УДК 517.9

©2017 р. Г.В.Тугай

Національний Авіаційний Університет

ЗАДАЧА НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ ПРИ СИНГУЛЯРНИХ НЕ СИМЕТРИЧНИХ ЗБУРЕННЯХ

Досліджується структура резольвенти сингулярно несиметрично збуреного оператора скінченного рангу, який розв'язує задачу на власні значення.

We investigate the structure of resolvent of a singularly non-symmetric perturbed operator of finite rank solving the problem of eigenvalues.

Вступ

Нехай у комплексному сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ задано необмежений самоспряжений оператор A з областю визначення $\mathfrak{D}(A)$.

Оператор $\tilde{A} \neq A$ називається [2] (чисто) не симетрично сингулярно збуреним відносно A, якщо множини

$$\mathfrak{D} := \{f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}) | Af = \tilde{A}f\}$$

$$\mathfrak{D}_* := \{f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}^*) | Af = \tilde{A}^* f\}$$

є щільними в $\mathcal{H}$. Зрозуміло, що A і $\tilde{A}$ та A і $\tilde{A}^*$ мають спільні симетричні оператори $\dot{A} := A \restriction \mathfrak{D} = \tilde{A} \restriction \mathfrak{D}$, $\dot{A}_* := A \restriction \mathfrak{D}_* = \tilde{A}^* \restriction \mathfrak{D}_*$ із нетривіальними індексами дефекту $\mathbf{n}^{\pm}(\dot{A}_*) = \dim \operatorname{Ker}(\dot{A}_* \pm i)^* \neq 0$ та $\mathbf{n}^{\pm}(\dot{A}) = \dim \operatorname{Ker}(\dot{A} \pm i)^* \neq 0$. $\tilde{A}$ називається сингулярно не симетрично збуреним оператором скінченного рангу, якщо $\mathbf{n}^{\pm}(\dot{A}) = \mathbf{n}^{\pm}(\dot{A}_*) = n < \infty$. Множину всіх таких операторів позначаємо $\mathcal{P}_s^n(A)$.

Для $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^n(A)$ різниця резольвент $(\tilde{A} - z)^{-1} - (A - z)^{-1} = B(z)$, $z \in \rho(A) \cap \rho(\tilde{A})$ є обмеженим оператором рангу n.

Ми досліджуємо структуру $B(z)$ за умови, що оператор $\tilde{A}$ розв'язує задачу на власні значення:

$$\begin{gathered}\tilde{A}\psi_i = E_i\psi_i, \quad \tilde{A}^*\psi_i^* = \bar{E}_i\psi_i^*, \quad E_i \in \mathbb{C}, \\ \psi_i \notin \mathfrak{D}(A), \quad \psi_i^* \notin \mathfrak{D}(A), \; i = 1, 2, \ldots, n \qquad (1)\end{gathered}$$

для довільно заданих комплексних чисел E_i та довільних ортонормованих векторів ψ_i і довільних ортонормованих векторів ψ_i^*. При цьому ми використовуємо резольвентну форму задання оператора $\tilde{A} \equiv A_n$, визначену рекурентним способом:

$$\begin{aligned}(A_i - z)^{-1} = (A_{i-1} - z)^{-1} + \\ + b_i^{-1}(z)(\cdot, \eta_i(\bar{z}))\nu_i(z), \quad i = 1, \ldots, n, (2)\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}A_0 &\equiv A, \\ \eta_i(z) &:= (A_{i-1} - \bar{E}_i)(A_{i-1}^* - \bar{z})^{-1}\psi_i^* \\ \nu_i(z) &:= (A_{i-1} - E_i)(A_{i-1} - z)^{-1}\psi_i, \\ b_i(z) &:= (E_i - z)(\psi_i, \eta_i(\bar{z})).\end{aligned}$$

Основним результатом роботи є теорема, в якій встановлено формулу для коефіцієнтів $b_n(z)$ у вигляді відношення детермінантів матриць, побудованих за наперед заданими E_i та ψ_i і ψ_i^*.

