МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи
для студентів
технічних спеціальностей

Київ 2020

УДК 517.4 (076.5)
В 558

Укладачі: *І. О. Ластівка* – д-р техн. наук, проф.;
П. П. Баришовець – канд. фіз.–мат. наук, доц. ;
В. К. Репета – канд. фіз.–мат. наук, доц.

Рецензент: *О.Д. Глухов* – канд. фіз.–мат. наук, доц.

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету(протокол № 1/20 від 23.06.2020р.).

Вища математика. Операційне числення: методичні рекомендації до самостійної роботи/ уклад. : І. О. Ластівка, П. П. Баришовець, В. К. Репета. – К.: НАУ, 2020.– 48 с.

Укладено відповідно до програм курсів «Вища математика». Методичні рекомендації містять приклади розв’язання типових задач розділу «Операційне числення», запитання для самоперевірки і завдання для самостійного виконання з відповідями.

Для студентів технічних спеціальностей.

ЗМІСТ

ВСТУП

Самостійна робота студента є основним способом оволодіння навчальним матеріалом протягом часу, вільного від обов'язкових аудиторних занять.

Мета виконання самостійної роботи – поглиблення, узагальнення та закріплення теоретичних знань і практичних умінь студентів з дисципліни «Вища математика» шляхом вироблення вміння самостійної роботи з навчальною літературою.

Самостійна робота студентів здійснюється у формі підготовки до лекційних і практичних занять, виконання індивідуального домашнього завдання та виконання модульної контрольної роботи. Така підготовка передбачає самостійне вивчення теоретичного матеріалу з кожної теми, що наданий у рекомендованій літературі та конспекті лекцій. При цьому важливо звернути увагу на необхідність чіткого засвоєння основних термінів та означень, розуміння їх змісту, обов'язкового аналізу використання теоретичних відомостей для розв'язування пропонованих завдань.

Мета вивчення навчальної дисципліни «Вища математика» – опанування студентами основних математичних понять і методів, необхідних для застосування теоретичного матеріалу під час моделювання і розв'язування прикладних задач.

Завдання вивчення навчальної дисципліни – розвиток логічного та алгоритмічного мислення студентів, опанування методів дослідження та розв'язування математичних задач, набуття первинних навичок математичного дослідження прикладних задач тощо.

Методичні рекомендації до самостійної роботи студентів укладено відповідно до навчальних програм курсу «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей.

У пропонованій методичній роботі наведено задачі для самостійної та індивідуальної роботи студентів. Значна кількість завдань для самостійної роботи має прикладну спрямованість.

Провідний викладач може коригувати кількість і зміст завдань, які студент повинен виконати самостійно протягом вивчення відповідного матеріалу.

Матеріал кожної теми відповідає робочим навчальним програмам дисципліни «Вища математика», зокрема одному з її розділів «Операційне числення». Кожна тема містить основні методичні рекомендації, рекомендовану літературу, типові приклади з розв'язаннями та завдання для самостійного виконання, запитання для самоперевірки, що сприятиме кращому розумінню, засвоєнню та можливості застосування основних теоретичних положень.

Операційне числення відіграє важливу роль при розв'язанні багатьох прикладних задач, зокрема, у сучасній автоматиці, електротехніці, технічній фізиці тощо.

Операційне числення виникло у середині XIX століття. Одним із його засновників є український вчений, професор Київського університету М.Є. Ващенко-Захарченко, який у 1862 році в своїй дисертації уперше висловив ідею операційного методу до розрахунків процесів в електричних колах.

Методичні рекомендації призначено для самостійної роботи студентів технічних спеціальностей і орієнтовано на теоретичне та методичне підтримання навчального процесу студентів.

Тема 1. ОРИГІНАЛИ ТА ЗОБРАЖЕННЯ. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

План

1. Оригінал та зображення за Лапласом.
2. Властивості перетворення Лапласа: лінійність, подібність, запізнення оригіналу, випередження, зміщення зображення, диференціювання та інтегрування оригіналу і зображення.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 1 студент повинен ***знати:*** означення оригінала та зображення, функцію Хевісайда, зображення найпростіших оригіналів, властивості лінійності, подібності, запізнення оригіналу, випередження, зміщення зображення, диференціювання та інтегрування оригіналу і зображення; ***уміти:*** знаходити зображення оригіналів за означенням та використовуючи властивості перетворення Лапласа.

Основні теоретичні відомості

Оригіналом називають будь-яку комплекснозначну функцію $f(t)=u(t)+iv(t)$ дійсної змінної *t*, яка задовольняє такі умови:

1) на будь-якому обмеженому проміжку осі t функція $f(t)$ або неперервна, або має лише скінченну кількість точок розриву першого роду;

2) $f(t)=0$ для всіх $t<0$;

3) існують сталі $M>0$ і $\sigma\geq 0$ такі, що для всіх $t>0$ виконується нерівність

$$\left|f(t)\right|\leq Me^{\sigma t}. \tag{1.1}$$

Нижню грань σ_0 всіх чисел σ, для яких виконується умова (1.1) називають показником зростання функції $f(t)$. Для обмежених функцій за показник зростання можна взяти $\sigma_0 = 0$.

Зображенням оригіналу $f(t)$ називають функцію $F(p)$ комплексної змінної $p = \sigma + i\omega$, яку визначають рівністю

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt \tag{1.2}$$

Інтеграл в (1.2) називають *інтегралом* Лапласа, а операцію переходу від оригіналу $f(t)$ до зображення $F(p)$ — *перетворенням* Лапласа. Той факт, що $F(p)$ є зображенням оригіналу $f(t)$ символічно записуватимемо так: $f(t) \leq F(p)$ або $F(p) = L(f(t))$.

Функція $F(p)$ визначена в півплощині $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$ (рис. 1.1) і є в цій півплощині аналітичною функцією, при цьому $F(p) \to 0$, якщо $p \to +\infty$.

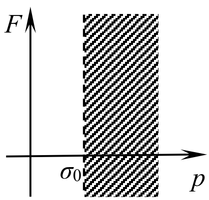

Рис. 1.1

Сукупність усіх оригіналів $f(t)$ називають *простором оригіналів*, а сукупність зображень $F(p)$ — *простором зображень*.

Властивості перетворення Лапласа

1. Лінійність

Якщо $f_1(t)$, $f_2(t)$ — функції-оригінали, λ_1 і λ_2 — довільні сталі, то справджується рівність

$$L(\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)) = \lambda_1 L(f_1(t)) + \lambda_2 L(f_2(t)).$$

2. Подібність

Якщо $f\left(t\right) \le F\left(p\right)$, то $f(\omega t) \le \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right)$ $(\omega \ne 0)$.

3. Запізнення оригіналу

Якщо $f\left(t\right) \le F\left(p\right)$ і $\tau > 0$, то $f\left(t-\tau\right) \le e^{-p\tau}F(p)$.

Коментар. Тут запис $f\left(t-\tau\right)$ означає $f\left(t-\tau\right)\eta\left(t-\tau\right)$. Графік функції $f\left(t-\tau\right)$ отримуємо за допомогою паралельного перенесення графіка функції $f\left(t\right)$ вздовж осі t на τ одиниць праворуч.

4. Випередження

Якщо $f\left(t\right) \le F\left(p\right)$ і $\tau > 0$, то

$$f(t+\tau) \le e^{p\tau}\left(F\left(p\right) - \int_0^{\tau} e^{-pt} f\left(t\right)dt\right).$$

Коментар. Тут запис $f\left(t+\tau\right)$ означає $f\left(t+\tau\right)\eta\left(t\right)$. Графік функції $f\left(t+\tau\right)$ отримуємо за допомогою паралельного перенесення графіка функції $f\left(t\right)$ вздовж осі t на τ одиниць ліворуч, при цьому для всіх $t<0$ вважаємо, що $f\left(t+\tau\right)=0$.

5. Зміщення зображення

Якщо $f\left(t\right) \le F\left(p\right)$ і p_0 – довільне комплексне число, то

$$f(t)e^{p_0 t} \le F(p-p_0).$$

6. Диференціювання оригіналу

Якщо функція $f\left(t\right)$ та її похідні $f'\left(t\right), f''\left(t\right), ..., f^{(n)}\left(t\right)$ є оригіналами і $L\left(f\left(t\right)\right)=F\left(p\right)$, то

$L\left(f'\left(t\right)\right) = pF\left(p\right) - f(0)$,

$L\left(f''\left(t\right)\right) = p^2F\left(p\right) - pf(0) - f'(0)$,

……………………………………

$$L\left(f^{(n)}(t)\right)=p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-...-f^{(n-1)}(0),$$

де $f^{(k)}(0)=\lim\limits_{t\to 0+0} f^{(k)}(t),\ k=0,\ 1, 2, ..., n-1.$

7. Диференціювання зображення

Якщо $f(t) \le F(p)$, $Re\, p > \sigma_0$, то $-t f(t) \le \dfrac{dF(p)}{dp}$.

Наслідок. $(-t)^n f(t) \le \dfrac{d^nF(p)}{dp^n}$ або $t^n f(t) \le (-1)^n \dfrac{d^nF(p)}{dp^n}$.

8. Інтегрування оригіналу

Якщо $f(t) \le F(p)$, то $L\left(\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right)=\dfrac{F(p)}{p}$.

