МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Математичні методи дослідження операцій

**Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів напряму підготовки
6.140103 «Туризм»**

Київ 2016

УДК 519.8 (076.5)
ББК В 11 я 7
В 558

Укладачі: *І. О. Ластівка, О. С. Давидов, І. В. Шевченко*
Рецензент: *А. О. Антонова*

Затверджено методично-редакційною радою
Національного авіаційного університету
(протокол № від 2016 р.).

В 558 **Вища та прикладна математика. Математичні методи дослідження операцій:** методичні рекомендації до самостійної роботи студентів / уклад. : І. О. Ластівка, О. С. Давидов, І. В. Шевченко. – К. : НАУ, 2016. – 48 с.

Укладено відповідно до програми курсу «Вища та прикладна математика», зокрема, модуля IV «Спеціальні задачі дослідження операцій». Методичні рекомендації містять завдання для самостійного виконання.

Для студентів напряму підготовки 6.140103 «Туризм».

ЗМІСТ

ВСТУП

Мета навчальної дисципліни «Вища та прикладна математика» – опанування основних математичних понять та методів, необхідних для застосування теоретичного матеріалу під час моделювання і розв'язування прикладних задач.

Завдання вивчення навчальної дисципліни – розвиток логічного та алгоритмічного мислення студентів, оволодіння методами дослідження та розв'язування математичних задач, набуття первинних навичок математичного дослідження прикладних задач тощо.

Методичні рекомендації до самостійної роботи студентів укладено відповідно до програми курсу «Вища та прикладна математика», зокрема, модуля IV «Спеціальні задачі дослідження операцій». Цей модуль є окремою самостійною дисципліною, що викладається в курсі дисципліни «Вища та прикладна математика» для студентів напряму підготовки 6.140103 «Туризм».

У пропонованому виданні дібрано задачі для індивідуальної роботи студентів.

Провідний викладач може коригувати кількість і зміст завдань, які студент має виконати самостійно протягом вивчення відповідного матеріалу.

Матеріал кожної теми відповідає робочій навчальній програмі дисципліни «Вища та прикладна математика», зокрема модулю IV «Спеціальні задачі дослідження операцій». Кожна тема містить основні методичні рекомендації та завдання для самостійного виконання, розв'язування яких сприятиме кращому розумінню, засвоєнню та застосуванню основних теоретичних положень.

Тема 1. МОДЕЛІ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

План

1. Постановка задачі лінійного програмування та побудова моделей задач лінійного програмування.
2. Форми запису задач лінійного програмування.

Література: [1, с. 6–11]; [2]; [3].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 1 студент повинен ***знати:*** загальні принципи постановки та побудови математичної моделі задачі лінійного програмування (ЗЛП), різні форми запису ЗЛП; ***уміти:*** записувати математичну модель задачі лінійного програмування, зводити загальну ЗЛП до стандартної або канонічної форми.

Математична модель – це математичне описання досліджуваного процесу (економічного, виробничого, планування тощо) або певного об’єкта. Побудова математичної моделі включає три етапи:

1) визначення невідомих змінних задачі;
2) формування цільової функції (критерію оптимальності), мінімум чи максимум якої необхідно знайти;
3) записування умов-обмежень задачі.

Загальна задача лінійного програмування полягає у знаходженні максимального (мінімального) значення цільової функції

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \tag{1.1}$$

за умов-обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \ \left(i=\overline{1,\, r}\right); \tag{1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \ \left(i=\overline{r+1,\, l}\right); \tag{1.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i = b_i \ \left(i=\overline{l+1,\, m}\right); \tag{1.4}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,n} \right). \qquad (1.5)$$

Вектор значень $\overline{x} = \left(x_1 ; x_2 ; \ldots, x_n \right)$, що задовольняє обмеження (1.2) – (1.5) задачі, називають *допустимим розв'язком (допустимим планом) ЗЛП.*

Допустимий розв'язок $\overline{x}^0 = \left(x_1^0 ; x_2^0 ; \ldots, x_n^0 \right)$, який максимізує чи мінімізує цільову функцію (1.1), називають *оптимальним розв'язком (оптимальним планом) ЗЛП.*

Якщо задача лінійного програмування містить обмеження типу (1.2), (1.5), то ЗЛП записують в *симетричній формі*. Якщо задача лінійного програмування має обмеження типу (1.4), (1.5), то ЗЛП записують у *стандартній формі*. Будь-яку задачу лінійного програмування можна звести до стандартної форми.

Канонічна форма ЗЛП – це стандартна форма задачі, у якій кожне обмеження містить у собі змінну з коефіцієнтом одиниця в рівнянні і коефіцієнтом нуль у всіх інших. При цьому праві частини обмежень додатні.

Стандартна ЗЛП (1.1), (1.4), (1.5) зводиться у загальному випадку до канонічної ЗЛП за допомогою M - методу додаванням штучних невід'ємних змінних до лівих частин обмежень (1.4) і введенням цих змінних з досить великою вагою $\grave{I} > 0$ у цільову функцію (1.1).

На практиці часто M вибирають таким, що

$$M > \max\left\{ \left| a_{ij} \right| ; \left| b_i \right| ; \left| c_j \right| \right\}, \; i = \overline{1, m}, \; j = \overline{1, n}.$$

M - задача має вигляд:

$$F\left(x \right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \grave{I} \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \min ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \; \left(i = \overline{1, m} \right);$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1, n+m} \right).$$

Зауваження. Задача лінійного програмування, записана у симетричній формі, тобто обмеження якої – це нерівності типу «$\le$», зводиться до канонічної форми безпосередньо введенням в кожне обмеження змінної x_{n+i}. У цільову функцію введені змінні входять з коефіцієнтом 0.

Приклади для самостійного виконання

Завдання 1. Побудувати математичну модель задачі лінійного програмування.

Приклад 1.1. Для виготовлення столів і стільців на підприємстві використовують два види сировини. Витрати сировини кожного виду на кожний предмет наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Виріб	Сировина	
	першого виду, $м^3$	другого виду, $м^3$
Стіл	0,4	0,5
Стілець	0,15	0,12

Прибуток підприємства від виробництва одного стола становить 120 грн, а стільця – 75 грн. Скільки столів і стільців має виготовити підприємство, щоб забезпечити оптимальну рентабельність, якщо в розпорядженні підприємства є 184 $м^3$ сировини першого виду та 102 $м^3$ сировини другого виду.

Приклад 1.2. Для виробництва двох видів виробів *A* і *B* підприємство використовує три види сировини. Норми витрат сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції цього виду, прибуток від реалізації одиниці виробу кожного виду та загальну кількість сировини цього виду, яка використовується підприємством, наведено в табл. 1.2.

Скласти такий план виробництва виробів *A* і *B*, відповідно до якого прибуток підприємства від реалізації всіх виробів був би максимальним.

Таблиця 1.2

Вид сировини	Норми витрат сировини на одиницю виробу, кг		Загальна кількість сировини, кг
	A	*B*	
1	12	4	300
2	4	4	120
3	3	12	252
Прибуток від реалізації одиниці виробу, ум. грош. од.	30	40	–

Приклад 1.3. Для випуску продукції двох видів *À* і *Â* потрібно чотири сорти деревини. Витрати деревини кожного сорту на кожний вид продукції наведено в табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Вид продукції	Витрати деревини кожного сорту на кожний вид продукції, ì ^{3}			
	1-го	2-го	3-го	4-го
A	0,1	0,05	0,2	0
B	0,1	0,1	0	0,2

Скласти такий план виробництва, який забезпечує найбільший прибуток від реалізації продукції, якщо деревини 1-го сорту є 180 ì ^{3}, 2-го сорту – 120 ì ^{3}, 3-го сорту – 320 ì ^{3}, 4-го сорту – 180 ì ^{3}. Відпускна ціна одиниці продукції виду *A* становить 40 ум. грош. од., виду *B* – 60 ум. грош. од.