Попередні відомості

У випадку регулярного збурення рангу один безпосередньо перевіряється, що оператор $\tilde{A}$ розв'язує задачу

$$\begin{gathered}\tilde{A}\psi = E\psi, \quad \tilde{A}^*\psi^* = \bar{E}\psi^*, \\ \psi \in \mathfrak{D}(A), \quad \psi^* \in \mathfrak{D}(A),\end{gathered}$$

якщо він має вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= A + \alpha(\cdot, \omega)\phi, \\ \omega &= (A - \bar{E})\psi^*, \\ \phi &= (A - E)\psi \\ \alpha &= -\frac{1}{(\psi, \omega)} \left(\bar{\alpha} = -\frac{1}{(\psi^*, \phi)}\right).\end{aligned}$$

При цьому резольвента збуреного оператора $\tilde{R}(z) = (\tilde{A} - z)^{-1}$ є такою:

$$\begin{aligned}\tilde{R}(z) &= R(z) + b^{-1}(z)\,(\cdot, R(\bar{z})\omega)\,R(z)\phi,\\ R(z) &= (A - z)^{-1},\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}b(z) &= -\alpha^{-1} - (\omega, R(\bar{z})\omega) =\\ &= (E - z)\,(\psi, (A - E)R(\bar{z})\psi^*)\,.\end{aligned}$$

Аналогічне зображення резольвенти має місце і у випадку сингулярного збурення рангу один (порівн. з [7]).

Теорема 1[2] *Нехай A – необмежений самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, $E \in \mathbb{C}$, вектори $\psi \in \mathcal{H} \setminus \mathfrak{D}(A)$ і $\psi^* \in \mathcal{H} \setminus \mathfrak{D}(A)$.*

Тоді існує єдиний сингулярно не симетрично збурений оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$ рангу один, який розв'язує задачу

$$\tilde{A}\psi = E\psi, \quad \tilde{A}^*\psi^* = \bar{E}\psi^*. \tag{3}$$

При цьому його резольвента $\tilde{R}(z)$ має вигляд

$$\tilde{R}(z) = R(z) + b^{-1}(z)\,(\cdot, \eta(\bar{z}))\,\nu(z), \tag{4}$$

де

$$\nu(z) = (A - E)R(z)\psi, \tag{5}$$
$$\eta(z) = (A - \bar{E})(A - \bar{z})\psi^*, \tag{6}$$
$$b(z) = (E - z)\,(\psi, \eta(\bar{z}))\,. \tag{7}$$

Резольвента сингулярно збуреного оператора Мета цього пункту –довести теорему 2 і, зокрема, формулу (11).

Теорема 2 *Нехай A – необмежений самоспряжений оператор з областю визначення $\mathfrak{D}(A)$ у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і $\tilde{A} \equiv A_n \in \mathcal{P}_s^n(A)$ сингулярне не симетричне збурення рангу n оператора A. Припустимо, що A_n розв'язує задачу на власні значення*

$$A_n\psi_k = E_k\psi_k, \quad A_n^*\psi_n^* = \bar{E}_n\psi_n^*, \quad k = 1, \dots, n,$$

для заданих $E_k \in \mathbb{C}$ та будь-яких ортонормованих послідовностей векторів ψ_k, ψ_k^* таких, що

$$\operatorname{span}\{\psi_k\}_{k=1}^n \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}, \tag{8}$$
$$\operatorname{span}\{\psi_k^*\}_{k=1}^n \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}. \tag{9}$$

Тоді резольвента $\tilde{R}(z) \equiv R_n(z)$ оператора $\tilde{A}$ зображується у вигляді

$$R_n(z) = R_{n-1}(z) + b_n^{-1}(z)\,(\cdot, \eta_n(\bar{z}))\,\nu_n(z) \tag{10}$$

де

$$R_0(z) = (A - z)^{-1}$$

та

$$R_{n-1}(z) = (A_{n-1} - z)^{-1}$$

– резольвенти відповідних операторів, побудованих рекурентним чином за формулою (10) з

$$\begin{aligned}\eta_j(z) &= (A_{j-1}^* - \bar{E}_j)R_{j-1}^*(\bar{z})\psi_j^*,\\ \nu_j(z) &= (A_{j-1} - E_j)R_{j-1}(z)\psi_j,\\ b_j(z) &= (E_j - z)\,(\psi_j, \eta_j(\bar{z}))\,,\\ &\quad j = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

При цьому

$$b_n(z) = \frac{d_n(z)}{d_{n-1}(z)} \tag{11}$$

з $d_0(z) = 1$, $d_n(z) = \det M_n(z)$, де матриці $M_n(z) = (c_{ij}(z))_{i,j=1}^n$ визначаються по E_k, ψ_k та ψ_k^* згідно з формулами

$$c_{ij}(z) = \begin{cases} (E_i - z)\left(\psi_i, (A - \bar{E}_j)R(\bar{z})\psi_j^*\right), & i \geq j,\\ (E_j - z)\left((A - E_i)R(z)\psi_i, \psi_j^*\right), & i < j.\end{cases}$$

Доведення. По суті треба встановити справедливість формули (11). Той факт, що формула (10) визначає сингулярне збурення рангу n самоспряженого оператора A випливає з теореми 1, доведеної в [2]. Доведемо формулу (11). Для цього використовуємо метод математичної індукції. У випадку $n = 1$ (див. теорему 1)

$$b_1(z) = (E_1 - z)(\psi_1, \eta_1(\bar{z})) \equiv \frac{d_1(z)}{d_0(z)} \equiv c_{11}(z).$$

