МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів
технічних та економічних спеціальностей

Київ 2019

УДК

Укладачі:
І. О. Ластівка – д-р техн. наук, проф.;

В. П. Петрусенко – канд. техн. наук, доц.;

Л. О. Чуб – ст. викладач

Рецензент:

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету(протокол № _ від __________).

Вища математика. Диференціальне числення функцій однієї змінної: методичні рекомендації до самостійної роботи для студентів технічних та економічних спеціальностей / уклад. : І. О. Ластівка, В. П. Петрусенко, Л. О. Чуб. – К. : НАУ, 2019. – 52 с.

Укладено відповідно до програм курсів «Вища математика». Методичні рекомендації містять приклади розв’язання типових задач розділу «Диференціальне числення функцій однієї змінної», запитання для самоперевірки і завдання для самостійного виконання з відповідями.

Для студентів технічних та економічних спеціальностей.

ЗМІСТ

ВСТУП

Самостійна робота студента є основним способом оволодіння навчальним матеріалом протягом часу, вільного від обов'язкових аудиторних занять.

Мета виконання самостійної роботи – поглиблення, узагальнення та закріплення теоретичних знань і практичних умінь студентів з дисципліни «Вища математика» шляхом вироблення вміння самостійної роботи з навчальною літературою.

Самостійна робота студентів здійснюється у формі підготовки до лекційних і практичних занять, виконання індивідуального домашнього завдання та виконання модульної контрольної роботи. Така підготовка передбачає самостійне вивчення теоретичного матеріалу з кожної теми, що наданий у рекомендованій літературі та конспекті лекцій. При цьому важливо звернути увагу на необхідність чіткого засвоєння основних термінів та означень, розуміння їх змісту, обов'язкового аналізу використання теоретичних відомостей для розв'язування пропонованих завдань.

Мета вивчення навчальної дисципліни «Вища математика» – опанування студентами основних математичних понять і методів, необхідних для застосування теоретичного матеріалу під час моделювання і розв'язування прикладних задач.

Завдання вивчення навчальної дисципліни – розвиток логічного та алгоритмічного мислення студентів, опанування методів дослідження та розв'язування математичних задач, набуття первинних навичок математичного дослідження прикладних задач тощо.

Методичні рекомендації до самостійної роботи студентів укладено відповідно до навчальних програм курсу «Вища математика» для студентів технічних та економічних спеціальностей.

У пропонованій методичній праці наведено задачі для самостійної та індивідуальної роботи студентів. Значна кількість завдань для самостійної роботи має прикладну спрямованість.

Провідний викладач може коригувати кількість і зміст завдань, які студент повинен виконати самостійно протягом вивчення відповідного матеріалу.

Матеріал кожної теми відповідає робочим навчальним програмам дисципліни «Вища математика», зокрема одному з її розділів «Диференціальне числення функцій однієї змінної». Кожна тема містить основні методичні рекомендації, рекомендовану літературу, типові приклади з розв'язаннями та завдання для самостійного виконання, запитання для самоперевірки, що сприятиме кращому розумінню, засвоєнню та можливості застосування основних теоретичних положень.

Методичні рекомендації призначено для самостійної роботи студентів технічних та економічних спеціальностей і орієнтовано на теоретичне та методичне підтримання навчального процесу студентів.

Тема 1. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

План

1. Означення похідної. Правила диференціювання
2. Похідна складеної функції. Похідна функцій, заданих неявно або параметрично. Логарифмічне диференціювання
3. Геометричний та механічний зміст похідної

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6]; [7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 1 студент повинен ***знати:*** означення похідної, її геометричний та механічний зміст, похідні основних елементарних функцій, правила диференціювання; ***уміти:*** знаходити похідні складених функцій, заданих неявно або параметричних функцій, виконувати логарифмічне диференціювання.

Основні теоретичні відомості

Означення похідної

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Основні правила диференціювання

1. $(Cu)' = Cu',\ C = const$
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
3. $(uv)' = u'v + v'u$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2},\ v \neq 0$

Похідна складеної функції

Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$, тоді $y = f[\varphi(x)]$ – складена функція з проміжним аргументом u і кінцевим x.

$$\left(f(\varphi(x))\right)'_x = f'_\varphi \cdot \varphi'_x. \qquad (2)$$

Похідна параметрично заданої функції

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (3)$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій

1. $(C)' = 0, C = const$	**2.** $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$
3. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	**4.** $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
5. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	**6.** $\left(e^x\right)' = e^x$
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	**8.** $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
9. $(\sin x)' = \cos x$	**10.** $(\cos x)' = -\sin x$
11. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	**12.** $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**14.** $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	**16.** $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0;\, y_0)$ має вигляд:

$$.\, y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Рівняння нормалі за умови, що $f'(x) \neq 0,$ має вигляд:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $y = x^3$, користуючись означенням похідної.

Розв'язання

Згідно з формулою (1) знаходимо:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2\right)=3x^2.$$

Приклад 2. Знайдіть похідні функцій:

а) $y=3x^2-5x+1$; б) $y=3\sqrt[3]{x}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2x^2}$.

Розв'язання

Користуючись таблицею похідних та правилами знаходження похідної функції, дістанемо:

а) $y'=\left(3x^2-5x+1\right)'=\left(3x^2\right)'-(5x)'+(1)'=3\left(x^2\right)'-5(x)'+0=$
$=3\cdot 2x-5\cdot 1=6x-5.$

б) $y'=\left(3\sqrt[3]{x}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2x^2}\right)'=3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'+2\left(\dfrac{1}{x}\right)'-\dfrac{1}{2}\left(x^{-2}\right)'=$

$$=3\cdot\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}+2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(-2x^{-2-1}\right)=x^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{x^2}+x^{-3}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}.$$

Приклад 3. Знайдіть похідні функцій:

а) $y=x^2+\sin x$; б) $y=3\ln x$; в) $y=xe^x$; г) $y=\dfrac{x^2}{\operatorname{tg} x}$.

Розв'язання

Користуючись таблицею похідних та правилами диференціювання, маємо:

а) $y'=\left(x^2+\sin x\right)'=\left(x^2\right)'+(\sin x)'=2x+\cos x.$

б) $y'=(3\ln x)'=3(\ln x)'=3\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}.$

в) $y'=\left(xe^x\right)'=(x)'\cdot e^x+\left(e^x\right)'\cdot x=e^x+xe^x.$

г) $y'=\left(\dfrac{x^2}{\operatorname{tg} x}\right)'=\dfrac{\left(x^2\right)'\operatorname{tg} x-(\operatorname{tg} x)'x^2}{\operatorname{tg}^2 x}=\dfrac{2x\operatorname{tg} x-\dfrac{1}{\cos^2 x}x^2}{\operatorname{tg}^2 x}.$

Приклад 4. Знайдіть похідні складених функцій:

а) $y=\left(4+3x-2x^2\right)^5$; б) $y=\sin^3\ln 6x$; в) $y=\sqrt{e^{2x}+\cos^2 x}$;

г) $y = \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{\sin x}$.

Розв'язання

а) Позначимо $y = \left(u(x)\right)^5$, $u = 4 + 3x - 2x^2$. За правилом диференціювання складеної функції (2) маємо:

$$y' = \left(u^5\right)' = 5u^4 \cdot u' = 5\left(4 + 3x - 2x^2\right)^4 \cdot \left(4 + 3x - 2x^2\right)' =$$

$$= 5\left(4 + 3x - 2x^2\right)^4 (3 - 4x).$$

б) Маємо складену функцію: $y = u^3$, $u = \sin v$, $v = \ln w$, $w = 6x$. За правилом диференціювання складеної функції (2) дістаємо:

$$y' = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_w \cdot w'_x = 3\sin^2 \ln 6x \cdot \cos \ln 6x \cdot \frac{1}{6x} \cdot 6 = \frac{3}{x}\sin^2 \ln 6x \cos \ln 6x.$$

в) Застосовуючи таблицю похідних та правило диференціювання складеної функції, маємо:

$$y' = \left(\sqrt{e^{2x} + \cos^2 x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{e^{2x} + \cos^2 x}}\left(e^{2x} + \cos^2 x\right)' =$$

$$= \frac{2e^{2x} + 2\cos x(-\sin x)}{2\sqrt{e^{2x} + \cos^2 x}}.$$

г) Для першого доданка заданої функції використовуємо правило диференціювання складеної функції, а для другого – правило знаходження похідної частки:

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{(x)' \sin x - x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \cdot \cos^2 \dfrac{x}{2}} -$$

$$- \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x\cos x}{\sin^2 x}.$$

Приклад 5. Знайдіть похідні функцій, заданих неявно:

а) $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$; б) $\cos\dfrac{y}{x} = y^2$.

Розв'язання

а) Функція $y(x)$ задана неявно. Продиференціюємо за x обидві частини рівності, враховуючи, що y є функцією від x (для другого доданка застосуємо правило похідної добутку):

$$\left(x^2\right)' + (3x)' \cdot y + 3x \cdot (y)' + \left(y^2\right)' + (1)' = 0;$$

$$2x + 3y + 3xy' + 2yy' = 0; \qquad 3xy' + 2yy' = -2x - 3y;$$

$$y'(3x + 2y) = -2x - 3y; \qquad y' = \frac{-2x - 3y}{3x + 2y}.$$

б) Диференціюючи за x обидві частини рівності та вважаючи, що y є функцією від x, отримуємо:

$$\left(\cos\frac{y}{x}\right)' = \left(y^2\right)'; \qquad -\sin\frac{y}{x} \cdot \frac{(y)'x - (x)'y}{x^2} = 2yy';$$

$$-\sin\frac{y}{x} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = 2yy'; \qquad y\sin\frac{y}{x} - y'x\sin\frac{y}{x} = 2yx^2y';$$

$$y\sin\frac{y}{x} = y'\left(2yx^2 + x\sin\frac{y}{x}\right); \qquad y' = \frac{y\sin\frac{y}{x}}{x\left(2yx + \sin\frac{y}{x}\right)}.$$

Приклад 6. Знайдіть y'_x, якщо $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t + t, \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

Розв'язання

Функція $y(x)$ задана параметрично. Застосовуючи формулу (3), маємо:

$$y'_t = \left(\cos^{-2} t\right)' = -2\cos^{-3} t \cdot (\cos t)' = -2\cos^{-3} t \cdot (-\sin t) = \frac{2\sin t}{\cos^3 t};$$

$$x'_t = (\operatorname{tg} t + t)' = \frac{1}{\cos^2 t} + 1 = \frac{1 + \cos^2 t}{\cos^2 t};$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dfrac{2\sin t}{\cos^3 t}}{\dfrac{1 + \cos^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{2\sin t}{\cos t + \cos^3 t}.$$

Приклад 7. Знайдіть похідну функції $y = x^{\operatorname{tg} 8x}$.