Приклад 1.4. Для виготовлення виробів двох видів *A* і *B* використовується три види сировини, запаси якої обмежені. Норми витрат кожного виду сировини на виготовлення одиниці виробу кожного виду, запаси сировини, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду наведено в табл. 1.4.

Визначити такий план випуску продукції, який забезпечить максимальний прибуток від її реалізації.

Таблиця 1.4

Вид сировини	Норми витрат сировини на виготовлення одиниці виробу кожного виду, кг		Запаси сировини, кг
	A	*B*	
1	16	4	840
2	8	7	520
3	5	9	670
Прибуток від реалізації одного виробу кожного виду, ум. грош. од.	3	2	-

Приклад 1.5. Для виготовлення двох видів виробів $Ð_1$ і $Ð_2$ підприємство використовує три види ресурсів: сталь, кольорові метали та станки. Запаси ресурсів підприємства, норми витрат кожного ресурсу на виготовлення одного виробу кожного виду, а також прибуток підприємства від реалізації одного виробу кожного виду $Ð_1$ і $Ð_2$ наведено в табл. 1.5.

Таблиця 1.5

Вид ресурсу	Норми витрат ресурсів на один виріб		Запас ресурсу
	$Ð_1$	$Ð_2$	
Сталь, т	10	70	435
Кольорові метали, кг	20	50	356
Станки, од.-год.	200	100	200
Прибуток, ум. грош. од.	12	20	-

Визначити такий план випуску виробів $Ð_1$ і $Ð_2$, відповідно до якого буде досягнуто найбільший прибуток підприємства.

Приклад 1.6 Фірма спеціалізується на виробництві електроплит. Запропоновано до випуску три моделі *A*, *B* і *C* за ціною відповідно 90, 70 та 50 ум. грош. од. Норми витрат сировини для виготовлення однієї електроплити різних моделей та запас сировини двох видів на фірмі наведено в табл. 1.6.

Таблиця 1.6

Сировина	Норми витрат сировини за моделями електроплит, ум. од.			Запас сировини, ум. од.
	A	*B*	*C*	
1	10	4	5	700
2	3	2	1	400

Визначити оптимальні обсяги виробництва електроплит різних моделей, що максимізують дохід фірми.

Приклад 1.7. Для консервування компотів двох видів використовується сировина: вишні, груші, алича. Запаси сировини, норми витрат сировини кожного виду для приготування однієї банки компоту та ціна банки готової продукції наведено в табл. 1.7.

Таблиця 1.7

Вид компоту	Норми витрат сировини кожного виду на одну банку			Ціна однієї банки, ум. грош. од.
	Алича	Груші	Вишні	
1	6	42	–	10
2	18	–	45	8
Запас сировини, кг	620	760	950	-

Скласти такий план виробництва консервації, відповідно до якого сума від реалізації готової продукції була б найбільшою**.**

Приклад 1.8. Для виробництва двох видів виробів Đ_1 і Đ_2 підприємство використовує послідовно чотири групи обладнання типу *A*, *B*, *C*, *D*. Час на оброблення кожного виробу Đ_1 і Đ_2 на обладнанні кожної групи, фонди часу для кожного виду обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду Đ_1 і Đ_2 наведено в табл. 1.8.

Таблиця 1.8

Група обладнання	Час на оброблення одного виробу $Ð_1$ і $Ð_2$ на обладнанні, од.-год.		Фонд часу обладнання, од.-год.
	$Ð_1$	$Ð_2$	
A	2	2	120
B	1	2	80
C	4	–	160
D	–	4	120
Прибуток, ум. грош. од.	2	4	–

Скільки виробів кожного виду $Ð_1$ і $Ð_2$ необхідно виготовити, щоб прибуток підприємства від реалізації цих виробів був найбільшим?

Приклад 1.9. На ділянці цеху з виготовлення металевих банок задіяно дві групи обладнання – штампувальна машина та різак, що виготовляють вироби двох найменувань – збірна та цільнотягнута банки. Норму витрат часу на одиницю продукції за кожною групою обладнання та фонд часу обладнання наведено в табл. 1.9.

Таблиця 1.9

Група обладнання	Норми витрат часу на оброблення одного виробу, од.-год.		Фонд часу обладнання, од.-год.
	Збірна банка	Цільнотягнута банка	
Штампувальна машина	0,3	0,4	180
Різак	0,3	0,9	210

Скільки виробів кожного найменування потрібно виготовити, щоб їх загальна кількість була максимальною?

Приклад 1.10. Кондитерська фабрика виготовляє пастилу та мармелад, які розфасовують у коробки. Запаси сировини, норми її витрат на виробництво однієї коробки продукції, а також відпускну ціну однієї реалізованої коробки наведено в табл. 1.10.

Таблиця 1.10

Сировина	Норми витрат сировини на виробництво однієї коробки виробу, кг		Запас сировини, кг
	Пастила	Мармелад	
Яблучне пюре	0,4	0,4	240
Цукор	0,2	0,4	160
Ароматизовані речовини	-	0,004	12
Яєчний білок	0,4	-	160
Ціна однієї коробки, ум. грош. од.	1,02	0,87	-

Скільки необхідно виготовити і розфасувати коробок пастили та мармеладу, щоб прибуток кондитерської фабрики від реалізації продукції став максимальним?

Завдання 2. Записати в стандартній та канонічній формах задачу лінійного програмування.

Приклад 2.1:

$$z = 7x_1 - 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 3; \\ x_1 + x_2 \ge 1; \\ -3x_1 + x_2 \le 3; \\ 2x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.2:

$$z = x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 4; \\ x_1 - 2x_2 \ge -4; \\ x_1 + x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.3:

$$z = 3x_1 + 3x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6; \\ -x_1 + x_2 \le 7; \\ x_1 + 2x_2 \ge 2; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.4:

$$z = x_1 + x_2 \to \min;$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 8; \\ x_1 + 2x_2 \ge 6; \\ x_1 - x_2 \le 3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.5:

$$z = 2x_1 - 4x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 16; \\ x_1 + 3x_2 \ge 2; \\ 2x_1 + 7x_2 \le 9; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.6:

$$z = x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 15; \\ x_1 + 2x_2 \ge 6; \\ -3x_1 + x_2 \le 8; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.7:

$$z = x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 4; \\ x_1 - 2x_2 \ge -4; \\ x_1 + x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.8:

$$z = -3x_1 + 6x_2 \to \min;$$
$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 4; \\ x_1 - 2x_2 \ge -4; \\ x_1 + x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.9:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6; \\ x_1 + 2x_2 \le 10; \\ x_1 + x_2 \ge 3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.10:

$$z = 2x_1 - 4x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 16; \\ x_1 + 3x_2 \ge 2; \\ 2x_1 + 7x_2 \le 9; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Тема 2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

План

1. Графічний метод розв'язування задачі лінійного програмування.
2. Симплекс-метод розв'язування задачі лінійного програмування.
3. Побудова двоїстої задачі до задачі лінійного програмування.

