МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів
технічних спеціальностей

Київ 2022

УДК

Укладачі:
І.О. Ластівка – д.т.н., проф., зав. каф.

В.В.Фортуна – к.ф.-м.н., доц.

Г.В. Тугай – ст. викл.

Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Глухов О.Д.

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету(протокол №___ від ________ 2022 р.).

Вища математика. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли: методичні рекомендації до самостійної роботи для студентів технічних спеціальностей / уклад. : І.О. Ластівка, В.В. Фортуна, Г.В. Тугай. – К. : НАУ, 2022. – 56 с.

Укладено відповідно до програм курсів «Вища математика». Методичні рекомендації містять приклади розв’язання типових задач розділу «Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли», запитання для самоперевірки і завдання для самостійного виконання з відповідями.

Для студентів технічних спеціальностей.

ЗМІСТ

ВСТУП

Самостійна робота здобувача вищої освіти є основним способом оволодіння навчальним матеріалом у час, вільний від обов'язкових аудиторних занять.

Мета виконання самостійної роботи – поглиблення, узагальнення та закріплення теоретичних знань і практичних умінь студентів з дисципліни «Вища математика» шляхом вироблення вміння самостійно працювати з навчальною літературою.

Самостійна робота здобувачів вищої освіти здійснюється у формі підготовки до лекційних і практичних занять, виконання індивідуального домашнього завдання та виконання модульної контрольної роботи. Така підготовка передбачає самостійне вивчення теоретичного матеріалу з кожної теми, що наданий у рекомендованій літературі та конспекті лекцій.

Мета вивчення навчальної дисципліни «Вища математика» – опанування здобувачами вищої освіти основних математичних понять і методів, необхідних для застосування теоретичного матеріалу під час розв'язування задач.

Завдання вивчення навчальної дисципліни – розвиток логічного та алгоритмічного мислення здобувачів вищої освіти, опанування методами дослідження та розв'язування математичних задач.

У запропонованій методичній праці підібрано задачі для самостійної та індивідуальної роботи студентів.

Матеріал кожної теми даної методичної розробки відповідає робочим програмам технічних спеціальностей дисципліни «Вища математика», зокрема одному з її розділів «Кратні інтеграли. Криволінійні та поверхневі інтеграли». Кожна тема містить рекомендовану літературу, основні методичні рекомендації, розв'язані типові приклади, запитання та завдання для самоперевірки та завдання для самостійного виконання, що сприятиме кращому розумінню, засвоєнню та можливості застосування основних теоретичних положень.

Методичні рекомендації призначено для самостійної роботи здобувачів вищої освіти технічних спеціальностей і орієнтовано на теоретичну та методичну підтримку навчального процесу студентів.

Тема 1. ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

План

1. Обчислення подвійного інтеграла в прямокутних декартових координатах
2. Заміна змінних в подвійному інтегралі. Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах
3. Застосування подвійного інтеграла

Література: [1]- [5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 1 студент повинен ***знати:*** означення подвійного інтеграла та його властивості, методи обчислення, геометричні та механічні застосування подвійного інтеграла; ***уміти:*** обчислювати подвійні інтеграли в декартових та полярних координатах, змінювати межі інтегрування в повторному інтегралі, застосовувати подвійні інтеграли до обчислення площ та об'ємів.

1. Обчислення подвійного інтеграла в прямокутних декартових координатах.

Нехай область D є правильною в напрямку осі Oy (рис. 1.1), тобто обмежена зліва прямою $x=a$, справа $x=b,$ знизу і зверху двома неперервними лініями $y=\varphi_1(x),$ $y=\varphi_2(x),$ $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x),$ $a\le x\le b.$ Тоді подвійний інтеграл по області D зводиться до повторного за формулою:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (1.1)$$

В формулі (1.1) спочатку обчислюють внутрішній інтеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy,$ вважаючи змінну x сталою. Далі обчислюють зовнішній інтеграл з межами від a до b від отриманої функції.

Аналогічно, якщо область D обмежена неперервними кривими $x=\psi_1(x),$ $x=\psi_2(y),$ причому $\psi_1(y)\le\psi_2(y),$ $c\le y\le d$, та прямими

$y=c$, $y=d$, тобто є правильною в напрямку осі Ox (рис. 1.2), то справджується рівність

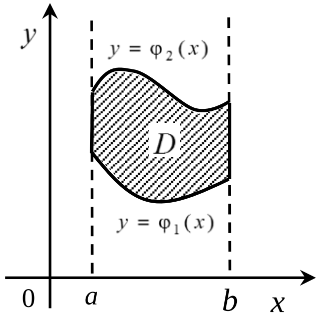

Рис. 1.1

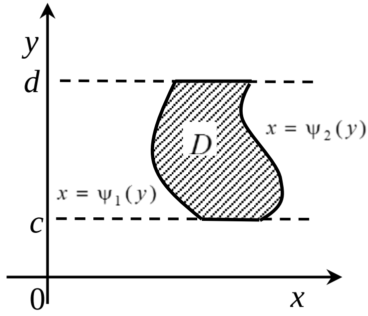

Рис. 1.2

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \qquad (1.2)$$

Для обчислення подвійного інтеграла по області, правильній в напрямку обох осей Ox і Oy, можна використовувати як формулу (1.1), так і формулу (1.2). Зокрема, якщо $D=\{a\le x\le b;\quad c\le y\le d\}$ – прямокутник, то:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx. \qquad (1.3)$$

Якщо область D не задовольняє наведеним для (1.1) і (1.2) умовам, то у цьому випадку область D розбивають на частини, які є правильними в напрямку однієї з осей, не мають спільних внутрішніх точок, а їх об’єднанням є область D. Подвійний інтеграл по області D є сумою інтегралів по всіх частинах, на які її розбито.

2. Заміна змінних в подвійному інтегралі. Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах

Для спрощення обчислень подвійного інтеграла $\iint_D f(x,y)dxdy$, де $f(x,y)$ — неперервна в області D, інколи переходять від прямокутних декартових координат x і y до нових криволінійних координат u і v. Якщо змінні x,y пов’язані з u,v співвідношеннями

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),$$

де неперервні і диференційовні функції $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ встановлюють взаємно однозначну відповідність між областю D площини Oxy і областю G площини Ouv, то справедлива формула заміни змінних в подвійному інтегралі:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_G f(x(u,v), y(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv, \qquad (1.4)$$

де якобіан

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Перехід у подвійному інтегралі до *полярних координат* ρ і φ, які пов'язані з декартовими координатами x та y формулами $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, здійснюється за формулою

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho \qquad (1.5)$$

де D_1 — область, яка відповідає області D у полярній системі координат.

У полярній системі координат за незалежну змінну вибирають φ, а ρ розглядають як функцію від φ, тобто $\rho = \rho(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$.

3. Застосування подвійного інтеграла

1. Об'єм циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y)$ $(f(x, y) \ge 0)$, з бічною поверхнею, паралельною осі Oz, та основою D в площині Oxy, обчислюється за формулою:

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy. \qquad (1.6)$$

2. Площа області D обчислюється за формулою:

$$S_D = \iint_D dxdy. \qquad (1.7)$$

3. Площу частини поверхні, заданої функцією $z = f(x, y)$, яка проектується однозначно на область D координатної площини Oxy, можна знайти за формулою:

$$S_{\text{пов}} = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\,dxdy. \qquad (1.8)$$

4. Маса матеріальної пластини з густиною $\gamma(x, y)$, що має форму області D в площині Oxy:

$$m=\iint\limits_D \gamma\left(x,y\right)dxdy. \qquad (1.9)$$

5. Статичні моменти такої пластини відносно осей *Ox* та *Oy* можна представити у вигляді:

$$M_x=\iint\limits_D x\cdot\gamma\left(x,y\right)dxdy;\ M_y=\iint\limits_D y\cdot\gamma\left(x,y\right)dxdy. \qquad (1.10)$$

6. Координати x_c та y_c центра мас пластини:

$$x_c=\frac{M_x}{m},\ y_c=\frac{M_y}{m}. \qquad (1.11)$$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Обчислити повторний інтеграл $\int\limits_0^3 dy\int\limits_{-1}^0\left(x^2+2y\right)dx.$

Розв'язання. Обчислимо внутрішній інтеграл, вважаючи що *y* – стала:

$$\int\limits_{-1}^0\left(x^2+2y\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+2y\cdot x\right)\Bigg|_{-1}^0=\frac{0^3}{3}+2y\cdot 0-\frac{(-1)^3}{3}-2y\cdot(-1)=2y+\frac{1}{3}.$$

Зовнішній інтеграл дорівнює:

$$\int\limits_0^3\left(2y+\frac{1}{3}\right)dy=\left(y^2+\frac{y}{3}\right)\Bigg|_0^3=3^2+\frac{3}{3}-\left(0^2+\frac{0}{3}\right)=10.$$

Отже, $\int\limits_0^3 dy\int\limits_{-1}^0\left(x^2+2y\right)dx=10.$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{x^2}\left(14x^2y+3x\right)dy.$

Розв'язання. Послідовно обчислюємо внутрішній (*y* – змінна, *x* – стала) та зовнішній інтеграли:

$$\int\limits_x^{x^2}\left(14x^2y+3x\right)dy=\left(14x^2\frac{y^2}{2}+3xy\right)\Bigg|_x^{x^2}=7x^6+3x^3-7x^4-3x^2;$$

$$\int\limits_0^1\left(7x^6+3x^3-7x^4-3x^2\right)dx=\left(x^7+\frac{3}{4}x^4-\frac{7}{5}x^5-x^3\right)\Bigg|_0^1=-\frac{13}{20}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D\left(2x+3y\right)dxdy$, якщо область D прямокутник $\left\{(x;y)\middle|\ 1\le x\le 2;\ 2\le y\le 3\right\}$.

Розв'язання. Шуканий інтеграл дорівнює

$$\iint_D (2x+3y)\,dx\,dy = \int_1^2 dx \int_2^3 (2x+3y)\,dy .$$

Для функції $2x+3y$, яка розглядається як функція від x при сталому y, первісною буде функція $2xy+3\frac{y^2}{2}$. Тому

$$\int_2^3 (2x+3y)\,dy = \left(2xy+3\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_2^3 = 6x-4x+\frac{27}{2}-6 = 2x+\frac{15}{2}.$$

Шуканий подвійний інтеграл дорівнює:

$$\int_1^2 \left(2x+\frac{15}{2}\right)dx = \left(2\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{15}{2}x\right)\Bigg|_1^2 = 4+15-\left(1+\frac{15}{2}\right) = 10,5 .$$

Приклад 4. Розставити межі інтегрування в подвійному інтегралі $\iint_D f(x,y)dxdy$, якщо область інтегрування D обмежена лініями $y=0$, $y=x^2$, $x+y=2$.

Розв'язання. Область інтегрування D зображено на рис.1.3. Права вітка параболи $y=x^2$ і пряма $x+y=2$ перетинаються в точці $(1;1)$. Будь-яка пряма, паралельна осі Ox, перетинає межу області D не більше ніж в двох точках; отже, можна використати формулу (1.2), де $\psi_1(y)=\sqrt{y}$, $\psi_2(y)=2-y$, $0\le y\le 1$.