Розв'язання

Застосуємо логарифмічне диференціювання. Логарифмуємо обидві частини рівності, маємо: $\ln y = \ln x^{\operatorname{tg} 8x}$.

Використовуючи формулу $\ln x^b = b \ln x$, отримаємо: $\ln y = \operatorname{tg} 8x \ln x$. Звідси $\left(\ln y\right)' = \left(\operatorname{tg} 8x \ln x\right)'$.

Застосовуючи у лівій частині цієї рівності правило диференціювання складеної функції, а у правій частині – правило диференціювання частки, отримаємо:

$$\frac{1}{y} y' = \left(\operatorname{tg} 8x\right)' \ln x + \operatorname{tg} 8x \left(\ln x\right)'; \qquad \frac{y'}{y} = \frac{8}{\cos^2 8x} \ln x + \operatorname{tg} 8x \cdot \frac{1}{x}.$$

Помножимо обидві частини рівності на y:

$$y \cdot \frac{y'}{y} = y\left(\frac{8}{\cos^2 8x} \ln x + \frac{\operatorname{tg} 8x}{x}\right).$$

Тоді, $y' = x^{\operatorname{tg} 8x}\left(\frac{8}{\cos^2 8x} \ln x + \frac{\operatorname{tg} 8x}{x}\right)$.

Приклад 8. Знайдіть похідну функції $y = \sqrt[7]{\dfrac{x^6 \operatorname{ctg} \frac{x}{3}}{\cos^5 5x \cdot 3^x}}$.

Розв'язання

Цю функцію можна диференціювати за правилом диференціювання складеної функції, похідної частки і добутку. Проте такий спосіб для цього прикладу громіздкий, тому застосуємо логарифмічне диференціювання. Маємо:

$$\ln y = \ln \sqrt[7]{\frac{x^6 \operatorname{ctg} \frac{x}{3}}{\cos^5 5x \cdot 3^x}}.$$

Перетворюємо праву частину рівності:

$$\ln y = \frac{6}{7} \ln x + \frac{1}{7} \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{3} - \frac{5}{7} \ln \cos 5x - \frac{x}{7} \ln 3.$$

Диференціюючи обидві частини рівності за x, отримаємо:

$$\frac{y'}{y}=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{7\operatorname{ctg}\frac{x}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{3}}\right)\cdot\frac{1}{3}-\frac{5}{7\cos 5x}\cdot(-\sin 5x)\cdot 5-\frac{\ln 3}{7};$$

$$y'=\sqrt[7]{\frac{x^6\operatorname{ctg}\frac{x}{3}}{\cos^5 5x\cdot 3^x}}\left(\frac{6}{7x}-\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{3}}{21\sin^2\frac{x}{3}}+\frac{25}{7}\operatorname{tg}5x-\frac{\ln 3}{7}\right).$$

Приклад 9. Знайдіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $f(x)=x^2-6x+4$ у точці $M(4;-4)$.

Розв'язання

Застосовуючи формули рівняння дотичної до кривої $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ і рівняння нормалі $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$, знаходимо: $f'(x)=2x-6;$ $f'(x_0)=f'(4)=2\cdot 4-6=2.$

Рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=x^2-6x+4$ у точці M має вигляд: $y-(-4)=2(x-4)$ або $y=2x-12,$ а рівняння нормалі – $y-(-4)=-\dfrac{1}{2}(x-4)$, тобто $y=-\dfrac{1}{2}x-2.$

Приклад 10. Визначте, в якій точці дотична до параболи $y=x^2$: а) паралельна прямій $y=4x-5;$ б) перпендикулярна до прямої $2x-6y+5=0;$ в) утворює з прямою $3x-y+1=0$ кут $45^{\circ}.$

Розв'язання

Нехай точка дотику $M_0(x_0;y_0)$. Тоді згідно з геометричним змістом похідної: $k_{\text{дот}}=y'(x_0)=2x_0.$

а) У паралельних прямих рівні кутові коефіцієнти. Отже, $k_{\text{дот}}=2x_0=4\Rightarrow x_0=2,\ y_0=2^2=4.$

Отже, дотична до параболи $y=x^2$ паралельна прямій $y=4x-5$ у точці $M_0(2;4)$.

б) Кутовий коефіцієнт прямої $2x-6y+5=0\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{6}$

дорівнює $\frac{1}{3}$. У перпендикулярних прямих кутові коефіцієнти зв'язані співвідношенням: $k_1k_2=-1$. Якщо $k_1=\frac{1}{3}$, то $\frac{1}{3}k_2=-1\Rightarrow$ $\Rightarrow k_2=-3$. Отже, $k_{\text{дот}}=2x_0=-3\Rightarrow x_0=-\frac{3}{2}$, $y_0=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$. Отже, дотична до параболи $y=x^2$ перпендикулярна до прямої $2x-6y+5=0$ в точці $M_0\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$.

в) Кутовий коефіцієнт прямої $3x-y+1=0\Leftrightarrow y=3x+1$ дорівнює 3. Кут між прямими на площині можна знайти за формулою: $\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$.

Отже, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\left|\frac{2x_0-3}{1+2x_0\cdot 3}\right|\Leftrightarrow 1=\left|\frac{2x_0-3}{6x_0+1}\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1,\\ x_0=\frac{1}{4}.\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y_0=1,\\ y_0=\frac{1}{16}.\end{array}\right.$

Тобто дотична до параболи $y=x^2$ утворює з прямою $3x-y+1=0$ кут $\frac{\pi}{4}$ у точках $M_1(-1;1)$ та $M_2\left(\frac{1}{4};\frac{1}{16}\right)$.

Приклад 11. Визначте, під яким кутом перетинаються гіпербола $y=\frac{1}{x}$ з параболою $y=\sqrt{x}$.

Розв'язання

Знайдемо абсцису точки перетину гіперболи і параболи, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases}y=\sqrt{x},\\ y=\frac{1}{x}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=1.$$

Кут між кривими – це кут між дотичними до кривих у точці дотику. Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до кожної функції:

$$k_1 = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{2}; \quad k_2 = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\bigg|_{x=1} = -1.$$

Отже, $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{\frac{1}{2}-(-1)}{1+\frac{1}{2}\cdot(-1)}\right| = 3 \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} 3.$

Приклад 12. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^2 + 3t + 1$ (м). Визначте його швидкість v у момент часу $t = 4$ с.

Розв'язання

Оскільки $v(t) = s'(t)$, то $v(t) = \left(t^2 + 3t + 1\right)' = 2t + 3$ і $v(4) = 11$ м/с .

Запитання для самоперевірки

1. Що називається похідною функції?
2. Який геометричний зміст похідної функції?
3. У чому полягає фізичний зміст похідної?
4. Який вигляд має рівняння дотичної до кривої в точці і рівняння нормалі?
5. Які існують основні правила диференціювання?
6. Як знайти похідну складеної функції?
7. Сформулюйте формулу знаходження похідної функції, що задана параметрично.
8. Як знайти похідну неявно заданої функції?
9. У чому полягає логарифмічне диференціювання?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайдіть похідні функцій.

1.1. $y = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}.$ **1.2.** $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{3}.$

1.3. $y = \frac{x}{x^2+1}.$ **1.4.** $y = \sin x + \operatorname{ctg} x.$ **1.5.** $y = \frac{x}{1-\cos x}.$

1.6. $y = x^2 \log_3 x.$ **1.7.** $y = \frac{x-1}{\lg x}.$ **1.8.** $y = 5^{\ln\left(x^2+x+1\right)}.$ **1.9.** $y = \frac{1-10^x}{1+10^x}.$

1.10. $y=\left(5x^2+7\right)^3.$ **1.11.** $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+5}}.$ **1.12.** $y=\sqrt{3x^2+5x+1}.$

1.13. $y=\left(1+2\sqrt{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)^4.$ **1.14.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}.$ **1.15.** $y=\arcsin\sqrt{x}.$

1.16. $y=5\cos^5 x.$ **1.17.** $y=\dfrac{1}{7}\sin 7x+\dfrac{3}{5}\sin 5x+\dfrac{1}{3}\sin 3x.$

1.18. $y=\dfrac{1}{\ln x}.$ **1.19.** $y=\left(\dfrac{2}{\cos^4 x}+\dfrac{3}{\cos^2 x}\right)\sin x.$ **1.20.** $y=\operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{x^2}.$

Завдання 2. Знайдіть похідні функцій, заданих неявно.

2.1. $5x^2+3xy-2y^2+2=0.$ **2.2.** $e^y\sin x=e^{-x}\cos y.$ **2.3.** $y^{\frac{1}{x}}=x^{\frac{1}{y}}.$

2.4. $2y\ln y=x.$ **2.5.** $\cos(xy)=x.$ **2.6.** $y=x+\operatorname{arctg} y.$

Завдання 3. Знайдіть похідні функцій, заданих параметрично.

3.1. $\begin{cases} x=t^3+1, \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t. \end{cases}$ **3.2.** $\begin{cases} x=\dfrac{t+1}{t}, \\ y=\dfrac{t-1}{t}. \end{cases}$ **3.3.** $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right), \\ y=t-\operatorname{arctg} t. \end{cases}$

Завдання 4. Знайдіть похідні функцій, використовуючи логарифмічне диференціювання.