Література: [1, с. 11–22]; [2]; [3].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 2 студент повинен ***знати:*** геометричну інтерпретацію та алгоритм розв'язування ЗЛП графічним методом, суть та алгоритм симплекс-методу розв'язування ЗЛП, основні положення теорії двоїстості для задач лінійного програмування; ***уміти:*** розв'язувати ЗЛП графічним та симплексними методами, записувати двоїсту задачу до заданої ЗЛП і знаходити розв'язки прямої та двоїстої задач.

Одним з методів розв'язування ЗЛП у двовимірному просторі R^2, тобто задач з двома змінними, є *графічний метод*.

Суть графічного методу розв'язування ЗЛП полягає у відшуканні екстремуму лінійної функції

$$F\left(x\right)=c_1x_1+c_2x_2$$

на опуклій багатокутній області, що визначається обмеженнями цієї задачі і лежить у першому квадранті координатної площини.

Розв'язок ЗЛП (якщо він існує) збігається з вершиною допустимої області, а у деяких випадках – з її гранню.

Універсальним методом розв'язування задач лінійного програмування є *симплекс-метод*.

Симплекс-метод безпосередньо застосовують до розв'язування ЗЛП, записаних у канонічній формі; він дозволяє цілеспрямовано перебирати допустимі базисні розв'язки (вершини багатогранника допустимої області ЗЛП), до множини яких належить оптимальний розв’язок, якщо він існує, або визначає, що ЗЛП не має оптимального розв’язку.

Оскільки кількість вершин багатогранника допустимої області скінченна, то алгоритм симплекс-методу задовольняє властивості скінченності, тобто за скінченну кількість кроків реалізації (ітерацій) алгоритму отримаємо оптимальний розв’язок або покажемо, що цільова функція на множині розв’язків необмежена. Виняток становить явище зациклювання, яке полягає в можливому повторенні циклу обстеження одних і тих самих вершин. Зазвичай на практиці таке явище трапляється дуже рідко.

Розв’язуючи ЗЛП симплекс-методом, потрібно звернути увагу на такі три фактори:

1) спосіб визначення будь-якого початкового допустимого плану задачі;

2) правило переходу від одного допустимого плану до іншого «покращеного» допустимого плану;

3) перевірка «покращеного» допустимого плану на оптимальність за допомогою критерію.

Працюючи за алгоритмом симплекс-методу, необхідно пам’ятати таке:

- ЗЛП не має оптимального розв’язку, якщо на якому-небудь кроці вектор умов A_j, який потрібно вводити а базис, не має додатних компонент;

- ЗЛП не має розв’язків, якщо критерій оптимальності виконується, але не всі штучні змінні виведені з базису.

Кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність деяку іншу задачу лінійного програмування, яку називатимемо *двоїстою* відносно до вихідної (початкової, прямої) задачі.

Побудова двоїстої задачі цілком визначається умовами вихідної задачі. Вихідна та двоїста задачі утворюють пару двоїстих задач.

Існує зв'язок не лише між умовами прямої та двоїстої задач, а й між їх розв’язками. Це означає, що розв’язавши одну з пари двоїстих задач, можна отримати і розв’язок другої. Зв'язок між оптимальними розв’язками двоїстих задач установлено за допомогою теорем двоїстості.

Приклади для самостійного виконання

Завдання 1. Розв'язати графічним методом задачі лінійного програмування, умови яких наведено в завданні 2 теми 1.

Завдання 2. Розв'язати симплекс-методом задачі лінійного програмування, записані в симетричній формі.

Приклад 2.1:

$$z = x_1 + 12x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10; \\ 5x_1 - 4x_2 \le 11; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.2:

$$z = 5x_1 + 3x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15; \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.3:

$$z = x_1 + x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 18; \\ x_1 + 2x_2 \le 16; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.4:

$$z = 2x_1 + 7x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 10; \\ 2x_1 - 4x_2 \le 11; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.5:

$$z = -7x_1 - 2x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 7; \\ 3x_1 + x_2 \le 8; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.6:

$$z = 11x_1 + 2x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 10; \\ 3x_1 - 5x_2 \le 6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.7:

$$z = 5x_1 + 2x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10; \\ -x_1 + 3x_2 \le 7; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.8:

$$z = 3x_1 + 5x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 10; \\ 2x_1 - 5x_2 \le 9; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.9:

$$z = -x_1 - 2x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12; \\ 3x_1 - 4x_2 \le 11; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2.10:

$$z = -x_1 - 4x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 13; \\ 2x_1 - 4x_2 \le 12; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Завдання 3. Побудувати двоїсту задачу для задачі лінійного програмування, умови яких наведено в завданні 2 теми 2, і відшукати її розв’язок.

Тема 3. ПОСТАНОВКА ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ЗБАЛАНСОВАНА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

План

1. Загальна постановка транспортної задачі лінійного програмування.
2. Метод північно-західного кута побудови початкового опорного плану транспортної задачі.
3. Метод мінімальної вартості побудови початкового опорного плану транспортної задачі.
4. Метод потенціалів знаходження оптимального плану збалансованої транспортної задачі.

Література: [1, с. 24–34]; [3]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 3 студент повинен ***знати:*** економічну та математичну постановки транспортної задачі лінійного програмування (ТЗЛП), поняття збалансованої транспортної задачі, алгоритми методів північно-західного кута та мінімальної вартості знаходження початкового (допустимого) базисного розв’язку, суть методу потенціалів знаходження оптимального розв’язку ТЗЛП; ***уміти:*** згідно з умовою ТЗЛП будувати розподільну транспортну таблицю, будувати допустимий базисний розв’язок збалансованої транспортної задачі за методами північно-західного кута та мінімальної вартості, будувати потенціали для кожного постачальника і кожного споживача, перевіряти отриманий розв’язок на оптимальність, знаходити новий розв’язок.

Транспортна задача є окремим випадком загальної задачі лінійного програмування. *Економічна постановка* транспортної задачі полягає у визначенні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу з m пунктів відправлення $A_1, A_2, ..., A_m$ до n пунктів призначення $B_1, B_2, ..., B_n$. Відомі транспортні затрати (вартості, тарифи) c_{ij} перевезення одиниці вантажу з i-го $\left(i = \overline{1, m}\right)$ пункту відправлення в j-й $\left(j = \overline{1, n}\right)$ пункт призначення.

Для досягнення оптимальності плану перевезень транспортної задачі необхідно виконання умов:

1) реалізація всіх запасів вантажу пунктів відправлення (постачальників);

2) задоволення попиту у вантажі всіх пунктів призначення (споживачів);

3) мінімізація транспортних затрат на перевезення вантажу з пунктів відправлення до пунктів призначення.

Математична постановка ТЗЛП полягає у визначенні мінімального значення функції

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right);$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right);$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}\right),$$

де x_{ij} – кількість вантажу, який перевозиться з пункту A_i в пункт B_j; a_i – запаси вантажу в i-му пункті відправлення; b_j – потреби у вантажі j-го пункту призначення.

Якщо загальний запас вантажу в пунктах відправлення дорівнює сумарним потребам у пунктах призначення, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ , \qquad (3.1)$$

то транспортна задача називається *задачею закритого типу* або *збалансованою задачею*.

Збалансована транспортна задача завжди допустима і має оптимальний розв'язок.

Транспортну задачу розв'язують у вигляді транспортної таблиці.

Пошук розв'язку транспортної задачі, як і будь-якої іншої ЗЛП, починається з побудови початкового базисного розв'язку. Найпоширенішими методами його визначення є метод північно-західного кута та метод мінімальної вартості.

Суть методу *північно-західного кута* полягає у послідовному розподілі вантажу споживачам з урахуванням можливостей постачальників, починаючи з верхньої лівої (північно-західної) клітини транспортної таблиці.

