение в общее уравнение прямой. Тогда x_0, y_0 можно найти из системы

$\begin{cases} x_0 - 2y_0 + 15 = 0 \\ 2x_0 + 3y_0 - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 6 \end{cases}$. Итак, имеем точку (-3;6;0), через которую проходит данная прямая. Таким образом, канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-6}{10} = \frac{z}{7}$.

Пример 3. Составить уравнения прямой, проведенной через точку $M(2;-1;-4)$ перпендикулярно к двум данным прямым: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+2}{-2}$ и $\frac{x}{-1} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-1}{2}$. **Решение.** Обозначим направляющие векторы заданных прямых $\bar{s}_1 = (3;1;-2)$ и $\bar{s}_2 = (-1;-4;2)$ соответственно. Направляющий вектор искомой прямой перпендикулярен к направляющим векторам $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$, поэтому его можно найти, как векторное произведение:

$$\bar{s} = \bar{s}_1 x \bar{s}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -6\bar{i} - 4\bar{j} - 11\bar{k}.$$

Согласно (10.2) имеем результат: $\frac{x-2}{-6} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+4}{-11}$.

Пример 4. Найти расстояние от точки $M(2;-1;3)$ до прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{5}$. **Решение.** Возьмем точку $N(-1;-2;1)$ на заданной прямой (координаты берем непосредственно из заданных канонических уравнений); $\bar{s} = (3;4;5)$ – направляющий вектор прямой. Тогда искомое расстояние $d = \left|\overline{NM}\right| \sin(\bar{s} \wedge \overline{NM}) =$ $= \frac{\left|\overline{NM}\right| \left|\bar{s} x \overline{NM}\right|}{|\bar{s}|} = \frac{\left|\bar{s} x \overline{NM}\right|}{|\bar{s}|}$. Найдем вектор $\overline{NM} = (3;1;2)$, а также векторное произведение $\bar{s} x \overline{NM} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\bar{i} + 9\bar{j} - 9\bar{k}$, и его модуль $\left|\bar{s} x \overline{NM}\right| = \sqrt{3^2 + 9^2 + (-9)^2} = \sqrt{171}$. Модуль направляющего вектора $|\bar{s}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50}$. Тогда $d = \sqrt{171} / \sqrt{50}$.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы.

1. Найти точки пересечения прямой $\begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0 \\ x + y - 4z - 5 = 0 \end{cases}$ с координатними плоскостями.

2. Составить канонические уравнения прямой, если:

а) $\begin{cases} 2x + y + 3z + 1 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x - y - z + 2 = 0 \\ 2x - 4y + z + 1 = 0 \end{cases}$.

3. Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через две заданные точки: а) $M_1 = (-1;2;-4)$, $M_2 = (7;0;2)$; б) $M_1 = (5;3;8)$, $M_2 = (-1;-2;-3)$.

4. Привести к каноническому виду уравнения прямых: а) *x=4t+1; y=-5t+2; z=t-1;* б) *x=-3t+5; y=2t+1; z=-4t.*

5. Даны вершины треугольника $A(2;3;2)$, $B(2;-1;5)$, $C(0;-3;-6)$. Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины *B*.

6. Составить уравнения прямой, проведенной через точку $M(-8;3;-5)$ перпендикулярно к двум данным прямым: $\frac{x+2}{-2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-3}{1}$ и $\frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

7. Найти расстояние от точки $M(0;5;-2)$ до прямой $\frac{x-2}{6} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{1}$.

Ответы. 1. *(1/3;14/3;0), (-1/11;0;-14/11), (0;1;-1).* **2.** а) $\frac{x+6}{-11} = \frac{y-11}{19} = \frac{z}{1}$; б) $\frac{x}{3} = \frac{y-1/3}{-3} = \frac{z+5/3}{-18}$. **3.** а) $\frac{x+1}{8} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+4}{6}$; б) $\frac{x+1}{6} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+3}{11}$. **4.** а) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+1}{1}$; б) $\frac{x-5}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-4}$. **5.** *x=-t+2; y=t-1; z=-7t+5.* **6.** $\frac{x+8}{-7} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+5}{-14}$. **7.** $\frac{6\sqrt{21}}{\sqrt{62}}$.