4.1. $y=(\sin x)^{\arcsin x}.$ **4.2.** $y=(\ln x)^{e^x}.$ **4.3.** $y=\sqrt[5]{\dfrac{x\left(1+x^2\right)}{(1-x)^2}}.$

Завдання 5. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y=x^3+2x^2-4x-3$ у точці з абсцисою $x_0=-2.$

Завдання 6. У яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до кубічної параболи $y=x^3$ дорівнює 3?

Завдання 7. Складіть рівняння дотичної до параболи $y=\dfrac{1}{2}x^2-3x-6,$ перпендикулярної до прямої $x+5y-10=0.$

Завдання 8. Під яким кутом перетинаються парабола $y=x^2$ та пряма $3x-y-2=0.$

Завдання 9. Тіло рухається прямолінійно за законом

$s(t)=9t-t^3$. Знайдіть швидкість руху для моментів $t=1$ с та $t=2$ с.

Відповіді: **1.1.** $4x^3-x^2+5x-0,3$. **1.2.** $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$. **1.3.** $\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$.

1.4. $\cos x-\frac{1}{\sin^2 x}$. **1.5.** $\frac{1-\cos x-x\sin x}{(1-\cos x)^2}$. **1.6.** $2x\log_3 x+\frac{x}{\ln 3}$.

1.7. $\frac{x\ln 10\lg x-x+1}{x\ln 10\lg^2 x}$. **1.8.** $\frac{(2x+1)5^{\ln\left(x^2+x+1\right)}\ln 5}{x^2+x+1}$. **1.9.** $-\frac{2\cdot 10^x\ln 10}{\left(1+10^x\right)^2}$.

1.10. $30x\left(5x^2+7\right)^2$. **1.11.** $-\frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2+5\right)^4}}$. **1.12.** $\frac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+1}}$.

1.13. $4\left(1+2x-\frac{3}{x^2}\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{6}{x^3}\right)$. **1.14.** $\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos^3 x}}$. **1.15.** $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

1.16. $5\cos^4 x\cdot(-\sin x)$. **1.17.** $\cos 7x+3\cos 5x+\cos 3x$. **1.18.** $-\frac{1}{x\ln^2 x}$.

1.19. $\frac{8-3\cos^4 x}{\cos^5 x}$. **1.20.** $-\frac{4x}{x^4+1}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$. **2.1.** $\frac{10x+3y}{4y-3x}$.

2.2. $-\frac{e^{-x}\sin y+e^y\sin x}{e^{-x}\cos y+e^y\cos x}$. **2.3.** $\frac{y(x+y\ln y)}{x(y+x\ln x)}$. **2.4.** $\frac{1}{2(1+\ln y)}$.

2.5. $-\frac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$. **2.6.** $\frac{1+y^2}{y^2}$. **3.1.** $\frac{t^2-1}{3t^2}$. **3.2.** -1. **3.3.** $\frac{t}{2}$.

4.1. $(\sin x)^{\arcsin x}\left(\arcsin x\cdot ctgx+\frac{\ln\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. **4.2.** $\frac{e^x(1+x\ln x)(\ln x)^{e^x}}{x}$.

4.3. $\sqrt[5]{\frac{x\left(1+x^2\right)}{(1-x)^2}}\cdot\frac{\left(x^3-3x^2-x-1\right)}{x(x-1)\left(x^2+1\right)}$. **5.** $y-5=0$, $x+2=0$. **6.** $(1;1)$, $(-1;-1)$. **7.** $5x-y-38=0$. **8.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{13}$. **9.** 6 м/с, -3 м/с.

Тема 2. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ. ПОХІДНІ І ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

План

1. Диференціал функції. Застосування диференціала в наближених обчисленнях
2. Похідні вищих порядків
3. Диференціали вищих порядків

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5], [6], [7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 2 студент повинен ***знати:*** означення та запис диференціала, похідних і диференціалів вищих порядків; ***уміти:*** знаходити диференціал функції, наближено обчислювати значення функцій за допомогою диференціала, знаходити похідні та диференціали вищих порядків.

Основні теоретичні відомості

Диференціал першого порядку функції $y = f(x)$:

$$dy = f'(x)dx. \tag{4}$$

Застосування диференціала в наближених обчисленнях

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{5}$$

Похідна $n-$го порядку

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)', \ \left(\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)\right).$$

Диференціал $n-$го порядку

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right), \ d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Похідна другого порядку параметрично заданої функції

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}. \tag{6}$$

Приклади розв’язування типових задач

Приклад 1. Знайдіть диференціали функцій: а) $y = x^3 - 3^x$; б) $y = \ln\left(1+e^{10x}\right) + \operatorname{arcctg} e^{5x}$, обчислити $dy\big|_{x=0,\, dx=0{,}1}$.

Розв’язання

Знаходимо диференціали, застосовуючи формулу (4):

а) $dy = f'(x)dx = \left(x^3 - 3^x\right)' dx = \left(3x^2 - 3^x\right)dx.$

б) $dy = \left(\ln\left(1+e^{10x}\right) + \operatorname{arcctg} e^{5x}\right)' dx = \left(\dfrac{\left(1+e^{10x}\right)'}{1+e^{10x}} - \dfrac{\left(e^{5x}\right)'}{1+e^{10x}}\right)dx =$

$= \left(\dfrac{10e^{10x}}{1+e^{10x}} - \dfrac{5e^{5x}}{1+e^{10x}}\right)dx.$ $dy\big|_{x=0,\, dx=0{,}1} = \left.\dfrac{5e^{5x}\left(2e^{5x}-1\right)}{1+e^{10x}}dx\right|_{x=0;\, dx=0{,}1} = 0{,}25.$

Приклад 2. Обчисліть наближено за допомогою диференціала: а) $\sqrt[4]{17}$; б) $\operatorname{arctg} 0{,}98$; в) $\sin 29^\circ$.

Розв’язання

а) Нехай $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Покладемо $x = 16$. Якщо $x + \Delta x = 17$, то $\Delta x = 1$. Тоді, $f(16) = \sqrt[4]{16} = 2$, $f'(x) = \dfrac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$,

$f'(16) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \dfrac{1}{32}.$

Підставляючи ці значення у формулу (5), отримаємо:

$\sqrt[4]{17} \approx f(x) + f'(x)\Delta x = 2 + \dfrac{1}{32}\cdot 1 \approx 2{,}031.$

б) Нехай $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Покладемо $x = 1$. Якщо $x + \Delta x = 0{,}98$, то $\Delta x = -0{,}02$. Знаходимо:

$f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $f'(1) = \dfrac{1}{2}.$

Користуючись формулою (5), знаходимо:

$\operatorname{arctg} 0{,}98 \approx f(x) + f'(x)\Delta x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\cdot(-0{,}02) \approx 0{,}7754.$

в) Нехай $f(x)=\sin x$. Покладемо $x=\dfrac{\pi}{6}$. Якщо $x+\Delta x=\dfrac{29\pi}{180}$ $\left(29^{\circ}=\dfrac{29\pi}{180}\right)$, то $\Delta x=\dfrac{29\pi}{180}-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{180}$.

Знаходимо: $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$, $f'(x)=\cos x$, $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Підставляючи ці значення у формулу (5), отримаємо:

$$\sin 29^{\circ}\approx f(x)+f'(x)\Delta x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)\approx 0,4848.$$

Приклад 3. Знайдіть похідні вказаних порядків заданих функцій: а) $f'''(x)$, якщо $f(x)=5x^4$; б) $f''(x)$, якщо $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$; в) $f^{(5)}(x)$, якщо $f(x)=\sin^2 x$.

Розв'язання

а) $f'(x)=\left(5x^4\right)'=20x^3$, $f''(x)=\left(20x^3\right)'=60x^2$,

$$f'''(x)=\left(60x^2\right)'=120x.$$

б) $$f'(x)=\left(\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)'=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)'=-\frac{2x}{2\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^3}}=-\frac{x}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^3}}$$

в) $f'(x)=\left(\sin^2 x\right)'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$,

$$f''(x)=(\sin 2x)'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x,$$

$$f'''(x)=(2\cos 2x)'=-2\cdot 2\sin 2x=-4\sin 2x,$$

$$f^{(4)}=(-4\sin 2x)'=-4\cdot 2\cos 2x=-8\cos 2x,$$

$$f^{(5)}=\left(-8\cos 2x\right)'=-8\cdot 2\cdot\left(-\sin 2x\right)=16\sin 2x.$$

Приклад 4. Покажіть, що функція $y=e^{-x}\sin x$ задовольняє рівняння $y''+2y'+2y=0$.

Розв'язання

Знаходимо похідні y' та y'':

$$y'=\left(e^{-x}\sin x\right)'=\left(e^{-x}\right)'\sin x+e^{-x}\left(\sin x\right)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x,$$

$$y''=\left(-e^{-x}\sin x\right)'+\left(e^{-x}\cos x\right)'=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x=$$

$$=-2e^{-x}\cos x.$$

Підставляючи вирази для y, y' та y'' у задане рівняння, одержуємо тотожність:

$$-2e^{-x}\cos x+2\left(-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x\right)+2e^{-x}\sin x=0,$$

$$-2e^{-x}\cos x-2e^{-x}\sin x+2e^{-x}\cos x+2e^{-x}\sin x=0,\qquad 0=0.$$

Приклад 5. Знайдіть y'', якщо $y=\ln\left(x+y\right)$.

Розв'язання

Продиференціюємо задану рівність за x і знайдемо y':

$$y'=\frac{1+y'}{x+y}\ \Rightarrow\ y'=\frac{1}{x+y-1}.$$

Диференціюємо одержане співвідношення за x, враховуючи, що y є функцією від x: $y''=-\dfrac{1+y'}{\left(x+y-1\right)^2}$.