Метод *мінімальної вартості* відрізняється від методу північно-західного кута тим, що замість північно-західної клітини на кожному кроці вибирається клітина з найменшим значенням транспортних витрат (найменшою вартістю) c_{ij}.

Метод мінімальної вартості, як правило, дозволяє знайти опорний план транспортної задачі, за яким загальна вартість перевезення вантажу менша порівняно із загальною вартістю перевезення, якщо план знайдено за методом північно-західного кута.

Транспортна задача є окремим випадком ЗЛП, отже, може бути розв'язана за допомогою симплекс-методу. Проте за великої кількості постачальників і споживачів задача стає громіздкою. Тому для знаходження оптимального плану транспортної задачі використовують спеціальний метод – *метод потенціалів*.

Він полягає в поступовому покращенні опорного плану і базується на двоїстому критерії оптимальності ТЗЛП.

Теорема (двоїстий критерій оптимальності для ТЗЛП). Допустимий базисний розв'язок $x^0 = \left\{ x_{ij}^0 \right\}$ оптимальний тоді і тільки тоді, коли існують такі потенціали $u_i,\ i=\overline{1,\ m};\ v_j,\ j=\overline{1,\ n}$, що

$$v_j - u_i = c_{ij},\ i, j : x_{ij}^0 > 0;$$
$$v_j - u_i \le c_{ij},\ i, j : x_{ij}^0 = 0.$$

Приклади для самостійного виконання

Завдання 1. Транспортне підприємство спеціалізується на перевезенні однорідного вантажу з пунктів відправлення до пунктів призначення. Нехай є чотири пункти відправлення A_1, A_2, A_3, A_4 та п’ять пунктів призначення B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Відомі обсяги запасів a_i $\left(i=\overline{1,\ 4}\right)$ у пунктах A_i $\left(i=\overline{1,\ 4}\right)$, обсяги потреб вантажу b_j $\left(j=\overline{1,\ 5}\right)$ у пунктах B_j $\left(j=\overline{1,\ 5}\right)$ та вартість перевезення c_{ij} $\left(i=\overline{1,\ 4},\ j=\overline{1,\ 5}\right)$ одиниці вантажу з пунктів A_i в пункти B_j. Вихідні дані задачі подаються у вигляді транспортної таблиці (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	a_2
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	a_3
A_4	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{45}	a_4
b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	–

Для збалансованих транспортних задач побудувати початковий допустимий розв’язок:

а) методом північно-західного кута;

б) методом мінімальної вартості.

Приклад 1.1:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	15	1	22	19	1	20
A_2	21	18	11	4	3	20
A_3	26	29	23	26	24	20
A_4	21	10	3	19	27	20
b_j	19	19	19	19	4	–

Приклад 1.2:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	17	20	29	26	25	15
A_2	3	4	5	15	24	15
A_3	19	2	22	4	13	15
A_4	20	27	1	17	19	15
b_j	11	11	11	11	16	–

Приклад 1.3:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	20	26	24	26	29	13
A_2	15	20	29	26	23	17
A_3	4	10	27	30	7	17
A_4	9	16	29	20	3	13
b_j	12	12	12	12	12	–

Приклад 1.4:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	17	9	20	30	15
A_2	13	4	24	26	26	15
A_3	22	24	30	27	29	19
A_4	25	12	11	24	23	11
b_j	9	24	9	9	9	–

Приклад 1.5:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	30	24	11	12	24	21
A_2	26	4	29	20	25	19
A_3	27	14	14	10	18	15
A_4	6	14	28	8	2	25
b_j	15	15	15	15	20	–

Приклад 1.6:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	30	2	5	6	15	16
A_2	5	29	9	5	7	15
A_3	16	24	14	6	26	14
A_4	13	28	4	25	8	15
b_j	6	6	13	20	15	–

Приклад 1.7:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	12	11	25	17	21	17
A_2	22	18	14	8	1	14
A_3	9	13	2	28	15	21
A_4	26	21	34	4	27	43
b_j	19	22	23	17	14	–

Приклад 1.8:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	24	4	2	3	28
A_2	20	10	15	27	7	13
A_3	15	15	12	25	19	15
A_4	2	6	3	5	5	30
b_j	27	16	25	11	7	–

Приклад 1.9:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	30	20	27	15	26	33
A_2	25	6	28	20	5	33
A_3	19	24	11	29	23	33
A_4	1	4	6	6	8	11
b_j	22	22	22	22	22	–

Приклад 1.10:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	12	6	29	19	21	13
A_2	14	7	30	10	10	27
A_3	15	27	28	11	24	16
A_4	1	23	25	15	13	14
b_j	14	14	14	14	14	–

Завдання 2. Застосувати метод потенціалів для збалансованих транспортних задач, умови яких сформульовано в завданні 1 теми 3.

Тема 4. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З РОЗБАЛАНСОМ

План

Постановка транспортної задачі лінійного програмування з розбалансом.

Література: [1, с. 31–38]; [2]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 4 студент повинен ***знати:*** поняття ТЗЛП з розбалансом, варіанти постановок ТЗЛП з розбалансом та знаходження її оптимального розв’язку; ***уміти:*** будувати потенціали для кожного постачальника і кожного споживача ТЗЛП з розбалансом, перевіряти отриманий розв’язок на оптимальність, знаходити новий розв’язок ТЗЛП з розбалансом.

Якщо загальний запас вантажу в пунктах відправлення не дорівнює сумарним потребам у пунктах призначення, тобто не виконується умова (3.1), то транспортна задача називається *задачею відкритого типу* або *задачею з розбалансом.*

Розглядають два випадки транспортної задачі з розбалансом:

1) якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то маємо дефіцит запасів. У цьому випадку вводимо фіктивного $(m+1)$-го постачальника із запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$; відповідну вартість перевезення беремо $c_{m+1,\ j} = 0$;

2) якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то маємо надлишок запасів. У цьому випадку вводимо фіктивного $(n+1)$-го споживача із заявкою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$; відповідну вартість перевезення беремо $c_{i,n+1} = 0$.

Після введення фіктивних постачальників або споживачів транспортної задачі з розбалансом стає збалансованою. Отже, для знаходження її розв'язку застосовують зазначені в темі 3 методи.

Приклади для самостійного виконання

Завдання 1. Застосувати метод потенціалів для транспортних задач з розбалансом.

Приклад 1.1:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	2	3	4	5	200
A_2	4	6	7	3	1	150
A_3	3	2	3	4	5	350
b_j	120	120	200	180	110	–

Приклад 1.2:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	4	5	8	6	180
A_2	7	3	6	4	5	300
A_3	8	5	6	5	3	230
b_j	110	140	220	190	120	–

Приклад 1.3:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	4	5	3	1	200
A_2	2	3	1	4	2	350
A_3	2	1	3	1	1	150
b_j	100	100	80	90	70	–

Приклад 1.4:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	4	3	8	3	150
A_2	2	3	7	1	4	200
A_3	5	1	1	2	1	350
b_j	130	120	180	200	110	–

Приклад 1.5:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	4	7	8	1	200
A_2	2	3	1	4	1	150
A_3	5	1	3	2	3	350
b_j	120	130	200	180	110	–

Приклад 1.6:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	1	2	3	4	150
A_2	7	8	1	1	2	320
A_3	4	1	3	1	2	400
b_j	100	120	100	200	300	–

Приклад 1.7:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	2	3	6	1	150
A_2	1	1	4	4	2	320
A_3	4	1	2	3	5	400
b_j	100	120	100	200	300	–

Приклад 1.8:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	4	7	2	1	200
A_2	2	5	1	4	3	350
A_3	2	3	1	2	1	150
b_j	100	100	80	90	70	–

Приклад 1.9:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	4	1	5	6	300
A_2	1	3	1	1	2	250
A_3	4	1	2	2	3	200
b_j	100	120	90	70	80	–

Приклад 1.10:

A_i	B_j					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	4	7	9	1	270
A_2	2	3	1	2	4	300
A_3	5	6	7	1	2	100
b_j	110	90	100	80	200	–

Тема 5. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ОПТИМАЛЬНІ ПРИЗНАЧЕННЯ. АЛГОРИТМ УГОРСЬКОГО МЕТОДУ

План

1. Постановка задачі про оптимальні призначення.