Практическое занятие 11. Плоскость и прямая в пространстве. Взаимное размещение прямой и плоскости. Угол между

плоскостями, прямыми, плоскостью и прямой. Условия параллельности и перпендикулярности

- Угол $\varphi \left(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \right)$ между двумя плоскостями

$\alpha_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\alpha_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$:

$$cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2} + C_1^{\,2}}\sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2} + C_2^{\,2}}}. \qquad (11.1)$$

Условие параллельности плоскостей: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности плоскостей: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

- Угол φ между двумя прямыми в пространстве

$l_1:\ \dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$ и $l_2:\ \dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$:

$$cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^{\,2} + m_1^{\,2} + n_1^{\,2}}\sqrt{l_2^{\,2} + m_2^{\,2} + n_2^{\,2}}}. \qquad (11.2)$$

Условие параллельности прямых: $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$.

Условие перпендикулярности прямых: $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$.

- Угол φ между прямой и плоскостью определяется таким образом

$$sin\varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (11.3)$$

Условие параллельности прямой и плоскости: $Al + Bm + Cn = 0$.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости: $\dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$.

Примеры решения задач.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;2;3)$ параллельно плоскости $3x - 5y - z + 12 = 0$.

Решение. Обозначим данную плоскость Π_1, а ее нормальный вектор $\bar{n}_1 = (3;-5;-1)$. Поскольку искомая плоскость Π_2 параллельна плоскости Π_1, то их нормальные вектора коллинеарны, а значит можно принять $\bar{n}_2 = \bar{n}_1 = (3;-5;-1)$.

Использовав уравнение (9.2), получаем
$3(x-(-1))+(-5)(y-2)+(-1)(z-3)=0 \Rightarrow 3x-5y-z+16=0$.

Пример 2. Определить взаимное расположение заданных плоскостей и определить косинус угла между ними, если: а) $3x-5y-2z-6=0$, $6x-10y-4z-12=0$; б) $2x-y+2z-1=0$, $-4x-2y+6z+3=0$; в) $-3x+5y+2z+5=0$, $6x-10y-4z-12=0$; г) $6x+3y-3z=0$, $x+2y+6z-12=0$. **Решение.** а) Составим пропорцию $\frac{3}{6}=\frac{-5}{-10}=\frac{-2}{-4}=\frac{-6}{-12}$. Таким образом, плоскости совпадают, значит, косинус угла равен единице. б) Составив пропорцию $\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}\neq\frac{2}{6}$, делаем вывод, что плоскости не параллельны. Проверим условие перпендикулярности $2\cdot(-4)+(-1)\cdot(-2)+2\cdot 3=0$. Таким образом, плоскости перпендикулярны, то есть косинус угла равен нулю.

в) Имея пропорцию $\frac{-3}{6}=\frac{5}{-10}=\frac{2}{-4}\neq\frac{5}{-12}$, делаем вывод, что плоскости параллельны, то есть косинус угла между ними равен единице. г) Из пропорции $\frac{6}{1}\neq\frac{3}{2}\neq\frac{-2}{6}$ видно, что плоскости не параллельны, также условие перпендикулярности $6\cdot 1+3\cdot 2+$ $+(-3)\cdot 6\neq 0$ не выполняется. Косинус угла между плоскостями согласно (11.1) равен: $cos\varphi=\frac{6\cdot 1+3\cdot 2+(-3)\cdot 6}{\sqrt{6^2+3^2+(-3)^2}\sqrt{1^2+2^2+6^2}}=\frac{-6}{\sqrt{54}\sqrt{41}}$.

Пример 3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1;4;-5)$ и $N(4;2;-3)$ и перпендикулярной к плоскости $3x+5y-6z-8=0$. **Решение.** Обозначим данную плоскость Π_1, а ее нормальный вектор $\overline{n}_1=(3;5;-6)$. Найдем координаты вектора $\overline{MN}=(3;-2;2)$, принадлежащего плоскости Π_1. Поскольку искомая плоскость Π_2 перпендикулярна к Π_1, то нормальный вектор $\overline{n}_2$ перпендикулярный к вектору $\overline{MN}$ и нормальному вектору $\overline{n}_1$. Поэтому за $\overline{n}_2$ можно взять векторное произведение векторов $\overline{MN}$

и $\bar{n}_1$, то есть $\bar{n}_2 = \overline{MN} x \bar{n}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 24\bar{j} + 21\bar{k}$. Использовав уравнение (9.2) плоскости, проходящей через заданную точку $M(1;4;-5)$ перпендикулярно к вектору $\bar{n}_2 = (2;24;21)$: $2(x-1) + 24(y-4) + 21(z+5) = 0 \;\Rightarrow\; 2x + 24y + 21z + 7 = 0$. Причем, вместо точки M можно взять также точку N.