Замінюючи у цьому виразі y' на $\dfrac{1}{x+y-1}$, отримуємо:

$$y''=-\frac{1+\dfrac{1}{x+y-1}}{\left(x+y-1\right)^2}=-\frac{x+y-1+1}{\left(x+y-1\right)^3}=-\frac{x+y}{\left(x+y-1\right)^3}.$$

Приклад 6. Знайдіть y''_{xx} для циклоїди, що задана параметрично

$$\begin{cases} x=a\left(t-\sin t\right),\\ y=a\left(1-\cos t\right).\end{cases}$$

Розв'язання

Використовуючи формулу (3), знаходимо похідну першого порядку параметрично заданої функції:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(a\left(1-\cos t\right)\right)'}{\left(a\left(t-\sin t\right)\right)'} = \frac{a\sin t}{a\left(1-\cos t\right)} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Тоді, за формулою (6): $y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{a\left(1-\cos t\right)} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$

Приклад 7. Знайдіть диференціали першого, другого і третього порядків функції $y = x\operatorname{arctg}x - \ln\sqrt{1+x^2}$.

Розв'язання

Запишемо функцію у вигляді $y = x\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$. Тоді, $y' = \operatorname{arctg}x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x.$ Звідси, $dy = \operatorname{arctg}x\,dx,$

$$d^2y = \left(\operatorname{arctg}x\right)'dx^2 = \frac{dx^2}{1+x^2},\quad d^3y = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'dx^3 = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx^3.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається диференціалом функції?
2. Як визначається диференціал функції через її похідну?
3. Як використовують диференціал у наближених обчисленнях?
4. Що називається похідною другого порядку?
5. Як знайти похідні вищих порядків від функцій, заданих явно, неявно, параметрично?
6. Що називається диференціалами вищих порядків?
7. Як знаходять диференціали другого, третього, $n-$го порядків?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайдіть диференціали першого порядку заданих функцій.

1.1. $y=\cos^3 \operatorname{arctg} x$. **1.2.** $y=\sqrt{\ln x\cdot e^{3x}}$. **1.3.** $y=\sin 3x\cos\left(5x^2+1\right)$.

Завдання 2. Обчисліть наближено за допомогою диференціала.

2.1. $\arcsin 0,51$. **2.2.** $\sqrt[3]{1,02}$. **2.3.** $\sqrt[4]{15,968}$ **.**

Завдання 3. Знайдіть похідні вказаних порядків заданих функцій.

3.1. y''', якщо $y=x^2+\sin x$. **3.2.** y''', якщо $y=x^5\ln x$. **3.3.** y'', якщо $y=x^2e^{3x}$.

Завдання 4. Покажіть, що функція $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+e^x$, $C_1, C_2-const$ задовольняє рівняння $y''-4y'+4y=e^x$.

Завдання 5. Знайдіть похідну y''_{xx} функцій, заданих неявно

5.1. $e^{x+y}=xy$. **5.2.** $y=x+\operatorname{arctg} y$. **5.3.** $y=\operatorname{tg}(x+y)$.

Завдання 6. Знайдіть похідні другого порядку параметрично заданих функцій.

6.1. $\begin{cases} x=at\cos t, \\ y=at\sin t. \end{cases}$ **6.2.** $\begin{cases} x=e^t, \\ y=\arcsin t. \end{cases}$ **6.3.** $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t, \\ y=\dfrac{1}{2}t^2. \end{cases}$

Завдання 7. Знайдіть диференціали другого порядку заданих функцій.

7.1. $y=\ln\left(1+x^2\right)$. **7.2.** $y=\sqrt{\ln^2 x-4}$. **7.3.** $y=4^{-x^2}$.

Відповіді: **1.1.** $\dfrac{-3\cos^2 \operatorname{arctg} x\sin \operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}$. **1.2.** $\dfrac{e^{3x}\left(\dfrac{1}{x}+3\ln x\right)dx}{2\sqrt{\ln x\cdot e^{3x}}}$.

1.3. $\left(3\cos 3x\cos\left(5x^2+1\right)-10x\sin\left(5x^2+1\right)\sin 3x\right)dx$. **2.1.** $0,513$.

2.2. $1,007$. **2.3.** $1,999$. **3.1.** $-125\cos 5x$. **3.2.** $x^2\left(47+\ln x\right)$.

3.3. $e^{3x}\left(9x^2+12x+2\right)$. **5.1.** $-\dfrac{y\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)}{x^2(y-1)^3}$. **5.2.** $\dfrac{2}{y^3}-\dfrac{2}{y^5}$.

5.3. $-\dfrac{2\left(y^2+1\right)}{y^5}$. **6.1.** $\dfrac{2+t^2}{a(\cos t-t\sin t)^3}$. **6.2.** $\dfrac{t^2+t+1}{e^{2t}\left(1-t^2\right)\sqrt{1-t^2}}$.

6.3. $\left(1+t^2\right)\left(1+3t^2\right)$. **7.1.** $\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx^2$. **7.2.** $\frac{4\ln x-4-\ln^3 x}{x^2\sqrt{\left(\ln^2 x-4\right)^3}}dx^2$.

7.3. $4^{-x^2}2\ln 4\left(2x^2\ln 4-1\right)dx^2$.

Тема 3. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

План

1. Теореми Ферма, Ролля, Коші, Лагранжа
2. Правило Лопіталя
3. Формули Тейлора і Маклорена

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5], [6], [7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 3 студент повинен ***знати:*** теореми Ферма, Ролля, Коші, Лагранжа, правило Лопіталя, формули Тейлора і Маклорена; ***уміти:*** застосовувати теореми Ферма, Ролля, Коші, Лагранжа при розв'язанні завдань, розкривати невизначеності, використовуючи правило Лопіталя, розкладати функції за степенями за допомогою формул Тейлора і Маклорена.

Основні теоретичні відомості

Теорема Ферма

Нехай функція $y=f(x)$ є неперервною на деякому інтервалі $(a;\, b)$ і досягає свого найбільшого (або найменшого) значення у внутрішній точці ξ цього інтервалу: $a<\xi<b$. Якщо в точці ξ похідна функції $f(x)$ існує, то вона дорівнює нулю: $f'(\xi)=0$.

Теорема Ролля

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\, b]$, диференційовна в усіх його внутрішніх точках і має на кінцях відрізка однакові значення, то на інтервалі $(a;b)$ існує хоча б одне значення $x=\xi$, для якого $f'(\xi)=0$.

Теорема Коші

Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a; b]$, диференційовні в усіх його внутрішніх точках $x \in (a;\ b)$, причому $\varphi'(x) \neq 0$, то існує така точка $\xi \in (a;\ b)$, що $\dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$.

Теорема Лагранжа

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в усіх його внутрішніх точках, то в інтервалі $(a; b)$ існує хоча б одне значення $x = \xi$, для якого

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \tag{7}$$

Теорема (правило Лопіталя)

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ визначені і диференційовні в околі точки $x = a$, за винятком, можливо, самої точки a, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, $g(x) \neq 0$ і $g'(x) \neq 0$ у цьому околі. Тоді, якщо існує $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ і має місце рівність $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{8}$$

$$\left(c = x_0 + \theta(x - x_0), 0 < \theta < 1\right).$$

Формула Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

де точка c міститься між 0 і x.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Перевірте, чи задовольняє функція $f(x)=3x^2-1$ умовам теореми Ферма на відрізку $[1;2]$.

Розв'язання

Задана функція не задовольняє умовам теореми Ферма, оскільки вона монотонно зростає на відрізку $[1;2]$, та, отже, набуває найменшого значення при $x=1$, а найбільшого – при $x=2$, тобто не у внутрішніх точках відрізка $[1;2]$. Тому, задана функція не задовольняє умовам теореми Ферма.

Приклад 2. Перевірте виконання теореми Ролля для функції $f(x)=x^2-1$ на відрізку $[-1;1]$ і знайдіть відповідне значення ξ.

Розв'язання

Функція $f(x)=x^2-1$ неперервна на відрізку $[-1;1]$, диференційовна на інтервалі (-1; 1) і на кінцях відрізка набуває однакових значень: $f(-1)=f(1)=0.$ Отже, знайдеться хоча б одна точка $\xi\in(-1;1)$, в якій $f'(\xi)=0$. Із рівняння $f'(x)=2x=0$ визначаємо єдину точку $x=\xi=0.$ За геометричним змістом теореми Ролля дотична до кривої $f(x)=x^2-1$, що паралельна осі Ox, має вигляд $x=0.$

Приклад 3. На інтервалах $(-1;1)$ і $(1;2)$ знайдіть абсциси точок, у яких дотична до графіка функції $f(x)=x^3-2x^2-x+2$ є горизонтальною.

Розв'язання

На кінцях відрізка $[-1;1]$ функція задовольняє рівність $f(-1)=f(1)=0,$ а на кінцях відрізка $[1;2]$ – рівність $f(1)=f(2)=0.$ Всередині цих відрізків функція є диференційовною. Тоді за теоремою Ролля існують точки $\xi_1\in(-1;1)$ та $\xi_2\in(1;2)$, в яких $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0.$ Знаходимо $f'(x)=3x^2-4x-1.$ Ця похідна дорівнює нулю у точці

$\xi_1 = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3} \in (-1;1)$ і у точці $\xi_2 = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3} \in (1;2)$, і, таким чином, у точках з абсцисами ξ_1 і ξ_2 дотична до графіка заданої функції є горизонтальною.

Приклад 4. Доведіть,що рівняння $x^7 + 7x - 1 = 0$ має лише один дійсний корінь.

Розв'язання

Введемо функцію $f(x) = x^7 + 7x - 1.$ Оскільки $f(0) = -1 < 0,$ а $f(1) = 7 > 0,$ то за першою теоремою Больцано-Коші дане рівняння має дійсний корінь $x_1 \in (0;1).$ Припустимо, що існує принаймні ще один корінь $x_2,$ тоді $f(x_1) = f(x_2) = 0,$ причому для визначеності вважатимемо, що $x_1 < x_2.$ Отже, на відрізку $[x_1; x_2]$ функція $f(x)$ задовольняє всі умови теореми Ролля, тому знайдеться точка $c \in (x_1; x_2),$ в якій $f'(c) = 0.$ Але $f'(x) = 7\left(x^6 + 1\right) \neq 0.$ Знайдена суперечність показує, що припущення про існування ще одного кореня було хибним.

