МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи для студентів
технічних та економічних спеціальностей

Київ 2019

УДК 517.1 (076.5)
В 558

Укладачі:
І. О. Ластівка – д-р техн. наук, проф., зав. каф.

І. Ю. Ковтонюк – ст викл.

Л. О. Чуб – ст викл.

Рецензент А.С. Богатирчук – канд. фіз.-мат. наук

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол № 1/19 від 14.02. 2019 р.).

В558 **Вища математика. Вступ до математичного аналізу:** методичні рекомендації до самостійної роботи студентів / уклад. : І. О. Ластівка, І. Ю. Ковтонюк, Л. О. Чуб. – К. : НАУ, 2019. – 48 с.

Методичні рекомендації укладені відповідно до програм навчальної дисципліни «Вища математика»; містять приклади розв'язання типових задач розділу «Вступ до математичного аналізу», запитання для самоперевірки і завдання для самостійного виконання з відповідями.

Для студентів технічних та економічних спеціальностей.

ЗМІСТ

ВСТУП

Самостійна робота студента є основним способом оволодіння навчальним матеріалом у час, вільний від обов'язкових аудиторних занять.

Мета виконання самостійної роботи – поглиблення, узагальнення та закріплення теоретичних знань і практичних умінь студентів із дисципліни «Вища математика» шляхом вироблення вміння самостійно працювати з навчальною літературою.

Самостійна робота студентів здійснюється у формі підготовки до лекційних і практичних занять, виконання індивідуального домашнього завдання та виконання модульної контрольної роботи. Така підготовка передбачає самостійне вивчення теоретичного матеріалу з кожної теми, що наданий у рекомендованій літературі та конспекті лекцій. При цьому важливо звернути увагу на те, що потрібно чітко засвоювати основні терміни та означення, розуміти їх зміст, обов'язково аналізувати використання теоретичних відомостей для розв'язування пропонованих завдань.

Мета вивчення навчальної дисципліни «Вища математика» – опанування студентами основних математичних понять і методів, потрібних для застосування теоретичного матеріалу під час моделювання і розв'язування прикладних задач.

Завдання вивчення навчальної дисципліни – розвиток логічного та алгоритмічного мислення студентів, опанування методами дослідження та розв'язування математичних задач, набуття первинних навичок математичного дослідження прикладних задач тощо.

Методичні рекомендації до самостійної роботи студентів укладено відповідно до навчальних програм курсу «Вища математика» для студентів технічних та економічних спеціальностей.

У пропонованих методичних рекомендаціях підібрано задачі для самостійної та індивідуальної роботи студентів. Значна кількість завдань для самостійної роботи має прикладну спрямованість.

Провідний викладач може коригувати кількість і зміст завдань, які студент повинен виконати самостійно протягом вивчення відповідного матеріалу.

Матеріал кожної теми методичних рекомендацій відповідає робочим навчальним програмам технічних та економічних спеціальностей дисципліни «Вища математика», зокрема одному з її розділів «Вступ до математичного аналізу». Кожна тема містить рекомендовану літературу, основні методичні рекомендації, розв'язані типові приклади, запитання для самоперевірки та завдання для самостійного виконання, що сприятиме кращому розумінню, засвоєнню та можливості застосування основних теоретичних положень.

Методичні рекомендації призначено для самостійної роботи студентів технічних та економічних спеціальностей і орієнтовано на теоретичну та методичну підтримку навчального процесу студентів.

Тема 1. ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

План

1. Властивості функцій.
2. Побудова графіків функцій.

Література: [1-3]; [6-7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати:*** означення функції однієї змінної, властивості функцій; ***уміти:*** досліджувати функцію й будувати її графік.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Знайдіть область визначення $D(f)$ функцій:

1.1. $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$; **1.2.** $y = \log_3(x^2 - 9)$; **1.3.** $y = \arccos\dfrac{x-2}{3x+4}$.

Розв'язання.

1.1. Функція визначена на всій множині дійсних чисел, крім тих значень x, коли $x^2 - 5x + 6 = 0$. Тобто $x_1 = 2,\quad x_2 = 3$.

$$D(f) = (-\infty;2) \cup (2;3) \cup (3;+\infty).$$

1.2. Вираз, що стоїть під знаком логарифма, додатний: $x^2 - 9 > 0$.

Звідки отримуємо: $\left[\begin{array}{l} x < -3, \\ x > 3 \end{array}\right.$.

$$D(f) = (-\infty;-3) \cup (3;+\infty).$$

1.3. Областю визначення функції $y = \arccos x$ є проміжок $[-1;1]$,

тому $-1 \le \dfrac{x-2}{3x+4} \le 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{-2x-6}{3x+4} \le 0, \\ \dfrac{4x+2}{3x+4} \ge 0 \end{cases} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -3, \\ x > -\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{4}{3}, \\ x \ge -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -3, \\ x \ge -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow x \in \left(-\infty; -3\right] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

$$D(f) = \left(-\infty; -3\right] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

Приклад 2. Дослідіть на монотонність функцію $y = x^4$.

Розв'язання.

Функція визначена на всій числовій осі. Якщо $0 < x_1 < x_2$, то $x_1^4 < x_2^4$. Тоді, згідно з означенням монотонності, функція зростаюча при $x \in \left(0; +\infty\right)$. При $x_1 < x_2 < 0$ маємо $x_1^4 > x_2^4$, тобто функція спадна при $x \in \left(-\infty; 0\right)$.

Приклад 3. Дослідити на парність функцію $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Розв'язання.

Область визначення функції $D(f) = (-1;1)$. Оскільки $f(-x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x} = -\ln\dfrac{1+x}{1-x} = -f(x)$ при $x \in (-1;1)$, то, згідно з означенням непарності ($f\left(-x\right) = -f\left(x\right)$ при всіх $x \in D\left(f\right)$), задана функція непарна.

Приклад 4. Знайти основний період функції:

4.1. $y = 2\,\mathrm{tg}\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; **4.2.** $y = \left|\cos 3x\right|$.

Розв'язання.

4.1. Основним періодом функції $y = f\left(kx + b\right)$ є число $T = \dfrac{T_1}{k}$, де T_1 – основний період функції $y = f\left(x\right)$. Тому період заданої функції $y = 2\,\mathrm{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ дорівнює $T = \frac{\pi}{3}$.

4.2. За властивістю модуля ($|x| = \sqrt{x^2}$):

$|\cos 3x| = \sqrt{\cos^2 3x} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 6x)}$, тоді $T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Приклад 5. Знайдіть функцію, обернену до функції $y = \frac{2x-5}{4-x}$.

Розв'язання.

Область визначення функції $D(f) = (-\infty;4) \cup (4;+\infty)$. Для знаходження оберненої функції виразимо x через y:

$y(4-x) = 2x-5$, $x(2+y) = 4y+5$, $x = \frac{4y+5}{y+2}$, якщо $y \neq -2$.

Приклад 6. Напруга в деякій ділянці електричного кола спадає за лінійним законом. На початку досліду напруга була 22 В, а через 10 с знизилась до 14 В. 1) Знайдіть напругу U як функцію часу t. 2) Через який проміжок часу напруга знизиться до 10 В?

Розв'язання.

1) За умовою задачі напруга U є лінійною функцією від часу t, тому $U(t) = kt + b$. На початку досліду напруга була 22 В: $U(0) = 22 \Rightarrow k \cdot 0 + b = 22 \Rightarrow b = 22$. Через 10 с знизилася до 14 В: $U(10) = 14 \Rightarrow 10k + b = 14 \Rightarrow 10k + 22 = 14 \Rightarrow k = -0{,}8$.

$U(t) = -0{,}8t + 22$.

2) $U(t_0) = 10B \Rightarrow -0{,}8t_0 + 22 = 10 \Rightarrow t_0 = 15$ с.

Приклад 7. Загальні витрати кав'ярні щодня становлять 2000 грн., а змінні витрати на приготування одного десерту – 60 грн. Визначте функцію загальних витрат щоденної роботи кав'ярні.

Розв'язання.