Пример 4. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{4}$ и плоскости $3x + 2y - z + 5 = 0$. **Решение.** Запишем параметрические уравнения прямой. Введем параметр $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{4} = t$. Тогда $x = 2t + 1$, $y = 3t + 2$, $z = 4t - 3$. Подставив параметрические уравнения прямой в общее уравнение плоскости, получим $3(2t+1) + 2(3t+2) - (4t-3) = 0 \;\Rightarrow t = -2$. Теперь подставив значение параметра в параметрические уравнения прямой, находим координаты точки пересечения $x = 2\cdot(-2) + 1 = -3$, $y = 3\cdot(-3) + 2 = -4$, $z = 4\cdot(-2) - 3 = -11$. Таким образом, искомая точка $M(-3;-4;-11)$.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы.

1. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости, либо перпендикулярные, в противном случае определить двугранный угол, образованный пересечением данных плоскостей: а) $4x - 6y + 10z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 2 = 0$; б) $2x - 5y - z = 0$, $x + 2z - 3 = 0$; в) $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $16x + 12y - 15z - 1 = 0$; г) $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$.

2. Составить уравнение плоскости, котарая проходит через точку $M(6;-2;0)$ параллельно плоскости $3x - 2z + 7 = 0$.

3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x - y + 5z - 3 = 0$ и $3x + 2y - 6z - 4 = 0$.

4. Доказать параллельность или перпендикулярность прямых:

а) $\dfrac{x+12}{6}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+2}{3}$, $\quad \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$;

б) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+6}{-2}=\dfrac{z-3}{3}$, $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}$;

5. Найти косинус угла между прямыми:

а) $\dfrac{x+4}{-1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-1}{-2}$, $\quad \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-2}{1}$;

б) $x=-3t-2,\ y=t-2,\ z=4t+2$, $x=-2t+3,\ y=2t+2,\ z=t+1$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;1;-6)$ перпендикулярно к плоскости $3x-4y+z-1=0$.

7. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{2}$ и плоскости $x+2y-2z+6=0$.

Ответы. 1. а), е) – параллельные, б), г) – перпендикулярные, в) *arccos2/15.* **2.** *3x-2z-18=0.* **3.** *2x-15y-5z=0.* **4.** а) – параллельные, б)– перпендикулярные. **5.**а)$arccos(-11/\sqrt{105})$, б)$arccos\, 4/\sqrt{26}$. **6.** $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+6}{1}$.

7. $(-1;1/2;2)$.

Практическое занятие 12. Кривые второго порядка. Окружность, эллипс. Их свойства, канонические уравнения.

- Уравнение окружности радиуса *R* с центром в точке $C(x_0;y_0)$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \qquad (12.1)$$

- Уравнение эллипса с центром в точке $C(x_0;y_0)$ и полуосями *a* и *b*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \qquad (12.2)$$

Примеры решения задач.

Пример 1. Составить уравнение окружности, которое проходит через точки $A(3;1)$, $B(-1;3)$, а центр принадлежит прямой $3x-y-2=0$. **Решение.** Используем уравнение (12.1). Поскольку точки *A* и *B* лежат на искомой окружности, то координаты этих точек будут удовлетворять уравнениям: $(3-x_0)^2+(1-y_0)^2=R^2$, $(-1-x_0)^2+(3-y_0)^2=R^2$, поскольку центр лежит на данной прямой, то справедливо уравнение $3x_0 - y_0 - 2 = 0$. Получим систему уравнений: $\begin{cases} (3-x_0)^2 + (1-y_0)^2 = R^2 \\ (-1-x_0)^2 + (3-y_0)^2 = R^2 \\ 3x_0 - y_0 - 2 = 0 \end{cases}$. Раскрыв скобки и отняв от первого уравнения второе, получим систему $\begin{cases} -8x_0 + 4y_0 = 0 \\ 3x_0 - y_0 - 2 = 0 \end{cases}$, решение которой $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 4 \end{cases}$. Таким образом, точка $C(2;4)$ – центр окружности. Радиус найдем или подставив найденные координаты в первое либо второе уравнение системы, или как длину вектора $\left|\overline{AC}\right|$. В результате получим $R = \sqrt{10}$. Окончательно получим $(x-2)^2 + (y-4)^2 = \sqrt{10}$.