Таким чином, маємо:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx.$$

Якщо порядок інтегрування змінити і використати формулу (1.1), то результат буде записаний у вигляді суми двох повторних інтегралів, оскільки верхня межа складається з двох ліній, що мають різні аналітичні вирази: $y=x^2$ при $0\le x\le 1$ та $y=2-x$ при $1\le x\le 2$. Тому

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy.$$

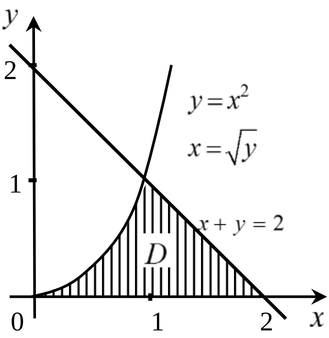

Рис. 1.3

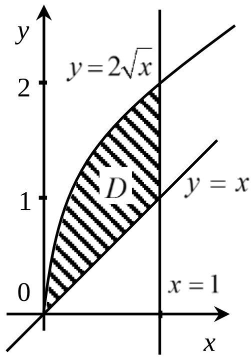

Рис. 1.4

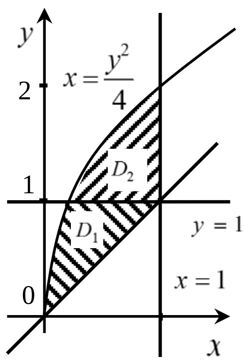

Рис. 1.5

Приклад 5. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі

$$I=\int_0^1 dx\int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy\,.$$

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування D. Область інтегрування розміщена у смузі між прямими $x=0$ та $x=1$, обмежена зверху кривою $y=2\sqrt{x}$ і знизу прямою $y=x$ (рис. 1.4). Для зміни порядку інтегрування, спроектуємо область D на вісь Oy, отримаємо відрізок $[0;2]$. З рівнянь кривих виражаємо x через y: $x=y$ і $x=\frac{y^2}{4}$. Оскільки права межа області D складається з двох прямих $x=y$ і $x=1$, які перетинаються в точці з ординатою $y=1$, то розіб'ємо область на частини: D_1: $0\le y\le 1$; $y^2/4\le x\le y$ і D_2: $1\le y\le 2$; $y^2/4\le x\le 1$ (рис. 1.5). За формулою (1.2):

$$I=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{1} f(x,y)dx.$$

Приклад 6. Розставити межі інтегрування в подвійному інтегралі $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, якщо область D обмежена колами $x^2+y^2=4$ і $x^2+2x+y^2=0$.

Розв'язання. Область інтегрування D (рис. 1.6) не є правильною в напрямку осі Oy. Але, вісь Oy розбиває D на три правильні відносно Oy області:

D_1: $-2 \le x \le 0;\quad \sqrt{-2x-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$,

D_2: $-2 \le x \le 0;\quad -\sqrt{4-x^2} \le y \le -\sqrt{-2x-x^2}$,

D_3: $0 \le x \le 2;\quad -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$, тому

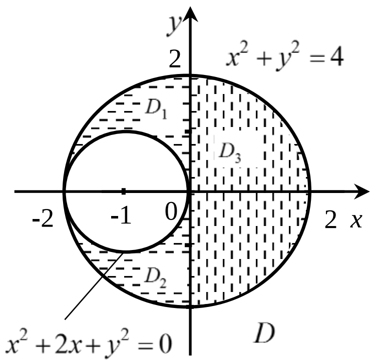

Рис. 1.6

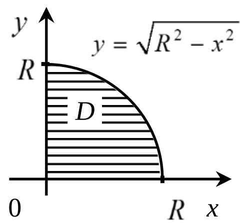

Рис. 1.7

$$I = \int_{-2}^{0} dx \int_{\sqrt{-2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-2}^{0} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{-2x-x^2}} f(x,y)dy + \int_{0}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл по області D, що обмежена лініями $x=0$, $y=0$, $x^2+y^2=R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ $I = \iint\limits_D x^2 y\, dxdy$.

Розв'язання. Область інтегрування D – четвертина круга радіуса R з центром в початку координат $(0;0)$, що розміщена в першій чверті. Ця область є правильною, тому інтегрування можна проводити, як за формулою (1.1) так і за формулою (1.2), але з вигляду підінтегральної функції зручніше використати формулу (1.1). Межі зовнішнього інтеграла $a=0, b=R$. Межі внутрішнього інтеграла $\varphi_1(x)=0$ і $\varphi_2(x)=\sqrt{R^2-x^2}$. Маємо:

$$I = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} x^2 y\, dy = \int_0^R x^2 dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\, dy = \frac{1}{2}\int_0^R x^2 \left(y^2 \Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \right) dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^R x^2(R^2-x^2)\,dx=\frac{1}{2}\left(R^2\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^R=\frac{R^5}{15}.$$

Приклад 8. Обчислити подвійний інтеграл $I=\iint\limits_D (y-x)dxdy$ по області D, обмеженій прямими $y=-\frac{1}{3}x+2$, $y=-\frac{1}{3}x+5$, $y=x+1$, $y=x-3$.

Розв'язання. Область інтегрування D зображена на рис. 1.8. Введемо нові змінні $u=y-x$, $v=y+\frac{1}{3}x$, тоді прямі $y=x+1$ і $y=x-3$ перейдуть, відповідно, в прямі $u=1$ і $u=-3$ на площині Ouv. Прямі $y=-\frac{1}{3}x+2$ і $y=-\frac{1}{3}x+5$ перейдуть в прямі $v=2$ і $v=5$. Отже, область D на площині Oxy перетворюється в прямокутник D' на площині Ouv (рис. 1.9).

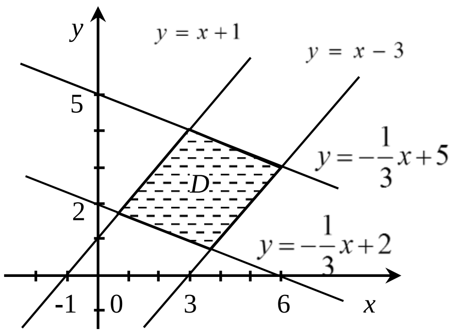

Рис. 1.8

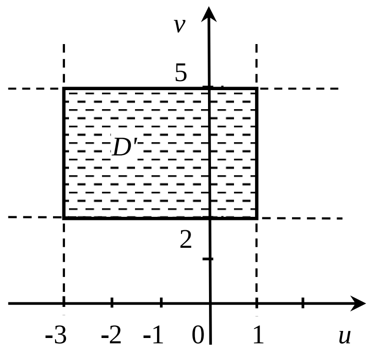

Рис. 1.9

Виразимо старі координати x і y через нові

$$x=-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v,\quad y=\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v$$

і обчислимо якобіан перетворення

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\dfrac{3}{4} & \dfrac{3}{4}\\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4}\end{vmatrix}=-\frac{9}{16}-\frac{3}{16}=-\frac{12}{16}=-\frac{3}{4}.$$

Таким чином, за формулою (1.4):

$$I=\iint\limits_D (y-x)dxdy=\iint\limits_{D'}\left[\left(\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v\right)-\left(-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v\right)\right]\frac{3}{4}dudv=$$

$$=\frac{3}{4}\iint\limits_{D'}ududv=\frac{3}{4}\int_2^5 dv\int_{-3}^{1}udu=\frac{3}{4}\int_2^5 dv\left.\frac{u^2}{2}\right|_{-3}^{1}=-9.$$

Приклад 9. Обчислити подвійний інтеграл $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,$ якщо область D – круг $x^2+(y-2)^2\le 4.$

Розв'язання. Оскільки область інтегрування D (рис. 1.10) – круг радіуса 2 з центром в точці (0; 2) і підінтегральна функція містить суму x^2+y^2, то в інтегралі перейдемо до полярних координат.

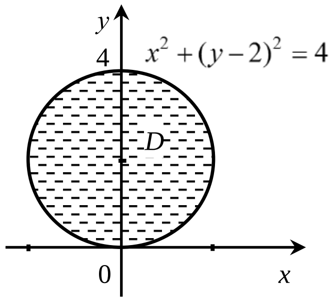

Рис. 1.10

В полярних координатах рівняння кола $x^2+(y-2)^2=4$ набуває вигляду $\rho=4\sin\varphi.$ Область D переходить в область D': $0\le\rho\le 4\sin\varphi,\ \ 0\le\varphi\le\pi.$

За формулою (1.5) маємо:

$$I=\iint\limits_{D'}((\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2)\rho d\rho d\varphi=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{4\sin\varphi}\rho^3 d\rho=$$

$$=\int_0^{\pi}\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{4\sin\varphi}d\varphi=4^3\int_0^{\pi}\sin^4\varphi d\varphi=4^2\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)^2 d\varphi=$$

$$=8\int_0^{\pi}\left(3-4\cos 2\varphi+\cos 4\varphi\right)d\varphi=8\left.\left(3\varphi-2\sin 2\varphi+\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\right|_0^{\pi}=24\pi.$$

Приклад 10. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2).$

Розв'язання. Оскільки рівняння лемніскати містить вираз $x^2 + y^2$, то зручно перейти до полярних координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ і обчислити площу фігури за формулою $S = \iint\limits_{D'} \rho d\rho d\varphi$.

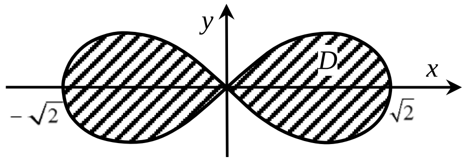

Рис. 1.11

Крива симетрична відносно осей координат (рис. 1.11), тому достатньо знайти площу частини фігури *D*, що міститься в першій чверті, і отриманий результат помножити на 4.

Рівняння лемніскати в полярних координатах:

$$\rho^2 = 2\cos 2\varphi,$$

причому кут φ змінюється від 0 до $\pi/4$, тому що $\cos 2\varphi > 0$.

Таким чином, область D': $0 \le \rho \le \sqrt{2\cos 2\varphi}$; $0 \le \varphi \le \pi/4$. Тоді

$$S = 4\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho d\rho = 4\int_0^{\pi/4} d\varphi \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{\sqrt{2\cos 2\varphi}} = 4\int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = 2.$$

Приклад 11. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2 + 2$; $x + y - 3 = 0$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

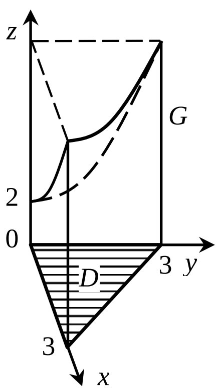

Рис. 1.12

Розв'язання. Задане тіло обмежене зверху частиною параболоїда обертання $z = x^2 + y^2 + 2$, а знизу – частиною площини Oxy, розміщеною між прямою $y = 3 - x$ та осями координат (рис. 1.12). За формулою для знаходження (1.6) об'єму циліндричного тіла:

$$V = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2 + 2\right) dx\,dy .$$

Розставляючи межі інтегрування отримаємо:

$$V=\int_0^3 dx\int_0^{3-x}\left(x^2+y^2+2\right)dy=\int_0^3\left(x^2y+\frac{y^3}{3}+2y\right)\Bigg|_0^{3-x}dx=$$

$$=\int_0^3\left(\left(x^2+2\right)(3-x)+\frac{(3-x)^3}{3}\right)dx==\int_0^3\left(6x^2-\frac{4x^3}{3}-11x+15\right)dx=$$

$$=\left(6\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{x^4}{4}-11\cdot\frac{x^2}{2}+15x\right)\Bigg|_0^3=54-27-\frac{99}{2}+45=22,5(\text{куб.од.}).$$

Приклад 12. Знайти масу круглої пластинки радіуса *R*, якщо густина $\gamma(x,y)$ матеріалу пластини в кожній точці пропорційна відстані точки від центра круга: $\gamma(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2}$.

Розв'язання. За формулою (1.9) маємо $m=\iint\limits_D k\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$.

Областю інтегрування є круг радіуса R, $x^2+y^2\le R$. Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.
Маємо

$$m=k\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho^2dr=k2\pi\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^R=\frac{2}{3}k\pi R^3 .$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається подвійним інтегралом від функції $f(x,y)$ по області *S*?
2. Сформулювати геометричний зміст подвійного інтеграла.
3. Сформулювати властивості подвійного інтеграла.
4. Яка область називається правильною в напрямі осі Ox ? Oy ?
5. Як знайти площу області за допомогою подвійного інтеграла?
6. Записати формулу для знаходження об'єму тіла.
7. Записати формулу для знаходження площі поверхні.
8. Записати формулу для знаходження маси, координат центра мас неоднорідної пластини.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчисліть інтеграли.