Загальні витрати на вироблення продукції виражаються функцією: $V(x) = kx + b$, де k – змінні витрати на одиницю продукції, x – обсяг виробленої продукції, b – фіксовані витрати. Тоді загальні щоденні витрати кав'ярні на приготування десертів задаються функцією: $V(x)=60x+2000$.

Приклад 8. Побудуйте графік функції $y=\cos x+|\cos x|$.

Розв'язання.

Функція $y=\cos x+|\cos x|$ визначена при всіх $x\in R$. Парна та періодична з $T=2\pi$. Тому достатньо побудувати її графік на проміжку $[0;\pi]$: $y=\cos x+|\cos x|=\begin{cases}2\cos x, x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\\ 0, x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]\end{cases}$ (рис. 1.1).

Далі подовжити його симетрично відносно осі Oy. Після цього подовжити на всю числову пряму.

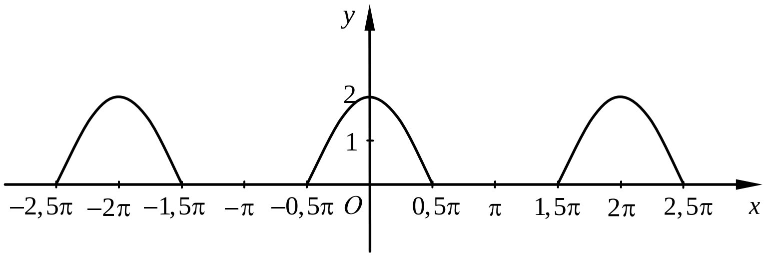

Рис. 1.1

Запитання для самоперевірки

1. Що називається функцією однієї змінної, областю визначення функції, областю значень функції?
2. Що називається графіком функції?
3. Яка функція називається парною, непарною?
4. Охарактеризуйте періодичну функцію. Що таке період функції?
5. Яка функція називається зростаючою, спадною?
6. Яка функція називається оберненою?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайдіть область визначення функцій.

1.1. $y=\dfrac{2x-3}{x^2-3}$. **1.2.** $y=\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}$. **1.3.** $y=\sqrt{x^2-x-6}+\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$.

1.4. $y=\arccos\dfrac{1-2x}{4}$. **1.5.** $y=\log_2\left(x^2+5x+4\right)$. **1.6.** $y=\ln\dfrac{x^2-4}{x+3}$.

1.7. $y=\lg\left(\sin x\right)$. **1.8.** $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}+\lg\left(4-x\right)$.

1.9. $y=\sqrt{1-|x|}$. **1.10.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$.

Завдання 2. Дослідіть на монотонність функції.

2.1. $y=|x|$. **2.2.** $y=|x|-x$. **2.3.** $y=x^2-3x+2$. **2.4.** $y=2^{x+3}$.

2.5. $y=10^{\lg(x-1)}$.

Завдання 3. Дослідіть на парність функції.

3.1. $y=x^4-4x^2+4$. **3.2.** $y=x-x^2$. **3.3.** $y=3\sin x+x$. **3.4.** $y=2^{-x^2}$.

3.5. $y=-3|x|+5$. **3.6.** $y=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$. **3.7.** $y=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$.

3.8. $y=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$. **3.9.** $y=3^{x-x^4}$. **3.10.** $y=x\cos 3x$.

Завдання 4. Знайдіть основні періоди функцій.

4.1. $y=5\cos 2x$. **4.2.** $y=\operatorname{ctg}\dfrac{x}{5}$. **4.3.** $y=\cos 2x-\sin 3x$.

4.4. $y=4\cos\dfrac{x}{2}+\sin 2x$. **4.5.** $y=4\sin\dfrac{x}{2}+3\sin 4x$.

Завдання 5. Побудуйте графіки функцій.

5.1. $y=\sqrt{x+2}-1$. **5.2.** $y=\sqrt[3]{2x-1}+1$. **5.3.** $y=4-3x-x^2$.

5.4. $y=3x^2-6x+3$. **5.5.** $y=\dfrac{2x-3}{x+4}$. **5.6.** $y=\dfrac{x-2}{3x-4}$.

5.7. $y=\dfrac{x+3}{x^2+7x+12}$. **5.8.** $y=\dfrac{x^2+3x-10}{2x^2-3x-2}$. **5.9.** $y=|x-1|+3$.

5.10. $y=|x+2|-|x|$. **5.11.** $y=x^2-3|x|+4$. **5.12.** $y=x|x|-2x-3$.

5.13. $y=\sqrt{x^2-4x+4}$. **5.14.** $y=\sqrt{9x^2+6x+1}$. **5.15.** $y=3^{-x+4}$.

5.16. $y=e^{\ln(x+3)}$. **5.17.** $y=6^x-2$. **5.18.** $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$. **5.19.** $y=2^{|x|}$.

5.20. $y=\log_{0,5}|x+2|$. **5.21.** $y=2\sin 3x$. **5.22.** $y=\frac{1}{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

5.23. $y=2\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+1$. **5.24.** $y=x\cdot 3^{\log_3(x+1)}$. **5.25.** $y=|\sin x|$.

5.26. $y=\arcsin(\sin x)$. **5.27.** $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$. **5.28.** $y=\mathrm{arctg}(\mathrm{ctgx})$.

5.29. $y=-\arcsin(x-1)$. **5.30.** $y=2\log_2(x+3)-2$.

Завдання 6. Знайдіть функцію, обернену до даної:

6.1. $y=1+\lg(x+2)$. **6.2.** $y=2\sin 3x$. **6.3.** $y=\frac{2^x}{1+2^x}$.

6.4. $y=4\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

Завдання 7.

7.1. Кондитерська фабрика реалізує шоколад вартістю 20 грн за кілограм, причому обсяг щоденного виробництва шоколаду не перевищує 170 кг. Знайдіть функцію, що виражає щоденний дохід від продажу шоколаду. Визначте, на скільки збільшиться дохід, якщо кількість проданого шоколаду збільшиться на 75 кг.

7.2. Залежність витрат y на купівлю молочної продукції від щомісячного доходу сім’ї x виражається залежністю $y=0,2x-56$, $(100\le x\le 2000)$. Який дохід повинна мати сім’я щомісяця для того, щоб на молочну продукцію витрачати 150 грн за місяць?

Завдання 8.

8.1. Знайдіть залежність об’єму V конуса від його висоти H, якщо радіус основи дорівнює 4 см.

8.2. У кулю радіусом $R=5$ вписано циліндр. 1) Знайдіть функціональну залежність V циліндра від його висоти x.
2) Вкажіть область визначення цієї функції.

Завдання 9.

9.1. У посудину довільної форми налито рідину. На глибині $h=25,3$ см тиск цієї рідини $p=18,4$ г/см^2. 1) Складіть функцію залежності тиску від глибини. 2) Знайдіть тиск на глибині $14,5$ см. 3) На якій глибині тиск дорівнюватиме $26,5$ г/см^2?

9.2. Тіло рухається прямолінійно під дією сили F. Відомо, що на переміщення тіла з прискоренням $a = 12$ м/с^2 на $S = 15$ м затрачено роботу $A = 32$ Дж. За законом Ньютона знайдіть силу F як функцію прискорення a.

Відповіді:

1.1. $x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$. **1.2.** $x \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

1.3. $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. **1.4.** $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$. **1.5.** $x \in (-3; -2) \cup (2; +\infty)$.

1.6. $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$. **1.7.** $x \in (2\pi k; 2\pi k + \pi)$, $k \in Z$. **1.8.** $x \in [1; 4)$.

1.9. $x \in [-1; 1]$. **1.10.** $x \in (-\infty; 0)$. **2.1.** спадає на $(-\infty; 0)$, зростає на $(0; +\infty)$. **2.2.** спадає на $(-\infty; 0)$, стала на $(0; +\infty)$. **2.3.** спадає на $(-\infty; 1,5)$, зростає на $(1,5; +\infty)$. **2.4.** зростає на $(-\infty; +\infty)$. **2.5.** зростає на $(1; +\infty)$. **3.1.** парна. **3.2.** ні парна, ні непарна. **3.3.** непарна.
3.4. парна. **3.5.** парна. **3.6.** парна. **3.7.** непарна. **3.8.** непарна.
3.9. ні парна, ні непарна. **3.10.** непарна. **4.1.** π. **4.2.** 5π. **4.3.** 2π.