9. Інтегрування зображення

Якщо $f(t) \le F(p)$ і $\dfrac{f(t)}{t}$ − оригінал, то $L\left(\dfrac{f(t)}{t}\right)=\int\limits_p^\infty F(p)dp$.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Перевірте, які з наведених функцій є оригіналами:

а) $\eta(t)=\begin{cases}1, \text{якщо}\, t\ge 0,\\ 0, \text{якщо}\, t<0\end{cases}$ – одинична функція Хевісайда;

б) $f(t)=\begin{cases}e^{2t}, \text{ якщо } t\ge 0,\\ 0, \text{ якщо } t<0;\end{cases}$ в) $f(t)=\begin{cases}t, \text{ якщо } t\ge 0,\\ 0, \text{ якщо } t<0;\end{cases}$

г) $f(t)=\begin{cases}e^{2t}\sin 3t, \text{якщо } t\ge 0,\\ 0, \text{ якщо } t<0;\end{cases}$ д) $f(t)=\begin{cases}e^{t^2}, \text{ якщо } t\ge 0,\\ 0, \text{ якщо } t<0;\end{cases}$

е) $f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln t}, \text{ якщо } t\ge 0,\\ 0, \text{ якщо } t<0;\end{cases}$ є) $f(t)=\begin{cases}\mathrm{tg}\, t, \text{ якщо } t\ge 0,\\ 0, \text{ якщо } t<0.\end{cases}$

Розв'язання. В усіх випадках а) – є) умова 2) виконується, тому перевірятимемо лише виконання умов 1) та 3). Маємо:

а) одинична функція Хевісайда, графік якої зображено на рис.1.2, задовольняє умови:

1) $\eta(t)$ неперервна на всій осі t, за винятком однієї точки $t = 0$, яка є точкою розриву першого роду;

3) для всіх $t > 0$ виконується нерівність $|\eta(t)| \le 1 = 1 \cdot e^{0 \cdot t}$, $\sigma_0 = 0$ – показник зростання, $M = 1$.

Отже, одинична функція Хевісайда $\eta(t)$ є оригіналом, причому найпростішим;

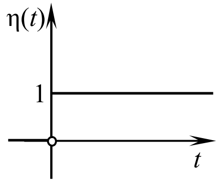

Рис. 1.2

б) функція $f(t)$ задовольняє всі три умови, зокрема, для всіх $t > 0$ виконується нерівність $|f(t)| \le 1 \cdot e^{2t}$, $\sigma_0 = 2$ –показник зростання, $M = 1$. Отже, ця функція є оригіналом;

в) функція $f(t)$ є оригіналом: вона неперервна на проміжку $(-\infty; \infty)$; для всіх $t > 0$ виконується нерівність $t < 1 \cdot e^{t}$;

г) Функція $f(t) = \begin{cases} e^{2t} \sin 3t, \text{якщо } t \ge 0, \\ \quad 0, \quad \text{якщо } t < 0 \end{cases}$ є неперервною на всій осі t; $f(t) = 0$ для всіх $t < 0$; для всіх $t > 0$ виконується нерівність $\left| e^{2t} \sin 3t \right| \le e^{2t}$. Отже, ця функція є оригіналом;

д) для цієї функції умови 1) і 2) виконуються, а умова 3) не виконується, оскільки не існує сталих $M > 0$ і $\sigma \ge 0$ таких, що для всіх $t > 0$ виконується нерівність

$$e^{t^2} \le M e^{\sigma t};$$

е) точка $t = 1$ є точкою розриву другого роду функції $\frac{1}{\ln t}$, отже, порушується умова 1) і задана функція не є оригіналом;

є) ця функція не є оригіналом, оскільки має точки розриву другого роду, зокрема $\operatorname{tg} t \to \infty$, коли $x \to \frac{\pi}{2}$.

Приклад 2. За означенням знайдіть зображення функцій:

1) $f(t)=\eta(t)=\begin{cases}1, \text{якщо}\, t\ge 0,\\ 0, \text{якщо}\, t<0;\end{cases}$

2) $f(t)=\begin{cases}2, \text{якщо}\, 0\le t<1,\\ -1, \text{якщо}\, 1\le t<3,\\ 4, \text{якщо}\, 3\le t<5,\\ 0, \text{якщо}\, t\ge 5;\end{cases}$

3) $f(t)=e^{t}$; 4) $f(t)=t$.

Розв'язання:

1) $L(\eta(t))=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\eta(t)dt=\int\limits_0^\infty e^{-pt}dt=\lim\limits_{a\to\infty}\left.\dfrac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^a=\dfrac{1}{p}$;

Коментар. Якщо функція $f(t)\ne 0$ для всіх $t<0$, то замість неї розглядається без спеціальних застережень добуток $f(t)\eta(t)$ із збереженням позначення $f(t)$.

2) $$L\left(f(t)\right)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=\int\limits_0^1 2e^{-pt}dt+\int\limits_1^3(-1)e^{-pt}dt+\int\limits_3^5 4e^{-pt}dt+$$
$$+\int\limits_5^\infty 0e^{-pt}dt=2\cdot\left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^1+(-1)\cdot\left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_1^3+4\cdot\left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_3^5=$$
$$=-2\cdot\frac{e^{-p}}{p}+\frac{2}{p}+\frac{e^{-3p}}{p}-\frac{e^{-p}}{p}-4\cdot\frac{e^{-5p}}{p}+4\cdot\frac{e^{-3p}}{p}=$$
$$=\frac{2-3e^{-p}+5e^{-3p}-4e^{-5p}}{p};$$

3) $$L\left(e^{t}\right)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}e^{t}dt=\int\limits_0^\infty e^{-(p-1)t}dt=-\lim_{a\to\infty}\left.\frac{e^{-(p-1)t}}{p-1}\right|_0^a=\frac{1}{p-1}.$$

4) $$L\left(t\right)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}tdt=\left|\begin{matrix}u=t & dv=e^{-pt}dt\\ du=dt & v=\dfrac{e^{-pt}}{-p}\end{matrix}\right|=\lim_{a\to\infty}t\cdot\left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^a-$$

$$-\int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{-p}dt = \lim_{a\to\infty}\left(a\cdot\frac{e^{-pa}}{-p} - 0\cdot\frac{1}{-p}\right) - \lim_{a\to\infty}\left.\frac{e^{-pt}}{p^2}\right|_0^a =$$

$$= -\frac{1}{p}\lim_{a\to\infty}\frac{a}{e^{pa}} - \lim_{a\to\infty}\left(\frac{e^{-pa}}{p^2} - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p^2}.$$

Запам'ятайте, що: 1) $\eta(t) \leq \dfrac{1}{p}$; 2) $e^t \leq \dfrac{1}{p-1}$; 3) $t \leq \dfrac{1}{p^2}$.

Приклад 3. Знайдіть зображення оригіналів, використовуючи властивості лінійності та подібності:

1) $f(t) = e^{\alpha t}$; 2) $f(t) = \sin t$; 3) $f(t) = \cos t$; 4) $f(t) = \sin \omega t$; 5) $f(t) = \cos \omega t$; 6) $\operatorname{sh} \omega t$; 7) $\operatorname{ch} \omega t$ ($\omega \neq 0$; 1).

Розв'язання:

1) $e^{\alpha t} \leq \dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\frac{p}{\alpha}-1} = \dfrac{1}{p-\alpha}$;

2) Використовуючи формули Ейлера

$e^{it} = \cos t + i\sin t$, $e^{-it} = \cos t - i\sin t$,

дістанемо

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

За властивістю лінійності

$$L(\sin t) = \frac{1}{2i}L(e^{it}) - \frac{1}{2i}L(e^{-it}) = \frac{1}{2i}\frac{1}{p-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{p+i} =$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{p+i-(p-i)}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1};$$

3) $L(\cos t) = \dfrac{1}{2}L(e^{it}) + \dfrac{1}{2}L(e^{-it}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-i} + \dfrac{1}{p+i}\right) = \dfrac{p}{p^2+1}$;

4) $L(\sin \omega t) = \dfrac{1}{\omega}\dfrac{1}{\left(\dfrac{p}{\omega}\right)^2+1} = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$;

5) $L(\cos\omega t)=\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\dfrac{p}{\omega}}{\left(\dfrac{p}{\omega}\right)^2+1}=\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$;

6) $\operatorname{sh}\omega t=\dfrac{1}{2}\left(e^{\omega t}-e^{-\omega t}\right)\;\leq\;\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-\omega}-\dfrac{1}{p+\omega}\right)=\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$;

7) $\operatorname{ch}\omega t=\dfrac{1}{2}\left(e^{\omega t}+e^{-\omega t}\right)\;\leq\;\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-\omega}+\dfrac{1}{p+\omega}\right)=\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$.

Важливо пам'ятати, що: $e^{\alpha t}\leq\dfrac{1}{p-\alpha}$, $\sin\omega t\leq\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$,

$\cos\omega t\leq\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{sh}\omega t\;\leq\;\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$, $\operatorname{ch}\omega t\;\leq\;\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$.

.

Приклад 4. Знайдіть зображення функцій:

1) $f(t)=\sin^2 t$; 2) $f(t)=\cos^3 2t$;

3) $f(t)=\sin t\cos 4t$; 4) $f(t)=\operatorname{ch}3t\operatorname{sh}5t$.

Розв'язання:

1) Виконаємо перетворення $\sin^2 t=\dfrac{1-\cos 2t}{2}$, тоді

$$L\left(\sin^2 t\right)=L\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)=\frac{1}{2}L\left(1-\cos 2t\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+2^2}\right)=\frac{2}{p\left(p^2+4\right)};$$

2) Використаємо формулу $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$. Тоді $\cos^3\alpha=\dfrac{\cos 3\alpha+3\cos\alpha}{4}$, $\cos^3 2t=\dfrac{\cos 6t+3\cos 2t}{4}$;

$$L\left(\cos^3 2t\right)=\frac{1}{4}L\left(\cos 6t+3\cos 2t\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{p}{p^2+36}+\frac{3p}{p^2+4}\right);$$

3) $L(\sin t\cos 4t)=\frac{1}{2}L(\sin 5t-\sin 3t)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{p^2+25}-\frac{3}{p^2+9}\right)$;

4) $L(\operatorname{ch}3t\operatorname{sh}5t)=L\left(\frac{e^{3t}+e^{-3t}}{2}\cdot\frac{e^{5t}-e^{-5t}}{2}\right)=$

$=\frac{1}{4}L\left(e^{8t}+e^{2t}-e^{-2t}-e^{-8t}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p-8}+\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p+2}-\frac{1}{p+8}\right)=$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{16}{p^2-64}+\frac{4}{p^2-4}\right)=\frac{4}{p^2-64}+\frac{1}{p^2-4}$.

Приклад 5. Знайдіть зображення одиничної функції Хевісайда «із запізненням»:

$$\eta(t-2)=\begin{cases}1 \text{ для } t\ge 2,\\ 0 \text{ для } t<2\end{cases} \text{ (рис. 1.3).}$$

Розв'язання. Використовуючи властивість 3 (*запізнення оригіналу*), дістанемо

$$\eta(t-2)\le e^{-2p}\cdot L(\eta(t))=\frac{e^{-2p}}{p}.$$

Приклад 6. Знайдіть зображення функцій

1) $f(t)=\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $f(t)=\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\eta(t)$;

3) $f(t)=t\eta(t-1)$.