1.1. $\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$. **1.2.** $\int_0^2 dx \int_{x/2}^{x} \frac{xdy}{x^2+y^2}$.

1.3. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sin\varphi}^{1} \rho d\rho$. **1.4.** $\int_0^a dy \int_{y-a}^{2y} xydx$.

Завдання 2. Розставити межі інтегрування в подвійному інтегралі $\iint_D f(x,y)dxdy$, якщо область D обмежена лініями:

2.1. $y=0,\ y=1,\ y=x,\ y=x-2.$ **2.2.** $x^2+y^2=4.$ **2.3.** $y=0,\ \ y=1-x^2.$

Завдання 3. Змінити порядок інтегрування.

3.1. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$ **3.2.** $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$. **3.3.** $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$.

Завдання 4. Обчисліть подвійні інтеграли, перейшовши до полярних координат.

4.1. $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)dx$. **4.2.** $\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy.$

4.3. $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy$.

Завдання 5. Обчислити подвійні інтеграли в полярній системі координат.

5.1. $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy,$ де $D-$ круг $x^2+y^2\le 4.$

5.2. $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де $D-$ кільце $1\le x^2+y^2\le 4.$

5.3. $\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy,$ де $D:\ 1\le x^2+y^2\le 9,\ \ y\ge\frac{x}{\sqrt{3}},\ \ y\le x\sqrt{3}.$

Завдання 6. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2=4x$, $x+y=3$, $y=0$.

Завдання 7. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$.

Завдання 8. Обчислити об'єми тіл, обмежених вказаними поверхнями.

8.1. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=4,\ y=4,\ z=x^2+y^2+1.$

8.2. $z=x^2+y^2,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=4.$

8.3. $z=9-y^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ 3x+4y=12 (y\geq 0).$

Завдання 9. Знайти координати центра мас рівностороннього трикутника, якщо одна з його вершин розміщена в початку координат, а висота опущена з цієї вершини лежить на осі Ox. Поверхнева густина стала і дорівнює одиниці.

Завдання 10. Обчислити момент інерції однорідного прямокутника $(\gamma=1)$, обмеженого прямими $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, відносно початку координат.

Відповіді: **1.1.** $\ln\frac{25}{24}$. **1.2.** $\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **1.3.** $\frac{\pi}{2}$. **1.4.** $\frac{11}{24}a^4$. **2.1.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{y+2} f(x,y)dx$. **2.2.** $\int\limits_{-2}^{2} dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$. **2.3.** $\int\limits_{-1}^{1} dx\int\limits_0^{1-x^2} f(x,y)dy$. **3.1.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$. **3.2.** $\int\limits_{-1}^{1} dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$. **3.3.** $\int\limits_{-1}^{0} dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy+\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} f(x,y)dy$. **4.1.** $\frac{\pi a^4}{8}$. **4.2.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **4.3.** $\frac{\pi}{6}a^3$. **5.1.** $\frac{16\pi}{3}$. **5.2.** 6π. **5.3.** $\frac{\pi^2}{6}$. **6.** $\frac{10}{3}$. **7** $\sqrt{2}-1$. **8.1.** $186\frac{2}{3}$. **8.2.** $\frac{1}{6}$. **8.3.** 45. **9.** $x_c=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $y_c=0$. **10.** $\frac{ab(a^2+b^2)}{3}$.

Тема 2. ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

План

1. Обчислення потрійного інтеграла

2. Потрійний інтеграл в циліндричній та сферичній системах координат

3. Застосування потрійних інтегралів

Література: [1-5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 2 студент повинен ***знати:*** означення потрійного інтеграла та його властивості, методи обчислення, геометричні та механічні застосування потрійного інтеграла; ***уміти:*** обчислювати потрійні інтеграли в декартових, сферичних та циліндричних координатах, змінювати межі інтегрування в повторному інтегралі, застосовувати потрійні інтеграли до обчислення об'ємів.

1. Обчислення потрійного інтеграла

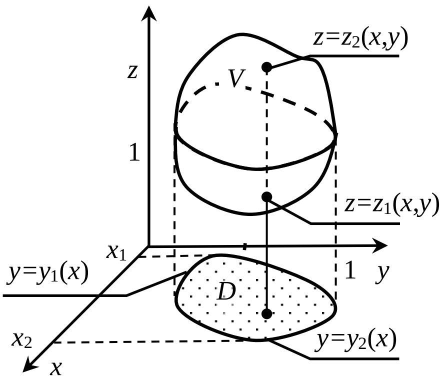

Рис. 2.1

Нехай область V (рис.2.1) знизу обмежена поверхнею $z = z_1(x, y)$, а зверху поверхнею $z = z_2(x, y)$.

Область D – проекція області V на площину Oxy, обмежена лініями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x = x_1$, $x = x_2$.

Тоді потрійний інтеграл від функції $f(x, y, z)$ по області V обчислюється за формулою

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (2.1)$$

Для зведення потрійного інтеграла $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$ до повторного:

1) проектуємо поверхню S, що обмежує об'єм V на площину Oxy;

2) через довільну точку області D проводимо пряму паралельну осі Oz; точка входу прямої в область є нижньою межею інтегрування

$z = z_1(x, y)$, а точка виходу $z = z_2(x, y)$ – верхньою межею інтегрування по змінній z;

3) вважаючи x та y сталими обчислюємо внутрішній інтеграл $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz;$

4) від отриманої функції двох змінних x та y обчислюємо подвійний інтеграл по області D.

Якщо прямі, паралельні осі Oz, перетинають поверхню, що обмежує область V більш ніж в двох точках, то потрібно розбити область V на частини так, щоб для кожної з частин точок перетину було не більше двох. Додаємо інтеграли по кожній з отриманих частин, обчислені описаним вище способом, і отримуємо інтеграл по всій области V.

Аналогічно формулі (2.1) потрійний інтеграл можна звести до повторного, проектуючи поверхню S на площину Oyz або на площину Oxz.

2. Потрійний інтеграл в циліндричній та сферичній системах координат

Зв'язок між прямокутними і циліндричними координатами точки M виражається формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z,$$

де $\rho \ge 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

Формула переходу до циліндричних координат має вигляд

$$\iiint\limits_{G} f(x, y, z)dV = \iiint\limits_{G'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz \qquad (2.2)$$

До циліндричних координат найчастіше переходять тоді, коли область інтегрування G утворена циліндричною поверхнею, проекцією якої на відповідну площину є область D у формі круга, кільця, сектора тощо.

Прямокутні і сферичні координати точки M пов'язані формулами

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \; y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

де $r \ge 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.

Формула переходу до сферичних координат має вигляд

$$\iiint\limits_{G} f(x, y, z)dV = \iiint\limits_{G'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta. \; (2.3)$$

Рівняння сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ у сферичних координатах спрощується до вигляду $r = R$. Тому до сферичних координат найчастіше переходять тоді, коли область інтегрування G є куля, її частина — кульовий сектор тощо.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z-3)^4}$.

Розв'язання. Обчислимо внутрішній інтеграл по змінній z, вважаючи x та y сталими:

$$\int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z-3)^4} = \int\limits_0^{1-x-y} \frac{d(x+y+z-3)}{(x+y+z-3)^4} = -\frac{1}{3}\frac{1}{(x+y+z-3)^3}\Bigg|_0^{1-x-y} =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{(-2)^3} + \frac{1}{3}\frac{1}{(x+y-3)^3} = \frac{1}{24} + \frac{1}{3}\frac{1}{(x+y-3)^3}.$$

Інтегруємо отриману функцію по y ($x -$ стала):

$$\int\limits_0^{1-x}\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{3}\frac{1}{(x+y-3)^3}\right)dy = \left(\frac{1}{24}y - \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{(x+y-3)^2}\right)\Bigg|_0^{1-x} =$$

$$= \frac{1-x}{24} - \frac{1}{6}\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\frac{1}{(x-3)^2} = -\frac{x}{24} + \frac{1}{6}\frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{x}{4}\right).$$

Підставляємо отриманий вираз у зовнішній інтеграл:

$$\frac{1}{6}\int\limits_0^1\left(\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{x}{4}\right)dx = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{(x-3)} - \frac{x^2}{8}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{144}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \iiint\limits_G (2x+3y-z)dxdydz,$ де область G обмежена площинами $z=0,\ z=3,\ x=0,\ y=0,\ x+y=2.$

Розв'язання. Область G(рис.2.2) – пряма призма, основами якої є трикутники в площинах $z=0,\ z=3$ і бічні грані лежать в площинах $x=0,\ y=0,\ x+y=2.$ Розставимо межі інтегрування. Зовнішнє інтегрування проведемо по змінній z: $0 \le z \le 3.$ Проекцією області на площину є трикутник $0 \le y \le 2-x,\ 0 \le x \le 2.$ Тому

$$I=\int_0^3 dz\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(2x+3y-z)dy=\int_0^3 dz\int_0^2\left(2xy+\frac{3y^2}{2}-zy\right)\Bigg|_0^{2-x}dx=$$

$$=\int_0^3 dz\int_0^2\left(4x-2x^2+\frac{3(2-x)^2}{2}-z(2-x)\right)dx=\int_0^3 dz\left(2x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}(x-2)^3+\right.$$

$$\left.+\frac{z}{2}(x-2)^2\right)\Bigg|_0^2=\int_0^3\left(8-\frac{16}{3}+4-2z\right)dz=\left(\frac{20}{3}z-z^2\right)\Bigg|_0^3=11.$$

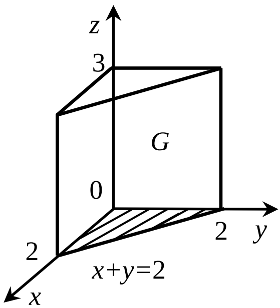

Рис. 2.2

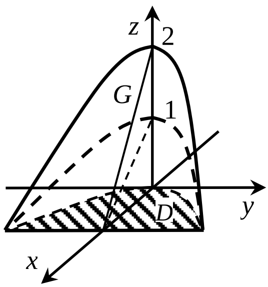

Рис. 2.3

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\iiint\limits_G y\,dxdydz,$ де область G обмежена поверхнями $z=1-x,\ z=2-2x,\ x=y^2.$

Розв'язання. Проекцією області G(рис. 2.3) на площину Oxy є є область D: $y^2\le x\le 1,\ -1\le y\le 1.$ Для кожної точки $M(x,y,z)\in G$ маємо $1-x\le z\le 2-2x,$ тому

$$I=\int_{-1}^{1}dy\int_{y^2}^{1}dx\int_{1-x}^{2-2x}y\,dz=\int_{-1}^{1}dy\int_{y^2}^{1}yz\Big|_{1-x}^{2-2x}dx=\int_{-1}^{1}dy\int_{y^2}^{1}y(1-x)dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}y\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{y^2}^{1}dy=\int_{-1}^{1}y\left(\frac{1}{2}-y^2+\frac{y^4}{2}\right)dy=\left(\frac{y^2}{4}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^6}{12}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=0.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I=\iiint\limits_G x^2dxdydz,$ де область G обмежена циліндром $x^2+y^2=4$ та площинами $z=0,\ z=3.$

Розв'язання. Проекцією області G (рис. 2.4) на площину Oxy є круг D: $-2\le x\le 2,\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}.$

В області інтегрування z змінюється від 0 до 3, тому

$$I=\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}x^2dy\int_{0}^{3}dz=\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}x^2dy\,z\Big|_0^3=3\int_{-2}^{2}\left(x^2y\right)\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dx=$$

$$=12\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\begin{vmatrix}x=2\sin t\\ dx=2\cos t dt\end{vmatrix}=12\cdot 16\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos t\cos t dt=$$