2. Угорський метод розв’язування задачі про оптимальні призначення.

Література: [1, с. 39–43]; [4]; [5]; [9].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 5 студент повинен ***знати:*** економічну постановку задачі про оптимальні призначення та суть алгоритму угорського методу; ***уміти:*** записувати математичну модель задачі про оптимальні призначення; застосовувати алгоритм угорського методу до поставленої задачі.

Економічна постановка задачі про оптимальні призначення.

Маємо n видів робіт та n виконавців цих робіт. Передбачено, що i-й виконавець може виконати будь-яку j-ту роботу, але з цим пов’язані витрати c_{ij}. Ці витрати утворюють квадратну матрицю $C = \{c_{ij}\}$, $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$. Потрібно призначити кожного виконавця на виконання однієї роботи так, щоб пов’язані з цим витрати були мінімальними.

Математична постановка задачі про оптимальні призначення.

Знайти матрицю

$$X = \{x_{ij}\} \quad \left(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, n}\right) \tag{5.1}$$

розв’язків задачі про призначення, де

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ÿêù î } i\text{-é âèêîí àâåöü âèêîí óº } j\text{-òó ðî áî òó,} \\ 0, \text{ ÿêù î } i\text{-é âèêîí àâåöü í å âèêîí óº } j\text{-òó ðî áî òó,} \end{cases} \tag{5.2}$$

за обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\left(i = \overline{1, n}\right); \tag{5.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1\left(j = \overline{1,n} \right). \qquad (5.4)$$

При цьому мінімізується цільова функція

$$F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}. \qquad (5.5)$$

Згідно з постановкою задачі про оптимальні призначення знаходження її розв’язку полягає у виборі в матриці $C = \{c_{ij}\}$ n елементів, по одному з кожного рядка (рядки відповідають виконавцям) і з кожного стовпця (стовпці відповідають роботам) так, щоб сума вибраних елементів, що дорівнює сумарним витратам, пов’язаних з призначенням, була найменшою.

Зауважимо, що задачі, у яких на змінні накладається умова (5.2), називаються задачами з булевими змінними. Крім того, задачу про оптимальні призначення можна розглядати як окремий випадок ТЗЛП, коли виконавців робіт можна подати як постачальників вантажу, а види робіт – як споживачів вантажу.

Дійсно, якщо умову (5.2) замінити умовою невід’ємності змінних, то задача (5.1) – (5.5) перетворюється на звичайну транспортну задачу, у якій обсяги виробництва становлять $a_i = 1$ $\left(i = \overline{1,n} \right)$ і обсяги споживання – $b_j = 1$ $\left(j = \overline{1,n} \right)$.

Якщо розв’язати цю задачу методом потенціалів, то за цілочислових a_i та b_j отримаємо цілочисловий оптимальний розв’язок, який автоматично задовольнятиме невраховане обмеження (5.2).

Проте специфіка задачі про оптимальні призначення дозволяє розв’язати її простішими методами. Одним з таких методів є угорський метод, запропонований угорськими вченими (звідси і назва методу – угорський).

Зауваження.

1) Якщо в задачі про оптимальні призначення (5.1) – (5.5) цільову функцію (5.5) необхідно максимізувати, то матрицю витрат C замінюють на матрицю $(-C)$.

2) Згідно з означенням в задачі про оптимальні призначення матриця витрат C – квадратна. Якщо матриця C не є квадратною, то вона перетворюється на таку додаванням необхідної кількості додаткових

рядків або стовпців з відповідними елементами $c_{ij}=0$. У першому випадку роботи, що отримали оптимальні призначення в додаткових рядках, залишаються без виконавців, у другому – виконавці, які отримали оптимальні призначення в додаткових стовпцях, залишаються без роботи.

Приклади для самостійного виконання

Завдання 1. Записати математичну модель поставленої задачі про оптимальні призначення.

Завдання 2. Розв’язати угорським методом задачі про оптимальні призначення за заданими матрицями витрат.

Приклад 2.1:

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 8 & 1 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 13 & 9 & 1 & 6 & 2 \\ 12 & 4 & 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 7 & 11 & 8 & 6 \\ 11 & 4 & 10 & 10 & 5 & 13 & 7 \\ 9 & 6 & 11 & 12 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 5 & 9 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.2:

$$C=\begin{pmatrix} 5 & 17 & 5 & 12 & 11 & 6 & 4 \\ 10 & 9 & 6 & 10 & 12 & 16 & 4 \\ 9 & 3 & 2 & 8 & 13 & 14 & 8 \\ 13 & 1 & 7 & 11 & 7 & 18 & 19 \\ 1 & 7 & 12 & 8 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & 13 & 9 & 14 & 20 & 21 \\ 10 & 2 & 6 & 6 & 15 & 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.3:

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 10 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 13 & 6 & 7 & 9 \\ 4 & 7 & 10 & 5 & 10 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 12 & 4 & 7 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 13 & 6 & 6 & 7 & 5 \\ 10 & 8 & 5 & 2 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 9 & 4 & 8 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.4:

$$C=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 15 & 2 & 4 & 9 & 5 \\ 12 & 11 & 1 & 13 & 8 & 11 & 13 \\ 3 & 2 & 12 & 9 & 10 & 14 & 1 \\ 7 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & 14 & 3 & 11 & 18 & 12 \\ 1 & 7 & 5 & 6 & 15 & 16 & 2 \\ 13 & 10 & 4 & 7 & 10 & 16 & 17 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.5:

$$C=\begin{pmatrix} 21 & 7 & 2 & 12 & 15 & 2 & 17 \\ 23 & 15 & 24 & 20 & 12 & 5 & 11 \\ 17 & 24 & 4 & 17 & 2 & 22 & 15 \\ 19 & 7 & 8 & 1 & 13 & 14 & 4 \\ 15 & 6 & 6 & 14 & 19 & 3 & 16 \\ 23 & 6 & 5 & 19 & 15 & 11 & 19 \\ 16 & 18 & 22 & 22 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.6:

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 9 & 4 & 6 & 4 & 12 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 7 & 8 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 5 & 12 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 4 & 6 & 6 & 7 \\ 5 & 10 & 9 & 3 & 8 & 5 & 4 \\ 6 & 9 & 5 & 10 & 9 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 3 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.7:

$$C=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 12 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 8 & 9 & 16 & 8 \\ 9 & 6 & 3 & 6 & 8 & 9 & 3 \\ 5 & 7 & 6 & 7 & 10 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 18 & 8 & 6 & 2 & 3 \\ 12 & 9 & 2 & 10 & 8 & 4 & 5 \\ 3 & 10 & 3 & 5 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.8:

$$C=\begin{pmatrix} 12 & 4 & 8 & 9 & 12 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 10 & 7 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & 10 & 4 & 12 & 5 & 6 & 10 \\ 11 & 12 & 16 & 5 & 7 & 8 & 12 \\ 6 & 7 & 4 & 6 & 7 & 2 & 1 \\ 12 & 5 & 7 & 12 & 9 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.9:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 8 & 6 & 6 & 10 & 12 & 5 & 4 \\ 12 & 7 & 8 & 7 & 4 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 6 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.10:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 4 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 2 & 5 & 12 & 13 & 4 \\ 6 & 5 & 1 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 6 & 10 & 4 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 10 & 8 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 12 & 6 & 3 & 6 & 12 \\ 5 & 9 & 4 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тема 6. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР

План

Загальна постановка матричної гри.