Розв'язання.

1) За властивістю 3 (*запізнення оригіналу*) дістанемо

$$L(f(t))=L\left(\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)=e^{-\frac{\pi}{2}p}L\left(\sin t\eta(t)\right)=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1};$$

2) $L(f(t))=L\left(\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\eta(t)\right)=-L\left(\cos t\,\eta(t)\right)=-\frac{p}{p^2+1}$;

3) Перетворимо функцію $f(t)$ (рис. 1.4) так:

$f(t)=t\eta(t-1)=(t-1+1)\eta(t-1)=(t-1)\eta(t-1)+\eta(t-1)$. Тоді

$$L(f(t)) = e^{-p}\frac{1}{p^2} + e^{-p}\frac{1}{p} = \frac{p+1}{p^2}e^{-p}.$$

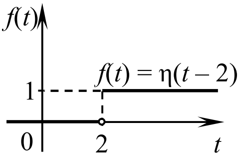

Рис. 1.3

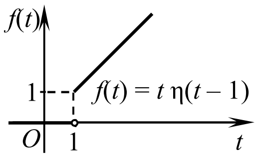

Рис. 1.4

Приклад 7. Знайдіть зображення функцій, використовуючи властивість 5 (зміщення зображення):

1) $f(t) = e^{-3t}\cos 2t$; 2) $f(t) = e^{2t}t$.

Розв'язання.

1) Враховуючи, що $\cos 2t \le \dfrac{p}{p^2+4}$, за властивістю 5 ($p_0 = -1$) маємо

$$e^{-3t}\cos 2t \le \frac{p+3}{(p+3)^2+2^2} = \frac{p+3}{p^2+6p+13};$$

2) Оскільки $L(t) = \dfrac{1}{p^2}$, то $e^{2t}t \le \dfrac{1}{(p-2)^2}$.

Приклад 8. Знайдіть зображення функції $f(t) = \cos^2 2t$.

Розв'язання. *Перший спосіб*. Запишемо $f(t)$ у вигляді

$$f(t) = \frac{1}{2}(1+\cos 4t).$$

Використовуючи властивості лінійності та подібності, дістанемо

$$f(t) = \frac{1}{2}(1+\cos 4t) \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+16}\right) = \frac{p^2+8}{p\left(p^2+16\right)}.$$

Другий спосіб. Нехай $f(t) \leq F(p)$. Тоді за властивістю 6 (диференціювання оригіналу)

$$f'(t) = (\cos^2 2t)' \leq pF(p) - f(0) = pF(p) - 1,$$

оскільки $f(0) = \cos^2 0 = 1$.

Знайдемо зображення для $(\cos^2 2t)'$:

$$(\cos^2 2t)' = -2\cos 2t \sin 2t \cdot 2 = -2\sin 4t \leq -2 \cdot \frac{4}{p^2+16} = -\frac{8}{p^2+16}.$$

Отже, отримуємо рівність

$$-\frac{8}{p^2+16} = pF(p) - 1,$$

звідси випливає, що

$$F(p) = \frac{p^2+8}{p\left(p^2+16\right)}.$$

Приклад 9. Знайдіть зображення функції $f(t) = e^t$, використовуючи властивість диференціювання оригіналу.

Розв'язання. Нехай $f(t) = e^t \leq F(p)$. Тоді за властивістю 6 (диференціювання оригіналу) $f'(t) = e^t \leq pF(p) - f(0) = pF(p) - 1$, оскільки $f(0) = e^0 = 1$.

Отже, $pF(p) - 1 = F(p)$, звідки отримуємо: $F(p) = \dfrac{1}{p-1}$.

Приклад 10. Знайдіть зображення функцій, використовуючи властивість 7 (диференціювання зображення):

1) $f(t) = t^2$; 2) $f(t) = t^3$; 3) $f(t) = t^n$, $n \in N$;

4) $f(t) = t\sin 2t$; 5) $f(t) = t^2 \cos 4t$.

Розв'язання.

1) Знаємо, що $L(t) = \dfrac{1}{p^2}$. Тоді за властивістю 7

$$-t \cdot t = -t^2 \leq \left(\frac{1}{p^2}\right)' = -\frac{2}{p^3}. \text{ Отже, } t^2 \leq \frac{2}{p^3};$$

2) Ураховуючи, що $t^2 \leq \dfrac{2}{p^3}$, отримуємо:

$$-t \cdot t^2 = -t^3 \leq \left(\frac{2}{p^3}\right)' = -\frac{6}{p^4} = -\frac{3!}{p^4}, \text{ отже, } t^3 \leq \frac{3!}{p^4};$$

3) Продовжуючи застосування властивості диференціювання зображення, дістанемо, що $t^n \leq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$;

4) Знаємо, що $L(\sin t) = \dfrac{1}{p^2+1}$. Тоді

$$-t \cdot \sin 2t \leq \left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = -\frac{2p}{(p^2+1)^2}, \text{ звідки отримуємо:}$$

$$t \sin 2t \leq \frac{2p}{(p^2+1)^2};$$

5) Знаємо, що $L(\cos 4t) = \dfrac{p}{p^2+16}$. Тоді

$$(-t)^2 \cdot \cos 4t = t^2 \cos 4t \leq \left(\frac{p}{p^2+16}\right)'' =$$

$$= \left(\frac{16-p^2}{(p^2+16)^2}\right)' = \frac{2p\left(p^2-48\right)}{(p^2+16)^3}.$$

Вправа. Знайдіть зображення функцій $f(t) = t \sin 2t$ та $f(t) = t^2 \cos 4t$, використовуючи властивість зміщення зображення.

Приклад 11. Знайдіть зображення функцій, використовуючи властивість інтегрування оригіналу:

1) $f(t) = \int\limits_0^t e^{\tau} d\tau$; 2) $f(t) = \int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$.

Розв'язання.

1) Використовуючи властивість 8 (*інтегрування оригіналу*) і враховуючи, що $e^t \leq \dfrac{1}{p-1}$, дістанемо

$$f(t)=\int_0^t e^{\tau}d\tau \leq \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p-1}=\frac{1}{p(p-1)};$$

2) Маємо $e^{-t}\leq \dfrac{1}{p+1}$. За властивістю диференціювання зображення $t^2e^{-t}\leq\left(\dfrac{1}{p+1}\right)''=\dfrac{2}{(p+1)^3}$. Залишилося застосувати властивість інтегрування оригіналу:

$$f(t)=\int_0^t \tau^2e^{-\tau}d\tau \leq \frac{2}{p(p+1)^3}.$$

Приклад 12. Знайдіть зображення функції $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $\sin t \leq \dfrac{1}{p^2+1}$, і скориставшись властивістю 9 (*інтегрування зображення*), дістанемо

$$\frac{\sin t}{t}\leq\int_p^{+\infty}\frac{dp}{p^2+1}=\lim_{a\to+\infty}\operatorname{arctg}p\Big|_p^a=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p=\operatorname{arcctg}p.$$

Приклад 13. За графіком функції $f(t)$ (рис.1.5) знайдіть зображення функції $f(t+1)$.

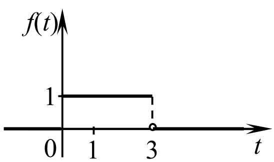

Рис. 1.5

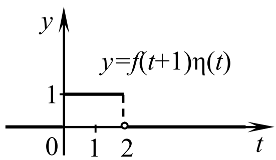

Рис. 1.6

Розв'язання. Побудуємо графік функції $f(t+1)$, враховуючи коментар до властивості 4 (випередження) (див. рис. 1.6). За властивістю 4 (випередження) маємо:

$$f(t)=\eta(t)-\eta(t-3)\leq \frac{1}{p}-\frac{e^{-3p}}{p}=F(p)\,;\;\tau=1\,;$$

$$f(t+1)\eta(t)\leq e^{p}\left(\frac{1}{p}-\frac{e^{-3p}}{p}-\int_0^1 e^{-pt}\cdot 1\,dt\right)=$$

$$=e^{p}\left(\frac{1}{p}-\frac{e^{-3p}}{p}-\left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^1\right)=e^{p}\left(\frac{1}{p}-\frac{e^{-3p}}{p}+\frac{e^{-p}}{p}-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p}-\frac{e^{-2p}}{p}\,.$$

Коментар. Зауважимо, що $f(t+1)\eta(t)=\eta(t)-\eta(t-2)$, тоді за властивістю 3 (запізнення оригіналу**)** $f(t+1)\eta(t)\leq \dfrac{1}{p}-\dfrac{e^{-2p}}{p}$.

Запитання для самоперевірки

1. Дайте визначення оригіналу та перетворення Лапласа.
2. Що таке одинична функція Хевісайда?
3. Що означає лінійність зображення?
4. Сформулюйте властивості подібності, запізнення та випередження оригіналу, зміщення зображення.
5. Нехай $f(t)\leq F(p)$, $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$. Запишіть зображення, що відповідають оригіналам $f'(t)$, $f''(t)$ та $f'''(t)$.
6. Сформулюйте теореми про диференціювання та інтегрування оригіналу .
7. Сформулюйте теореми про диференціювання та інтегрування зображення.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Перевірте, які з наведених функцій є оригіналами:

1) $f(t)=\begin{cases}1, \text{ якщо } 0\leq t<1,\\ 2, \text{якщо } t\geq 1,\\ 0, \text{ якщо } t<0;\end{cases}$ 2) $f(t)=\begin{cases}t, \text{ якщо } t\geq 0,\\ 1, \text{ якщо } t<0;\end{cases}$

3) $f(t)=t^{t}\eta(t)$; 4) $f(t)=\dfrac{t}{\sin t}\eta(t)$; 5) $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}\eta(t)$;

6) $f(t)=t^{4}e^{2t}\eta(t)$ 7) $f(t)=\operatorname{tg} t\sin 2t\eta(t)$.