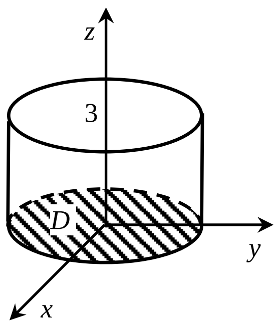

Рис. 2.4

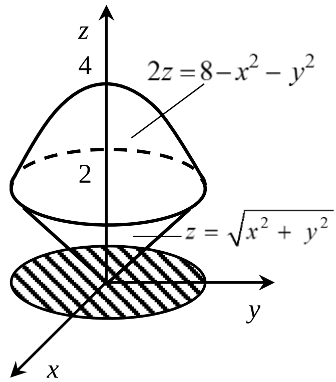

Рис. 2.5

$$=24\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt=24\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\pi/2}=12\pi.$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $I=\iiint\limits_G z dxdydz,$ де область G обмежена поверхнями $z^2=\sqrt{x^2+y^2},\quad 2z=8-x^2-y^2.$

Розв'язання. Проекцією області G (рис. 2.5) на площину Oxy є круг радіуса 2 з центром в початку координат, тому для інтегрування зручно перейти до циліндричних координат. Рівняння поверхонь в циліндричних координатах: $z=\rho$ та $z=4-\rho^2/2$. Область G переходить в область G_1:

$$\rho\le z\le (8-\rho^2)/2;\quad 0\le\rho\le 2;\ 0\le\varphi\le 2\pi.$$

За формулою (2.2) маємо:

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 d\rho\int_{\rho}^{(8-\rho^2)/2}z\rho dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^2\rho\,\frac{z^2}{2}\Big|_{\rho}^{(8-\rho^2)/2}d\rho=\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}\times$$

$$\times\int_0^2\left(\frac{1}{4}\left(8-\rho^2\right)^2\rho-\rho^3\right)d\rho=\pi\left(-\frac{1}{4\cdot3\cdot2}\left(8-\rho^2\right)^3-\frac{1}{4}\rho^4\right)\Bigg|_0^2=\frac{44}{3}\pi.$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $I=\iiint\limits_G zdxdydz,$ де область G обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=y$ (рис. 2.6).

Розв'язання. Запишемо рівняння поверхні у сферичних координатах: $r=\sin\varphi\sin\theta,\quad 0\le\varphi\le\pi,\quad 0\le\theta\le\pi.$

За формулою (2.3):

$$I=\int_0^\pi d\varphi\int_0^\pi d\theta\int_0^{\sin\varphi\sin\theta} r\cdot r^2\sin\theta dr=\int_0^\pi d\varphi\int_0^\pi \sin\theta\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{\sin\varphi\sin\theta}d\theta=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^\pi d\varphi\int_0^\pi \sin^5\theta\sin^4\varphi d\theta=-\frac{1}{4}\int_0^\pi \sin^4\varphi d\varphi\int_0^\pi(1-\cos^2\theta)^2d\cos\theta=$$

$$=-\frac{1}{16}\int_0^\pi(1-\cos2\varphi)^2d\varphi\left(\cos\theta-\frac{2}{3}\cos^3\theta+\frac{\cos^5\theta}{5}\right)\Bigg|_0^\pi=$$

$$=-\frac{1}{16}\left(\frac{3}{2}\varphi-\sin2\varphi+\frac{1}{4}\sin4\varphi\right)\Bigg|_0^\pi\left(-2+\frac{4}{3}-\frac{2}{5}\right)=-\frac{1}{16}\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{-16}{15}=\frac{\pi}{10}.$$

Приклад 7. Обчислити об'єм тіла, обмеженого зверху сферою $x^2+y^2+z^2=1$ і знизу конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Об'єм обчислимо за формулою $V=\iiint\limits_G dxdydz.$

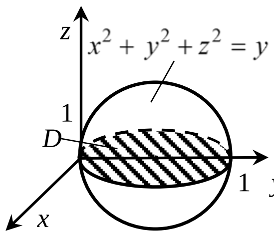

Рис. 2.6

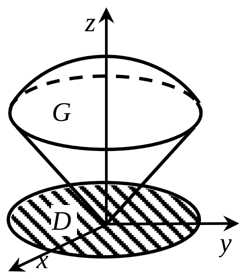

Рис. 2.7

Оскільки область інтегрування (рис. 2.7) є частиною кулі, перейдемо до сферичних координат. Рівняння кулі набуває вигляду $r=1,$ конуса $\theta=\pi/4$. Область G в сферичних координатах:

$$0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le \pi/4, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

За формулою (2.3) отримаємо

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 r^2 \sin\theta dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \int_0^1 r^2 dr =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/4} \frac{r^3}{3}\Big|_0^1 = 2\pi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\frac{1}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi \text{ (куб.од.)}.$$

Приклад 8. Обчислити координати центра маси тіла, обмеженого поверхнями $x+y=1$, $z=x^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $\left(\gamma(x,y,z)=1\right)$.

Розв'язання. Для обчислення координат центра маси однорідного тіла використаємо формули

$$x_c = \frac{\iiint\limits_G \gamma x dxdydz}{m}; \; y_c = \frac{\iiint\limits_G \gamma y dxdydz}{m}; \; z_c = \frac{\iiint\limits_G \gamma z dxdydz}{m}; \; m = \iiint\limits_G \gamma dxdydz.$$

Спочатку знайдемо масу тіла:

$$m = \iiint\limits_G 1 dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x^2} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy = \int_0^1 x^2 y\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 x^2(1-x)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Далі маємо

$$\iiint\limits_G x dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x^2} x dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x z\Big|_0^{x^2} dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^3 dy =$$

$$= \int_0^1 x^3 y\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x^3 - x^4\right) dx = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{20};$$

$$\iiint\limits_G y dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y dy \int_0^{x^2} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 y dy = \int_0^1 \frac{x^2 y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{60};$$

$$\iiint\limits_G z dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x^2} z dz = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (x^2)^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 x^4 y\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^4 y\Big|_0^{1-x} dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{60}.$$

В результаті отримаємо:

$$x_c=\frac{1/20}{1/12}=\frac{3}{5},\quad y_c=\frac{1/60}{1/12}=\frac{1}{5},\quad z_c=\frac{1/60}{1/12}=\frac{1}{5}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається потрійним інтегралом від функції $f(x,\ y,z)$ по області G?
2. Сформулювати геометричний зміст потрійного інтеграла.
3. Сформулювати властивості потрійного інтеграла.
4. Як обчислюється потрійний інтеграл?
5. Як знайти об'єм тіла за допомогою подвійного інтеграла?
6. Формула переходу до циліндричних координат в потрійному інтегралі.
7. Формула переходу до сферичних координат.
8. Записати формулу для знаходження маси, координат центра мас неоднорідного тіла.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчислити задані повторні інтеграли.

1.1. $\int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 dz.$ **1.2.** $\int_0^a dx\int_0^b dy\int_0^c (x+y+z)dz.$ **1.3.** $\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y xyzdz.$

Завдання 2. Обчислити потрійні інтеграли.

2.1. $\iiint\limits_G zdxdydz,$ де область G: обмежена площиною $z=1$ та конусом $z^2=x^2+y^2.$

2.2. $\iiint\limits_G (x+y+z)dxdydz,$ де область G обмежена площинами $x=0,$ $y=0,$ $z=1$ та параболоїдом $z=x^2+y^2$. (у першому октанті).

2.3. $\iiint\limits_G ydxdydz,$ де область G обмежена площинами $x=0,$ $y=0,$ $z=1,$ $x+y+z=2.$

Завдання 3. Обчислити інтеграли, переходячи до циліндричних або сферичних координат.

3.1. $\iiint\limits_G x^2y^2dxdydz,$ де область G: $x^2+y^2\le 1,\ z\le x^2+y^2,\quad z\ge 0.$

3.2. $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,$ де область G: $y^2\le 2x-x^2,\ 0\le z\le 2.$

3.3. $\iiint\limits_G x^2dxdydz,$ де область G: $x^2+y^2+z^2\le 4.$

3.4 $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,$ де область G: $1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\quad z\ge 0.$

3.5. $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,$ де область G: $x^2+y^2+z^2\le x.$

Завдання 4. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями.

4.1. $z=4-y^2,\ z=y^2+2,\quad x=-1,\ x=2.$

4.2. $z=x^2+y^2,\ z=x^2+2y^2,\ y=x,\ y=2x,\ x=1.$

4.3. $x^2+y^2+z^2=4z,\ x^2+y^2\le z^2.$

4.4. $y=2\sqrt{x},\ x=2\sqrt{y},\ z=4-x,\ z\ge 0.$

Завдання 5. Знайти масу тіла заданої G форми з заданою густиною $\gamma(x,y,z).$

5.1. $G-$ куб з ребром 1, $\gamma(x,y,z)=x+y+z.$

5.2. G: $x^2+y^2+z^2\le 4,\quad \gamma(x,y,z)=x+y+z.$

Завдання 6. Знайти статичні моменти прямокутного паралелепіпеда з ребрами a,b,c відносно його граней.

Відповіді: **1.1.** 6. **1.2.** $abc(a+b+c)/2.$ **1.3.** $a^6/48.$ **2.1.** $\pi/4.$ **2.2.** $-7(15\pi+16)/480.$ **2.3.** $-5/72.$ **3.1.** $\pi/32.$ **3.2.** $32/9.$ **3.3.** $64\pi/15.$ **3.4.** $124\pi/15.$ **3.5.** $\pi/10.$ **4.1.** 8. **4.2.** $7/12.$ **4.3.** $8\pi.$ **4.4.** $176/15.$ **5.1.** $3/2.$ **5.2.** $8\pi.$ **6.** $a^2bc/2,\ ab^2c/2,\ abc^2/2.$

Тема 3. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

План

1. Криволінійні інтеграли першого роду.
2. Застосування криволінійного інтеграла першого роду
3. Криволінійні інтеграли другого роду.
4. Застосування криволінійних інтегралів другого роду.

Література: [1-5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати:*** означення та властивості криволінійних інтегралів першого та другого роду; ***уміти***: вміти обчислювати інтеграли в різних системах координат.

1. Криволінійні інтеграли першого роду.

Криволінійний інтеграл першого роду (криволінійний інтеграл по довжині дуги L) позначається так:

$$I=\int\limits_{L} f(M)ds=\int\limits_{L} f(x,y)ds \qquad (3.1)$$

Основні властивості криволінійного інтеграла першого роду

1. $\int\limits_{AB} f(x,y)ds=\int\limits_{BA} f(x,y)ds$

2. Якщо крива L є об'єднанням дуг L_1 та L_2, то

$$\int\limits_{L} f(M)ds=\int\limits_{L_1} f(M)ds+\int\limits_{L_2} f(M)ds.$$

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду

Нехай крива задана параметричними рівняннями

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad t_0\le t\le T, \qquad (3.2)$$

де функції x і y та їх похідні x', y' − неперервні. Тоді інтеграл (3.1) обчислюємо за формулою:

$$\int\limits_{L} f(x,y)ds=\int\limits_{t_0}^{T} f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt \qquad (3.3)$$

Якщо просторову криву L задано рівняннями $x=x(t),\quad y=y(t),$ $z=z(t),\quad t_0\le t\le T,$ то

$$\int\limits_{L} f(x,y,z)ds=\int\limits_{t_0}^{T} f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}dt\ .$$

У випадку кривої, заданої явним рівнянням $y=y(x),\ a\le t\le b,$

$$\int\limits_{L} f(x,y)ds=\int\limits_{a}^{b} f\left(x,y(x)\right)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx \qquad (3.4)$$

Якщо криву L задано у полярних координатах: $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, то

$$\int\limits_L f(x,y)ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi \qquad (3.5)$$

2. Застосування криволінійного інтеграла першого роду

Механічні застосування криволінійних інтегралів першого роду

Якщо $\rho = \rho(x,y)$ лінійна густина кривої L, то маса всієї кривої дорівнює

$$m = \int\limits_L \rho(x,y)ds. \qquad (3.6)$$

Статичні моменти кривої L відносно осей Ox і Oy:

$$M_y = \int\limits_L \rho(x,y)xds, \quad M_x = \int\limits_L \rho(x,y)yds, \qquad (3.7)$$

Моменти інерції $I_{x,}I_y, I_0$ щодо осей Ox і Oy і початку координат:

$$I_x = \int\limits_L y^2\rho(x,y)ds\,,\; I_y = \int\limits_L x^2\rho(x,y)ds\,,\; I_0 = \int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)\rho(x,y)ds \qquad (3.8)$$

Координати центра мас матеріальної кривої:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int\limits_L \rho(x,y)xds}{\int\limits_L \rho(x,y)ds}; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int\limits_L \rho(x,y)yds}{\int\limits_L \rho(x,y)ds}. \qquad (3.9)$$

Обчислення площі циліндричної поверхні

Нехай задана циліндрична поверхня (рис. 3.1), напрямною якої в площині Oxy є лінія L і твірні якої паралельні осі Oz.