Приклад 5. Для функції $f(x) = \sqrt{5}x^3 + x^2, \quad x \in [-1;1]$ знайдіть всі точки ξ, для яких виконуються умови теореми Лагранжа.

Розв'язання

Згідно з формулою (7), маємо:

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)} = \frac{\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}.$$

$$f'(x) = 3\sqrt{5}\xi^2 + 2\xi = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \xi_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}; \xi_2 = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Приклад 6. Перевірте, чи задовольняють функції $f(x) = e^x$ і $g(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ умовам теореми Коші на відрізку $[-3;3]$.

Розв'язання

Функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[-3;3]$, диференційовані в інтервалі $(-3;3)$; $g'(x)=\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$ дорівнює нулю при $x=0\in(-3;3)$. Отже, умова $g'(x)\neq 0$, для $x\in(-3;3)$ не виконується. Таким чином, умови теореми Коші для функцій $f(x)=e^x$ і $g(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ на відрізку $[-3;3]$ не виконуються.

Приклад 7. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)$; ґ) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}x^x$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$;

є) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання

а) Маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Застосовуючи правило Лопіталя, дістанемо: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin\alpha x)'}{(\operatorname{tg}\beta x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\cos\alpha x\cos^2\beta x}{\beta}=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

б) Маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для розкриття цієї невизначеності правило Лопіталя застосовуємо тричі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-x\cos x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x+x\sin x)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+x\cos x}{\sin x}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(2\sin x+x\cos x)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x+\cos x-x\sin x}{\cos x}=3.$$

в) Маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, тоді:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

г) Тут невизначеність $[\infty-\infty]$. Зведемо її до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, після чого застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{\sin x}=0.$$

ґ) Тут невизначеність виду $[0\cdot\infty]$. Зведемо її до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, після чого застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to2}(2-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to2}\frac{2-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{-1}{-\sin^2\frac{\pi x}{4}\cdot\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}.$$

д) Маємо невизначеність виду $\left[0^0\right]$. Спочатку прологарифмуємо функцію і зайдемо границю її логарифма:

$$\lim_{x\to+0}x^x=\left[0^0\right]=A$$

$$\ln A=\lim_{x\to+0}\ln x^x=\lim_{x\to+0}x\ln x=[0\cdot\infty]=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0.$$

Таким чином, $\ln A=0 \;\Rightarrow\; A=e^0=1$. Отже, $\lim\limits_{x\to+0}x^x=1$.

е) Маємо невизначеність виду $\left[1^{\infty}\right]$. Спочатку знайдемо границю логарифма цієї функції, а потім – границю даної функції.

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{x}+x\right)^{\frac{1}{x}}=\left[1^{\infty}\right]=A \quad\Rightarrow\quad \ln A=\frac{1}{x}\ln\left(e^{x}+x\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\ln A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^{x}+x\right)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\left(e^{x}+x\right)\right)'}{\left(x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}+x}}{1}=2.$$

Отже, $\ln A=2 \quad\Rightarrow\quad A=e^{2}$. Звідси, $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x}+x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{2}$.

є) Тут невизначеність виду $\left[\infty^{0}\right]$. Спочатку прологарифмуємо функцію і знайдемо границю її логарифма.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+2^{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\left[\infty^{0}\right]=\ln A \quad\Rightarrow\quad \ln A=\frac{1}{x}\ln\left(x+2^{x}\right)=\frac{\ln\left(x+2^{x}\right)}{x}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+2^{x}\right)}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1+2^{x}\ln 2}{x+2^{x}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2^{x}\ln 2}{x+2^{x}}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+2^{x}\ln 2\right)'}{\left(x+2^{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x}\ln^{2}2}{1+2^{x}\ln 2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2^{x}\ln^{2}2\right)'}{\left(1+2^{x}\ln 2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x}\ln^{3}2}{2^{x}\ln^{2}2}=\ln 2.$$

Отже, $\ln A=\ln 2 \quad\Rightarrow\quad A=2$, тоді $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+2^{x}\right)^{\frac{1}{x}}=2$.

Приклад 8. Розкладіть многочлен $x^{3}-2x^{2}+3x+5$ за степенями $x-2$, користуючись формулою Тейлора.

Розв'язання

Користуючись формулою Тейлора (8) при $x_{0}=2$,

$$f\left(x\right)=f\left(2\right)+\frac{f'(2)}{1!}\left(x-2\right)+\frac{f''(2)}{2!}\left(x-2\right)^{2}+\ldots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}\left(x-2\right)^{n}+R_{n}.$$

$f\left(2\right)=11;\quad f'\left(x\right)=3x^{2}-4x+3;\quad f'\left(2\right)=7;\quad f''\left(x\right)=6x-4;$

$f''(2)=8;\quad f'''(x)=6;\quad f'''(2)=6.$

Всі інші похідні дорівнюють нулю. Підставляючи знайдені значення похідних у формулу Тейлора, отримуємо:

$$x^3-2x^2+3x+5=11+7(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3.$$

Приклад 9. Використовуючи основні розвинення, подайте функцію $f(x)=\ln\cos x$ за формулою Маклорена до члена з x^4 включно.

Розв'язання

Користуючись розкладом функції $\cos x$, отримуємо:

$$\ln(\cos x)=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+0\left(x^5\right)\right)=\ln(1+t),\quad t=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+0\left(x^5\right).$$

Тепер застосовуємо розклад для $\ln(1+t)$:

$$\ln\cos x=\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+0\left(t^3\right)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+0\left(x^5\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+0\left(x^5\right)\right)^2+0\left(x^5\right)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+0\left(x^5\right)=$$

$$=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+0\left(x^5\right).$$

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте теореми Ферма, Ролля, Коші, Лагранжа. У чому полягає їх геометричний зміст?

2. У чому полягає суть правила Лопіталя?

3. Як розкриваються невизначеності $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$?

4. Сформулюйте формули Тейлора і Маклорена.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Перевірте, чи задовольняє умовам теореми Ферма функція $f(x)=\ln\sin x$ на відрізку $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$.

Завдання 2. Перевірте, чи задовольняють умовам теореми Ролля функції.

2.1. $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ на $[-1;1]$; **2.2.** $f(x)=\ln\sin x$ на $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$;

2.3. $f(x)=1-|x|$ на $[-1;1]$.

Завдання 3. Крива $y=x^2-4x$ сполучає точки $A(-1;3)$ і $B(4;0)$. На дузі AB знайти точку $M_0(x_0;y_0)$, в якій дотична паралельна хорді AB.

Завдання 4. Доведіть, що рівняння $3x^5+15x-8=0$ має лише один дійсний корінь.

Завдання 5. Доведіть, що рівняння $16x^4-64x+31=0$ не може мати двох дійсних різних коренів у інтервалі $(0;1)$.

Завдання 6. Застосовуючи формулу Лагранжа до функції $f(x)=\sqrt{3}x^3+3x$ на проміжку $[0;1]$, визначити точку $x=\xi$, що фігурує у цій формулі.

Завдання 7. Перевірте, чи задовольняють функції $f(x)=x^2-2x+3$ і $g(x)=x^3-7x^2+20x$ умовам теореми Коші на відрізку $[1;4]$ і знайдіть відповідне значення $x=\xi$.

Завдання 8. Знайдіть границі, користуючись правилом Лопіталя.

8.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-1}{\sin x}$. **8.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x^3-x^5}{4x-x^4}$. **8.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}+3x^2-1}{3x-\operatorname{tg}^3 x}$.

8.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}$. **8.5.** $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} x\ln\sin x$. **8.6.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{\sin^2 2x}$.

8.7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\operatorname{tg} x$. **8.8.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg} x-1}{\sin 4x}$. **8.9.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x-\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$.

8.10. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$. **8.11.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$. **8.12.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

Завдання 9. Розвиньте многочлен $x^4-5x^3+x^2-3x+4$ за степенями двочлена $x-4$.

Завдання 10. Розвиньте за степенями x функцію $f(x)=e^x\ln(x+1)$ до члена, який містить x^3 включно.

Відповіді: **1.** Так. **2.1.** Ні. **2.2.** Так. **2.3.** Ні. **3.** $M\left(\frac{5}{2};-\frac{15}{4}\right)$. **6.** $\xi=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **7.** $\xi=2$. **8.1.** $\ln 5$. **8.2.** $\frac{1}{4}$. **8.3.** $\frac{2}{3}$. **8.4.** $\frac{3}{4}$. **8.5.** 0. **8.6.** $\frac{1}{2}$. **8.7.** 2. **8.8.** $-\frac{1}{2}$. **8.9.** ∞. **8.10.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **8.11.** $e^{-\frac{3}{2}}$. **8.12.** 1. **9.** $(x-4)^4+$ $+11(x-4)^3+37(x-4)^2+21(x-4)-56$. **10.** $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+0(x^3)$.

Тема 4. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

План

1. Інтервали монотонності функцій. Локальний екстремум функції
2. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину
3. Найбільше і найменше значення функції
4. Асимптоти кривої
5. Дослідження функції за допомогою похідної. Побудова графіка функції
6. Застосування диференціального числення у прикладних задачах

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5], [6], [7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 4 студент повинен ***знати:***

необхідні та достатні умови зростання та спадання функцій, локального екстремуму; алгоритм дослідження функцій на опуклість і вгнутість, точки перегину, схему дослідження функції та побудови її графіка, застосування похідної у прикладних задачах; ***уміти:*** проводити дослідження функцій за допомогою похідної та будувати графіки функцій, знаходити найбільше і найменше значення функції на відрізку, застосовувати диференціальне числення функцій у прикладних задачах.

Основні теоретичні відомості

Схема дослідження функції на монотонність і екстремум

1. Знайти область визначення функції $y = f\left(x\right)$.

2. Знайти першу похідну $y' = f'\left(x\right)$.

3. Знайти критичні точки I роду.

4. Розбити область визначення функції $y = f\left(x\right)$ критичними точками на інтервали.

5. Визначити знак похідної $f'\left(x\right)$ на отриманих інтервалах (методом підстановки значень аргументу або методом інтервалів).