Завдання 2. Знайдіть зображення функцій, використовуючи властивості лінійності та подібності:

1) $f(t)=\sin^2 5t$; 2) $f(t)=2\sin 6t$; 3) $f(t)=\cos\dfrac{t}{3}$; 4) $f(t)=\operatorname{ch}\dfrac{t}{2}$;

5) $f(t)=\sin 2t\cos 4t$; 6) $f(t)=\cos 3t\cos 5t$;

7) $f(t)=\cos 7t-2\operatorname{sh}3t+e^{3t}$; 8) $f(t)=\cos t\sin^2 2t$;

9) $f(t)=e^{2t}(e^{4t}-e^{-2t})$; 10) $f(t)=\operatorname{ch}2t\operatorname{sh}t$;

11) $f(t)=\cos^4\dfrac{t}{2}$; 12) $f(t)=\sin^3 4t$;

13) $f(t)=\operatorname{ch}^3 2t$; 14) $f(t)=\sin^2 t\cos^2 t$.

Завдання 3. Знайдіть зображення функцій, використовуючи властивості запізнення оригіналу та зміщення зображення:

1) $f(t)=\cos^2(t-4)\eta(t-4)$; 2) $f(t)=e^{1-t}\eta(t-1)$;

3) $f(t)=t^2\eta(t-2)$; 4) $f(t)=(t-2)^2\eta(t)$;

5) $f(t)=t^2e^{4t}$; 6) $f(t)=e^{-2t}\cos 5t$;

7) $f(t)=e^{4t}\sin 6t$; 8) $f(t)=e^{-t}\sin^2 t$.

Завдання 4. Знайдіть зображення функцій, використовуючи властивість диференціювання оригіналу:

1) $f(t)=\cos^2 3t$; 2) $f(t)=\sin^2 5t$; 3) $f(t)=e^{2t}$.

Завдання 5. Знайдіть зображення функцій, використовуючи властивість інтегрування оригіналу:

1) $f(t)=\int\limits_0^t \sin 3\tau d\tau$; 2) $f(t)=\int\limits_0^t (2\tau-3)\cos\tau d\tau$;

3) $f(t)=\int\limits_0^t \tau\operatorname{sh}2\tau d\tau$; 4) $f(t)=\int\limits_0^t \cos^2\omega\tau d\tau$;

5) $f(t)=\int\limits_0^t \cos\omega\tau d\tau$; 6) $f(t)=\int\limits_0^t \tau^2e^{-\tau}d\tau$.

Завдання 6. Знайдіть зображення функцій, використовуючи властивості диференціювання та інтегрування зображення:

1) $f(t)=t\cos 5t$; 2) $f(t)=t\sin 3t$; 3) $f(t)=t^2\sin 2t$;

4) $f(t)=te^{-4t}$; 5) $f(t)=(t^2-1)e^{-t}$; 6) $f(t)=(2t+3)\operatorname{sh}t$;

7) $f(t)=\dfrac{1-\cos 2t}{t}$; 8) $f(t)=\dfrac{e^t-1}{t}$; 9) $f(t)=\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$.

Відповіді: 1.1) так; 2) так; 3) ні; 4) ні; 5) так; 6) так; 7) так.

2. 1) $\dfrac{12{,}5}{p(p^2+25)}$; 2) $\dfrac{12}{p^2+36}$; 3) $\dfrac{9p}{9p^2+1}$; 4) $\dfrac{4p}{4p^2-1}$; 5) $\dfrac{3}{p^2+36}-\dfrac{1}{p^2+4}$; 6) $\dfrac{p}{2}\left(\dfrac{1}{p^2+64}+\dfrac{1}{p^2+4}\right)$; 7) $\dfrac{p}{p^2+79}-\dfrac{6}{p^2-9}-\dfrac{1}{p-7}$; 8) $\dfrac{1}{2}\dfrac{p}{p^2+1}-$ $-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{p}{p^2+9}+\dfrac{p}{p^2+25}\right)$; 9) $\dfrac{6}{p(p-6)}$; 10) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{p^2-9}-\dfrac{1}{p^2-1}\right)$; 11) $\dfrac{p}{8(p^2+4)}+$ $+\dfrac{3}{8p}+\dfrac{p}{2(p^2+1)}$; 12) $\dfrac{384}{(p^2+16)(p^2+144)}$; 13) $\dfrac{p}{4}\left(\dfrac{2}{p^2-36}+\dfrac{3}{p^2-4}\right)$; 14) $\dfrac{2}{p(p^2+16)}$. **3.** 1) $\dfrac{e^{-4p}}{2}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{p}{p^2+4}\right)$; 2) $\dfrac{e^{-p}}{p+1}$; 3) $\dfrac{2e^{-2p}}{p^3}\left(1+2p+2p^2\right)$; 4) $\dfrac{2-4p+4p^2}{p^3}$; 5) $\dfrac{2}{(p-4)^3}$; 6) $\dfrac{p+2}{p^2+4p+29}$; 7) $\dfrac{6}{p^2-8p+52}$; 8) $\dfrac{2}{(p+1)(p^2+2p+5)}$. **4.** 1) $\dfrac{1}{2p}+\dfrac{p}{2(p^2+36)}$; 2) $\dfrac{25}{2p(p^2+25)}$; 3) $\dfrac{1}{p-2}$.

5. 1) $\dfrac{3}{p(p^2+9)}$; 2) $\dfrac{2(p^2-1)}{p(p^2+1)^2}-\dfrac{3}{p^2+1}$; 3) $\dfrac{4}{(p^2-4)^2}$; 4) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p^2+4\omega^2}\right)$; 5) $\dfrac{1}{p^2-\omega^2}$; 6) $\dfrac{2}{p(p+1)^3}$. **6.** 1) $\dfrac{p^2-25}{(p^2+25)^2}$; 2) $\dfrac{6p}{(p^2+9)^2}$; 3) $\dfrac{4(3p^2-4)}{(p^2+4)^3}$; 4) $\dfrac{1}{(p+4)^2}$; 5) $\dfrac{2}{(p+1)^3}-\dfrac{1}{p+1}$; 6) $\dfrac{4p}{(p^2-1)^2}+\dfrac{3}{p^2-1}$; 7) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+4}{p^2}$; 8) $\ln\dfrac{p}{p-1}$; 9) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+4}{p^2+1}$.

Тема 2. ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

План

1. Зображення періодичного сигналу.
2. Зображення ступінчатих функцій.
3. Зображення згортки функцій. Інтеграл Дюамеля.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 2 студент повинен ***знати:*** означення згортки двох функцій, ступінчатих функцій, періодичних функцій, формули для знаходження зображення періодичних, ступінчатих функцій та згортки функцій, інтеграл Дюамеля; ***уміти:*** знаходити зображення періодичних сигналів, ступінчатих функцій, згортки функцій, використовуючи відповідні властивості перетворення Лапласа.

Основні теоретичні відомості

Теорема. Нехай $f\left(t\right)$ — функція-оригінал з періодом *T*, тобто

$$f\left(t\right)=f\left(t+T\right)=...=f\left(t+nT\right),\ t\geq 0,\ n\in N.$$

Тоді при $\operatorname{Re} p>0$

$$L(f\left(t\right))=\frac{1}{1-e^{-PT}}\int_{0}^{T}f\left(t\right)e^{-pt}dt\ . \tag{2.1}$$

Зображення ступінчастих функцій

Нехай

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t), \text{ якщо } t\in[0,a_1), \\ f_2(t), \text{ якщо } t\in[a_1,a_2), \\ \text{.....................................} \\ f_k(t), \text{ якщо } t\in[a_{k-1},a_k), \\ 0, \quad \text{якщо } t<0 \text{ або } t\geq a_k. \end{cases}$$

кусково-неперервна функція, $0 < a_1 < a_2 < ... < a_k$. Тоді

$$f(t) = f_1(t)\big(\eta(t) - \eta(t - a_1)\big) + f_2(t)\big(\eta(t - a_1) - \eta(t - a_2)\big) + ... +$$

$$+ f_k(t)\big(\eta(t - a_{k-1}) - \eta(t - a_k)\big).$$

Далі слід скористатися властивістю 3 (*запізнення оригіналу*).

Згортка оригіналів. Теорема множення

Згорткою неперервних функцій $f(t)$ і $\varphi(t)$ називають функцію

$$\psi(t) = f(t) * \varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\varphi(t - \tau)d\tau .$$

Теорема множення. Нехай $f_1(t) \leq F_1(p)$, $f_2(t) \leq F_2(p)$, тоді

$$f_1(t) * f_2(t) \leq F_1(p) \cdot F_2(p),$$

тобто згортці оригіналів відповідає добуток зображень оригіналів.

Коментар. Якщо $f_1(t) * f_2(t) \leq F_1(p)F_2(p)$ і $f_1'(t)$ є оригіналом, то

$$pF_1(p)F_2(p) \infty . f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau)f_2(t - \tau)d\tau \qquad (2.2)$$

Формулу (2.2) називають *інтегралом Дюамеля*.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Знайдіть зображення прямокутного періодичного імпульсу з періодом $2b$, $b > 0$ (рис. 2.1)

$$f(t) = \begin{cases} A \text{ для } 0 < t < b, \\ 0 \text{ для } b < t \leq 2b. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку зображення заданої функції на проміжку $0 < t \leq 2b$ (на одному періоді):

$$F_0(p) = \int_0^b Ae^{-pt}dt = A\frac{e^{-pt}}{-p}\bigg|_0^b = \frac{A}{p}\left(1 - e^{-pb}\right).$$

Тоді за формулою (2.1) дістанемо

$$f(t) \leq \frac{1}{1 - e^{-2pb}}F_0(p) = \frac{A}{p}\frac{1 - e^{-pb}}{1 - e^{-2pb}} = \frac{A}{p\left(1 + e^{-pb}\right)}.$$

Приклад 2. Знайдіть зображення періодичного імпульсу з періодом 3 (рис. 2.2)

$$f(t)=\begin{cases} t \text{ для } 0<t\le 1, \\ 0 \text{ для } 1<t\le 3. \end{cases}$$