4.4. 4π. **4.5.** 12π. **6.1.** $y = 10^{x-1} - 2$. **6.2.** $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$.

6.3. $y = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{2}$. **6.4.** $y = \pm \cos \frac{x}{4}$, $(0 \le x \le 2\pi)$.

Тема 2. ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

План

1. Числова послідовність.
2. Границя послідовності.
3. Властивості границь послідовності.

Література: [1-3]; [6-7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати:*** означення числової послідовності та границі послідовності, основні теореми про границі; ***уміти:*** обчислювати границі числової послідовності.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Знайдіть шість перших членів послідовності

$$\left\{x_n = (-1)^{n+1}\frac{2^n}{n+2}\right\}.$$

Розв'язання.

$$x_1 = (-1)^2 \cdot \frac{2^1}{1+2} = \frac{2}{3};\ \ x_2 = (-1)^3 \cdot \frac{2^2}{4} = -1;\ \ x_3 = (-1)^4 \cdot \frac{2^3}{5} = \frac{8}{5};$$

$$x_4 = (-1)^5 \cdot \frac{2^4}{6} = -\frac{8}{3};\ \ x_5 = (-1)^6 \cdot \frac{2^5}{7} = \frac{32}{7};\ \ x_6 = (-1)^7 \cdot \frac{2^6}{8} = -8.$$

Відповідь: $\left\{\frac{2}{3}; -1; \frac{8}{5}; -\frac{8}{3}; \frac{32}{7}; -8\right\}$.

Приклад 2. Запишіть формулу загального члена послідовності, першими членами якої є числа: $\frac{2}{3!}; \frac{8}{5!}; \frac{32}{7!}; \frac{128}{9!}; \ldots$.

Розв'язання.

$$x_1 = \frac{2^1}{(2\cdot 1+1)!} = \frac{2^{2\cdot 1-1}}{(2\cdot 1+1)!};\ \ x_2 = \frac{2^3}{(2\cdot 2+1)!} = \frac{2^{2\cdot 2-1}}{(2\cdot 2+1)!};$$

$$x_3 = \frac{2^5}{(2\cdot 3+1)!} = \frac{2^{2\cdot 3-1}}{(2\cdot 3+1)!};\ \ x_4 = \frac{2^7}{(2\cdot 4+1)!} = \frac{2^{2\cdot 4-1}}{(2\cdot 4+1)!};\ \ldots$$

$$x_n = \frac{2^{2\cdot n-1}}{(2n+1)\,!}.$$

Відповідь: $x_n = \frac{2^{2\cdot n-1}}{(2n+1)\,!}$.

Приклад 3. Доведіть, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+3}=\dfrac{3}{2}$. Починаючи з якого n величина $\left|\dfrac{3n+1}{2n+3}-\dfrac{3}{2}\right|$ не перевищує 0,0001?

Розв'язання. За означенням, для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $N(\varepsilon)$ такий, що для будь-якого $n>N(\varepsilon)$ справджується нерівність:

$$\left|\frac{3n+1}{2n+3}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon.$$

Звідси $\left|\dfrac{6n+2-6n-9}{4n+6}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{-7}{4n+6}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{7}{4n+6}<\varepsilon \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\varepsilon}<\frac{4n+6}{7} \Leftrightarrow n>\frac{7}{4\varepsilon}-\frac{6}{4} \Leftrightarrow n>\frac{7}{4\varepsilon}-\frac{3}{2},\ N(\varepsilon)=\left[\frac{7}{4\varepsilon}-\frac{3}{2}\right];$$

$$N(0{,}0001)=\left[\frac{7}{4\cdot 0{,}0001}-\frac{3}{2}\right]=[17500-1{,}5]=[17498{,}5]=17499.$$

Відповідь: $n>17499$. .

Приклад 4. Обчисліть границі послідовностей.

4.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8-4n^3+3n^2+1}{9n^3+4n+1}$. **4.2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7-4n^4-2n^2-n}{5n^2+3n-5}$.

4.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)(3n-8)}{3n^3+n^2-2}$. **4.4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+8n-17}{\sqrt{81n^6+3x^3}+24}$. **4.5.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot n!+(n+1)!}{(n+1)!-2n!}$. **4.6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^{n+1}-4^n}{4^{n+1}+7^n}$.

4.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{5^n}}$. **4.8.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{1+3+\ldots+(2n+1)}$.

4.9. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-\sqrt{n^2+5n})$.

Розв'язання.

4.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8-4n^3+3n^2+1}{9n^3+4n+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Поділимо почленно чисельник та знаменник дробу на n у найбільшому степені та скористаємося основними теоремами про границі послідовності:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8-4n^3+3n^2+1}{9n^3+4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{8}{n^3}-4+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}{9+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=-\frac{4}{9}.$$

4.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7-4n^4-2n^2-n}{5n^2+3n-5}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{7}{n^4}-4-\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\frac{5}{n^2}+\frac{3}{n^3}-\frac{5}{n^4}}=\infty$.

4.3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(3n-8)}{3n^3+n^2-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-19n+8}{3n^3+n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{n}-\frac{19}{n^2}+\frac{8}{n^3}}{3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}=0.$$

4.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+8n-17}{\sqrt{81n^6+3x^3}+24}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n^3}{n^3}+\frac{8n}{n^3}-\frac{17}{n^3}}{\sqrt{\frac{81n^6}{n^6}+\frac{3n^3}{n^6}}+\frac{24}{n^3}}=\dfrac{1}{9.}$

4.5.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n!+(n+1)!}{(n+1)!-2n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n!+n!(n+1)}{n!(n+1)-2n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+n+1)}{n!(n+1-2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n-1}=2.$$

4.6.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}-4^n}{4^{n+1}+7^n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7^{n+1}-4^n}{7^n}}{\frac{4^{n+1}+7^n}{7^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7-\left(\frac{4}{7}\right)^n}{4\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^n+1}=\left|\begin{array}{c}\text{Якщо } n\to\infty\\ \left(\frac{4}{7}\right)^n\to 0\\ 0<\frac{4}{7}<1\end{array}\right|=7.$$

4.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{5^n}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Використовуючи формулу суми n членів геометричної прогресії $S=\dfrac{b_1\left(q^{n-1}-1\right)}{q-1}$, маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=-2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-1\right)=2;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{5^n}\right)=-\frac{5}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5^{n-1}}-1\right)=\frac{5}{4};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{5^n}}=\frac{2}{\frac{5}{4}}=\frac{8}{5}.$$

4.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{1+3+\ldots+(2n+1)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Використовуючи формулу суми n членів арифметичної прогресії $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$, маємо:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{1+3+5+\ldots+(2n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1+n}{2}n}{\frac{1+2n+1}{2}(n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n(1+n)}{2}}{\frac{2n+2}{2}(n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{(2n+2)(n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2(n+1)^2}=\frac{1}{2}.$$

4.9. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-\sqrt{n^2+5n})$. Помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до знаменника :

$$\lim_{n\to+\infty}(n-\sqrt{n^2+5n})=(\infty-\infty)=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2+5n})(n+\sqrt{n^2+5n})}{n+\sqrt{n^2+5n}}=$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-5n}{n+\sqrt{n^2+5n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{n}}} = \frac{-5}{1+1} = -\frac{5}{2}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що таке числова послідовність і як її можна задати?
2. Що називається границею числової послідовності?
3. Який геометричний зміст означення границі.
4. Наведіть приклади послідовності, що має границю; не має границі.
5. Дайте означення за допомогою нерівностей та наведіть геометричні ілюстрації нескінченно малих та нескінченно великих величин.
6. Сформулюйте властивості нескінченно малих та нескінченно великих величин.
7. Наведіть приклади геометричного змісту границі функції в точці.
8. Чому дорівнює границя суми функцій?
9. Яка послідовність називається обмеженою згори, знизу?
10. Сформулюйте і доведіть правила граничного переходу у випадку арифметичних дій.
11. Сформулюйте і поясніть ознаку існування границі монотонної послідовності.
12. Яке число називається числом Ейлера?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайдіть п'ять перших членів послідовності.