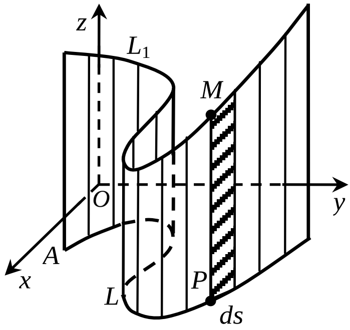

Рис. 3.1.

Площа S частини поверхні, що знаходиться між лініями L та L_1, де апліката точки $M \in L_1$, є функцією координат точки P лінії $L: z = f(x, y)$ знаходиться за формулою

$$S = \int_L f(x,y)ds. \tag{3.10}$$

3. Криволінійні інтеграли другого роду

Криволінійний інтеграл II роду від функції $f(x, y)$ по ***координаті*** x на кривій L позначається символом

$$I = \int_L f(x,y)dx \tag{3.11}$$

Аналогічно, ***криволінійний інтеграл II роду*** від функції $f(x, y)$ по ***координаті*** y на кривій L

$$I = \int_L f(x,y)dy \tag{3.12}$$

Криволінійний інтеграл II роду загального виду записують так

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy \tag{3.13}$$

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_L P(x,y,z)dx + \int_L Q(x,y,z)dy + \int_L R(x,y,z)dy.$$

При зміні напряму інтегрування криволінійний інтеграл II роду змінює знак:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (3.14)$$

Якщо розбити криву *AB* на частини *AK* і *KB*, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{AK} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{KB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (3.15)$$

Обчислення криволінійного інтеграла II роду

Нехай крива L задана параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_0 \le t \le T, \qquad (3.16)$$

тоді криволінійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_0}^{T} \left(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t) \right) dt \qquad (3.17)$$

Для просторової кривої *L*: $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t_0 \le t \le T,$

$$\int\limits_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} \left(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + \right.$$

$$\left. + R(x(t),y(t),z(t))z'(t) \right) dt \qquad (3.18)$$

Якщо лінія задана у явному вигляді $y = y(x), \ a \le x \le b,$ то

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \left(P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x) \right) dx \qquad (3.19)$$

Якщо рівняння лінії задано рівнянням $x = x(y), \quad c \le y \le d,$ то

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{c}^{d} \left(P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y) \right) dx \qquad (3.20)$$

Умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування

Інтеграл $I = \int\limits_{L} Pdx + Qdy$ не залежить від шляху інтегрування, якщо функції $P, \ Q$ та похідні $\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \ \dfrac{\partial P}{\partial y}$ неперервні і

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \tag{3.21}$$

Якщо умова (3.21) виконується, то вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$, тобто $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dU(x,y)$ і тоді

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx+Qdy=U\left(x_2,y_2\right)-U\left(x_1,y_1\right). \tag{3.22}$$

Якщо вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом, то інтеграл по замкненому контуру дорівнює нулю

$$\oint_L Pdx+Qdy=0\,.$$

Аналогічно, умова незалежності інтеграла $I=\int_L Pdx+Qdy+Rdz$ від шляху інтегрування має вигляд (порівняйте з умовою (3.21)):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x};\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y};\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Тоді $Pdx+Qdy+Rdz=dU(x,y,z)$ і

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} Pdx+Qdy+Rdz=U(x_2,y_2,z_2)-U(x_1,y_1,z_1).$$

4. Застосування криволінійних інтегралів другого роду.

Обчислення площі плоскої фігури

Криволінійний інтеграл $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ по замкнутому контуру не залежить від вибору початкової точки, а залежить тільки від напрямку обходу. Площа ***правильної*** області D обмеженої замкненим контуром L (рис. 3.2) знаходиться за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx \tag{3.23}$$

У формулі (3.23) при інтегруванні по L цей контур обходиться проти годинникової стрілки (контур орієнтований додатно).

Якщо в області D функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні разом з похідними $\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}$, то має місце формула ***Остроградського-Гріна***

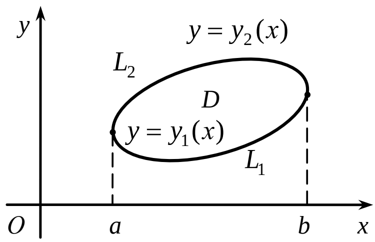

Рис.3.2.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy, \qquad (3.24)$$

де L – границя області *D*, а інтегрування вздовж контуру L проводиться у додатному напрямку.

Робота змінної сили

Змінна сила $\vec{F}\left(P(x,y);Q(x,y)\right)$ на криволійній ділянці AB виконує роботу, яка знаходиться за формулою

$$A = \int_{(AB)} Pdx + Qdy \qquad (3.25)$$

У випадку просторової кривої AB

$$A = \int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz\,.$$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \int_L xy^2 ds,$ де $L-$відрізок прямої між точками $O(0;0)$ і $A(4;3)$

Розв'язання. Рівняння прямої OA має вигляд $y = \frac{3}{4}x,\ 0 \le x \le 4.$ За формулою (3.4) маємо

$$I = \int_L xy^2 ds = \int_0^4 x\left(\frac{3}{4}x\right)^2 \sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\,dx = \frac{45}{64}\int_0^4 x^3 dx = 45$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, де L – дуга кривої, заданої параметрично: $x = t\cos t,\;\; y = t\sin t,\; 0 \le t \le \sqrt{3}.$

Розв'язання. Користуючись формулою (3.3):

$$ds = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2}\,dt = \sqrt{1+t^2}\,dt.$$

Значить, інтеграл першого роду дорівнює згідно (3.3):

$$I = \int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\cdot\sqrt{1+t^2}\,dt = \int_0^{\sqrt{3}} t\sqrt{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+t^2}\,d\left(1+t^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1+t^2\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\left(4^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{7}{3}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I = \int_L \frac{y}{x}\,dx,$ де L дуга параболи $y = \frac{1}{2}x^2$, обмежена точками $A\left(1;\frac{1}{2}\right)$ і $B(2;2)$.

Розв'язання. Оскільки крива L задана виразом $y = \frac{1}{2}x^2,$ то

$$ds = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx = \sqrt{1+x^2}\,dx\,.$$

При русі вздовж дуги параболи від точки $A\left(1;\frac{1}{2}\right)$ до точки $B(2;2)$ змінна x змінюється від значення 1 до 2. За формулою (3.4) отримаємо

$$I = \int_L \frac{y}{x}\,ds = \int_1^2 \frac{x^2}{2x}\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^2 \sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2) =$$

$$= \frac{1}{6}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{6}(\sqrt{125} - \sqrt{8}).$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I = \int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds,$ де L коло $x^2 + y^2 = 2x$.

Розв'язання. В полярних координатах $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$

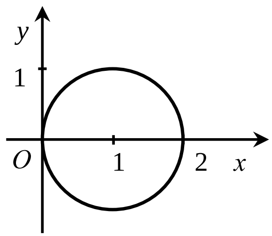

Рис. 3.3

рівняння кола набуває вигляду $\rho^2 = 2\rho\cos\varphi$, $\rho = 2\cos\varphi$. Оскільки коло розташоване в тій частині площини, де $x \ge 0$, то кут φ змінюється від значення $-\frac{\pi}{2}$ до значення $\frac{\pi}{2}$. Диференціал дуги

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2},$$

$ds = \sqrt{2^2\cos^2\varphi + 2^2\sin^2\varphi}d\varphi = 2d\varphi$. З формули (3.5) отримаємо

$$I = \int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}ds = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\rho(\varphi)d\varphi = 2^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = 2^2\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 8.$$

Приклад 5. Обчислити момент інерції півкола $x^2 + y^2 = 1$, $y \ge 0$, відносно осі x, якщо лінійна густина маси дорівнює $\rho(x, y) = |x|$..

Розв'язання. Параметризуємо коло $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$. Осьовий момент інерції I_x визначається за формулою (3.8):

$$I_x = \int\limits_L y^2\rho(x, y)ds = \int\limits_0^{\pi}\sin^2 t\left|\cos t\right|ds = \int\limits_0^{\pi}\sin^2 t\left|\cos t\right|\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos t\, dt - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 t\cos t\, dt = \frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 6. Обчислити площу бічної поверхні половини еліптичного циліндра $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, обмеженого площиною $z = y$ (рис. 3.4).

Розв'язання. Відповідно до формули (3.10) та враховуючи умову $z = y$ площа поверхні дорівнює криволінійному інтегралу

$$S = \int\limits_L zds = \int\limits_L yds,$$

де L – дуга еліпса $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1,\ y\ge 0$. Параметричні рівняння еліпса

$$x=\sqrt{5}\cos t,\ \ y=3\sin t,\ \ 0\le t\le \pi.$$

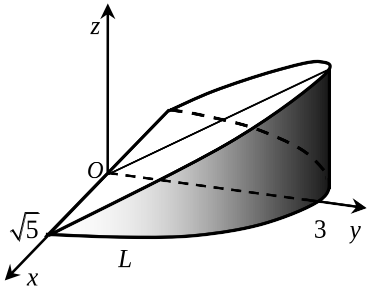

Рис. 3.4.

Маємо $x'_t=-\sqrt{5}\sin t$, $y'_t=3\cos t$,

$$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt=\sqrt{9\cos^2 t+5\sin^2 t}dt=\sqrt{4\cos^2 t+5}dt$$

Отже,

$$S=\int_0^{\pi}3\sin t\sqrt{4\cos^2 t+5}dt=3\int_{-1}^{1}\sqrt{4u^2+5}du=6\int_0^1\sqrt{4u^2+5}du=$$

$$=3\left[u\sqrt{4u^2+5}+\frac{5}{2}\ln\left|2u+\sqrt{4u^2+5}\right|\right]_0^1=3(3+\frac{5}{4}\ln 5).$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, де L – відрізок дуги параболи $y=x^2$, обмежений точками $A(-1;1)$ та $B(1;1)$ (рис.3.5).

Розв'язання. Оскільки, $y=x^2$, то $y'=2x$ і при русі від точки A до точки B змінна x змінюється від –1 до 1, то за формулою (3.19) отримаємо

$$I=\int\limits_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy=\int_{-1}^{1}\Big((x^2-2x\cdot x^2)+(x^4-2x\cdot x^2)2x\Big)dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2-2x^3+2x^5-4x^4)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{4x^5}{5}\right)_{-1}^{1}=\frac{2}{3}-\frac{8}{5}=-\frac{14}{15}$$

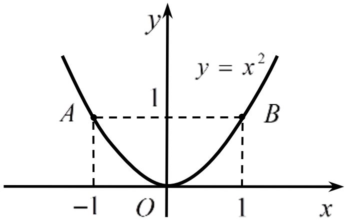

Рис. 3.5

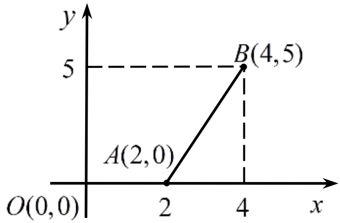

Рис. 3.6.