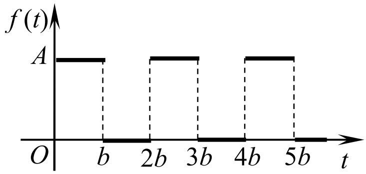

Рис. 2.1

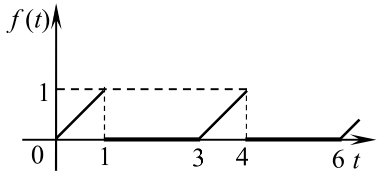

Рис. 2.2

Розв'язання. Знайдемо спочатку зображення заданої функції на проміжку $0<t\le 3$ (на одному періоді):

$$F_0\left(p\right)=\int_0^1 te^{-pt}dt+\int_1^3 0\cdot e^{-pt}dt=t\frac{e^{-pt}}{-p}\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{e^{-pt}}{-p}dt=$$

$$=-\frac{e^{-p}}{p}-\frac{e^{-pt}}{p^2}\Bigg|_0^1=-\frac{e^{-p}}{p}-\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{1}{p^2}.$$

Тоді за формулою (2.1) дістанемо

$$f\left(t\right)\ \le\ \frac{1}{1-e^{-3p}}F_0\left(p\right)=\frac{1}{1-e^{-3p}}\left(-\frac{e^{-p}}{p}-\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{1}{p^2}\right).$$

Приклад 3. Знайдіть зображення ступінчастої функції

$$f(t)=\begin{cases} 2 \text{ для } 0\le t<1, \\ 3 \text{ для } 1\le t<3, \\ 1 \text{ для } 3\le t<6, \\ 0 \text{ для } t<0 \text{ або } t\ge 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Графік заданої функції зображено на рис. 2.3. Використовуючи функції Хевісайда $\eta(t),\ \eta(t-1),\ \eta(t-3),\ \eta(t-6)$, запишемо $f(t)$ у вигляді

$$f(t)=2(\eta(t)-\eta(t-1))+3(\eta(t-1)-\eta(t-3))+\eta(t-3)-\eta(t-6).$$

Тут вираз $2(\eta(t)-\eta(t-1))$ визначає графік функції $f(t)$ на проміжку $(0;1)$, $3(\eta(t-1)-\eta(t-3))$ — на проміжку $(1;3)$, а $\eta(t-3)-\eta(t-6)$ — на проміжку $(3;6)$.

Враховуючи, що $\eta(t) \leq \dfrac{1}{p}$, і скориставшись властивістю 3 (*запізнення оригіналу*), дістанемо

$$f(t) \leq 2\left(\frac{1}{p}-\frac{e^{-p}}{p}\right)+3\left(\frac{e^{-p}}{p}-\frac{e^{-3p}}{p}\right)+\frac{e^{-3p}}{p}-\frac{e^{-6p}}{p}=$$

$$=\frac{2}{p}+\frac{e^{-p}}{p}-\frac{2e^{-3p}}{p}-\frac{e^{-6p}}{p}=\frac{1}{p}\left(1+e^{-p}-2e^{-3p}-e^{-6p}\right).$$

Приклад 4. Знайдіть зображення функції, заданої графіком (рис. 2.4).

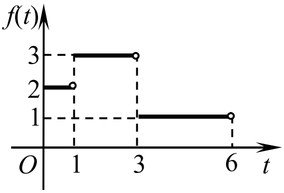

Рис. 2.3

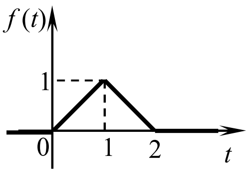

Рис. 2.4

Розв'язання. Подамо $f(t)$ у вигляді:

$$f(t)=\begin{cases} t & \text{для } 0 \leq t \leq 1, \\ 2-t & \text{для } 1 < t < 2, \\ 0 & \text{для } t < 0 \text{ або } t \geq 2. \end{cases}$$

Використовуючи функції Хевісайда, подамо $f(t)$ у вигляді:

$$f(t)=t(\eta(t)-\eta(t-1))+(-t+2)(\eta(t-1)-\eta(t-2))=$$

$$=t\eta(t)-t\eta(t-1)-(t-2)\eta(t-1)+(t-2)\eta(t-2))=$$

$$=t\eta(t)-2(t-1)\eta(t-1)+(t-2)\eta(t-2)).$$

За властивістю 3 (*запізнення оригіналу*) дістанемо

$$f(t) \leq \frac{1}{p^2}-\frac{2e^{-p}}{p^2}+\frac{e^{-2p}}{p^2}=\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}=\frac{(1-e^{-p})^2}{p^2}.$$

Приклад 5. Знайдіть згортку функцій t і $\cos t$ та її зображення.

Розв'язання. Нехай $f(t)=t$, $\varphi(t)=\cos t$. Тоді

$$f(t)*\varphi(t)=\int_0^t \tau\cos(t-\tau)d\tau .$$

Інтегруючи за частинами, дістанемо:

$$\int_0^t \tau\cos(t-\tau)d\tau=\left|\begin{array}{l} u=\tau \;\; du=d\tau \\ \cos(t-\tau)d\tau=dv \\ v=-\sin(t-\tau)\end{array}\right|=-\tau\sin(t-\tau)\Big|_0^t+$$

$$+\int_0^t \sin(t-\tau)d\tau=-t\sin(t-t)+0\cdot\sin(t-0)+\cos(t-\tau)\Big|_0^t=1-\cos t .$$

Отже,

$$t*\cos t=1-\cos t .$$

Зображення $F(p)$ цієї згортки за теоремою множення має вигляд

$$F(p)=L(t)\cdot L(\cos t)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p\left(p^2+1\right)} .$$

Запитання для самоперевірки

1. Дайте визначення періодичної функції.
2. Як знайти зображення періодичного оригіналу?
3. Дайте визначення ступінчастої функції
4. Як подати ступінчасту функцію аналітичним виразом, використовуючи функцію Хевісайда?
5. Яка властивість перетворення Лапласа є основною для знаходження зображення ступінчастої функції?
5. Дайте визначення згортки двох функцій.
6. Сформулюйте теорему множення.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайдіть зображення періодичних імпульсів, графіки яких зображено на рис. 2.5 та 2.6.

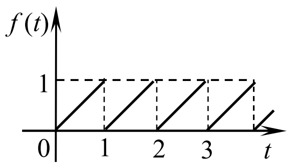

Рис. 2.5

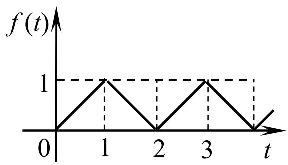

Рис. 2.6

Завдання 2. Знайдіть зображення функцій, заданих графічно на рис.2.7−2.9:

1)

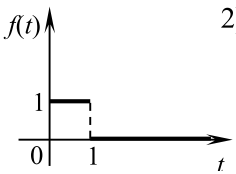

Рис. 2.7

2)

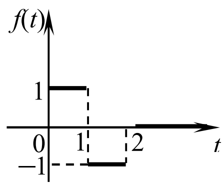

Рис. 2.8

3)

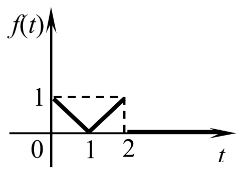

Рис. 2.9

Завдання 3. Знайдіть згортку функцій $f(t)$, $\varphi(t)$ та її зображення, якщо:

1) $f(t)=t$, $\varphi(t)=e^t$; 2) $f(t)=\sin t$ і $\varphi(t)=\cos 3t$

Відповіді: **1.** 1) $\dfrac{1}{1-e^{-p}}\left(-\dfrac{e^{-p}}{p}-\dfrac{e^{-p}}{p^2}+\dfrac{1}{p^2}\right)$; 2) $\dfrac{1-e^{-p}}{1+e^{-p}}\dfrac{1}{p^2}$. **2.** 1) $\dfrac{1-e^{-p}}{p}$; 2) $\dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$; 3) $\dfrac{1-e^{-2p}}{p}-\dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}$. **3.** 1) e^t-t-1, $\dfrac{1}{(p-1)p^2}$; 2) $\dfrac{1}{8}(\cos t-\cos 3t)$, $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

Тема 3. ОБЕРНЕНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

План

1. Елементарний метод.
2. Теореми розкладання.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 3 студент повинен ***знати:*** методи знаходження оригіналів за відомими зображеннями, елементарні дроби, формулювання першої та другої теорем розкладання; ***уміти:*** знаходити оригінал дробово–раціональної функції, використовувати властивості перетворення Лапласа для знаходження оригіналів, користуватися теоремами розкладання.

Основні теоретичні відомості

1. Елементарний метод

На практиці для знаходження оригіналів зображень часто застосовують властивості перетворення Лапласа та таблиці зображень. Зокрема, для цього використовують розкладання раціонального дробу у суму елементарних дробів (див. інтегральне числення).

2. Теореми розкладання

Перша теорема розкладання. Якщо зображення $F\left(p\right)$ в околі $\left|p\right| > p_0$ нескінченно віддаленої точки має розклад в ряд Лорана вигляду

$$F\left(p\right) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \ldots + \frac{a_n}{p^{n+1}} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}$$

то функція

$$f\left(t\right) = a_0 + \frac{a_1 t}{1!} + \frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_2 t^2}{2!} + \ldots + \frac{a_n t^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!} \qquad (3.1)$$

є оригіналом для функції $F\left(p\right)$.

Друга теорема розкладання. Якщо функція $F\left(p\right)$ аналітична в усій комплексній площині за винятком скінченої кількості особливих точок $p_1, p_2, ..., p_n$, то оригіналом для $F\left(p\right)$ є функція

$$f\left(t\right)=\sum_{k=1}^{n}\underset{p=p_k}{\operatorname{res}}\left(F\left(p\right)e^{pt}\right).$$

Якщо $F\left(p\right)=\dfrac{\Phi\left(p\right)}{\psi\left(p\right)}$ і $p_1, p_2, ..., p_n$ — прості корені функції $\psi\left(p\right)$, то

$$f\left(t\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\Phi\left(p_k\right)}{\psi'\left(p_k\right)}e^{p_k t} \tag{3.2}$$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Знайдіть оригінал для функції $F(p)=\dfrac{1}{4p-5}$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення: $F(p)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{p-\frac{5}{4}}$.

Тоді $f(t)=\dfrac{1}{4}\cdot e^{\frac{5}{4}t}$ – шуканий оригінал.