1.1. $x_n = (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n^2+2}$ **. 1.2.** $x_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$ **. 1.3.** $x_n = (-1)^n \dfrac{2^n}{n^2+1}$ **.**

1.4. $x_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n}, & \text{якщо } n \text{ – непарне;} \\ \dfrac{n-1}{n}, & \text{якщо } n \text{ – парне.} \end{cases}$

Завдання 2. Запишіть формулу загального члена послідовності.

2.1. $\left\{\frac{2}{3};\ \frac{4}{9};\ \frac{6}{27};\ \frac{8}{81};\ \frac{10}{243};\ \ldots\right\}$

2.2. $\left\{\frac{1^2\cdot 2^2}{3};\ \frac{2^2\cdot 3^2}{5};\ \frac{3^2\cdot 4^2}{7};\ \frac{4^2\cdot 5^2}{9};\ \frac{5^2\cdot 6^2}{11};\ \ldots\right\}$

2.3. $\left\{\frac{2}{3!};\ \frac{8}{5!};\ \frac{32}{7!};\ \frac{128}{9!};\ \frac{512}{11!};\ \ldots\right\}$

2.4. $\left\{\frac{1\cdot 2}{1\cdot 5};\ \frac{2\cdot 2^2}{5\cdot 9};\ \frac{3\cdot 2^3}{9\cdot 13};\ \frac{4\cdot 2^4}{13\cdot 17};\ \frac{5\cdot 2^5}{17\cdot 21};\ \ldots\right\}$.

Завдання 3. Доведіть, що:

3.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-5}{3n+1}=\frac{2}{3}$. **3.2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{3n^2+2}=\frac{4}{3}$. **3.3.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-n^3}{1+2n^3}=-\frac{1}{2}$.

3.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n+6}=\frac{1}{3}$. **3.5.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+7^{n+2}}{3-7^n}=-49$. **3.6.** $\lim\limits_{n\to-\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=-1$.

Завдання 4. Знайдіть границі послідовностей.

4.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-n^3+5}{6n^3+3n-1}$. **4.2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n-5n^2+1}{3n^3-n+6}$. **4.3.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-4n^4+3}{2n^3-n-1}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x^3-4}{x^5+6x^2-1}$. **4.5.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3-6n^2-2n+9}{3n-5n^3-2}$.

4.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^4+2n-3}{n^3-n^2+2}$. **4.7.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2-3}\right)$.

4.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{81n^4-3n^3+2}}{n^2+8n+7}$. **4.9.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+4)!}{(n+3)!+(n+2)!}$.

4.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-(n+2)!}{(n+2)!-n!}$. **4.11.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-6}{6+3\cdot 5^n}$. **4.12.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-6^n}{6^{n+1}+3\cdot 4^n}$.

4.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}-1}$. **4.14.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+\ldots+2n}{1+3+\ldots+(2n+1)}$.

4.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{3n^2}$.

Відповідь: **1.1.** $\left\{\frac{1}{3};\ \frac{-1}{6};\ \frac{1}{11};-\frac{1}{18};\ \frac{1}{27}\right\}$. **1.2.** $\left\{\frac{1}{5};\ \frac{3}{8};\ \frac{5}{11};\ \frac{7}{14};\ \frac{9}{17}\right\}$. **1.3.** $\left\{-1;\ \frac{4}{5};-\frac{8}{10};\ \frac{16}{17};-\frac{32}{26}\right\}$. **1.4.** $\left\{2;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{2}{5}\right\}$. **2.1.** $x_n=\frac{2n}{3^n}$. **2.2.** $x_n=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{2n+1}$. **2.3.** $x_n=\frac{2^{2n-1}}{(2n+1)!}$. **2.4.** $x_n=\frac{n\cdot 2^n}{(4n-3)(4n+1)}$. **4.1.** $-\frac{1}{6}$. **4.2.** 0. **4.3.** $-\infty$. **4.4.** 0. **4.5.** $-\frac{4}{5}$. **4.6.** ∞. **4.7.** 0. **4.8.** 3. **4.9.** ∞. **4.10.** -1. **4.11.** $\frac{5}{3}$. **4.12.** $-\frac{1}{6}$. **4.13.** 3. **4.14.** 1. **4.15.** $\frac{1}{6}$.

Тема 3. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

План

1. Границя функції в точці.
2. Границя функції на нескінченності.

Література: [1-3]; [6-7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати:*** означення границі функції в точці; означення границі функції на нескінченності, властивості границь; ***уміти:*** обчислювати границі функцій.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Користуючись означенням границі функції, доведіть $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)=7$.

Розв'язання.

Візьмемо довільне $\varepsilon>0$. Знайдемо таке число $\delta(\varepsilon)>0$, що для всіх x, які задовольняють нерівності $0<|x-2|<\delta$, виконується нерівність $(2x+3)-7<\varepsilon$.

$$\left|(2x+3)-7\right| = \left|2x+3-7\right| = \left|2x-4\right| = 2\left|x-2\right|.$$

Тоді $2\left|x-2\right|<\varepsilon$, або $\left|x-2\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Поклавши $\dfrac{\varepsilon}{2}=\delta$, дістанемо $\left|x-2\right|<\delta$. Таким чином із нерівності $0<\left|x-2\right|<\delta$ випливає нерівність $\left|(2x+3)-7\right|<\varepsilon$, що й треба було довести.

Приклад 2. Обчисліть границі функцій:

2.1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\operatorname{arcctg}2x}{\operatorname{arctg}3x}$. **2.2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2-1}{5-2x^2-3x^3}$. **2.3.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5x-1}}{3+2x}$.

2.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-2x}\right)$. **2.5.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-2x}{2x^2-x-1}$.

2.6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$. **2.7.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}$.

Розв'язання.

2.1. Якщо $x\to+\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{arcctg}2x}{\operatorname{arctg}3x}=\dfrac{0}{\frac{\pi}{2}}=0$.

Якщо $x\to-\infty$, то $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\operatorname{arcctg}2x}{\operatorname{arctg}3x}=\dfrac{\pi}{-\frac{\pi}{2}}=-2$.

2.2. Маємо невизначеність $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для її розкриття поділимо чисельник і знаменник виразу, що стоїть під знаком границі, на $x^3\neq 0$. Дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2-1}{5-2x^2-3x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}}{\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x}-3}=-\frac{1}{3}.$$

2.3. Якщо $x<0$, то $\left|x\right|=-x$, тоді $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5x-1}}{3+2x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}}{x\left(\frac{3}{x}+2\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}}{x\left(\frac{3}{x}+2\right)}\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}}{\frac{3}{x}+2}=-\frac{1}{2}.$$

2.4. У даному випадку маємо невизначеність $\left[\infty-\infty\right]$.

Для її розкриття помножимо і поділимо вираз, який стоїть під знаком границі, на спряжений до даного:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\left[\infty-\infty\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x}\right)}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+2x+3-x^2+2x\right)}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{3}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=2.$$

2.5. У цьому прикладі маємо відношення нескінченно малих величин. Тому потрібно скоротити цей дріб на множник, який прямує до 0:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-2x}{2x^2-x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(x+2)}{(x-1)(2x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x(x+2)}{2x+1}=1.$$

2.6. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до знаменника, та скоротимо на множник $x-3\neq0$:

$$\lim_{x\to3}\frac{\left(x^2+x-12\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(x^2+x-12\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2-\left(\sqrt{4-x}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+4)(x-3)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)}{2(x-3)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 3}(x+4)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)=7.$$

2.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}=[\infty-\infty]$. Для розкриття невизначеності позбавляємося ірраціональності в знаменнику, домноживши чисельник і знаменник на вираз $\sqrt[3]{\left(8+3x+x^2\right)^2}+2\sqrt[3]{8+3x+x^2}+4$, щоб одержати у знаменнику різницю кубів. Скоротивши на x, дістанемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+x^2\right)\left(\sqrt[3]{\left(8+3x+x^2\right)^2}+2\sqrt[3]{8+3x+x^2}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2\right)\left(\sqrt[3]{\left(8+3x+x^2\right)^2}+2\sqrt[3]{8+3x+x^2}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)\left(\sqrt[3]{\left(8+3x+x^2\right)^2}+2\sqrt[3]{8+3x+x^2}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{8+3x+x^2}\right)^3-2^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)\left(\sqrt[3]{\left(8+3x+x^2\right)^2}+2\sqrt[3]{8+3x+x^2}+4\right)}{x(3+x)}=4.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що таке границя функції в точці?
2. Що таке границя функції на нескінченності?
3. Сформулюйте основні властивості границь.
4. Яка функція є нескінченно малою; нескінченно великою?
5. Сформулюйте властивості нескінченно малих функцій.