Приклад 8. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_L x^3dx + 3zy^2dy - x^2ydz$ вздовж відрізка прямої, обмеженої точками $A(3;2;1)$ та $B(0;0;0)$.

Розв'язання. Складемо параметричні рівняння прямої AB:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = t.$$

Тоді $x = 3t,\ y = 2t,\ z = t;\ x_t' = 3,\ y_t' = 2,\ z_t' = 1.$ Початку відрізка AB відповідає значення $t = 1,$ а його кінцю – $t = 0$. За формулою (3.18)

$$I = \int\limits_L x^3dx + 3zy^2dy - x^2ydz =$$

$$= \int\limits_1^0 \Big((3t)^3 \cdot 3 + 3t(2t)^2 \cdot 2 - (3t)^2(2t)\cdot 1\Big)dt = 87\int\limits_1^0 t^3dt = 87 \cdot \frac{1}{4}t^4\Big|_1^0 = -\frac{87}{4}.$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_L (x+y)dx - (x-y)dy$ вздовж ламаної $OAB,$ якщо $O(0;0),\ A(2;0),\ B(4;5).$.

Розв'язання. Шуканий криволінійний інтеграл дорівнює сумі інтегралів вздовж відрізків OA і AB (рис. 3.6):

$$I = \int\limits_{OA} (x+y)dx - (x-y)dy + \int\limits_{AB} (x+y)dx - (x-y)dy.$$

Вздовж відрізка OA $y = 0,\ dy = 0,$ а координата x змінюється від значення 0 до значення 2, тому

$$\int\limits_{OA} (x+y)dx - (x-y)dy = \int\limits_0^2 xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 = 2\ .$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $A(2;0),\ B(4;5)$ і записується у вигляді

$$\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-0}{5-0}; \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y}{5}=t\,.$$

Або $x=2+2t,\ y=5t.$ Під час руху від точки A до точки B параметр t змінюється від 0 до 1. Тоді за формулою (3.17) маємо

$$\int\limits_{AB}(x+y)dx-(x-y)dy=\int\limits_0^1\big((2+2t+5t)\cdot 2-(2+2t-5t)\cdot 5\big)dt=$$

$$=\int\limits_0^1(-6+29t)dt=\left(-6t+29\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{17}{2}.$$

В результаті отримаємо

$$I=\int\limits_L(x+y)dx-(x-y)dy=2+\frac{17}{2}=\frac{21}{2}.$$

Приклад 10. Обчислити площу еліпса, заданого параметричними рівняннями $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\le t\le 2\pi.$

Розв'язання. За формулою (3.23) знаходимо

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(a\cos t\cdot b\cos t+b\sin t\cdot a\sin t\right)dt=\frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi}dt=\pi ab.$$

Приклад 11. За допомогою формули Гріна обчислити

$$I=\oint\limits_L\left(x^2+yx\right)dx+\left(y+x^2\right)dy,$$

де L – контур прямокутника з вершинами $A(3;2),\ \ B(6;2),\ \ C(6;4),$ $D(3;4).$

Розв'язання. На рисунку 3.7 зображено контур інтегрування. Оскільки

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(y+x^2\right)'_x=2x \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=\left(x^2+yx\right)'_y=x,$$

то за формулою (3.23), отримаємо

$$I=\iint\limits_D\left(2x-x\right)dxdy=\iint\limits_D xdxdy=\int\limits_2^4 dy\int\limits_3^6 xdx=27\,.$$

Приклад 12. Знайти роботу сили $\vec{F}=4x^6\vec{i}+xy\vec{j}$ вздовж кривої

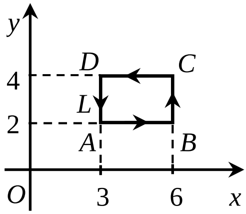

Рис. 3.7

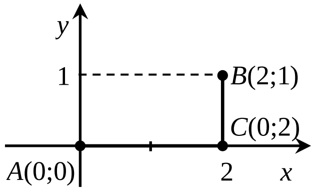

Рис. 3.8

$y = x^3$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (3.25)

$$A = \int_{AB} 4x^6 dx + xydy = \int_0^1 \left(4x^6 + x \cdot x^3 \cdot 3x^2\right) dx = \int_0^1 7x^6 dx = 1$$

Приклад 13. Доведіть, що криволінійний інтеграл

$$I = \int_{AB} \left(3x^2y^2 + 2x\right)dx + \left(2x^3y + 3y^2\right)dy$$

цей інтеграл не залежить від шляху інтегрування, та обчисліть його вздовж лінії AB (наприклад, деякої ділянки параболи $y = x^2$), що з'єднує точки $A(0;1)$ та $B(1;2)$, використовуючи формулу (3.22).

Розв'язання. Тут $P(x,y) = 3x^2y^2 + 2x$, $Q(x,y) = 2x^3y + 3y^2$. Умова (3.21) виконується:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2y; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

тому маємо інтеграл від повного диференціала функції $U(x,y)$:

$$dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,.$$

Знайдемо $U(x,y)$ із системи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \\ \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x} = 3x^2y^2 + 2x, \\ \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} = 2x^3y + 3y^2 \end{cases}$$

Проінтегруємо співвідношення $P(x,y) = \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}$ за змінною x:

$$U(x,y)=\int P(x,y)dx=\int\left(3x^2y^2+2x\right)dx=x^3y^2+x^2+\varphi\left(y\right),$$

де $\varphi(y)$ – довільна функція змінної y. Продиференціюємо отриманий вираз по y і прирівняємо Q:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=Q(x,y),\ 2x^3y+\varphi'(y)=2x^3y+3y^2.$$

Тоді $\varphi'(y)=3y^2$, тому $\varphi(y)=y^3+C,$ де C – довільна стала. Отже, $U(x,y)=x^3y^2+x^2+y^3+C$ і в кінцевих точках A і B дорівнює $U(A)=U(0;1)=1+C,\ U(B)=U(1;2)=4+1+8+C=13+C.$

Отже відповідно до формули (3.22)

$$I=U(B)-U(A)=(13+C)-(1+C)=12.$$

Приклад 14. Обчислити криволінійний інтеграл

$$I=\int\limits_L 2xydx+x^2dy$$

вздовж лінії AB що з'єднує точки $A(0;0)$ і $B(2;1).$

Розв'язання. Оскільки $P=2xy,\ \partial P/\partial y=2x,\ Q=x^2,\ \partial Q/\partial y=2x$ та умови незалежності інтеграла від лінії інтегрування виконані, то виконаємо інтегрування вздовж ламаної ACB. Тобто тут ми не шукаємо функцію $U(x,y)$ - повний диференціал якої дорівнює підінтегральному виразу, а вибираємо для інтегрування зручнішу лінію. На ланці AC: $y=0,\ dy=0,$ тому інтеграл по AC дорівнює нулю. На ланці BC: $x=2,\ dx=0,$ тому

$$I=\int\limits_0^1 2^2dy=4.$$

Запитання для самоперевірки

1. Дати означення криволінійного інтеграла по заданій лінії.
2. Як обчислюється криволінійний інтеграл, якщо рівняння лінії інтегрування задано у параметричному вигляді?
3. Як обчислюється криволінійний інтеграл, якщо рівняння лінії інтегрування задано у вигляді $y=y(x)$ або $x=x(y)$?
4. Як впливає напрямок інтегрування на величину криволінійного інтегралу другого роду?
5. Як встановлюється додатний напрямок у разі замкнутого

контуру інтегрування?

6. Сформулюйте теорему Остроградського - Гріна.

7. Що означає незалежність криволінійного інтеграла від шляху інтегрування?

8. Які способи обчислення криволінійного інтеграла від повного диференціала. Який з них є найзручнішим?

9. Як визначається криволінійний інтеграл уздовж просторової лінії?

10. Сформулюйте теорему незалежності криволінійного інтеграла від лінії інтегрування для просторового випадку.

11. Дати означення криволінійного інтеграла за довжиною та вказати способи його обчислення.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчислити криволінійні інтеграли.

1.1. $\int\limits_L y^2dx + 2xydy,$ де L – коло, задане параметричними рівняннями $x = a\cos t,$ $y = a\sin t,$ $0 \le t \le 2\pi.$

1.2. $\int\limits_L \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2},$ де L – відрізок прямої $y = x,$ $1 \le x \le 2.$

1.3. $\int\limits_L \frac{x}{x^2 + y^2}dx - \frac{y}{x^2 + y^2}dy$ по колу $x^2 + y^2 = R^2.$

1.4. $\int\limits_L xdy - ydx,$ де L – крива, задана параметричними рівняннями $x = a(t - \sin t),$ $y = a(1 - \cos t),$ $0 \le t \le 2\pi$.

1.5. $\int\limits_L yds,$ де L – дуга параболи $y^2 = 2x$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(4;\sqrt{8}).$

1.6. $\int\limits_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$ вздовж відрізка прямої від точки $A(1;1;1)$ до точки $B(2;3;4).$

1.7. $\int\limits_L \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$ вздовж відрізка прямої від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;2)$.

1.8. $\int\limits_L (2z-\sqrt{x^2+y^2})ds,$ де L – дуга кривої, заданої параметричними рівняннями $x=t\cos t,\ \ y=t\sin t,\ \ 0\le t\le 2\pi.$

Відповіді: 1.1. 0. **1.2.** $\ln 2$. **1.3.** 0. **1.4.** $-6a^2\pi$. **1.5.** $\dfrac{26}{3}$. **1.6.** 13. **1.7.** $\ln\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$. **1.8.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\left(\left(1+2\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$.

Тема 4. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

План

1. Поверхневі інтеграли першого роду.
2. Застосування поверхневих інтегралів першого роду
3. Поверхневі інтеграли другого роду.
4. Застосування поверхневих другого роду інтегралів.

Література: [1-5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати:*** означення та властивості поверхневих інтегралів першого та другого роду; ***уміти***: обчислювати інтеграли в різних системах координат.

Поверхневі інтеграли першого роду

Поверхневий інтеграл першого роду від функції $f(x,y,z)$ по поверхні S позначається

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds. \qquad (4.1)$$

Якщо, функція $f(x,y,z)$ є густиною розподілу маси матеріальної поверхні, то інтеграл (4.1) дорівнює масі всієї поверхні. Якщо $f(x,y,z)=1$ отримаємо площу поверхні S :

$$\iint\limits_S ds = S. \qquad (4.2)$$

Обчислення поверхневих інтегралів першого роду

Нехай поверхня S перетинається з будь-якою прямою, паралельною осі $Oz,$ не більше ніж в одній точці. Тоді її рівняння можна записати у вигляді

$$z = z(x, y) \tag{4.3}$$

В цьому випадку поверхневий інтеграл по поверхні S зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D – проекції поверхні S на площину Oxy (рис. 4.1) і тоді інтеграл (4.1) запишеться так

$$.\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy \tag{4.4}$$

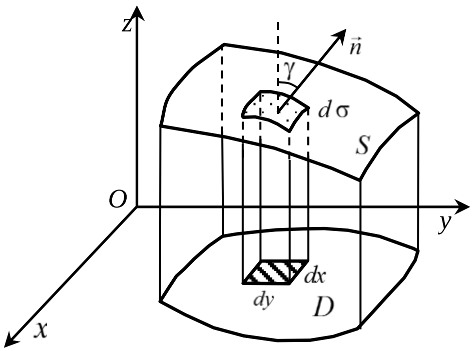

Рис. 4.1.