Приклад 2. Знайдіть оригінал для функції $F(p)=\dfrac{4p-3}{p^2+6p+13}$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення

$$F(p)=\frac{4(p+3)-15}{(p+3)^2+4}=4\cdot\frac{p+3}{(p+3)^2+2^2}-\frac{15}{2}\cdot\frac{2}{(p+3)^2+2^2}.$$

Оскільки $\dfrac{p}{p^2+4}\propto \cos 2t$, $\dfrac{2}{p^2+4}\propto \sin 2t$, то за властивостями 5 (зміщення зображення) та 1 (лінійності)

$$F(p)\propto 4e^{-3t}\cos 2t-\frac{15}{2}e^{-3t}\sin 2t.$$

Приклад 3. Знайдіть оригінал для функції $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+1)}$.

Розв'язання. Перший спосіб. Розкладемо правильний раціональний дріб $F(p)$ у суму елементарних дробів

$$\frac{1}{p(p^2+1)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+1}.$$

Визначивши значення коефіцієнтів A, B і C, дістанемо

$$F(p)=\frac{1}{p(p^2+1)}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}.$$

Оригіналом є $f(t)=1-\cos t$.

Другий спосіб. Відомо, що $\sin t \leq \dfrac{1}{p^2+1}$. Діленню зображення на p відповідає інтегрування оригіналу (властивість 8), тому

$$\frac{1}{p(p^2+1)}\infty\int_0^t \sin\tau d\tau=-\cos\tau\Big|_0^t=1-\cos t.$$

Приклад 4. Знайдіть оригінал для функції

$$F(p)=\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}.$$

Розв'язання. Розклавши дріб на елементарні дроби, дістанемо

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{20}\cdot\frac{p-4}{p^2+4}.$$

Третій доданок подамо у вигляді різниці

$$\frac{1}{20}\cdot\frac{p-4}{p^2+4}=\frac{1}{20}\cdot\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{p^2+4}.$$

Тоді шуканий оригінал має вигляд

$$f(t)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}e^t+\frac{1}{20}\cos 2t-\frac{1}{10}\sin 2t.$$

Приклад 4. $F\left(p\right)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$.

Розв'язання. Для відшукання оригіналу використаємо теорему множення (про згортку оригіналів).

$$F(p)=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\infty\int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)d\tau=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t(\cos(2\tau-t)-\cos t)d\tau=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2\tau-t)-\tau\cos t\right)\Bigg|_0^t=$$

$$\frac{1}{4}\left(\sin t+\sin t\right)-\frac{1}{2}t\cos t=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t=\frac{1}{2}\left(\sin t-t\cos t\right).$$

Приклад 5. Знайдіть оригінал $f(t)$, якщо $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p^2-2p+10}$.

Розв'язання. Нехай $f(t)$ — шуканий оригінал, тобто $f(t)\leq F(p)$. Запишемо зображення $F(p)$ у вигляді

$F(p)=e^{-2p}F_1(p)$, де $F_1(p)=\dfrac{1}{p^2-2p+10}$.

Аби знайти оригінал заданого зображення $F(p)$, достатньо виконати такі дії:

1) визначити оригінал $f_1(t)$ для зображення $F_1(p)$;

2) скористатися властивістю 3 (запізнення оригіналу):

$f(t)=f_1(t-2)\eta(t-2)$ — шуканий оригінал.

Маємо

$$F_1(p)=\frac{1}{p^2-2p+10}=\frac{1}{(p-1)^2+3^2}=\frac{1}{3}\frac{3}{(p-1)^2+3^2},$$

$$F_1(p)\infty f_1(t)=\frac{1}{3}e^t\sin 3t,$$

$$f(t)=f_1(t-2)\eta(t-2)=e^{t-2}\cdot\frac{1}{3}\sin 3(t-2)\eta(t-2).$$

Приклад 6. Знайдіть оригінал $f(t)$, якщо $F(p)=\dfrac{1}{p\left(1+p^4\right)}$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення зображення

$$F(p)=\frac{1}{p\left(1+p^4\right)}=\frac{1}{p^5}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{p^4}}=$$

$$=\frac{1}{p^5}\cdot\left(1-\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^8}-...\right)=\frac{1}{p^5}-\frac{1}{p^9}+\frac{1}{p^{13}}-...\ \left(|p|>1\right).$$

Звідси за першою теоремою розкладання дістанемо

$$f(t)=\frac{t^4}{4!}-\frac{t^8}{8!}+\frac{t^{12}}{12!}-...\ .$$

Вправа. Доведіть, що $f(t)=1-\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\frac{t}{\sqrt{2}}$.

Приклад 7. Знайдіть оригінал для функції $F(p)=\sin\frac{1}{p}$.

Розв'язання. Розкладемо функцію $\sin\frac{1}{p}$ у ряд Лорана:

$$\sin\ \frac{1}{p}=\frac{1}{p}-\frac{1}{3!p^3}+\frac{1}{5!p^5}-...,$$

тоді за формулою (3.1) отримуємо оригінал

$$f(t)=1-\frac{1}{3!}\cdot\frac{t^2}{2!}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{t^4}{4!}-...\ .$$

Приклад 8. Знайдіть оригінал для зображення $F(p)=\frac{1}{(p-1)\left(p^2-4\right)}$.

Розв'язання. За формулою (3.2) маємо:

$\Phi(p)=1$, $\psi(p)=(p-1)(p^2-4)$,

$$\psi'=\left((p-1)\left(p^2-4\right)\right)'=p^2-4+2p\left(p-1\right)=3p^2-2p-4,$$

$$\psi'(1)=-3, \psi'(2)=4,\ \psi'(-2)=12\ .$$

Отже,

$$f(t)=-\frac{1}{3}e^t+\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{12}e^{-2t}\ .$$

Приклад 9. Знайдіть оригінал для зображення

$$F(p)=\frac{p+3}{p\left(p^2-4p+3\right)}.$$

Розв'язання. Запишемо задане зображення у вигляді

$$F(p)=\frac{p+3}{p\left(p-1\right)\left(p-3\right)}.$$

Позначимо: $\Phi(p)=p+3$, $\psi(p)=p(p^2-4p+3)=p^3-4p^2+3p$.

Тоді $\Psi'\left(p\right)=3p^2-8p+3$. Далі маємо: $\dfrac{\Phi(p)}{\Psi'(p)}=\dfrac{p+3}{3p^2-8p+3}$,

$\dfrac{\Phi(0)}{\Psi'(0)}=\dfrac{3}{3}=1$, $\dfrac{\Phi(1)}{\Psi'(1)}=\dfrac{4}{-2}=-2$, $\dfrac{\Phi(3)}{\Psi'(3)}=\dfrac{6}{6}=1$.

Отже, за другою теоремою розкладання $f(t)=1-2e^t+e^{3t}$.

Приклад 10. Знайдіть оригінал, якщо $F(p)=\dfrac{p+1}{p(p^2+4)}$.

Розв'язання. Знаходимо нулі знаменника: $p_1=0$, $p_2=2i$, $p_3=-2i$. Використовуємо формулу (3.2). При цьому $\Phi(p)=p+1$, $\Psi(p)=p^3+4p$, $\Psi_1'(p)=3p^2+4$. Тоді

$$f(t)=\frac{0+1}{0+4}e^{0\cdot t}+\frac{2i+1}{3(2i)^2+4}e^{2it}+\frac{-2i+1}{3(-2i)^2+4}e^{-2it}=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}+\frac{1}{2}\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t.$$

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає елементарний метод відшукання оригіналу за зображенням?
2. Що таке окіл нескінченно віддаленої точки?
3. Який ряд називається рядом Лорана?
4. Сформулюйте першу теорему розкладання.
5. Які точки комплексної площини називаються особливими?
6. Які функції називаються аналітичними?
7. Сформулюйте другу теорему розкладання.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайдіть оригінали для зображень:

1) $F(p)=\dfrac{1}{2p+3}$; 2) $F(p)=\dfrac{1}{p^2-4p+13}$;

3) $F(p)=\dfrac{p-5}{p^2-p-2}$; 4) $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+4)^2}$;

5) $F(p)=\dfrac{e^{-4p}}{p^2-6p+10}$; 6) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$;

7) $F(p)=\dfrac{p}{p^4-1}$; 8) $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$;

9) $F(p)=\dfrac{2p^2-5p-1}{(p^2-1)(p-2)}$; 10) $F(p)=\dfrac{1}{p^4+5p^2+4}$;

11) $F(p)=1-\cos\dfrac{1}{p}$; 12) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(1+p^5)}$

Відповіді: 1) $0,5e^{-1,5t}$; 2) $\dfrac{1}{3}e^{2t}\sin 3t$; 3) $2e^{-t}-e^{2t}$; 4) $\dfrac{\sin 2t-2t\cos 2t}{16}$;

5) $e^{3(t-4)}\sin(t-4)\eta(t-4)$; 6) $\dfrac{1}{2}e^{t-1}\sin(2t-2)\eta(t-1)+\cos(3t-6)\eta(t-2)$;

7) $\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} t-\cos t)$; 8) $-\dfrac{3}{4}-\dfrac{t}{2}+\dfrac{2}{3}e^{t}+\dfrac{1}{12}e^{-2t}$; 9) $e^{-t}+2e^{t}-e^{2t}$;

10) $\dfrac{1}{3}\sin t-\dfrac{1}{6}\sin 2t$; 11) $\dfrac{2^2}{2!}t-\dfrac{2^4}{4!}\dfrac{t^3}{3!}+\dfrac{2^6}{6!}\dfrac{t^5}{5!}-\ldots$; 12) $\dfrac{t^6}{6!}-\dfrac{t^{11}}{11!}+\dfrac{t^{16}}{16!}-\ldots$.

Тема 4. ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

План

1. Розв’язування диференціальних рівнянь.
2. Формула Дюамеля.
3. Розв’язування систем диференціальних рівнянь.
4. Підсумовування числових рядів.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 4 студент повинен ***знати:*** означення лінійних диференціальних рівнянь першого та вищих порядків та систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, формулювання задачі Коші, алгоритм розвязання лінійних диференціальних рівнянь за допомогою перетворення Лапласа, формулу Дюамеля, означення основних понять числових рядів; ***уміти:*** переходити від диференціального рівняння (системи рівнянь) до відповідного операторного рівняння, за яким знаходити розв’язок початкового рівняння (системи рівнянь), знаходити суму числових рядів.