6. *Який зв'язок між нескінченно великою та нескінченно малою величинами?*

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Користуючись означенням границі, доведіть, що:

1.1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x-5\right)=-1$. **1.2.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=8$. **1.3.** $\lim\limits_{x\to 6}\sqrt{x^2+13}=7$.

1.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x}{1-x^2}=-4$. **1.5.** $\lim\limits_{x\to+\infty}5^{-x}=0$. **1.6.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2-4}=\infty$.

Завдання 2. Обчисліть границі.

2.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{1-x^2}$. **2.2.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+\sqrt{x}}$. **2.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\cos x\right)}{\arccos x}$. **2.4.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

2.5. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\left|x-2\right|}{2-x}$. **2.6.** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)x}{3x+9}$. **2.7.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x^3-27}$.

2.8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log_2 8^x}{x}$. **2.9.** $\lim\limits_{x\to -\frac{4}{3}}\dfrac{3x^2-11x-20}{6x^2+11x+4}$. **2.10.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-6x+5}$.

2.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{2x^3-8x^2+10x-4}$. **2.12.** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{3}{3x-x^2}+\dfrac{1}{x^2-4x+3}\right)$.

2.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$. **2.14.** $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{6x}}{3x^2-5x+2}$.

2.15. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{12-x}-2}{x-4}$. **2.16.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{2+3x}+1}{x^3+1}$. **2.17.** $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

2.18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$. **2.19.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9\left(\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{4x+1}\right)}{x^3-8}$.

2.20. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt[4]{x+18}-2}$. **2.21.** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}+\sqrt{x+4}}{x^2-9}$.

2.22. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{1+2x}-3}$. **2.23.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-2x+x^2}-\left(1+x\right)}$.

2.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}$.

Завдання 3. Обчисліть границі в нескінченно віддалених точках.

3.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x+1}{1-x^2}$. **3.2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+3x+2}{6x^4-2}$. **3.3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2}{x^2+4x+3}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+x+6}}{2x^2+3}$. **3.5.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^3+5}}$. **3.6.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+2}}{\sqrt{x^3+2}}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+x^3+5}}{\sqrt{x^4+5}}$. **3.8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2}\right)$.

3.9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2-6}\right)$. **3.10.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+2}-\sqrt[3]{x^3-x^2+2}\right)$.

3.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$. **3.12.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$.

3.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$. **3.14.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+5^x}{x^3+2}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2^x+5^x+3}{\operatorname{arcctg}x}$. **3.16.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{3x-\sqrt{x\cdot\operatorname{arctg}x+9x^2}}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x+2}-\sqrt{9x^2-5x+6}\right)$.

Відповіді: **2.1.** $-\dfrac{5}{3}$. **2.2.** $\dfrac{\pi}{8}$. **2.3.** 0. **2.4.** $\dfrac{\pi}{2}$. **2.5.** 1. **2.6.** -1.

2.7. $-\dfrac{1}{9}$. **2.8.** 3. **2.9.** $-3{,}8$. **2.10.** $0{,}25$. **2.11.** $-2{,}5$. **2.12.** $-\infty$.

2.13. 4. **2.14.** $\dfrac{3}{4}$. **2.15.** $-\dfrac{1}{12}$. **2.16.** $\dfrac{1}{9}$. **2.17.** -2. **2.18.** $1{,}5$.

2.19. $-\dfrac{1}{4\sqrt[3]{3}}$. **2.20.** 32. **2.21.** $-\dfrac{5}{36}$. **2.22.** $\dfrac{3}{4}$. **2.23.** $-0{,}5$.

2.24. $13{,}5$. **3.1.** -5. **3.2.** $\dfrac{1}{2}$. **3.3.** ∞. **3.4.** $\dfrac{1}{2}$. **3.5.** $+\infty$. **3.6.** 0.

3.7. 1. **3.8.** $\frac{1}{2}$. **3.9.** $-\infty$. **3.10.** $\frac{2}{3}$. **3.11.** 0.

3.12. 1 при $x \to +\infty$, $-\infty$ при $x \to -\infty$. **3.13.** $\frac{1}{2}$.

3.14. $+\infty$ при $x \to +\infty$, 0 при $x \to -\infty$.

3.15. $+\infty$ при $x \to +\infty$, $\frac{3}{\pi}$ при $x \to -\infty$.

3.16. $-\frac{12}{\pi}$ при $x \to +\infty$, 0 при $x \to -\infty$. **3.17.** $\pm\frac{4}{3}$.

Тема 4. ВАЖЛИВІ ГРАНИЦІ

План

1. Перша важлива границя.
2. Друга важлива границя та її наслідки.
3. Границя показниково-степеневої функції.

Література: [1-3]; [6-7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати:*** важливі границі та їх наслідки; означення границі функції в точці; означення границі функції на нескінченності, властивості границь; ***уміти:*** обчислювати границі функцій, використовуючи важливі границі та їх наслідки.

Приклади розв’язування типових задач

Приклад 1. За допомогою першої важливої границі, знайдіть:

1.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}$. **1.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}8x}{4x}$. **1.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}3x}{5x}$. **1.4.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\operatorname{tg}6x}$.

1.5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2}{1-\cos 4x}$. **1.4.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{2x}$. **1.5.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{1-\cos 3x}$.

1.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{2x}$. **1.7.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{1-\cos 3x}$. **1.8.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{3-x}$.

1.9. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2-4}$. **1.10.** $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$. **1.11.** $\lim\limits_{x\to +\infty} x\operatorname{arcctg}3x$.

1.12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\sec\left(\dfrac{1}{4}\pi+x\right)$.

Розв'язання.

1.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax\cdot a}{ax\cdot b}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{b}$.

1.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}8x}{4x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 8x}{\cos 8x}}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\cos 8x\cdot 4x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x\cdot 8x}{\cos 8x\cdot 4x\cdot 8x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{\cos 8x\cdot 4x}=2.$

1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}\operatorname{arctg}3x=t\Rightarrow t\to 0\\ 3x=\operatorname{tg}t\Rightarrow x=\frac{1}{3}\operatorname{tg}t\end{array}\right|=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\frac{5}{3}\operatorname{tg}t}=\dfrac{3}{5}.$

1.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{tg\,6x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x\cdot\cos 6x}{\sin 6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x\cdot x\cos 6x}{x\cdot\frac{\sin 6x}{6x}\cdot 6x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{\sin 6x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x}{6}=\dfrac{1}{6}$.