Якщо рівняння поверхні можна записати у вигляді $y = y(x,z)$ або $x = x(y,z),$ то поверхню S проектують на площину Oxz або Oyz відповідно. Тоді:

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_{D_1} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz \tag{4.5}$$

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_{D_2} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dydz \tag{4.6}$$

Механічні застосування поверхневих інтегралів першого роду

За допомогою поверхневих інтегралів першого роду можна визначати маси, моменти, координати центрів мас та інші механічні параметри для матеріальних поверхонь, вздовж яких розподілені маси з визначеною в кожній точці поверхневою густиною.

Статичні моменти, координати центра мас, моменти інерції матеріальної поверхні S визначають за відповідними формулами

$$S_{xy}=\iint\limits_S z\rho(x,y,z)ds \qquad M_x=\iint\limits_S \left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)ds;$$

$$S_{yz}=\iint\limits_S x\rho(x,y,z)ds \qquad M_y=\iint\limits_S \left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)ds; \tag{4.7}$$

$$S_{xz}=\iint\limits_S y\rho(x,y,z)ds \qquad M_z=\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)ds.$$

$$x_c=\frac{S_{yz}}{m},\ y_c=\frac{S_{xz}}{m},\ z_c=\frac{S_{xy}}{m},\quad M_0=\iint\limits_S \left(x^2+y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)ds.$$

Поверхневі інтеграли другого роду

Нехай у кожній точці двосторонньої поверхні $S: z=z(x,y)$ задано неперервне векторне поле, тобто визначено вектор-функцію

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k} \tag{4.8}$$

і задано додатний напрямок нормалі до поверхні $\vec{n}$. Напрямок нормалі $\vec{n}$ до поверхні $z=z(x,y)$ вважається додатним, якщо кут між $\vec{n}$ і осями координат гострий.

Потоком вектор – функції $\vec{F}(x,y,z)$ через орієнтовану поверхню називається поверхневий інтеграл першого роду

$$\iint\limits_S (\vec{F},\vec{n})ds. \tag{4.9}$$

Інтеграл (4.9) називають також поверхневим інтегралом ІІ роду. При зміні орієнтації поверхні на протилежну інтеграл (4.9) змінює знак.

Для поверхневого інтеграла ІІ роду використовують ще й такі позначення:

$$\iint\limits_S (\vec{F},\vec{n})ds=\iint\limits_S F_n ds=\iint\limits_S (P\cos(n,x)+Q\cos(n,y)+R\cos(n,z))ds=$$

$$=\iint\limits_S (P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma)ds$$

$$\cos\alpha ds=\pm dydz,\ \cos\beta ds=\pm dxdz,\ \cos\gamma ds=\pm dxdy,$$

під $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ розуміють кути, утворені нормаллю до поверхні з осями Ox, Oy та Oz відповідно. Знак плюс вибирають, якщо кут гострий (Рис.4.2а) і мінус, якщо тупий (Рис. 4.2б).

Для обчислення поверхневого інтеграла другого роду проектують поверхню S на всі три координатні площини і отримують

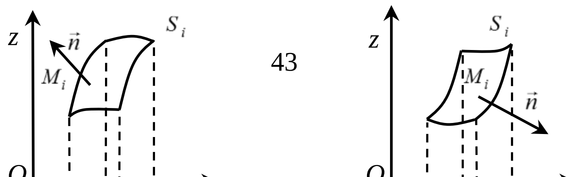

Рис 4.2а. Рис. 4.2б.

$$\iint\limits_{S} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm \qquad (4.10)$$
$$\pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy.$$

D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} проекції поверхні S на площини Oxy, Oxz, Oyz відповідно. Знак плюс вибирають відповідно до орієнтації поверхні. Так в інтегралі $\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz$, беруть знак “плюс”, якщо нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Oy, а знак “мінус” якщо тупий.

Формула Остроградського-Гаусса

Якщо функції $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в деякій просторовій області V, справедлива формула ***Остроградського-Гаусса***

$$\iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdydz = \iint\limits_{S} \left(Pdydz + Qdxdz + Rdxdy \right), \qquad (4.11)$$

де S – поверхня, що обмежує область V і інтегрування проводиться по зовнішній стороні.

Формула (4.11) справедлива для довільної області, яку можна розбити на скінченне число областей , що відповідають вимогам формули (4.11).

Формулу (4.11) можна використовувати для знаходження поверхневих інтегралів другого роду по замкненим поверхням.

Застосування поверхневих інтегралів другого роду

З допомогою поверхневих інтегралів можна знайти об’єм тіла обмеженого зверху поверхнею $S_2\left(z=z_2(x,y)\right)$, знизу поверхнею , $S_1\left(z=z_1(x,y)\right)$ з боків циліндричною поверхнею S_3, твірні якої паралельні осі Oz

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_S\left(xdydz+ydxdz+zdxdy\right)$$

де $S=S_1+S_2+S_3$.

Приклади розв’язування типових задач

Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду

$$I=\iint\limits_S\frac{ds}{(1+x+y)^2},$$

де S – поверхня тетраедра, обмеженого координатними площинами та площиною $x+y+z=1$.(Рис. 4.3).

Розв’язання. Тетраедр обмежують чотири трикутні грані: грань D_1 лежить у площині $z=0$ $(x+y=1,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1)$, грань D_2 лежить у площині $y=0$ $(x+z=1,\ 0\le x\le 1,\ 0\le z\le 1)$, грань D_3 лежить у площині $x=0$ $(y+z=1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1)$, а грань D_4 у площині $x+y+z=1$. Позначимо поверхневі інтеграли за відповідними гранями через I_1, I_2, I_3, I_4. За формулою (4.4), маємо

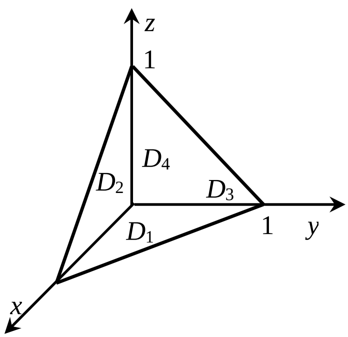

Рис. 4.3

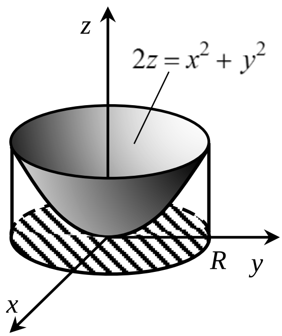

Рис. 4.4

$$I_1=\iint\limits_{D_1}\frac{dxdy}{(1+x+y)^2}=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}=\int\limits_0^1 dx\left(-\frac{1}{1+x+y}\Bigg|_0^{1-x}\right)=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\right)dx=\left(\ln(1+x)-\frac{1}{2}x\right)\Bigg|_0^1=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

В силу симетрії підінтегрального виразу у вихідному поверхневому інтегралі відносно x і y справедлива рівність

$$I_2=\iint\limits_{D_2}\frac{dzdx}{(1+x)^2}=\iint\limits_{D_3}\frac{dzdy}{(1+y)^2}=I_3;$$

$$I_3=\iint\limits_{D_3}\frac{dzdy}{(1+y)^2}=\int\limits_0^1\frac{dy}{(1+y)^2}\int\limits_0^{1-y}dz=\int\limits_0^1\frac{(1-y)dy}{(1+y)^2}=$$

$$=2\int\limits_0^1\frac{dy}{(1+y)^2}-\int\limits_0^1\frac{dy}{1+y}=\left(-\frac{2}{1+y}-\ln(1+y)\right)\Bigg|_0^1=1-\ln 2.$$

Рівняння грані D_4 можна записати у вигляді $z=1-x-y$ $(x,y)\in D_1$ Оскільки $z'_x=-1,\ z'_y=-1,$ то

$$ds=\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,dxdy=\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy=\sqrt{3}dxdy.$$

Грань D_4 проектується на площину Oxy в грань D_1, тому справедлива рівність

$$I_4=\iint\limits_{D_4}\frac{ds}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{D_1}\frac{\sqrt{3}ds}{(1+x+y)^2}=\sqrt{3}I_1.$$

Додаючи інтеграли, знаходимо значення вихідного інтеграла:

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4=(1+\sqrt{3})I_1+2I_2=$$

$$=(1+\sqrt{3})(\ln 2-\frac{1}{2})+2(1-\ln 2)=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2.$$

Приклад 2. Обчислити площу частини поверхні параболоїда обертання $2z=x^2+y^2$, яка обмежена циліндром $x^2+y^2=R^2$.

Розв'язання. Відповідно до формул (4.2) та (4.4)

$$S=\iint\limits_{S}ds=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy,$$

де D – проекція частини поверхні (рис. 4.4), що цікавить нас, на площину Oxy. Тут $z'_x = x,\ z'_y = y,$ тому

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy.$$

Область D є круг радіуса R з центром в початку координат, тому перейдемо до полярних координат: $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$ $0 \le \rho \le R$. Враховуючи, що $dxdy = \rho d\rho d\varphi$ отримаємо:

$$S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \sqrt{1+\rho^2}\,\rho d\rho = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^R \sqrt{1+\rho^2}\,d(\rho^2+1) = \frac{2\pi}{3}\left\{(1+R^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right\}.$$

Приклад 3. Обчислити координати центра мас однорідної півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \ge 0.$

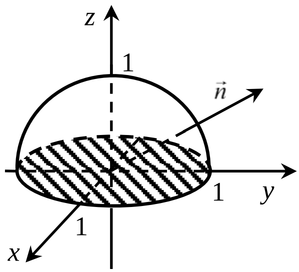

Рис. 4.5

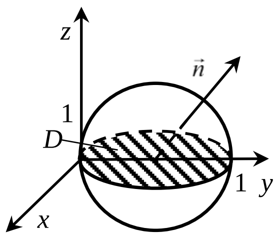

Рис. 4.6

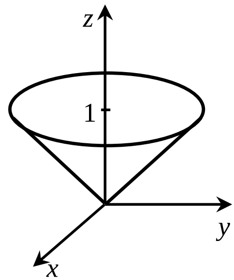

Рис. 4.7

Розв'язання. Так як півсфера однорідна, то можна вважати, що густина півсфери – $\rho = 1$. Тоді за формулою (4.2)

$$M = \iint\limits_S ds = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy = \iint\limits_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy$$

Проекцією D поверхні S на площину Oxy є круг радіуса R.
Перейдемо до полярних координат

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le R,\ dxdy = rdrd\varphi$$

$$M = \iint\limits_S ds = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\,\rho d\rho = -\pi R \int\limits_0^R \left(R^2 - \rho^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(R^2 - \rho^2\right) =$$

$$=-2\pi R(0-R)=2\pi R^2.$$

Координату z_c центра мас визначаємо за формулою (4.7) і аналогічно, як при знаходженні маси перейдемо до полярних координат

$$z_c=\frac{1}{M}\iint\limits_S z\,ds=\frac{1}{2\pi R^2}\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=$$

$$=\frac{R}{2\pi R^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho d\rho=\frac{2\pi R}{2\pi R^2}\frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^R=\frac{R}{2}.$$

В силу симетрії півсфери $x_c=y_c$. Таким чином, координати центра мас заданої однорідної півсфери – $x_c=0,\ y_c=0,\ z_c=\dfrac{R}{2}.$

Приклад 4. Обчислити поверхневий інтеграл $I=\iint\limits_S z^2dxdy$ по зовнішній поверхні півсфери $x^2+y^2+z^2=y,\ z\ge 0$ (зовнішня поверхня визначається нормалями, спрямованими від центру).