Література: [1, с. 43–50]; [3]; [4]; [5]; [10].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 6 студент повинен ***знати:*** основні поняття теорії матричних ігор, загальну постановку задачі; ***уміти***: розв’язувати матричну гру.

Ситуація, у якій беруть участь сторони, інтереси яких повністю або частково протилежні, називається *конфліктною.* Математичну модель такої ситуації називають *грою.* Отже, гра – це дійсний або формальний конфлікт, у якому є принаймні два гравці, кожен з яких намагається досягти своєї мети.

Матрична гра $(m \times n)$ визначається такими правилами. Грають два гравці P_1 і P_2. Перший з гравців вибирає число (стратегію) i $\left(i=\overline{1, m}\right)$, а другий – число j $\left(j=\overline{1, n}\right)$. Вибір гравці роблять одночасно і незалежно один від одного. Після цього гравець P_1 платить гравцю P_2 суму c_{ij}, що визначається умовами конкретної гри. Якщо $c_{ij} > 0$, то гравець P_1 платить гравцю P_2, якщо $c_{ij} < 0$, то гравець P_2 платить гравцю P_1 суму $\left|c_{ij}\right|$. Величини c_{ij} $\left(i=\overline{1, m},\ j=\overline{1, n}\right)$ відомі кожному з гравців. Потрібно вказати найкращий вибір для кожного гравця.

Розглянемо матрицю

$$C=\left(c_{ij}\right)=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

і назвемо її *платіжною матрицею*. Окрема партія в такій грі реалізується таким чином. Вибір числа i гравцем P_1 можна трактувати як вибір i-го рядка матриці *C*, а вибір числа j гравцем P_2 – вибір j-го стовпця матриці *C*. У теорії ігор виходять з припущення, що кожен гравець вважає свого суперника розумним і намагається не дати йому досягти найкращого результату.

Розв’язування матричної гри полягає у визначенні оптимальної стратегії кожного гравця, тобто стратегії, що забезпечує одному гравцю максимальний середній виграш за умови, що другий гравець дотримується своєї стратегії. У той же час другий гравець повинен отримати мінімальний середній програш за умови, що перший гравець дотримується своєї стратегії.

Загальна постановка матричної гри. Нехай перший гравець застосовує i стратегій $\left(i=\overline{1,\ m}\right)$, а другий – j стратегій $\left(j=\overline{1,\ n}\right)$. Кожній парі стратегій поставлено у відповідність число c_{ij} – виграш першого гравця (програш другого гравця). Із чисел c_{ij} складено платіжну матрицю

$$C=\left(c_{ij}\right)=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Знайти оптимальні стратегії кожного гравця та ціну гри.

Приклади для самостійного виконання

Завдання 1. Знайти розв'язок матричної гри, заданої платіжною матрицею $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$.

Приклад 1.1:

$$C=\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.2:

$$C=\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.3:

$$C=\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.4:

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.5:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 22 & 8 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.6:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.7:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 17 & 8 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.8:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.9:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.10:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 18 & 8 \end{pmatrix}.$$

Тема 7. ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

План

1. Загальна постановка задачі динамічного програмування.
2. Принцип оптимальності задачі динамічного програмування.
3. Найпростіші задачі динамічного програмування.

Література: [1, с. 51–69]; [3]; [5]; [6]; [7]; [8].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 7 студент повинен ***знати:*** загальну постановку задачі динамічного програмування, процес знаходження розв'язку багатокрокових задач, поняття умовної оптимізації; принцип оптимальності, постановку задачі про оптимальний режим набору висоти та швидкості, постановку задачі про найкоротший шлях на мережі, постановку задачі про оптимальний розподіл інвестицій; ***уміти***: відшукувати умовне оптимальне керування, розв'язувати задачу про оптимальний режим набору висоти та швидкості, задачу про найкоротший шлях на мережі, задачу про оптимальний розподіл ресурсів.

Динамічне програмування – це метод оптимізації, застосовний до операцій, у яких процес прийняття рішень розбивається на етапи (кроки). Отже, задачі динамічного програмування є багатоетапними або багатокроковими.

У результаті керування (прийняття певного рішення) X система (об'єкт) S переходить із початкового стану s_0 у стан s_n. Кожний крок оптимізується окремо, а рішення, згідно з яким система переходить із поточного стану до нового, вибирається з урахуванням його майбутніх наслідків і не завжди дає найбільший ефект на цьому етапі.

Загальна постановка задачі динамічного програмування. Нехай X_k $(k=\overline{1,n})$ – керування на k-му кроці, що переводять систему S зі стану s_0 у стан s_n; s_k – стан системи після k-го кроку керування: $s_0,\ s_1, \ldots,\ s_{k-1},\ s_k, \ldots,\ s_{n-1},\ s_n$. Із процесом зміни стану системи пов'язаний певний числовий критерій Z.

Задача полягає у знаходженні такого оптимального керування X з множини можливих керувань, яке б перевело систему S зі стану s_0 у стан s_n і мінімізувало чи максимізувало цільову функцію $Z=\sum\limits_{k=1}^{n} Z_k=\sum\limits_{k=1}^{n} F_k\left(s_{k-1}, X_k\right)$.

Зауваження. Для визначеності розглядатимемо задачу максимізації цільової функції.

Під час планування багатокрокового процесу враховується *умова відсутності післядії*: стан s_k, до якого перейшла система S, залежить лише від попереднього стану s_{k-1} і керування на k-му кроці X_k і не залежить від того, як система S потрапила в стан s_{k-1}.

Процес розв'язування задачі динамічного програмування доцільно починати зі знаходження оптимального розв'язку на останньому n-му кроці, надалі на двох останніх кроках, потім на трьох останніх кроках і далі до першого кроку.

Принцип оптимальності. Яким би не був стан системи S після будь-якої кількості кроків, на черговому кроці слід вибирати керування так, щоб ефективність розглядуваного кроку в сумі з оптимальною ефективністю на всіх наступних кроках була максимальною.

Для планування k-го кроку потрібно знати стан системи на $(k-1)$-му кроці. Якщо стан системи на $(k-1)$-му кроці невідомий, то роблять припущення про можливі стани системи на цьому кроці. Позначимо ці стани: $s_{k-1,1}$, $s_{k-1,2}$, $\ldots$, $s_{k-1,r}$. Для кожного припущення вибирають оптимальне керування на останньому k-му кроці, яке називається *умовним оптимальним*. Останній крок сплановано. Дійсно, у якому б стані не перебувала система на передостанньому кроці, вже відомо, яке керування потрібно застосувати на останньому кроці. Аналогічно діємо на $(k-1)$-му кроці, але умовне оптимальне керування вибираємо з урахуванням уже вибраних оптимальних управлінь на k-му кроці тощо. Поступово виконуючи вищезазначені дії приходимо до початкового стану s_0.