1.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x^2}{1-\cos 4x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(x+2)}{2\sin^2\frac{4x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(x+2)}{2\sin^2 2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x}{\sin 2x}\right)^2\cdot\dfrac{(x+2)}{2\cdot 4}=\dfrac{1}{4}.$

1.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cdot\cos 2x}{2x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos 2x}{x}=1.$$

1.7. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{1-\cos 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{2\sin^2\frac{3x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x\cdot\left(\frac{3x}{2}\right)^2\cdot(2x)^2}{2\cdot(2x)^2\sin^2\frac{3x}{2}\cdot\left(\frac{3x}{2}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{\frac{9x^2}{2}}=\frac{8}{9}.$$

1.8. $$\lim_{x\to 3}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{3-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\begin{vmatrix}3-x=t\Rightarrow x=3-t\\ x\to 3\Rightarrow t\to 0\end{vmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\frac{\pi}{2}t}{t}=-\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}=-\frac{\pi}{2}\cdot 1=-\frac{\pi}{2}.$$

1.9. $$\lim_{x\to -2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\begin{vmatrix}\arcsin(x+2)=t\Rightarrow x+2=\sin t\\ x\to -2\Rightarrow t\to 0\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{(\sin t-2)^2-4}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin^2 t-4\sin t+4-4}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin^2 t-4\sin t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin^2 t-4\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t(\sin t-4)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}(\sin t-4)}=-\frac{1}{4}.$$

1.10. $$\lim_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}=[0\cdot\infty]=\begin{vmatrix}2-x=t\Rightarrow x=2-t\\ x\to 2\Rightarrow t\to 0\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{t\to 0}t\cdot tg\,\frac{\pi(2-t)}{4}=\lim_{t\to 0}t\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{4}\right)=\lim_{t\to 0}t\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi t}{4}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{4}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)}{\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)}{\frac{\pi t}{4}}}=\frac{\frac{4}{\pi}\cdot 1}{1}=\frac{4}{\pi}.$$

1.11. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{arcctg}\,3x=\left|\begin{matrix}\mathrm{arctg}\,3x=t\Rightarrow x=\frac{1}{3}\mathrm{ctg}\,t\\ x\to+\infty\Rightarrow t\to 0\end{matrix}\right|=\lim\limits_{t\to+0}\frac{1}{3}\mathrm{t}\cdot\mathrm{ctg}\,t=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos t}{3\sin t}=\lim_{t\to 0}3\cos t\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\alpha}=3.$$

1.12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sec\left(\frac{1}{4}\pi+x\right)=\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{4}-x=t\to x=\frac{\pi}{4}+t\\ x\to\frac{\pi}{4}\Rightarrow t\to 0\end{matrix}\right|=$

$$=\lim_{t\to 0}t\sec\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{-\sin t}=-1.$$

Приклад 2. Використовуючи другу важливу границю, знайдіть:

2.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{8}{x}\right)^{-\frac{1}{2}x}$. **2.2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{3x-1}$. **2.3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

2.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\left(\frac{2x-1}{2x-3}\right)^{2x-3}}$. **2.5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-4\right)\left(\ln\left(2x^2+3\right)-\ln\left(2x^2-1\right)\right)$.

2.6. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cos ecx}$. **2.7.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\mathrm{ctg}^2 x}$.

Розв'язання.

2.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{8}{x}\right)^{-\frac{1}{2}x}=\left[1^\infty\right]=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{8}}\right)^{-\frac{x}{8}}\right)^{-8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=e^{8\cdot\frac{1}{2}}=e^4.$

2.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{3x-1}=\left[1^{\infty}\right]$. Виділимо цілу частину дробу $\frac{x+1}{x}$ та, застосовуючи другу важливу границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}=e^{km}$, отримаємо :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{3x-1}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1}=$$
$$=e^{3}\cdot 1=e^{3}.$$

2.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\left[1^{\infty}\right]$. Виділимо цілу частину дробу $\frac{2x+3}{2x+1}$ та, застосовуючи другу важливу границю, отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1+2}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1}=$$
$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{2}}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right)^{(x+1)\cdot\left(\frac{2}{2x+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2(x+1)}{2x+1}\right)}=e^{1}=e.$$

2.4. $$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\left(\frac{2x-1}{2x-3}\right)^{2x-3}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}}=\left[1^{\infty}\right]=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3+2}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}}=$$
$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{2}}\right)^{\frac{2x-3}{2}}\right)^{\frac{(2x-3)}{3}\cdot\left(\frac{2}{2x-3}\right)}=e^{\frac{2}{3}}.$$

2.5. $$\lim_{x\to\infty}\left(x^{2}-4\right)\left(\ln\left(2x^{2}+3\right)-\ln\left(2x^{2}-1\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x^{2}-4\right)\ln\left(\frac{2x^{2}+3}{2x^{2}-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{\left(x^2-4\right)}=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{\left(x^2-4\right)}=$$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x^2-1}\right)^{\left(x^2-4\right)}=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x^2-1}{4}}\right)^{\frac{2x^2-1}{4}}\right)^{\frac{\left(x^2-4\right)}{1}\cdot\left(\frac{4}{\left(2x^2-1\right)}\right)}\right)=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4\left(x^2-4\right)}{\left(2x^2-1\right)}\right)}=e^2.$$

2.6. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{\mathrm{ctg}^2 x}=\left[1^\infty\right]=\left(\left(\lim\limits_{x\to0}\left(1+x^2\right)\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{\frac{x^2}{\mathrm{tg}^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x}{\mathrm{tg}\,x}\right)^2}=e$.

Приклад 3. Обчисліть границі показниково-степеневої функції.

3.1. $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos 2x\right)^{\mathrm{ctg}^2 x}$. **3.2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+3}{3x-8}\right)^{\frac{x+2}{2}}$. **3.3.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^{x}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3+3}{3x^3-1}\right)^{\frac{x^3}{2}}$. **3.5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+2}{x^2-3x-4}\right)^{x-3}$.

Розв'язання.

3.1. $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos 2x\right)^{\mathrm{ctg}^2 x}=\left[1^\infty\right]=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\cos 2x-1\right)\mathrm{ctg}^2 x}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(-2\sin^2 x\right)\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(-2\cos^2 x\right)}=e^{-2}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+3}{3x-8}\right)^{\frac{x+2}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{2}\left(\frac{3x+3}{3x-8}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{2}\cdot\frac{11}{3x-8}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{11x+22}{6x-16}}=e^{\frac{11}{6}}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\cdot\left(\frac{2x+3}{x-1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\cdot\frac{x+4}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4x}{x-1}}=$

$$=\begin{cases}\infty, \text{ якщо } x\to\infty;\\ 0, \text{ якщо } x\to-\infty.\end{cases}$$

3.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^3+3}{3x^3-1}\right)^{\frac{x^3}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{2}\cdot\left(\frac{3x^3+3}{3x^3-1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{2}\cdot\frac{4}{3x^3-1}}=e^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e^2}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+2}{x^2-3x-4}\right)^{x-3}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)\cdot\left(\frac{x^2-5x+2}{x^2-3x-4}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-3)(-2x+6)}{x^2-3x-1}}=e^{-2}$.

Запитання для самоперевірки

1. Запишіть першу важливу границю та наслідки з неї.
2. Нескінченно малою величиною називають ...
3. Якщо функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою величиною при $x\to x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ $(\alpha\neq 0)$ є ...
4. Чому дорівнює сума скінченного числа нескінченно малих величин?
5. Запишіть другу важливу границю та наслідки з неї.
6. Як знаходять границі показниково-степеневих функцій?

Завдання для самостійного виконання

Завдання. Знайдіть границі функцій.

1.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{7x}$. **1.2.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{ctg} 8x}{\sin x}$. **1.3.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$. **1.4.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^2 x}{x\operatorname{tg} 6x}$.

1.5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{2x^2}$. **1.6.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 5x-\cos 3x}$. **1.7.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2-3x}{\sin 5x}$.

1.8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin^2\frac{x}{3}}$. **1.9.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. **1.10.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin 2x}{(\operatorname{arctg} 5x)^2}$.

1.11. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$. **1.12.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{x}\right)^{2x}$. **1.13.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-5x}{2-5x}\right)^{\frac{2x-1}{3}}$.

1.14. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x+1}\right)^{4x}$. **1.15.** $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{x}$. **1.16.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{3}\ln x\right)$.

1.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$. **1.18.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\operatorname{tg}^{2}x\right)^{\operatorname{ctg}^{2}x}$. **1.19.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}$.

1.20. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x+2}{x-1}\right)^{x}$. **1.21.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^{2}+3}{2x^{2}-1}\right)^{\frac{x^{2}}{4}}$. **1.22.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{2}-3x+2}{x^{2}-3x-1}\right)^{x}$.

1.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$. **1.24.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^{2}-4}{\operatorname{arctg}(x+2)}$. **1.25.** $\lim\limits_{x\to +\infty}x\operatorname{arctg}x$.

1.26. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{cosec}\left(\dfrac{3}{4}\pi+x\right)$. **1.27.** $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1}$.