Розв'язання. Маємо поверхневий інтеграл другого роду. Скористаємось формулою (4.10) і перейдемо від поверхневого інтегралу до подвійного. Півсферу S можна задати функцією $z=\sqrt{y-x^2-y^2},\ (x,y)\in D,$ де D – проекція півсфери на площину Oxy, що є кругом радіуса $\dfrac{1}{2}$: $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2\le\dfrac{1}{4}$. Нормалі до зовнішньої поверхні півсфери утворюють гострий кут з віссю Oz (рис. 4.6), тому інтеграл зберігає свій знак. Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi.$ Рівняння кола $\rho=\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\pi,$ $0\le\rho\le\sin\varphi.$

$$\iint\limits_S z^2dxdy=\iint\limits_D (y-x^2-y^2)dxdy=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sin\varphi}(\rho\sin\varphi-\rho^2)\rho d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\sin^4\varphi}{3}-\frac{\sin^4\varphi}{4}\right)d\varphi=\frac{1}{12}\int\limits_0^{\pi}\sin^4\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{1}{12}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{4}-\frac{\cos 2\varphi}{2}+\frac{1}{8}+\frac{\cos 4\varphi}{8}\right)d\varphi=\frac{\pi}{32}.$$

Тут було використано формули пониження степеня для тригонометричних функцій

$$\sin^4\varphi=\frac{(1-\cos 2\varphi)^2}{4}=\frac{1-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi}{4}=\frac{1-2\cos 2\varphi}{4}+\frac{1+\cos 4\varphi}{8}.$$

Приклад 5. Обчислити поверхневий інтеграл $I=\iint\limits_S zdxdy$ по зовнішній стороні конічної поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Маємо поверхневий інтеграл другого роду. Поверхня S (рис. 4.7) задається рівнянням $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in D$, де D – проекція півсфери на площину Oxy – круг радіуса 1: $x^2+y^2\le 1$. Використовуємо формулу (4.10), перейдемо від поверхневого інтегралу до подвійного по області D. Тепер подвійний інтеграл у цій формулі треба взяти зі знаком "мінус", так як поверхня орієнтована нормалями, що складають з віссю Oz тупий кут. Перейдемо в подвійному інтегралі до полярних координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le 1$, отримаємо:

$$I=\iint\limits_S zdxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2 d\rho=-\frac{2\pi}{3}.$$

Приклад 6. Обчислити поверхневий інтеграл $I=\iint\limits_S z\cos\gamma ds$, де S зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=1$.

Розв'язання. В даному випадку аплікату z не можна задати як функцію $z=z(x,y)$ на всій поверхні інтегрування S (рис. 4.8). Розіб'ємо поверхню S на дві частини: частина S_1, що лежить над площиною Oxy, і частина S_2, що лежить під нею. Їхніми рівняннями будуть

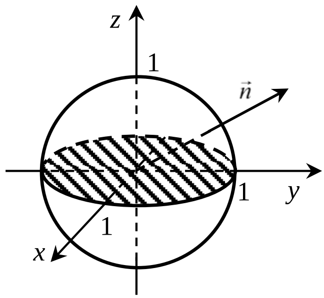

Рис. 4.8.

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ і $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Тоді маємо

$$I=\iint_S z\cos\gamma ds=\iint_{S_1} z\cos\gamma ds+\iint_{S_2} z\cos\gamma ds.$$

S_1 зовнішня сторона частини сфери, розташованої над площиною Oxy, що є верхньою стороною півсфери, тому за формулою (4.10)

$$\iint_S R(x,y,z)\cos\gamma ds=\pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy,$$

$$\iint_{S_1} z\cos\gamma ds=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,$$

де D – круг $x^2+y^2\le 1$. Знак перед інтегралом "плюс" оскільки нормаль до зовнішньої поверхні утворює гострий кут з віссю Oz.

S_2 зовнішня сторона півсфери, розташованої під площиною Oxy, що є її нижньою стороною, тому відповідно до (4.10). інтеграл беремо зі знаком "мінус", оскільки нормаль утворює тупий кут з віссю Oz.

$$\iint_{S_2} z\cos\gamma ds=-\iint_D(-\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,$$

де D – круг $x^2+y^2\le 1$. В результаті отримуємо

$$I=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy+\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=2\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho=-2\pi\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}d(1-\rho^2)=-\frac{4\pi}{3}(1-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{4\pi}{3}.$$

Приклад 7. Обчислити поверхневий інтеграл $I=\iint_S yzdydz+xzdxdz+xydxdy$, де S зовнішня сторона (нормаль до якої утворює з осями координат гострий кут) трикутника, утвореного перетином площини $x+y+z=a$ з координатними площинами.

Розв'язання. Маємо поверхневий інтеграл другого роду. Необхідно знайти проекції поверхні S (рис. 4.9) на кожну із

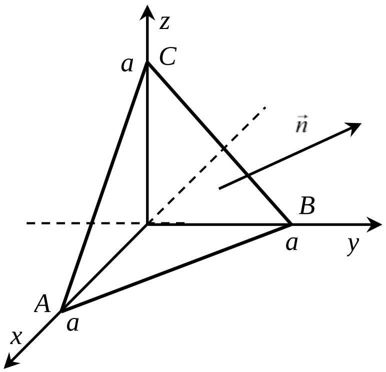

Рис. 4.9

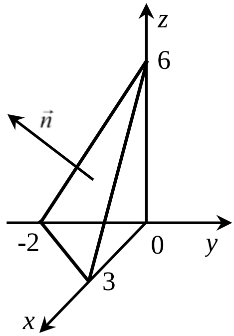

Рис. 4.10

координатних площин і застосувати формулу (4.10). Відповідно до умови поверхні S відповідає трикутник ABC і проекціями також будуть трикутники. Обчислимо кожен із інтегралів окремо. У першому інтегралі проекцією на площину Oyz буде трикутник ΔCOB. Зовнішня нормаль $\vec{n}$ до площини ABC становить гострий кут з віссю Ox, тому поверхневий інтеграл дорівнює подвійному інтегралу по трикутнику ΔCOB із збереженням його знака:

$$I_1 = \iint_S yzdydz = \iint_{\Delta COB} yzdydz.$$

Рівняння лінії BC має вигляд $z + y = a,\ z = a - y,$ тому отримаємо

$$I_1 = \int_0^a ydy \int_0^{a-y} zdz = \int_0^a ydy \left(\frac{z^2}{2} \right)_0^{a-y} = \frac{1}{2} \int_0^a y(a-y)^2 dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^a (a^2 y - 2ay^2 + y^3) dy = \frac{1}{2} \left(a^2 \frac{y^2}{2} - 2a \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right)_0^a = \frac{a^4}{24}.$$

Розглянувши рисунок, легко помітити, що проекціями поверхні S на координатні площини будуть рівні трикутники і нормаль $\vec{n}$ до площини ABC утворює з осями $Ox,\ Oy,\ Oz$ гострі кути. Тому

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{a^4}{24}$$

В результаті отримаємо

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 3 \cdot \frac{a^4}{24} = \frac{a^4}{8}.$$

Приклад 8. Обчислити поверхневий інтеграл $I = \iint\limits_S xydxdy,$ де S зовнішня сторона поверхні тетраедра, обмеженого координатними площинами та площиною $x + y + z = 1.$

Розв'язання. Поверхня S складається з чотирьох граней. Позначимо відповідні поверхневі інтеграли по гранях тетраедра (рис. 4.3) через $I_1, I_2, I_3, I_4.$ Необхідно спроектувати кожну з граней на площину $Oxy.$ Грань D_1 уже лежить в цій площині і нормаль до зовнішньої поверхні грані D_1 утворює з віссю Oz кут π, тому інтеграл міняє знак

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} xydxdy = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} xydy = -\int_0^1 xdx \left(\frac{y^2}{2} \right)_0^x = -\frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)^2\, dx \cdot$$

Проекції граней D_2, D_3 на площину Oxy є лінії, тому відповідні інтеграли дорівнюють нулю: $I_2 = \iint\limits_{D_2} xydxdy = 0;\quad I_3 = \iint\limits_{D_3} xydxdy = 0 \cdot$

Проекція грані D_4 на площину Oxy співпадає з D_1, однак нормаль до D_4 утворює з віссю Oz гострий кут, тому інтеграл не змінює знак

$$I_4 = \iint\limits_{D_4} xydxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xydy.$$

Отже, $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0.$

Приклад 9. Обчислити поверхневий інтеграл

$$I = \iint\limits_S -xdydz + zdzdx + 5dxdy,$$

де S – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $2x - 3y + z = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (рис. 4.10).

Розв'язання. Скористаємося формулою Остроградського–Гаусса (4.11), де $P = x,\ Q = z,\ R = 5.$ Похідні $\frac{\partial P}{\partial x} = -1,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$ тому

$$I = \iint\limits_S (-xdydz + zdzdx + 5dxdy) = \iiint\limits_V (-1 + 0 + 0)\, dxdydz =$$

$$= -\iiint\limits_V dv = -\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 6 = -6.$$

Приклад 10. Обчислити поверхневий інтеграл $I = \iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, де S зовнішня поверхня сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Розв'язання. Поверхневий інтеграл II роду зведемо до потрійного інтеграла, використовуючи формулу Остроградського-Гаусса (4.11).

Тут $P = x^3$, $Q = y^3$, $R = z^3$, $\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = 3y^2$, $\frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2$

і необхідні умови для застосування формули Остроградського-Гаусса (4.11) виконуються. Тоді

$$I = \iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \le a^2} \left(3x^2 + 3y^2 + 3z^2\right) dxdydz$$

В декартовій системі координат обчислювати потрійний інтеграл, коли об'єм обмежений сферою недоцільно. Перейдемо до сферичної системи координат: $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,$ $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le r \le a.$

$$I = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^a r^2 \cdot r^2 dr = 3\cdot 2\pi\cdot 2\cdot \frac{a^5}{5} = 12\frac{\pi a^5}{5}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Які поверхні називають двосторонніми? Навести приклад односторонньої поверхні.
2. Дати означення поверхневого інтеграла першого роду.
3. Як обчислюється поверхневий інтеграл першого роду?
4. Довести, що $\iint\limits_S \cos(n,z)ds = 0$, якщо S замкнута поверхня, $\vec{n}$ нормаль до поверхні.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчислити координати центру ваги частини поверхні конуса $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2}z^2$, що відсікається площиною $z = H$.

Завдання 2. Обчислити координати центра мас сегмента поверхні сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, що відсікається площиною $z=H$.

Завдання 3. Обчислити поверхневі інтеграли:

3.1. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy,$ де S – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$.

3.2. $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,ds,$ де S – бічна поверхня конуса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=0,\ 0\le z\le b.$

3.3. $\iint\limits_S \left[x\cos(n,x)+y\cos(n,y)+z\cos(n,z)\right]ds,$ де S – замкнута поверхня

Відповіді: 1. $x_c=0,\ y_c=0,\ z_c=\dfrac{2}{3}H$. **2.** $x_c=0,\ y_c=0,\ z_c=\dfrac{R+H}{2}$. **3.1.** πR^4. **3.2.** $\dfrac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$. **3.3.** $3V$, (V – об’єм тіла, обмеженого поверхнею S).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика: Збірник задач: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П.Вовкодав [та ін.]; За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2011. – 480 с.

2. Вища математика: Навч. посіб. / І.О. Ластівка, О.І. Безверхий, І.П. Кудзіновська. – К.: НАУ, 2018. – 452с.

3. Вища математика: Навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К.: Вища шк., 1993. – 648с.

4. Репета В.К. Вища математика: підручник: у 2 ч. – Ч. 2. – 2-е вид. виправ. – К.: НАУ, 2017. – 504 с.

5. Денисюк В.П., Репета В.К., Гаєва К.А., Клешня Н.О. Вища математика. Модульна технологія навчання. Навчальний посібник. Частина 3. К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.– 444 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів

Укладачі: ЛАСТІВКА Іван Олексійович
ФОРТУНА Василь Васильович
ТУГАЙ Ганна Володимирівна