Для першого кроку припущення не робимо, оскільки стан s_0 відомий. Знаходимо оптимальне керування, ураховуючи всі умовні оптимальні керування, знайдені для другого кроку. Рухаючись від s_0 до s_n, отримуємо шукане оптимальне керування для всього процесу.

Динамічне програмування, на відміну від лінійного програмування, не має універсального методу знаходження розв'язку. Отже, до кожної задачі потрібно підібрати найбільш прийнятну методику згідно з принципами динамічного програмування.

Наведемо приклади постановок деяких найпростіших задач динамічного програмування.

Приклад 1. Задача про оптимальний режим набору висоти та швидкості літальним апаратом.

Нехай літак перебуває на висоті H_0 і має швидкість V_0. Він повинен піднятися на висоту H_k і досягти швидкості V_k. Відомі витрати палива під час піднімання літака з довільної висоти H_1 на будь-яку висоту $H_2 > H_1$ за сталої швидкості, а також витрати палива зі збільшенням швидкості від довільного значення V_1 до будь-якого значення $V_2 > V_1$ за сталої висоти.

Визначити таке оптимальне керування набиранням висоти та швидкості, за якого загальні витрати палива були б мінімальними.

З умови випливає, що стан фізичної системи характеризується двома параметрами: швидкістю V та висотою H, тому розв'язування виконуємо на площині VOH. Початковий стан $S_0\left(V_0, H_0\right)$ і кінцевий стан $S_k\left(V_k, H_k\right)$ визначено.

Для застосування методу динамічного програмування розбиваємо відрізки H_0H_k і V_0V_k відповідно на n_1 і n_2 етапів і вважаємо, що на кожному з етапів за один крок збільшується або висота або швидкість (рис. 7.1).

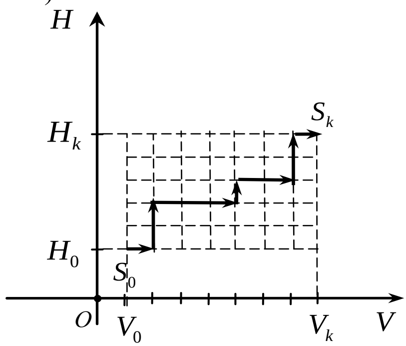

Рис. 7.1

З множини можливих траєкторій за допомогою керувань, обираємо ту, що мінімізує витрати палива.

Приклад 2. Задача про найкоротший шлях на мережі.

Уведемо деякі означення.

Графом називається пара (I, U), де $I = \{i_0, i_1, i_2, ...\}$ – множина вершин, а $U = \{(i, j) : i, j \in I\}$ – множина впорядкованих пар, які називають *дугами*, причому i – початок дуги, а j – її кінець. Граф називають *скінченним*, якщо скінченними є множини I та U.

Мережею називають граф (рис. 7.2), елементам якого поставлені у відповідність деякі параметри. Нехай кожній дузі $(i, j) \in U$ поставлено у відповідність число c_{ij}, яке може визначати вартість перевезення одиниці вантажу на цій дузі або довжину дуги (i, j).

Загальна постановка задачі про найкоротший шлях на мережі.

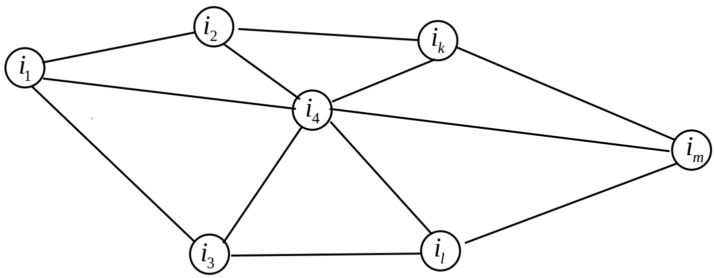

Рис. 7.2

Виділяються дві вершини s і t, які належать множині I. Шлях з вершини s у вершину t можна розуміти так (рис. 7.3):

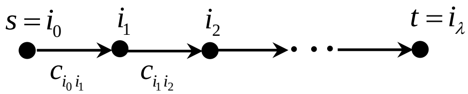

Рис. 7.3

Шлях від вершини s до вершини t позначатимемо через μ:

$$\mu = ((i_0, i_1); (i_1, i_2); (i_2, i_3); ...; (i_{\lambda-1}, i_\lambda)).$$

Довжину цього шляху можна записати у вигляді:

$$l(\mu) = \sum_{j=1}^{\lambda} c_{i_{j-1} i_j}.$$

Необхідно знайти шлях найкоротшої довжини з вершини s у вершину t.

Для розв’язування задачі про найкоротший шлях розроблено методи, що враховують її специфіку. Одним з них є метод динамічного програмування.

Для цього пронумеруємо вершини зліва направо і зверху донизу і запишемо довжину кожної ланки (дуги), що з’єднує відповідні вершини. Розіб’ємо процес на n етапів, а кожний етап – на $(n-1)$ крок. Етап полягає у відшуканні найкоротшого шляху і маршрутів, по яких вони проходять, від будь-якої однієї зафіксованої вершини до решти. Крок полягає у відшуканні найкоротшої відстані від фіксованої вершини до кожної з тих, що залишилися, через сусідні, найкоротші шляхи до яких уже визначено.

За методом динамічного програмування шукаємо найкоротші відстані не від фіксованої вершини до всіх інших, а відстані від усіх інших до фіксованої через сусідні вершини. Зв'язок, через який проходить найкоротший шлях, після кожного кроку позначаємо стрілкою.

Приклад 3. Задача про оптимальний розподіл інвестицій.

Планується розподіл початкової суми коштів (інвестицій) X_0 між n підприємствами P_1, P_2, …, P_n, причому кошти виділяються лише в розмірах, кратних заданому числу. Нехай надані підприємству P_k $\left(k=\overline{1, n}\right)$ на початку планового періоду кошти x дають прибуток $F_k(x)$.

Припустимо таке:

1) прибуток, отриманий від вкладення коштів в підприємство, не залежить від аналогічних вкладень коштів в інші підприємства;

2) прибуток, отриманий від різних підприємств, виражається в однакових одиницях;

3) загальний прибуток дорівнює сумі прибутків, отриманих від розподілу коштів по всіх підприємствах.

Визначити таку кількість інвестицій кожному підприємству, щоб сумарний прибуток був максимальний.

Приклади для самостійного виконання

Завдання 1. Розв’язати задачі динамічного програмування.

Приклад 1. Задача про оптимальний режим набору висоти та швидкості.

Нехай літак перебуває в точці S_0 на висоті H_0 і має швидкість V_0. Він повинен піднятися в точку S_k на задану висоту H_k, а його швидкість треба довести до значення V_k. Відомі витрати палива під час піднімання літака з будь-якої висоти H_1 на будь-яку висоту $H_2 > H_1$ за сталої швидкості, а також витрати палива зі збільшенням швидкості від будь-якого значення V_1 до будь-якого значення $V_2 > V_1$ за сталої висоти (рис. 7.4).