Припустимо за індукцією, що для усіх $\eta_k, \nu_k, k \leq n - 1$: виконуються співвідношення

$$(E_n - z)(\psi_n, \eta_k(\bar{z})) = \frac{M_{k-1}^{n,k}(z)}{d_{k-1}}, \tag{12}$$
$$(E_n - z)(\nu_k(z), \psi_n^*) = \frac{M_{k-1}^{k,n}(z)}{d_{k-1}}, \tag{13}$$

$$b_k(z) = \frac{d_k(z)}{d_{k-1}(z)}, 1 \le k \le n-1,$$

де $M_k^{i,j}(z)$ – мінор матриці $M_n(z)$, отриманий на перетині $k-1$ перших і i-го рядків та $k-1$ перших і j-го стовпчиків.

$$b_n(z) = (E_n - z)\left(\psi_n, (A - \bar{E}_n)R(\bar{z})\psi_n^*)\right) -$$

$$-(E_n - z)^2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_{i-1}(z)}{d_i(z)}(\psi_n, \eta_i(\bar{z}))(\nu_i(z), \psi_n^*)$$

$$= c_{nn}(z) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_{i-1}(z)}{d_i(z)} \frac{M_{i-1}^{n,i}(z)}{d_{i-1}(z)} \frac{M_{i-1}^{i,n}(z)}{d_{i-1}(z)}.$$

Введемо такі позначення:

$d_p = \det M, M = \{c_{ij} \mid 1 \le i,j \le p\}$ – матриця розмірності $p \times p$;

$d_m, m < p$, –мінор матриці M, отриманий на перетині m перших ряків та стовпчиків;

$d_p^{i,j}, 1 \le i,j \le p\}$, –визначник матриці, отриманої з M викреслюванням j-го рядка та i-го стовпчика.

Лема [8] *Нехай* $M = \{c_{ij} \mid 1 \le i,j \le k+1\}$ – *комплекснозначна матриця розмірності* $(k+1) \times (k+1)$.

Тоді

$$d_{k+1}d_{k-1} = d_{k+1}^{k+1,k+1}d_{k+1}^{k,k} - d_{k+1}^{k+1,k}d_{k+1}^{k,k+1}. \quad (14)$$

Зазначимо, що рівність (14) є частинним випадком відомої детермінантної тотожності Сільвестра [3].

Застосовуючи лему $n-1$ разів до правої частини останнього виразу, одержуємо

$$(E_n - z)(\psi_n, \eta_n(\bar{z})) = \frac{d_n(z)}{d_{n-1}(z)},$$

що й доводить формулу (11).

Теорему 2 доведено.

Теорема 2 є узагальненням теореми 2 з [8], де $E_k \in \mathbb{R}$ та $\psi_k = \psi_k^*$ такі, що $\operatorname{span}\{\psi_k\}_{k=1}^n \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}$, і A_n є самоспряженим сингулярним збуренням оператора A. Для доведення випадку самоспряженого оператора істотньо використовувалися результати робіт [1, 4, 5, 6].

Якщо $E_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ або $\psi_k \ne \psi_k^*$ такі, що виконуються умови (8), (9), то A_n – сингулярно не симетрично збурений відносно A і для b_n також виконується (11).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Albeverio S., Dudkin M., Koshmanenko V.* Rank one singular perturbations with dual eigen-values pair // Lett. Math. Phys. – 2003. –**63**. – P. 219-228.

2. *Т.І. Вдовенко, М.Є. Дудкін* Сингулярні рангу один несиметричні збурення самоспряженого оператора. // Збірник праць Інституту Математики НАН України, 2014. – т.11. – № 2: – С. 1-17.

3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 575 с.

4. *Дудкін М.Є., Кошманенко В.Д.* Про точковий спектр самоспряжених операторів, що виникає при сингулярних збуреннях скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2003. –**55**, №9. – С. 1269-1276.

5. *Кошманенко В.Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. — К.: Наук. думка, 1993. — 176 с.

6. *Koshmanenko V.D.* Towards the rank-one singular perturbations of self-adjoint operators // Ukrainian Math. J. – 1991. – **43**, N11. – P. 1559-1566.

7. *Koshmanenko V.* A variant of the inverse negative eigenvalues problem in singular perturbation theory // Methods of Functional Analysis and Topology, – 2002. – **8**, N1. – P. 49-69.

8. *Кошманенко В.Д., Тугай Г.В.* Про структуру резольвенти сингулярно збуреного оператора, що розв'язує задачу на власні значення // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, N9. – С. 1292-1297.