Пример 2. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $A(2;-3)$ и имеющего большую полуось $a = 4$. **Решение.** Каноническое уравнение эллипса имеет вид (12.2) с центром в точке $O(0;0)$. Подставим в него имеющиеся координаты точки *A* и полуось *a:* $\frac{2^2}{16} + \frac{(-3)^2}{b^2} = 1$. Откуда имеем $b^2 = 12$. Искомое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

Пример 3. Установить, что уравнение $3x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 29 = 0$ определяет эллипс, и найти координаты его центра *C*, полуоси, ексцентриситет и уравнения директрис.

Решение. Сгруппировав члены уравнения, получим $(3x^2 - 6x) + (4y^2 + 16y) - 29 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 4y) - 29 = 0$.

Дополним члены, содержащие *x* и члены, содержащие *y*, до полных квадратов. Получим $3(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 4y + 4) - 3 - 16 - 29 = 0$ $\Rightarrow 3(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 48$. Разделим обе части уравнения на 48 и упростим его: $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{12} = 1$. Из полученного уравнения эллипса имеем центр $C(1;-2)$, большую полуось $a = 4$, малую полуось $b = \sqrt{12}$. Существует взаимосвязь $b^2 = a^2 - c^2$, откуда

$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 12 = 4$. Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Уравнения директрис $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$. Для данного эллипса имеем $x = \pm\frac{4}{1/2} = \pm 8$.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы.

1. Составить уравнение окружности с центром в точке $C(4;-3)$ и радиус которой $R = 2$.

2. Составить уравнение окружности, которая проходит через точки $M(5;0)$ и $N(2;-4)$,а ее центр лежит на прямой $x + 6y - 4 = 0$.

3. Какие из уравнений определяют окружности? Найти центр C и радиус R каждой из них:

а) $(x-6)^2 + (y+2)^2 = 16$; б) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 0$;

в) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$; г) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 22 = 0$.

4. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично началу координат, если расстояние между его фокусами $2c = 6$, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

5. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M(-3;5)$ и имеющего малую полуось $b = 6$.

6. Доказать, что данные уравнения определяют эллипсы. Найти полуоси, фокусы, ексцентриситет, уравнения директрис каждого из них: а) $9x^2 + 25y^2 = 225$; б) $4x^2 + 9y^2 = 36$;

в) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$; г) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$.

Ответы. 1. $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 4$. **2.** $(x - 9/2)^2 + (y-2)^2 = 377/4$. **3.** а) *(6;-2), R=4;* б)точка *(3;1);* в) уравнение не определяет окружность; г)*(1;-2), R=4.* **4.** $x^2/25 + y^2/16 = 1$**. 5.** $x^2/45 + y^2/36 = 1$**. 6.** а) *a=5, b=3, ε=4/5, x=±25/4*; б) *a=3, b=2, ε=*$\sqrt{5}$*/3, x=±9/*$\sqrt{5}$; в) *a=3, b=*$\sqrt{5}$*, ε=2/3, x=-3/2, x=15/2*; г) *a=5, b=4, ε=3/5, x=-28/3, x=22/3.*

Практическое занятие 13. Гипербола, парабола. Их свойства, канонические уравнения.

- Уравнение гиперболы или сопряженной к ней с центром в точке $C(x_0; y_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1. \qquad (13.1)$$

• Уравнение парабол с вершинами в точке $C(x_0;y_0)$, симметричных относительно прямых $y=y_0$ и $x=x_0$:

$$(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0),\ (x-x_0)^2=\pm 2q(y-y_0). \qquad (13.2)$$

Примеры решения задач.

Пример 1. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояние между фокусами равно *2c*, а ексцентриситет – $12/13$. **Решение.** По условию *2c=26* $\Rightarrow$ *c=13;* $\varepsilon=12/13=c/a$ $\Rightarrow a=\dfrac{c}{\varepsilon}=\dfrac{13}{13/12}=12$. По формуле $c^2-a^2=b^2$ находим квадрат малой полуоси гиперболы $b^2=13^2-12^2=25$. Таким образом, согласно уравнению (13.1), имеем каноническое уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

Пример 2. Установить, какая линия определяется уравнением $y=-4\sqrt{x^2+2}$. **Решение.** В уравнении $y=-4\sqrt{x^2+2}$, $y<0$ для всех $x\in R$. Возведем в квадрат обе части уравнения, получим $y^2=16(x^2+2)$ $\Rightarrow 16x^2-y^2=-32$. Разделим обе части уравнения на *32* : $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{32}=-1$. Получили ветвь гиперболы, расположенную в нижней полуплоскости.