6. Зробити висновок про інтервали монотонності.

7. Визначити, використовуючи першу достатню ознаку екстремуму, які із критичних точок є точками екстремуму.

8. Обчислити значення функції в отриманих точках екстремуму.

Схема дослідження функції на проміжки опуклості, вгнутості й точки перегину

1. Знайти область визначення функції $y = f\left(x\right)$.

2. Знайти першу похідну $f'\left(x\right)$.

3. Знайти другу похідну $f''\left(x\right)$.

4. Знайти критичні точки II роду.

5. Розбити критичними точками II роду область визначення функції на інтервали.

5. Визначити знак другої похідної $f''\left(x\right)$ на кожному із інтервалів (методом підстановки значень аргументу або методом інтервалів).

6. Визначити проміжки опуклості (вгнутості) графіка функції.

7. Визначити, які із критичних точок другого роду є точками перегину.

8. Обчислити значення функції в отриманих точках перегину.

Схема знаходження найбільшого і найменшого значень функції на відрізку

1. Знайти критичні точки I роду функції на відрізку $\left[\, a; b \,\right]$.

2. Обчислити значення функції $y = f\left(x\right)$ в критичних точках.

3. Обчислити значення функції $y = f\left(x\right)$ на кінцях відрізка.

4. Серед всіх обчислених значень функції вибрати найбільше і найменше.

Асимптоти графіка функції

Пряма $x = a$ називається *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f\left(x\right)$, якщо $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f\left(x\right) = \pm\infty$.

Рівняння *похилої асимптоти* має вигляд $y = k \cdot x + b$, де

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - k \cdot x \right).$$

Повне дослідження функції і побудова її графіка

Для побудови графіка функції $y = f\left(x\right)$ необхідно з'ясувати його характерні риси, тобто дослідити функцію. Повне дослідження функції проводять за наступною схемою:

1. Знайти область визначення функції.

2. Дослідити функцію на неперервність. Знайти вертикальні асимптоти.

3. Дослідити функцію на парність і непарність.

4. Дослідити функцію на періодичність.

5. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.

6. Визначити проміжки монотонності і екстремуми функції.

7. Визначити проміжки опуклості, вгнутості і точки перегину.

8. Знайти похилі асимптоти графіка функції. Якщо графік не має похилих асимптот, дослідити поведінку функції при $x \to \pm\infty$.

9. Побудувати графік функції (при необхідності знайти

додаткові точки графіка функції).

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Знайдіть проміжки монотонності і точки екстремуму функції $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$.

Розв'язання

Функція визначена на всій числовій осі, тобто: $D(y):\ x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Знаходимо першу похідну функції:

$$y' = 2 + 3\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Визначаємо критичні точки I роду: $y' = \dfrac{2\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x}} = 0$.

Дріб дорівнює нулю, якщо чисельник дорівнює нулю і знаменник не дорівнює нулю:

$$\begin{cases} 2\sqrt[3]{x}+2=0 \\ \sqrt[3]{x}\neq 0 \end{cases};\qquad \begin{cases} \sqrt[3]{x}=-1 \\ x\neq 0 \end{cases};\qquad \begin{cases} x=-1 \\ x\neq 0 \end{cases}.$$

Отже, точки $x=-1$ та $x=0$ – критичні точки I роду.

Розбиваємо всю числову вісь на інтервали і визначаємо знак похідної на кожному з інтервалів.

x	$(-\infty;\ -1)$	-1	$(-1;\ 0)$	0	$(0;\ +\infty)$
y'	+	0	–	не існує	+
y	↗	1 max	↘	0 min	↗

На кожному із інтервалів $x \in (-\infty;\ -1)$ та $x \in (0;\ +\infty)$ похідна додатна. Отже, на цих інтервалах функція зростає. Оскільки на інтервалі $x \in (-1;\ 0)$ похідна від'ємна, то на цьому інтервалі функція спадає.

Оскільки при переході через критичну точку $x=-1$ похідна змінює знак з «+» на «–», то в цій точці функція має максимум.

Оскільки при переході через критичну точку $x=0$ похідна змінює знак з «–» на «+», то в цій точці – мінімум функції.

Визначимо значення функції у критичних точках.

$$y(-1) = 2\cdot(-1) + 3\sqrt[3]{(-1)^2} = -2+3 = 1; \quad y(0) = 2\cdot 0 + 3\sqrt[3]{0^2} = 0.$$

Наближений вигляд графіка функції $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ показано на рис 1.

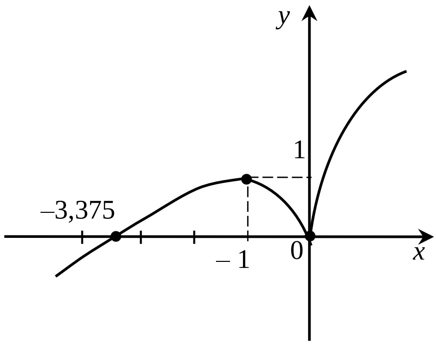

Рис. 1

Приклад 2. Знайдіть проміжки опуклості (вгнутості) й точки перегину графіка функції $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$.

Розв'язання

Функція визначена на всій числовій вісі. Область визначення функції має вигляд: $D(y)$: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Знаходимо першу похідну функції: $y' = 2 + 3\cdot\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 2 + 2\cdot x^{-\frac{1}{3}}$.

Визначаємо другу похідну функції: $y'' = 2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot x^{-\frac{4}{3}} = -\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x^4}}$.

Знаходимо критичні точки ІІ роду: $y'' = -\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x^4}} = 0$.

Дріб дорівнює нулю, якщо чисельник дорівнює нулю і знаменник не дорівнює нулю: $\begin{cases} 2 \ne 0 \\ 3\cdot\sqrt[3]{x^4} \ne 0 \end{cases}$; $x \ne 0$.

Отже, точка $x = 0$ – критична точка ІІ роду.

Розбиваємо всю числову вісь на інтервали і визначаємо знак другої похідної на кожному із інтервалів.

x	$(-\infty;\,0)$	0	$(0;\,+\infty)$
y''	–	не існує	–
y	$\cap$	0	$\cap$

Оскільки на інтервалах $x \in (-\infty;\,0) \cup (0;\,+\infty)$ друга похідна від'ємна, то на цих інтервалах графік функції опуклий.

Інтервалів вгнутості графік функції не має.

Оскільки при переході через критичну точку $x = 0$ друга похідна не змінює свій знак, то в точці (0; 0) перегину немає.

Приклад 3. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^3 - 12x + 7$ на відрізку $[0;\,3]$.

Розв'язання

Знаходимо похідну і критичні точки першого роду.

$y' = 3x^2 - 12$; $y' = 0$, якщо $3x^2 - 12 = 0$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$.

Із знайдених двох критичних точок тільки точка $x = 2$ належить заданому відрізку $[0;\,3]$.

Обчислимо значення функції в критичній точці $x = 2$ і на кінцях відрізка $[0;\,3]$ – в точках $x = 0$ та $x = 3$:

$y(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 7 = -9$; $y(0) = 0^3 - 12 \cdot 0 + 7 = 7$;

$y(3) = 3^3 - 12 \cdot 3 + 7 = -2$.

Порівнюючи отримані значення функції, робимо висновок: найбільше значення функції $y_{\max} = y(0) = 7$, найменше значення функції $y_{\min} = y(2) = -9$.

Приклад 4. Знайдіть асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$.

Розв'язання

Функція визначена на всій числовій вісі, крім $x = 0$. Область визначення функції має вигляд: $D(y)$: $x \in (-\infty;\,0) \cup (0;\,+\infty)$.

Отже, точка $x = 0$ – точка розриву функції. Дослідимо точку розриву і обчислимо односторонні границі функції в зазначеній точці.

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{x^2+4}{x}=\frac{4}{-0}=-\infty; \qquad \lim_{x\to 0+0}\frac{x^2+4}{x}=\frac{4}{+0}=+\infty.$$

Оскільки односторонні границі дорівнюють $\pm\infty$, то в точці $x=0$ функція має розрив другого роду. Відповідно графік функції має вертикальну асимптоту $x=0$ (вісь Oy).

Можливе рівняння похилої асимптоти шукатимемо у вигляді $y=kx+b$. Обчислимо значення параметрів k і b (для дробово-раціональної функції границі будуть однакові при $x\to\pm\infty$).

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4}{x\cdot x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+4}{x}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4-x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x}=0.$$

Підставляючи знайдені значення $k=1$ і $b=0$, одержимо рівняння похилої асимптоти $y=x$. Графік функції показано на рис. 2.

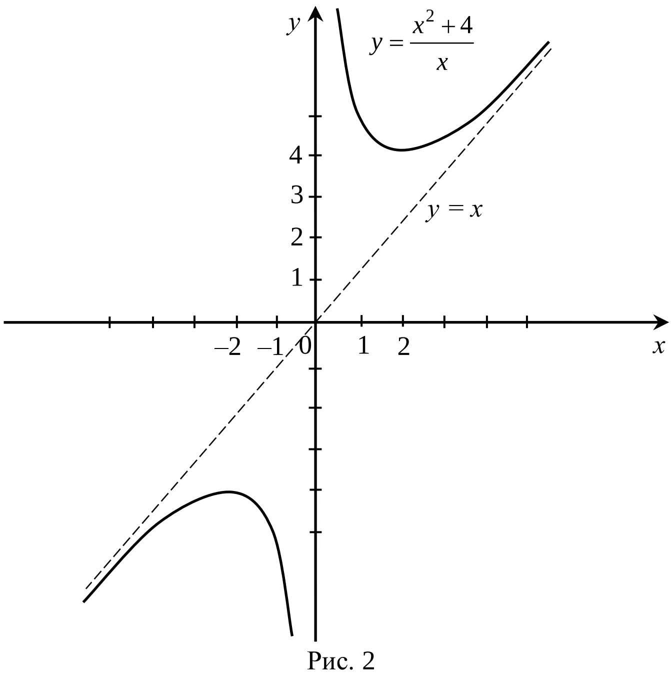

Рис. 2

Приклад 4. Дослідіть функції та побудуйте їхні графіки:

а) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$; б) $y=\dfrac{2x}{\ln x}$.