1.28. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin x}$. **1.29.** $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left(\ln(x+a)-\ln x\right)$.

1.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\ln(x+a)-\ln a\right)}{x}$.

Відповіді: **1.1.** $\dfrac{4}{7}$. **1.2.** 8. **1.3.** $\dfrac{3}{5}$. **1.4.** $\dfrac{1}{6}$. **1.5.** $\dfrac{9}{8}$. **1.6.** $-\dfrac{1}{4}$.

1.7. $-\dfrac{3}{5}$. **1.8.** 36. **1.9.** $\dfrac{1}{2}$. **1.10.** $\dfrac{2}{25}$. **1.11.** $\dfrac{2}{\pi}$. **1.12.** $\dfrac{1}{e^{14}}$. **1.13.** $\dfrac{1}{\sqrt[15]{e^{4}}}$.

1.14. $\begin{cases}0, & \text{якщо } x\to\infty\\ \infty, & \text{якщо } x\to-\infty\end{cases}$. **1.15.** 1. **1.16.** 0. **1.17.** 0. **1.18.** e^{3}.

1.19. $\dfrac{1}{e^{10}}$. **1.20.** $\begin{cases}\infty, & \text{якщо } x\to\infty;\\ 0, & \text{якщо } x\to-\infty.\end{cases}$ **1.21.** $\sqrt{e}$. **1.22.** 1. **1.23.** $\dfrac{1}{e^{ab}}$.

1.24. –4. **1.25.** 1. **1.26.** 1. **1.27.** $\dfrac{1}{e^{10}}$. **1.28.** e. **1.29.** a. **1.30.** $\dfrac{1}{a}$.

Тема 5. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ФУНКЦІЇ

План

1. Порівняння нескінченно малих.
2. Еквівалентні нескінченно малі.

Література: [1-3]; [6-7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати:*** означення нескінченно малих функцій одного порядку, різного порядку; означення еквівалентних нескінченно малих функцій; властивості нескінченно малих величин; таблицю еквівалентних величин; ***уміти:*** порівнювати нескінченно малі функції; обчислювати границі, використовуючи основні еквівалентності.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Порівняйте нескінченно малі функції.

1.1. $\alpha(x)=x-1$ та $\beta(x)=(x+1)(x-1)^2$ при $x\to 1$.

1.2. $\alpha(x)=\dfrac{9-x}{9+x}$ та $\beta(x)=\sqrt{x}-3$ при $x\to 9$.

Розв'язання.

1.1. При $x\to 1$ функція $\alpha(x)=x-1$ нескінченна мала нижчого порядку, ніж $\beta(x)=(x+1)(x-1)^2$, оскільки

$$\lim_{x\to 1}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\infty .$$

1.2. Оскільки $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{9-x}{(9+x)(\sqrt{x}-3)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{-\left(3+\sqrt{x}\right)}{9+x}=-\dfrac{1}{3}$, то $\alpha(x)=\dfrac{9-x}{9+x}$ і $\beta(x)=\sqrt{x}-3$ одного порядку при $x\to 9$.

Приклад 2. Доведіть, що при $x\to 0$ нескінченно малі величини $e^{3x}-e^{x}$ та $\sin 3x-\sin x$ еквівалентні.

Розв'язання.

Обчислимо границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{\sin 3x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{3x}-1\right)-\left(e^{x}-1\right)}{\sin 3x-\sin x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3\left(e^{3x}-1\right)}{3x}-\dfrac{e^{x}-1}{x}}{\dfrac{3\sin 3x}{3x}-\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}}{3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{3-1}{3-1}=1.$$ Тоді

задані нескінченно малі величини еквівалентні.

Приклад 3. Обчисліть границю, використовуючи основні еквівалентності.

3.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 4x}{x\operatorname{tg}3x}$; **3.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\arcsin^{2}x\right)}{1-\cos 4x}$; **3.3.** $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$;

3.4. $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}}\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x$.

Розв'язання.

3.1. Оскільки $\cos 6x-\cos 4x=-2\sin x\sin 5x$ та, враховуючи еквівалентності $\sin 2x\sim 2x$, $\sin x\sim x$, $\operatorname{tg}3x\sim 3x$, $x\to 0$, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos 4x}{x\operatorname{tg}3x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin 2x}{x\operatorname{tg}3x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{2x^{2}}{3x^{2}}=-\frac{4}{3}.$$

3.2. Перетворимо знаменник: $1-\cos 4x=2\sin^{2}2x$. При $x\to 0$ $\arcsin x\sim x$, $\sin 2x\sim 2x$, $\ln(1+x^{2})\sim x^{2}$. Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\arcsin^{2}x\right)}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^{2}\right)}{2\sin^{2}2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}}{(2x)^{2}}=\frac{1}{8}.$$

3.3. Маємо невизначеність $[\infty\cdot 0]$. Виконаємо заміну $\dfrac{1}{x}=y$, тоді

$$\lim_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}=\left|e^{y}-1\sim y, y\to 0\right|=1.$$

3.4. $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x=[0\cdot\infty]=\left|\begin{array}{l}\frac{3\pi}{2}-x=y\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}-y\\ x\to\frac{3\pi}{2}\Rightarrow y\to 0\end{array}\right|=$

$=\lim\limits_{y\to 0}y\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-y\right)=\lim\limits_{y\to 0}y\operatorname{ctg}y=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}y}=\left|\operatorname{tg}y\sim y\right|=1.$

Запитання для самоперевірки

1. Що означає порівняти дві нескінченно малі величини?
2. У якому випадку одна з нескінченно малих величин буде вищого порядку, ніж інша?
3. За якої умови одна з нескінченно малих величин буде нижчого порядку, ніж інша?
4. У якому випадку дві нескінченно малі функції будуть одного порядку?
5. Які величини називають еквівалентними ?
6. Сформулюйте необхідну і достатню умову еквівалентності.
7. Наведіть таблицю основних еквівалентних нескінченно малих функцій.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Порівняйтети нескінченно малі функції.

1.1. $\alpha(x)=x^4-6x^2+8$ і $\beta(x)=x^2-x-2$ при $x\to 2$.

1.2. $\alpha(x)=\frac{x^2}{5+x}$ і $\beta(x)=\frac{4x^2}{x-1}$ при $x\to 0$.

1.3. $\alpha(x)=\sqrt{3x}+1$ і $\beta(x)=4x$ при $x\to 0$.

1.4. $\alpha(x)=x^2-\cos 2x$ і $\beta(x)=3x^2$ при $x\to 0$.

1.5. $\alpha(x)=\cos x-\cos^3 x$ і $\beta(x)=x^2$ при $x\to 0$.

1.6. $\alpha(x)=\frac{\operatorname{arctg}^2(x+1)}{x-2}$ і $\beta(x)=x^2-2x-3$ при $x\to -1$.

1.7. $\alpha(x)=2x^3$ і $\beta(x)=\frac{5x^3}{4-x}$ при $x\to 0$.

Завдання 2. Обчисліть границі, користуючись основними еквівалентностями.

2.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\operatorname{arctg} 5x}$. **2.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x}{\log_3(1+x)}$. **2.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x^3+8x}$.

2.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x-\arcsin 2x}{3x-\operatorname{arctg} 2x}$. **2.5.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(\operatorname{tg} x)}{2^x-3^x}$. **2.6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(4x+1)}{\sin 3x-\sin x}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\operatorname{tg} x}-1}{x^3+5x}$. **2.8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-\sqrt{1+5x}}{x}$. **2.9.** $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\ln(x-6)}{7x-x^2}$.

2.10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$. **2.11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 3x}}{\operatorname{tg} 2x}$.

2.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\operatorname{arctg}^2 x}$. **2.13.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{3x}-e^3}{x-1}$. **2.14.** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

2.15. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\dfrac{2}{x}\right)$. **2.16.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos 2x}{4x^2}$.

2.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin 2x}-\cos 4x}{tg^2 3x}$. **2.18.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec} x}$.

2.19. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin x}}$. **2.20.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 5x)}{\ln(\cos 3x)}$. **2.21.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+x)^3-27}{\ln(1+2x)^3}$.