Основні теоретичні відомості

1. Розв’язування диференціальних рівнянь операційним методом

Нехай задано лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt}+ax=f\left(t\right),\ x\left(0\right)=x_0 \tag{4.1}$$

де $x\left(t\right)$— невідома функція, $f=f\left(t\right)$ — функція-оригінал, a — дійсне число.

Нехай $L\left(f\left(t\right)\right)=F\left(p\right)$, $L\left(x\left(t\right)\right)=X\left(p\right)$, тоді за правилом диференціювання оригіналу $L\left(x'\left(t\right)\right)=pX\left(p\right)-x_0$.

Знайдемо зображення від обох частин рівняння (4.1)

$$L\left(x'(t)+ax(t)\right)=pX(p)-x_0+aX(p),\ L\left(f(t)\right)=F(p).$$

Отже, заданій у просторі оригіналів задачі Коші у просторі зображень відповідає рівняння $pX(p)-x_0+aX(p)=F(p)$, звідси:

$$X(p)=\frac{F(p)+x_0}{p+a}. \tag{4.2}$$

Далі знаходять оригінал зображення (4.2), який і буде розв'язком задачі Коші (4.1).

Коментар. Аналогічним чином розв'язують також лінійні диференціальні рівняння другого і вищого порядків, а також системи лінійних диференціальних рівнянь.

2. Інтеграл Дюамеля. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$a_0x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+...+a_nx(t)=f(t) \tag{4.3}$$

за нульових початкових умов

$$x(0)=x'(0)=...=x^{(n-1)}(0)=0 \tag{4.4}$$

Припустимо, що $g(t)$ — розв'язок рівняння

$$a_0x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+...+a_nx(t)=1$$

за умов (4.4). Тоді розв'язок $x(t)$ задачі (4.3)–(4.4) можна виразити через функції $g(t)$ та $f(t)$ за допомогою однієї з формул

$$x(t)=\int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau\text{, або } x(t)=\int_0^t g'(t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{4.5}$$

Кожен з виразів називають формулою або інтегралом Дюамеля.

3. Підсумовування числових рядів

Розглянемо ряди вигляду

$$\sum_{n=m}^{\infty}(\pm 1)^n F(n). \qquad (4.6)$$

Нехай $f(t) \leq F(n)$. Тоді за означенням зображення

$$F(n)=\int_0^{\infty} e^{-nt} f(t)\,dt$$

і сума S ряду (4.6)

$$S=\sum_{n=m}^{\infty}(\pm 1)^n \int_0^{\infty} e^{-nt} f(t)\,dt=\int_0^{\infty} f(t)\sum_{n=m}^{\infty}(\pm 1)^n e^{-nt}\,dt.$$

Оскільки $\sum_{n=m}^{\infty}(\pm 1)^n e^{-nt}$ є сумою нескінченно спадної геометричної прогресії зі знаменником $q=\pm e^{-t}$ ($|q|=e^{-t}<1$), то

$$S=(\pm 1)^m \int_0^{\infty} \frac{f(t)e^{-mt}}{1-e^{-t}}\,dt \qquad (4.7)$$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Знайдіть розв'язок задачі Коші

$$x'(t)+2x(t)=e^{-3t}, \quad x(0)=1.$$

Розв'язання. Позначимо: $F(p)=L\left(e^{-3t}\right)=\dfrac{1}{p+3}$, $L\big(x(t)\big)=X(p)$, тоді $L\big(x'(t)\big)=pX(p)-1$, $pX(p)-1+2X(p)=\dfrac{1}{p+3}$. Звідси

$$X(p)=\frac{p+4}{(p+3)(p+2)},$$

або

$$X(p)=\frac{p+3+1}{(p+3)(p+2)}=\frac{1}{p+2}+\frac{1}{(p+3)(p+2)}=$$

$$=\frac{2}{p+2}-\frac{1}{p+3}\infty\ 2e^{-2t}-e^{-3t}.$$

Отже, $x(t)=2e^{-2t}-e^{-3t}$ — розв'язок заданої задачі Коші.

Приклад 2. Розв'яжіть диференціальне рівняння:

$$x''+x'-2x=e^{3t},\ x(0)=1,\ x'(0)=0.$$

Розв'язання. Нехай $L\big(x(t)\big)=X(p)$, тоді $L\big(x'(t)\big)=pX(p)-1$, $L\big(x''(t)\big)=p^2X(p)-p$, $L\big(e^{3t}\big)=\frac{1}{p-3}$.

Отже, $p^2X(p)-p+\big(pX(p)-1\big)-2X(p)=\frac{1}{p-3}$.

Звідси

$$X(p)=\frac{p^2-2p-2}{(p-3)\left(p^2-p-2\right)}=\frac{A}{p-3}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p-2},$$

$$p^2-2p-2=A(p+1)(p-2)+B(p-3)(p-2)+C(p-3)(p+1).$$

Визначаємо значення невідомих A, B та C:

$p=-1:1=12B,\ B=\frac{1}{12}$;

$p=2:-2=-3C,\ C=\frac{2}{3}$;

$p=3:1=4A,\ A=\frac{1}{4}$.

Отже, $X(p)=\frac{1}{4}\frac{1}{p-3}+\frac{1}{12}\frac{1}{p+1}+\frac{2}{3}\frac{1}{p-2}$. Цьому зображенню відповідає оригінал $x(t)=\frac{1}{4}e^{3t}+\frac{1}{12}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{2t}$, який і є шуканим розв'язком заданої задачі Коші.

Приклад 3. Розв'яжіть задачу Коші $x''+x=f(t)$, якщо

$$f(t)=\begin{cases}1 & \text{для } 0\le t<1,\\ -1 & \text{для } 1\le t<2,\\ 0 & \text{для } t\ge 2.\end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $x(t) \leq X(p)$, тоді $x''(t) \leq p^2 X(p)$.

Запишемо оригінал $f(t)$ у вигляді

$$f(t) = (\eta(t) - \eta(t-1)) - 1(\eta(t-1) - \eta(t-2)),$$

або

$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2).$$

Його зображення:

$$F(p) = \frac{1}{p}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}).$$

Складаємо операторне рівняння

$$p^2 X(p) + X(p) = \frac{1}{p}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}),$$

звідси

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}).$$

Оскільки $\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}$, то

$$X(p) = \frac{1}{p}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}) - \frac{p}{p^2+1}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}).$$

Цьому зображенню відповідає оригінал

$$x(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2) -$$
$$-(\cos t\,\eta(t) - 2\cos(t-1)\eta(t-1) + \cos(t-2)\eta(t-2)),$$

тобто

$$x(t) = 2\sin^2\frac{t}{2}\eta(t) - 4\sin^2\frac{t-1}{2}\eta(t-1) + 2\sin^2\frac{t-2}{2}\eta(t-2),$$

який і є розв'язком заданої задачі Коші.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $y'' - 2y' + 2y = 2e^t\cos t$, якщо $y(0) = y'(0) = 0$.

Розв'язання. Нехай $y(t) \leq Y(p)$, тоді $y'(t) \leq pY(p)$, $y''(t) \leq p^2 Y(p)$, крім того $2e^t\cos t \leq \frac{2(p-1)}{(p-1)^2+1}$.

Складаємо операторне рівняння

$$(p^2-2p+2)Y(p)=\frac{2(p-1)}{(p-1)^2+1}.$$

Звідси

$$Y(p)=\frac{2(p-1)}{((p-1)^2+1)^2}.$$

Для відшукання оригіналу застосуємо теорему про згортку функції (властивість 10^0).

Відомо, що $e^t\sin t \le \dfrac{1}{(p-1)^2+1}$, тоді вираз

$$\frac{2(p-1)}{((p-1)^2+1)^2}=\frac{1}{(p-1)^2+1}\cdot\frac{2(p-1)}{(p-1)^2+1}$$

є зображенням згортки

$$e^t\sin t * 2e^t\cos t=2\int_0^t e^{t-\tau}\cos(t-\tau)e^{\tau}\sin\tau d\tau.$$

Знайдемо цей інтеграл

$$2\int_0^t e^{t-\tau}\cos(t-\tau)e^{\tau}\sin\tau d\tau=2e^t\int_0^t\cos(t-\tau)\sin\tau d\tau=$$

$$=e^t\int_0^t(\sin(t-\tau+\tau)+\sin(\tau-t+\tau))d\tau=e^t\int_0^t(\sin t+\sin(2\tau-t))d\tau=$$

$$=e^t\left(\sin t\cdot\tau\Big|_0^t-\frac{1}{2}\cos(2\tau-t)\Big|_0^t\right)=$$

$$=e^t\left(t\sin t-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\cos t\right)=e^t t\sin t.$$

Отже, $y=e^t t\sin t$ — розв’язок заданої задачі Коші.

Приклад 5. Розв'яжіть систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y' = 3z - y, \\ z' = y + z + e^t \end{cases}$$

за початкових умов $y(0) = z(0) = 0$.

Розв'язання. Переведемо задану систему в простір зображень. Нехай $y(t) \leq Y(p)$, $z(t) \leq Z(p)$, тоді $y'(t) \leq pY(p)$, $z'(t) \leq pZ(p)$, крім того, $e^t \leq \dfrac{1}{p-1}$.

Тоді операторна система матиме вигляд

$$\begin{cases} pY(p) = 3Z(p) - Y(p), \\ pZ(p) = Y(p) + Z(p) + \dfrac{1}{p-1}, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (p+1)Y(p) \ - \quad 3Z(p) = 0, \\ \quad -Y(p) + (p-1)Z(p) = \dfrac{1}{p-1}. \end{cases}$$

Цю систему зручно розв'язати за формулами Крамера. Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+1 & -3 \\ -1 & p-1 \end{vmatrix} = p^2 - 4, \ \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ \dfrac{1}{p-1} & p-1 \end{vmatrix} = \frac{3}{p-1},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p+1 & 0 \\ -1 & \dfrac{1}{p-1} \end{vmatrix} = \frac{p+1}{p-1}.$$

Отже, $Y(p) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{3}{(p-1)(p^2-4)}$,

$$Z(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{p+1}{(p-1)(p^2-4)}.$$

Розклавши дроби на елементарні, знайдемо розв'язок системи

$$\begin{cases} y(t)=\frac{3}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{-2t}-e^{t}, \\ z(t)=\frac{3}{4}e^{2t}-\frac{1}{12}e^{-2t}-\frac{2}{3}e^{t}. \end{cases}$$

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння

$$x''+9x=8\sin t,\ x(0)=x'(0)=0. \qquad (4.8)$$

за допомогою інтеграла Дюамеля.