Розв'язання

а) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$.

1. Область визначення функції.

Функція визначена при всіх значеннях x, крім тих, у яких знаменник перетворюється в нуль, тобто: $1-x^2\neq 0$, $x\neq\pm 1$.

Область визначення функції:

$D(y)$: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2. Неперервність функції.

Функція визначена при всіх значеннях x, крім $x\neq\pm 1$. Отже, точки $x=-1$ і $x=1$ – точки розриву функції. Дослідимо точки розриву, знайдемо односторонні границі функції в зазначених точках.

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x}{1-x^2}=\lim_{x\to-1-0}\frac{x}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to1-0}\frac{-1-0}{(1+1+0)(1-1-0)}=\frac{-1}{2\cdot(-0)}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x}{1-x^2}=\lim_{x\to-1+0}\frac{x}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to-1+0}\frac{-1+0}{(1+1-0)(1-1+0)}=\frac{-1}{2\cdot(+0)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x}{1-x^2}=\lim_{x\to1-0}\frac{x}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to1-0}\frac{1-0}{(1-1+0)(1+1-0)}=\frac{+1}{(+0)\cdot 2}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x}{1-x^2}=\lim_{x\to1-0}\frac{x}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to1+0}\frac{1+0}{(1-1-0)(1+1+0)}=\frac{+1}{(-0)\cdot 2}=-\infty.$$

Оскільки односторонні границі дорівнюють $\pm\infty$, то у точках $x=-1$ і $x=1$ функція має розриви другого роду. Отже, графік функції має дві вертикальні асимптоти $x=-1$ і $x=1$.

3. Парність, непарність.

Оскільки $y(-x)=\dfrac{-x}{1-(-x)^2}=-\dfrac{x}{1-x^2}=-y(x)$, то функція непарна і її графік симетричний відносно початку координат.

4. Періодичність.

Оскільки не існує значення T, при якому виконується рівність $y(x+T)=y(x)$, то функція неперіодична.

5. Точки перетину із осями координат.

Точки перетину графіка функції із координатними осями шукаємо, дорівнюючи аргумент і функцію нулю.

Із віссю Ox: $y=0 \Rightarrow \dfrac{x}{1-x^2}=0$; $\begin{cases} x=0, \\ 1-x^2\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ x\neq \pm 1. \end{cases}$

Точка перетину графіка функції із віссю Ox має координати: $O(0,0)$.

Із віссю Oy: $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{0}{1-0^2}=0$.

Точка перетину графіка функції із віссю Oy має координати: $O(0,0)$.

Отже, графік функції проходить через початок координат, інших точок перетину графіка функції із координатними осями немає.

6. Проміжки зростання, спадання функції, екстремуми.

Знаходимо першу похідну:

$$y'=\frac{1\cdot(1-x^2)-(-2x)\cdot x}{(1-x^2)^2}=\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}.$$

Знаходимо критичні точки I роду:

$$y'=\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}=0; \qquad x\neq\pm1.$$

Розіб'ємо область визначення критичними точками I роду на інтервали і визначимо в кожному з них знак похідної y'.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	+	не існує	+	не існує	+
y	$\nearrow$	не існує	$\nearrow$	не існує	$\nearrow$

7. Проміжки опуклості, вгнутості, точки перегину.

Знаходимо другу похідну:

$$y''=\frac{2x\cdot(1-x^2)^2-2(1-x^2)(-2x)\cdot\left(x^2+1\right)}{(1-x^2)^4}=$$

$$=\frac{2x\cdot(1-x^2)(1-x^2+2x^2+2)}{(1-x^2)^4}=\frac{2x\cdot(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

Знаходимо критичні точки ІІ роду: $y''=\dfrac{2x\cdot(x^2+3)}{(1-x^2)^3}=0$;

$$\begin{cases}2x(x^2+1)=0,\\(1-x^2)^3\neq 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}2x=0,\\x^2+1\neq 0,\\1-x^2\neq 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=0,\\x\neq \pm 1.\end{cases}$$

Розіб'ємо область визначення критичними точками ІІ роду на інтервали і визначимо в кожному з них знак другої похідної y''.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	+	не існує	–	0	+	не існує	–
y	$\cup$	не існує	$\cap$	0	$\cup$	не існує	$\cap$

Оскільки при переході через критичну точку $x=0$ друга похідна змінює знак, то $x=0$ – абсциса точки перегину. Точка перегину: $O(0,0)$.

8. Похилі асимптоти.

Рівняння похилої асимптоти шукатимемо у вигляді $y=kx+b$. Обчислимо значення параметрів k і b (для дробово-раціональної функції границі будуть однакові при $x\to\pm\infty$).

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{(1-x^2)\cdot x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{-\infty}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{1-x^2}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{0}{0-1}=0.$$

Оскільки $k=0$ і $b=0$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y=0$ (вісь Ox).

9. Побудова графіка.

Побудуємо графік функції, з огляду на пункти 1-8 (рис. 3).

Додатково знайдемо декілька точок графіка функції:

x	–3	–2	–1,5	–0,5	0,5	1,5	2	3
y	0,38	≈0,67	1,2	≈–0,67	≈0,67	–1,2	≈–0,67	–0,38

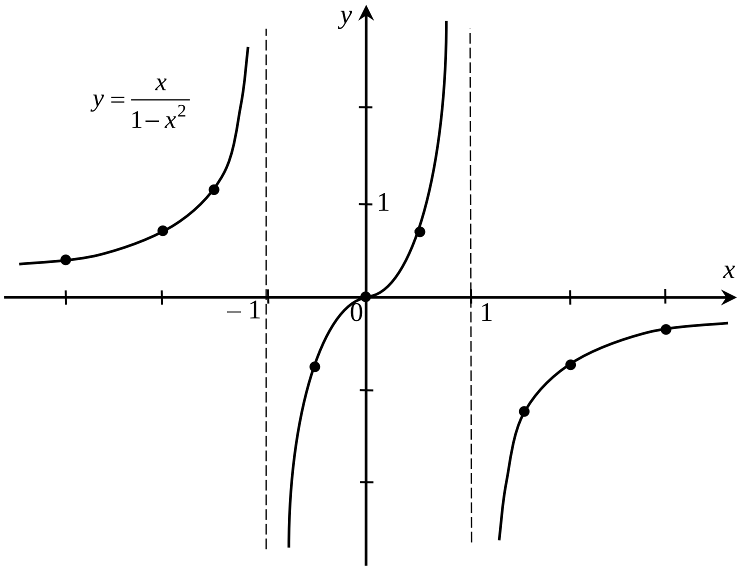

Рис. 3

б) $y=\dfrac{2x}{\ln x}$.

1. Область визначення функції.

Логарифмічна функція $y=\ln x$ визначена при $x>0$, крім цього знаменник не може дорівнювати нулю $\ln x\neq 0$, тобто $x\neq 1$.

Тоді область визначення функції має вигляд: $D(y):\ x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.

2. Неперервність функції.

Оскільки функція не визначена в точці $x=1$, то це точка розриву. Дослідимо характер точки розриву, знайдемо односторонні границі функції.

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{2x}{\ln x}=\lim_{x\to 1-0}\frac{2\cdot(1-0)}{\ln(1-0)}=\lim_{x\to 1-0}\frac{+2}{-0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{2x}{\ln x}=\lim_{x\to 1+0}\frac{2\cdot(1+0)}{\ln(1+0)}=\lim_{x\to 1-0}\frac{+2}{+0}=+\infty .$$

Оскільки односторонні границі дорівнюють $\pm\infty$, то в точці $x=1$ функція має розрив II роду. Отже, функція в цій точці має вертикальну асимптоту $x=1$.

Дослідимо також поводження функції на границі області визначення: $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{2x}{\ln x}=\frac{0}{-\infty}=0$. Це означає, що при $x\to 0$ справа графік функції наближається до точки $O\left(0,\,0\right)$.

3. Парність, непарність.

Оскільки область визначення несиметрична відносно нуля, то $y=\frac{2x}{\ln x}$ є функція загального вигляду.

4. Періодичність.

Оскільки не існує значення T, при якому виконується рівність $y(x+T)=y(x)$, то функція неперіодична.

5. Точки перетину із осями координат.

Із віссю Ox: $y=0\Leftrightarrow \frac{2x}{\ln x}=0\Leftrightarrow \begin{cases}2x=0,\\ x>0,\\ x\neq 1.\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=0,\\ x>0,\\ x\neq 1.\end{cases}$

Оскільки отримана система не має розв'язку, це означає, що точок перетину графіка із віссю Ox немає.

Із віссю Oy: оскільки $x=0$ не належить області визначення, то точок перетину із віссю Oy немає.

Графік функції не перетинає координатні осі.

6. Проміжки зростання, спадання функції, екстремуми.

Знаходимо першу похідну:

$$y'=2\cdot\frac{x'\cdot\ln x-x\cdot\left(\ln x\right)'}{\ln^2 x}=2\cdot\frac{\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{2\cdot(\ln x-1)}{\ln^2 x}.$$

Знаходимо критичні точки I роду:

$$y'=\frac{2\cdot(\ln x-1)}{\ln^2 x}=0\Leftrightarrow\begin{cases}2(\ln x-1)=0,\\ \ln^2 x\neq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x=1,\\ \ln^2 x\neq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=e,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

Розіб'ємо область визначення критичними точками I роду на інтервали і визначимо в кожному із них знак похідної y'.

x	$(0;1)$	1	$(1;e)$	e	$(e;+\infty)$
y'	–	не існує	–	0	+
y	↘	не існує	↘	$2e$	↗

Оскільки при переході через критичну точку $x=e$ похідна змінює знак із «–» на «+», то в точці М $(e;2e)$ – мінімум функції.

Знайдемо значення функції в точці $x=e\approx 2,72$:

$y(e)=\dfrac{2e}{\ln e}=2e\approx 5,44$.

7. Проміжки опуклості, вгнутості, точки перегину.