Пример 3. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, и: а) парабола расположена симметрично относительно оси *Ox* и проходит через точку $A(1;-6)$; б) парабола расположена симметрично относительно оси *Oy* и проходит через точку $B(6;9)$. **Решение.** а)Так как точка *A* лежит на параболе $y^2=2px$, то ее координаты должны удовлетворять уравнению параболы, потому $(-6)^2=2p\cdot 1\Rightarrow 2p=-6$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $y^2=-6x$.

б) Так как парабола симметрична относительно оси *Oy*, то ее уравнение $x^2=2py$. Точка *B* лежит на парболе, значит, ее координаты должны удовлетворять уравнению этой параболы, то есть $6^2=2p\cdot 9\Rightarrow 2p=4$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $x^2 = 4y$.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы

1. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично началу координат, если: *а*) ее оси $2a = 16$ и $2b = 12$; *б*) расстояние между фокусами $2c = 18$ и ось $2b = 6$; *в*) расстояние между фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет $\varepsilon = 3/2$; *г*) ось $2a = 16$ и эксцентриситет $\varepsilon = 5/4$.

2. Убедиться, что уравнение $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$ является уравнением гиперболы и найти координаты ее центра, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот, уравнения директрис.

3. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, и: а) парабола расположена симметрично относительно оси *Ox* и проходит через точку $A(-2;4)$; б) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично оси *Ox*, и ее параметр $p = 5$; в) парабола расположена в верхней полуплоскости симметрично оси *Oy*, и ее параметр $p = 6$.

4. Составить уравнение параболы, если дан ее фокус $F(-7;0)$ и уравнение директрисы $x - 7 = 0$.

5. Определить вершину и параметр *p* параболы $x = 4y^2 - 8y + 7$.

6. Выяснить какие линии задаются уравнениями: а) $x = -\sqrt{4 - y^2}$;

7. б) $y = \dfrac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$; в) $y = \dfrac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25}$; г) $y = -5 + \sqrt{-3x - 21}$.

Ответы. 1. а) $x^2/64 + y^2/36 = 1$, б) $x^2/72 - y^2/9 = 1$, в) $x^2/4 - y^2/5 = 1$, г) $x^2/64 - y^2/36 = 1$ **. 2.**. *(2;1), a=4, b*=3, *ε=5/4,* асимптоты *3x-4y-2=0, 3x+4y-10=0,* директрисы *x=26/5, x=6/5.* **3.** а) $y^2 = -8x$; б) $y^2 = -10x$; в) $x^2 = 12y$. **4.** $y^2 = -28x$. 5**.** *(3;1), p=1/8.* **6.** а) часть окружности $x^2 + y^2 = 4$, расположена в левой полуплоскости; б) часть эллипса $x^2/16 + y^2/9 = 1$, расположена в верхней полуплоскости; в) ветка гиперболы $y^2/4 - x^2/25 = 1$, расположена в верхней полуплоскости; г) ветка параболы $(y+5)^2 = -3(x+7)$, расположена над осью симметрии *y=-5*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вища математика. Збірник задач. За редакцією В. П. Дубовика, І. І. Юрика, - К. Вища школа, 1999, 480 с.

2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов и втузов. В 2-х ч. Ч. I. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 304с.

3. Денисюк В. П., Репета В. К., Вища математика В 2-х ч. Ч.1, 2013, 471 с.

4. Клетеник Д.В., Сборник задач по аналитической геометри. – М.: Наука, 1986, 240с.

5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М. Наука, 1971, 431 с.

М. Государственное издательство физико-математической литературы, 1962, 332 с.

6. Моденов П. С. Аналитическая геометрия. Издательство Московского университета, 1969, 698 с.

7. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре.

8. Рябушко А. П., Бархатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е. сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Учеб. пособоие В 3-х ч. Ч.1. Мн. Высш. шк., 1991, 352 с.

9. Фадеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. М. Наука, 1972, 302 с.