Розв'язання. Розв'яжемо допоміжну задачу Коші

$$x''+9x=1,\ x(0)=x'(0)=0. \qquad (4.9)$$

Нехай $L(x(t))=X(p)$, тоді $L(x''(t))=p^2X(p)-px(0)-x'(0)$. Оскільки $x(0)=x'(0)=0$, то $L(x''(t))=p^2X(p)$, крім того, $L(1)=\frac{1}{p}$.

Отже, рівнянню (4.9) у просторі зображень відповідає рівняння

$$p^2X(p)+9X(p)=\frac{1}{p},$$

звідси $\left(p^2+9\right)X(p)=\frac{1}{p}$, $X(p)=\frac{1}{p\left(p^2+9\right)}$.

За таблицею зображень $\frac{1}{p^2+9} \le \frac{1}{3}\sin 3t$. Крім того, за властивістю 8 (*інтегрування оригіналу*) $\frac{F(p)}{p}\le\int_0^t f(u)du$, тому $\frac{1}{p\left(p^2+9\right)}\le \int_0^t \frac{1}{3}\sin 3u du=-\frac{1}{9}\cos 3u\Big|_0^t=\frac{1}{9}\left(1-\cos 3t\right)$. Отже, для зображення $\dfrac{1}{p\left(p^2+9\right)}$ оригіналом є функція $g(t)=\dfrac{1}{9}\left(1-\cos 3t\right)$.

При цьому $g(0)=0$, $g'(t)=\dfrac{1}{3}\sin 3t$. За другою з формул (4.5):

$$x(t)=\int_0^t \frac{1}{3}\sin 3(t-\tau)\cdot 8\sin\tau d\tau=\frac{4}{3}\int_0^t\left(\cos(3t-4\tau)-\cos(3t-2\tau)\right)d\tau=$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{\sin(3t-4\tau)}{-4}+\frac{\sin(3t-2\tau)}{2}\right)\Bigg|_0^t=\sin t-\frac{1}{3}\sin 3t \text{ —}$$

розв'язок заданого рівняння.

Приклад 7. Розв'яжіть задачу Коші

$$x''-x=\frac{1}{1+e^t},\ x\left(0\right)=x'\left(0\right)=0,$$

використовуючи формулу Дюамеля.

Розв'язання. Розглянемо допоміжну задачу

$$x_1''-x_1=1,\ x_1(0)=x_1'(0)=0.$$

Якщо $X_1(p)\ \infty\ x_1(t)$, то переходячи до операторного рівняння, дістанемо

$$X_1(p)=\frac{1}{p(p^2-1)}.$$

Звідси, скориставшись властивістю 8 (*інтегрування оригіналу*), знайдемо

$$x_1(t)=\int_0^t \operatorname{sh}\tau d\tau=\operatorname{ch}t-1.$$

За формулою Дюамеля (4.5) отримуємо

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau=\int_0^t\frac{1}{1+e^\tau}\operatorname{sh}(t-\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{e^{t-\tau}-e^{-t+\tau}}{1+e^\tau}d\tau=\frac{e^t}{2}\int_0^t\frac{e^{-\tau}}{1+e^\tau}d\tau-\frac{e^{-t}}{2}\int_0^t\frac{e^\tau}{1+e^\tau}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}(e^t-te^t-1)+\operatorname{sh}t\ln\frac{1+e^t}{2}.$$

Приклад 8. Визначте суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n(n+1)(n+3)}$.

Розв'язання. Маємо:

$$F(p)=\frac{p+2}{p(p+1)(p+3)},$$

$p=0, p=-1, p=-3$ — прості полюси функції $F(p)$. Користуючись формулою (3.1), дістанемо

$$f(t)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-3t}.$$

Тоді за формулою (4.7)

$$S=\frac{1}{6}\int\limits_0^{\infty}\frac{\left(4-3e^{-t}-e^{-3t}\right)e^{-t}}{1-e^{-t}}dt=\frac{1}{6}\int\limits_0^{\infty}\frac{\left(4-4e^{-t}+e^{-t}-e^{-3t}\right)e^{-t}}{1-e^{-t}}dt=$$

$$=\frac{1}{6}\int\limits_0^{\infty}\left(4e^{-t}+\frac{\left(1-e^{-2t}\right)e^{-2t}}{1-e^{-t}}\right)dt=\frac{1}{6}\int\limits_0^{\infty}\left(4e^{-t}+e^{-2t}+e^{-3t}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{6}\left(-4e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^{-3t}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{6}\left(4+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{29}{36}.$$

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Розв'яжіть диференціальні рівняння при заданих початкових умовах.

1) $y'-4y=0,\ y(0)=1$; 2) $y'+y=e^t,\ y(0)=0$;

3) $x'+2x=\sin\ t,\ x(0)=0$; 4) $y''-2y'-3y=e^{3t},\ y(0)=y'(0)=0$.

Завдання 2. Розв'яжіть задачу Коші $x'+x=f(t),\ x(0)=0,$ якщо функцію $f(t)$ задано графічно на рис. 4.1.

Завдання 3. Розв'яжіть задачу Коші $x''+x=f(t)$, $x(0)=x'(0)=0,$ якщо функцію $f(t)$ задано графічно на рис. 4.2.

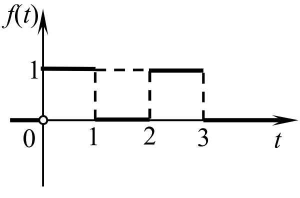

Рис.4.1

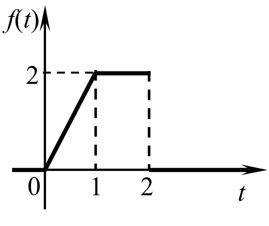

Рис. 4.2

1) 2)

Завдання 4. За допомогою формули Дюамеля розв'яжіть задачу Коші: $x'' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x(0) = x'(0) = 0$.

Завдання 5. Розв'яжіть системи диференціальних рівнянь за заданих початкових умов:

1) $\begin{cases} x' = x + 2y + t, \\ y' = 2x + y + t, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ x'(0) = 4$;

2) $\begin{cases} x' = -5x + 2y + e^{t}, \\ y' = x - 6y + e^{-2t}, \end{cases}$ $x(0) = x'(0) = 0$;

3) $\begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t, \\ y' = -x - 2y + \sin t, \end{cases}$ $x(0) = x'(0) = 0$.

Запитання для самоперевірки

1. Дайте означення невласного інтеграла першого роду.

2. Дайте означення лінійних диференціальних рівнянь першого та вищих порядків.

3. Що таке розв'язок диференціального рівняння?

4. Опишіть алгоритм розвязання лінійних диференціальних рівнянь за допомогою перетворення Лапласа.

5. Сформулюйте задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку? другого порядку?

6. Що таке інтеграл Дюамеля?

7. Як розв'язують диференціальні рівняння за допомогою формули Дюамеля?

8. Як можна обчислювати суму числових рядів за допомогою перетворення Лапласа?

Відповіді: 1. 1) $y(t)=e^{4t}$; 2) $y(t)=\operatorname{sh} t$; 3) $x(t)=\frac{1}{5}(e^{-2t}-\cos t+2\sin t)$; 4) $y(t)=\frac{1}{4}te^{3t}-\frac{1}{16}e^{3t}+\frac{1}{16}e^{-t}$. **2.** $x(t)=(1-e^{-t})\eta(t)-(1-e^{-t+1})\eta(t-1)+$ $+(1-e^{-t+2})\eta(t-2)-(1-e^{-t+3})\eta(t-3)$. 3. $x(t)=-2(t-1-\sin(t-1))\eta(t-1)+$ $+2(t-\sin t)\eta(t)-4\sin^2\frac{t-2}{2}\eta(t-2)$. 4. $x(t)=t\operatorname{arctg} t-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$.
5. 1) $x(t)=\frac{28}{9}e^{3t}-e^{-t}-\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}$, $y(t)=\frac{28}{9}e^{3t}+e^{-t}-\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}$; 2) $x(t)=\frac{7}{40}e^{t}+$ $+\frac{1}{5}e^{-2t}-\frac{4}{5}e^{-4t}+\frac{7}{40}e^{-7t}$, $y(t)=\frac{3}{40}e^{t}-\frac{3}{10}e^{-2t}-\frac{7}{30}e^{-4t}+\frac{11}{40}e^{-7t}$; 3) $x(t)=4t+$ $+2-2\cos t-3\sin t$, $y(t)=-2t+2\sin t$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гаєва К. А*. Теорія функцій комплексної змінної та операційне числення. Збірник задач. / К.А. Гаєва., О.М. Супрун— К.: НАУ, 2003. — 192 с.

2. *Денисюк В. П.* Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч.— Ч. 3. / В.П. Денисюк, В.К. Репета, К.А. Гаєва [та ін.]. – К.: НАУ, 2005. — 444 с.

3. *Краснов М. Л.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. /М. Л. Краснов,А.И. Киселев,Г.И. Макаренко — М: Наука, 1971, 255 с.

4. *Мартиненко В.С.* Операционное исчисление.. — К.: Вища школа, 1973. — 268 с.

5. *Мартиненко М.А.* Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Навч. посібник 2-ге видання / М. А. Мартиненко, І.І. Юрик. — К.: Видавничий дім “Слово”, 2008. — 296 с.

6. *Репета В. К.* Вища математика: підручник: У 2 ч.— Ч. 2. — К.: НАУ, 2014. — 504 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів
технічних спеціальностей

Укладачі: ЛАСТІВКА Іван Олексійович
РЕПЕТА Віктор Кузьмич
БАРИШОВЕЦЬ Петро Павлович