Знаходимо другу похідну:

$$y''=2\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x-(\ln x-1)\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^4 x}=2\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot\ln x\cdot(\ln x-2\ln x+2)}{\ln^4 x}=$$

$$=\frac{2\cdot(2-\ln x)}{x\ln^3 x}.$$

Знаходимо критичні точки ІІ роду: $y''=\dfrac{2\cdot(2-\ln x)}{x\ln^3 x}=0$.

$$\begin{cases}2-\ln x=0,\\ x\neq 0,\\ \ln^3 x\neq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x=2,\\ x\neq 0,\\ \ln x\neq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=e^2,\\ x\neq 0,\\ x\neq 1;\end{cases}\Leftrightarrow x=e^2.$$

Розіб'ємо область визначення критичними точками ІІ роду на інтервали і визначимо в кожному із них знак другої похідної y''.

x	$(0;1)$	1	$(1;e^2)$	e^2	$(e^2,+\infty)$
y''	–	не існує	+	0	–
y	$\cap$	не існує	$\cup$	e^2	$\cap$

М $(e^2;e^2)$ – точка перегину.

Оскільки при переході через критичну точку $x=e^2$ друга похідна змінює знак, то $x=e^2$ – абсциса точки перегину.

Знаходимо значення функції в точці $x=e^2\approx 7,40$:

$$y(e^2)=\frac{2e^2}{\ln e^2}=\frac{2e^2}{2}=e^2\approx 7,40.$$

8. Похилі асимптоти.

Обчислимо значення параметрів k і b (з огляду на область визначення функції розглядатимемо лише випадок при $x\to+\infty$).

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\ln x\cdot x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\ln x}=\frac{2}{\infty}=0;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\ln x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2x\right)=+\infty.$$

Оскільки $b=\infty$, то графік функції похилих асимптот не має.

9. Побудова графіка.

Побудуємо графік функції, з огляду на пункти 1-8 (рис. 4).

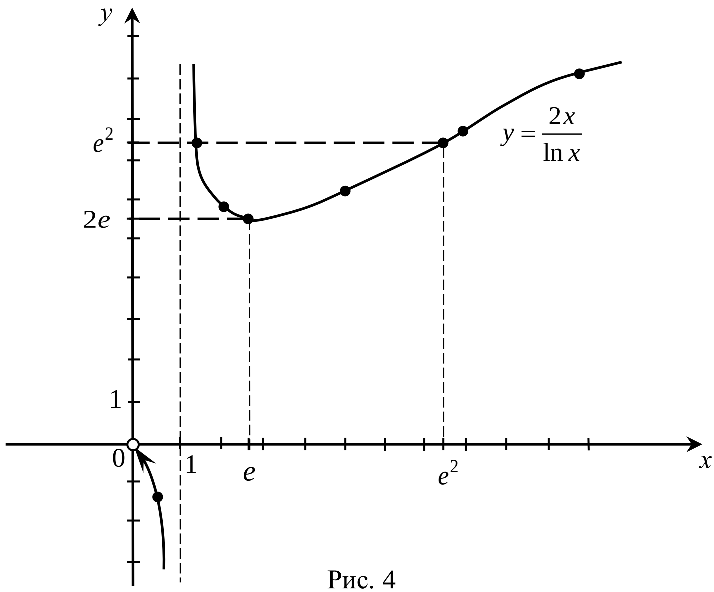

Рис. 4

Приклад 5. Нехай функція $K(x)=20x-\frac{x^2}{20}$ встановлює залежність витрат виробництва від кількості x продукції, що виробляється. Знайдіть граничні витрати виробництва і коефіцієнт еластичності, якщо обсяг продукції складає 100 одиниць, 20 одиниць.

Розв'язання

Граничні витрати виробництва є похідною від функції витрат: $K'(x) = 20 - \frac{x}{10}$. При обсязі продукції у 100 одиниць $K'(100) = 20 - \frac{100}{10} = 10$. При обсязі продукції у 20 одиниць $K'(20) = 20 - \frac{20}{10} = 18$. Отже, чим більше виробляється продукції, тим повільніше зростають витрати на її випуск.

Еластичність функції $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'$. У нашому випадку

$$y(x) = K(x) = 20x - \frac{x^2}{20};$$

$$E_x(K) = \frac{x}{20x - \frac{x^2}{20}} \cdot \left(20 - \frac{x}{10}\right) = \frac{2 \cdot (200 - x)}{400 - x};$$

$$E_{100}(K) = \frac{2 \cdot 100}{300} = 0{,}67; \quad E_{20}(K) = \frac{2 \cdot 180}{380} = 0{,}95.$$

Таким чином, якщо при обсязі випуску 100 одиниць кількість продукції, що випускається, збільшиться на 1%, тобто на одиницю, то відносні витрати виробництва збільшаться приблизно на 0,67%; при обсязі 20 одиниць збільшення випуску продукції на 1% призведе до збільшення відносних витрат приблизно на 0,95%.

Запитання для самоперевірки

1. Яка функція називається зростаючою, спадною?

2. Сформулюйте необхідні і достатні умови зростання, спадання функції.

3. Що називається максимумом і мінімумом функції?

4. Сформулюйте необхідну і достатню умови існування екстремуму.

5. Як знаходиться найбільше і найменше значення функції на відрізку?

6. Яка функція називається опуклою, вгнутою на інтервалі?

7. Що називається точкою перегину графіка функції?

8. Сформулюйте необхідну і достатню умови існування точки перегину?

9. Що називають асимптотою графіка функції?

10. Як знайти похилу асимптоту графіка функції?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайдіть інтервали монотонності функції $y = x^4 - 8x^2 + 1$.

Завдання 2. Знайдіть екстремуми та інтервали монотонності функцій.

2.1. $y = x - \ln(x+2)$. **2.2.** $y = x^2 e^{-2x}$. **2.3.** $y = \dfrac{x^2}{x-1}$. **2.4.** $y = x^2 \ln x$.

Завдання 3. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ на відрізку $[0;3]$.

Завдання 4. Знайдіть точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості. **4.1.** $y = x^5 - 3x + 1$. **4.2.** $y = 3 + \sqrt[3]{x+2}$. **4.3.** $y = \ln\left(4 + x^2\right)$.

Завдання 5. Знайдіть асимптоти кривих.

5.1. $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$. **5.2.** $y = x + 1 + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Завдання 6. Дослідіть функції та побудуйте їх графіки.

6.1. $y = 1 + x^2 - \dfrac{x^4}{4}$. **6.2.** $y = \dfrac{x^2 - 2}{x-1}$. **6.3.** $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$.

6.4. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

Завдання 6. Задано функцію повних витрат виробництва $K(x) = 6\lg(1+3x)$. Визначте граничні витрати виробництва і коефіцієнти еластичності при $x = 1$, $x = 2$.

Відповіді: **1.** $(-\infty;-2)$ і $(0;2)$ – спадає, $(-2;0)$ і $(2;+\infty)$ – зростає. **2.1.** $(-1;-1)$ – точка мінімуму, $(-2;-1)$ – спадає, $(1;+\infty)$ –

зростає. **2.2.** $(0;0)$ – точка мінімуму, $\left(1;\frac{1}{e^2}\right)$ – точка максимуму, $(-\infty;0)$ і $(1;+\infty)$ – спадає, $(0;1)$ – зростає. **2.3.** $(0;0)$ – точка максимуму, $(2;4)$ – точка мінімуму, $(-\infty;0)$ і $(2;+\infty)$ – зростає, $(0;1)$ і $(1;2)$ – спадає. **2.4.** $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};-\frac{1}{2\sqrt{e}}\right)$ – точка мінімуму, $\left(0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – спадає, $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right)$ – зростає. **3.** $\max\limits_{x\in[0;3]} f(x)=$ $= f\left(-1+\sqrt{2}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $\min\limits_{x\in[0;3]} f(x)=f(3)=\frac{2}{5}$. **4.1.** $(0;1)$ – точка перегину, $(-\infty;0)$ – опукла, $(0;+\infty)$ – вгнута. **4.2.** $(-2;3)$ – точка перегину, $(-\infty;-2)$ – вгнута, $(-2;+\infty)$ – опукла. **4.3.** $(-2;\ln 8)$, $(2;\ln 8)$ – точки перегину, $(-\infty;-2)$, $(2;+\infty)$ – опукла, $(-2;2)$ – вгнута. **5.1.** $x=2$, $x=3$, $y=0$. **5.2.** $y=2x+1$, $y=1$.
6. $K'(1)=\frac{9}{2\ln 10}$, $K'(2)=\frac{18}{7\ln 10}$, $E_1(K)=\frac{3}{4\lg 4\ln 10}$, $E_2(K)=\frac{6}{7\lg 7\ln 10}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вища* математика: збірник задач: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П.Вовкодав [та ін.]; За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2011. – 480 с.

2. *Вища* математика: навч. посіб. / І. О. Ластівка, О. І. Безверхий, І. П. Кудзіновська. – К.: НАУ, 2018. – 452с.

3. *Вища* математика. У 10 ч. Ч. 4. Диференціальне числення функції однієї змінної : навч. посіб. / І. О. Ластівка, Т. І. Олешко, Т. А. Левковська. – К. : НАУ, 2005. – 119 с.

4. *Высшая* математика для экономистов: Учеб. для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд. – М. : ЮНИТИ, 1998.– 471 с.

5. *Денисюк В. П.* Вища математика: підручник: у 2 ч. Ч. 1. / В. П. Денисюк, В. К. Репета. – 2-ге вид., виправ. – К. : НАУ, 2017. – 472 с

6. *Дубовик В. П*. Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Вища шк., 1993. – 648 с.

7. *Ластівка І. О.* Математика для економістів : навч. посіб. У 3 ч. Ч. 1 / І. О. Ластівка, В. С. Коновалюк, І. В. Шевченко [та ін.]. – К. : НАУ, 2012. – 432 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів
технічних та економічних спеціальностей

Укладачі: ЛАСТІВКА Іван Олексійович
ПЕТРУСЕНКО Валентина Павлівна
ЧУБ Людмила Олексіївна