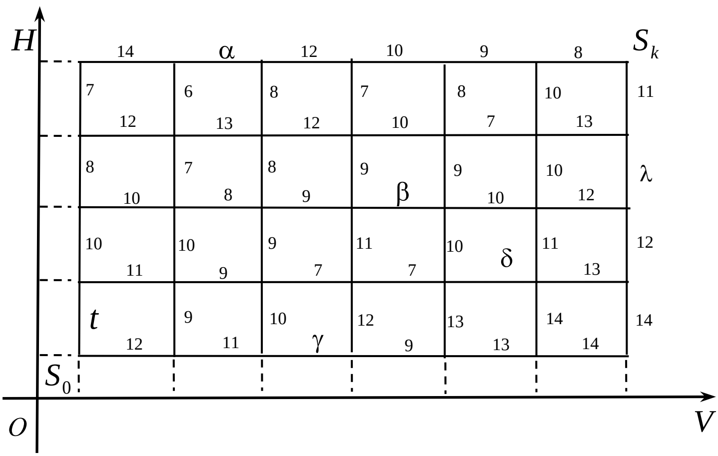

Рис. 7.4

Параметри α, β, γ, δ, λ, t для кожного варіанта задачі наведено в табл. 7.1.

Визначити оптимальне керування набиранням висоти та швидкості, за якого загальні витрати палива мінімальні.

Таблиця 7.1

Номер варіанта задачі	Значення параметрів					
	α	β	γ	δ	λ	t
1	5	9	7	14	18	15
2	16	10	17	9	19	10
3	13	8	11	15	14	11
4	8	7	10	17	9	8
5	10	10	12	5	13	17
6	12	17	15	10	18	7
7	14	12	9	11	12	13
8	7	13	12	10	15	10
9	16	18	7	13	8	7
10	12	16	9	11	15	14

Приклад 2. Задача про найкоротший шлях на мережі.

На заданій мережі доріг є декілька маршрутів, якими доставляється вантаж з пункту (вершини) 1 у пункт (вершину) 11 (рис. 7.5). Відомі вартості перевезення одиниці вантажу між певними пунктами мережі. Параметри α, β, γ, δ, λ, t для різних варіантів задачі наведено в табл. 7.2.

Знайти найкоротший шлях доставки вантажу на мережі з вершини 1 у вершину 11.

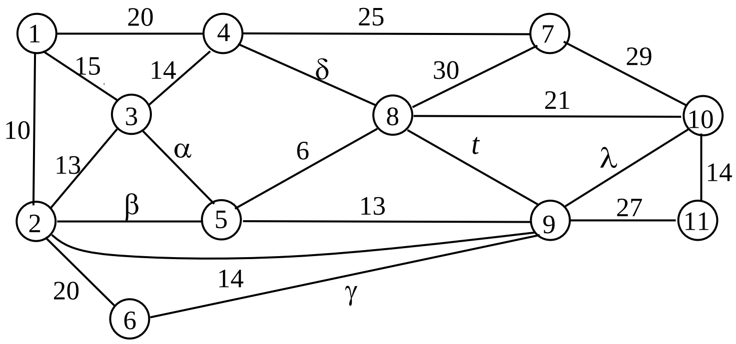

Рис. 7.5

Таблиця 7.2

Номер варіанта задачі	Значення параметрів					
	α	β	γ	δ	λ	t
1	15	19	17	4	18	5
2	6	21	27	9	19	10
3	3	6	11	5	4	21
4	13	4	10	17	19	8
5	5	10	22	5	24	17
6	12	17	5	10	21	7
7	24	12	9	21	12	23
8	7	23	2	10	18	10
9	16	18	17	23	8	7
10	18	26	19	11	15	4

Приклад 3. Розв'язати задачу про оптимальний розподіл інвестицій.

Знайти оптимальний розподіл інвестицій, які потрібно розподілити між підприємствами. Інвестиції, що виділені кожному підприємству, дають прибуток $f_k(x)$, $k=\overline{1,3}$. Величина інвестицій та прибуток, отриманий від укладених в кожне підприємство інвестицій, наведено в табл. 7.3 – 7.12.

Таблиця 7.3

Інвестиції	Прибуток підприємств		
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	13	20	13
2	25	24	19
3	32	44	20
4	37	39	23
5	45	45	42

Таблиця 7.4

Інвестиції	Прибуток підприємств		
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	11	9	13
2	33	17	29
3	45	28	40
4	48	51	51
5	56	55	62

Таблиця 7.5

Інвестиції	Прибуток підприємств		
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
10	2	1,3	1,7
20	2,4	1,9	4
30	4,4	2	5,5
40	5,9	2,3	6,3
50	6,5	4,2	7,1

Таблиця 7.6

Інвестиції	Прибуток підприємств		
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	1,3	2	1,3
2	2,9	2,4	1,9
3	3	4,4	2,7
4	3,3	4,9	3,5
5	4,2	5,5	5,1

Таблиця 7.7

Інвестиції	Прибуток підприємств		
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
10	43	30	23
20	55	34	29
30	62	54	30
40	70	59	33
50	75	65	52

Таблиця 7.8

Інвестиції	Прибуток підприємств		
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	33	40	23
30	45	44	29
40	52	64	40
50	57	69	43
60	65	75	62

Таблиця 7.9

Інвестиції	Прибуток підприємств		
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
30	52	20	13
40	58	24	19
50	62	44	20
60	70	49	23
70	75	54	42

Таблиця 7.10

Інвестиції	Прибуток підприємств		
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
10	4,3	2	1,3
20	5,5	3,4	3
30	6,2	5,4	4,2
40	7	5,9	5,3
50	8,5	6,5	6,2

Таблиця 7.11

Інвестиції	Прибуток підприємств		
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	11	17	10
30	2	21	13
40	29	41	17
50	27	49	20
60	42	57	39

Таблиця 7.12

Інвестиції	Прибуток підприємств		
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	24	31	24
2	36	35	29
3	43	55	40
4	50	61	53
5	65	72	62

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ластівка І. О.* Вища та прикладна математика : методичні рекомендації до розв’язання задач з математичних методів дослідження операцій / І. О. Ластівка, О. С. Давидов, І. В. Шевченко. – К. : НАУ, 2015. – 72 с.

2. *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособие для студ. экон. спец. вузов. / И. Л. Акулич. – М. : Высш. шк., 1986 – 319 с.

3. *Кремер Н. Ш*. Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н. Ш.Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2003. – 407 с.

4. *Зайченко Ю. П.* Исследование операцій : учеб. / Ю. П. Зайченко. – 6-е изд., перераб. и доп.– К. : Слово, 2003. – 688 с.

5. *Бурий В. В*. Математичне програмування. Модуль 2. Спеціальні методи математичного програмування : навч. посіб. / В. В. Бурий, О. С. Давидов, І. В. Шевченко. – К. : НАУ, 2008. – 124 с.

6. *Крюков М. М.* Дослідження операцій у транспортних системах у прикладах і задачах : навч. посіб. / М. М. Крюков, Т. В. Кравець, Т. В. Крижановська та ін. – К. : ДЕТУТ, 2010. – 199 с.

7. *Кузнецов Ю. Н.* Математическое программирование : учеб. / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – М. : Высш. шк., 1980 – 302 с.

8. *Романовская А. М.* Динамическое программирование : учеб. пособие / А. М. Романовская, М. В. Мендзив. – Омск : Омск. ин-т (филиал) РГТЭУ, 2010. – 58 с.

9. *Таха Х.А.* Введение в исследование операцій. – 7-е изд. **:** пер. с англ. / Хемди А. Таха. – М. : Издат. дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

10. *Ульянченко О. В.* Дослідження операцій в економіці : підручник / О.В. Ульянченко. – Х. : Гриф, 2002. – 580 с.

Навчальне видання

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Математичні методи дослідження операцій

Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів напряму підготовки
6.140103 «Туризм»

Укладачі: ЛАСТІВКА Іван Олексійович
ДАВИДОВ Олександр Сергійович
ШЕВЧЕНКО Ірина Вікторівна