2.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^{x^2}+x\sin 3x)}{\ln(1+\operatorname{tg}^2 2x)}$. **2.23.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 4x-\sqrt{\operatorname{tg} x}}{x}$.

Відповіді: **2.1.** $1{,}4$. **2.2.** $\dfrac{2}{\ln 3}$. **2.3.** $\dfrac{1}{4}$. **2.4.** 3. **2.5.** $\log_{\frac{2}{3}} e$. **2.6.** 2. **2.7.** $\dfrac{\ln 2}{5}$. **2.8.** $\ln 3-2{,}5$. **2.9.** $-\dfrac{1}{7}$. **2.10.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **2.11.** $2{,}5$. **2.12.** $-0{,}5$. **2.13.** $3e^3$. **2.14.** $\dfrac{1}{e}$. **2.15.** 2. **2.16.** $-\dfrac{1}{4}$. **2.17.** $\dfrac{10}{9}$. **2.18.** e. **2.19.** 1. **2.20.** $\dfrac{25}{9}$. **2.21.** $4{,}5$. **2.22.** 1. **2.23.** $-\infty$.

Тема 6. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ТА РОЗРИВИ ФУНКЦІЙ

План

1. Неперервність функції в точці.
2. Основні теореми про неперервність функції в точці.
3. Точки розриву функції, їх класифікація.
4. Властивості неперервних функцій на відрізку.

Література: [1-3]; [6-7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен **знати:** означення неперервності функції в точці, їх основні теореми, точки розриву функції та їх класифікацію; **уміти:** досліджувати поведінку функції в околі точки розриву.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1. Обчисліть односторонні границі.

1.1. $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{3}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{3}{x-1}$. **1.2.** $\lim\limits_{x\to -2+0}\dfrac{|2x+4|}{x+2}$, $\lim\limits_{x\to -2-0}\dfrac{|2x+4|}{x+2}$.

1.3. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{x}$. **1.4.** $\lim\limits_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}}$, $\lim\limits_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}}$.

1.5. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0,\\ x^2, & x>0.\end{cases}$

Розв'язання.

1.1. $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{3}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{3}{x-1}=-\infty$.

1.2. Враховуючи, що $|2x+4|=2x+4$ при $x>-2$ та $|2x+4|=-2x-4$ при $x<-2$ отримаємо

$$\lim_{x\to -2+0}\frac{|2x+4|}{x+2}=2,\quad \lim_{x\to -2-0}\frac{|2x+4|}{x+2}=-2 .$$

1.3. Застосувавши першу важливу границю, дістанемо:

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\pm 0}\frac{\frac{\sin 5x}{\cos 5x}}{x}=\lim_{x\to\pm 0}\frac{\sin 5x}{\cos 5x\cdot x}=\lim_{x\to\pm 0}\frac{\sin 5x\cdot 5x}{\cos 5x\cdot x\cdot 5x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm 0}\frac{5x}{\cos 5x\cdot x}=5.$$

1.4. Якщо $x\to 1+0$, то $\frac{1}{x-1}\to+\infty$ і $\lim_{x\to 1+0}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$. Якщо $x\to 1-0$, то $\frac{1}{x-1}\to-\infty$ і $\lim_{x\to 1-0}e^{\frac{1}{x-1}}=0$.

1.5. $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 0,\\ x^2, & x>0.\end{cases}$ Для обчислення лівої границі розглядаємо $x<0$ та $f(x)=x-1$. Отже, $\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}(x-1)=-1$. Для обчислення правої границі розглядаємо $x>0$ та $f(x)=x^2$. Отже, $\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}x^2=0$.

Приклад 2. Дослідіть функцію $f(x)$ на неперервність. У точках розриву знайдіть лівосторонню і правосторонню границі функції. Визначте характер точок розриву.

2.1. $f(x)=7^{\frac{2}{x+3}}$. **2.2.** $f(x)=\frac{1}{5^{2x-3}-1}$. **2.3.** $f(x)=\frac{1}{2^{2x^2-3}+4}$.

2.4. $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{2}-x, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ **2.5.** $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le-1,\\ 2x^3+1, & -1<x\le 1,\\ \frac{1}{5x}, & x>1.\end{cases}$

2.6. $f(x)=\lg(x^2+4x)$. **2.7.** $f(x)=\frac{|2x-10|}{x-5}$.

2.8. $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}x^2 & \text{при } x\le 4,\\ x & \text{при } x>4.\end{cases}$

Розв'язання.

2.1. $f(x)=7^{\frac{2}{x+3}}$

Область визначення функції $D(y)=(-\infty;\,-3)\cup(-3;\,+\infty)$. Отже, в точці $x=-3$ функція має розрив. Розглянемо ліву та праву границі функції:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to-3-0}7^{\frac{2}{x+3}}=0\\&\lim_{x\to-3+0}7^{\frac{2}{x+3}}=\infty\end{aligned}\right\},\text{ тоді } x=-3 \text{ – точка розриву II роду.}$$

2.2. $f(x)=\dfrac{1}{5^{2x-3}-1}$

Функція $f(x)$ визначена і неперервна на всій числовій осі, крім точки $x=\dfrac{3}{2}$. Отже, в точці $x=\dfrac{3}{2}$ функція має розрив.

Знайдемо односторонні границі функції в цій точці:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}-0}\dfrac{1}{5^{2x-3}-1}=\infty;\\ \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}+0}\dfrac{1}{5^{2x-3}-1}=\infty\end{cases},$$

отже, $x=\dfrac{3}{2}$ – точка розриву II роду .

2.3. $f(x)=\dfrac{1}{2^{2x^2-3}+4}$

Область визначення функції

$D(y)=2^{2x^2-3}+4\ne 0\ \Rightarrow\ 2^{2x^2-3}\ne-4\ \Rightarrow\ x\in R$. Отже, функція

$f(x)=\dfrac{1}{2^{2x^2-3}+4}$ неперервна.

2.4. $f\left(x\right)=\begin{cases} x, & x\le 0, \\ \sin x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2}-x, & x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Область визначення функції $D(y)=R$. Перевіримо на неперервність у точках $x_1=0$ та $x_2=\dfrac{\pi}{2}$.

$x_1=0$, $f(0)=0$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0-0} f(x) &= \lim_{x\to 0-0} x=0 \\ \lim_{x\to 0+0} f(x) &= \lim_{x\to 0+0} \sin x=0 \end{aligned}\right\},$$

отже, в точці $x_1=0$ функція неперервна.

$x_2=\dfrac{\pi}{2}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f\left(x\right) &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \sin x=1 \\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} f\left(x\right) &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0 \end{aligned}\right\},$$

отже, в точці $x_2=\dfrac{\pi}{2}$ є розрив І роду .

Графік цієї функції зображено на рис. 6.1.

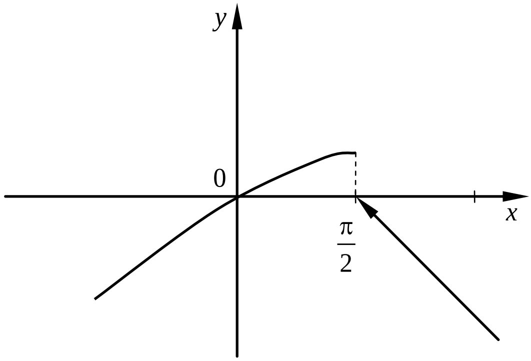

Рис. 6.1.

2.5. $f(x)=\lg(x^2+4x)$.

Із властивості логарифмічної функції випливає, що функція $f(x)=\lg(x^2+4x)$ буде визначена і неперервна для всіх значень x, що задовольняють нерівності $x^2+4x>0$. Таким чином, розв'язавши цю нерівність, маємо, що область визначення і область неперервності функції: $x\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$.

Досліджимо функцію в граничних точках. Для цього знаходимо односторонні границі функції:

$$\lim_{x\to-4-0}\lg(x^2+4x)=-\infty;\quad \lim_{x\to0+0}\lg(x^2+4x)=-\infty.$$

Функція в точках $x=-4$ і $x=0$ має розрив II роду. Графік функції в околі точок розриву має вигляд (рис. 6.2):

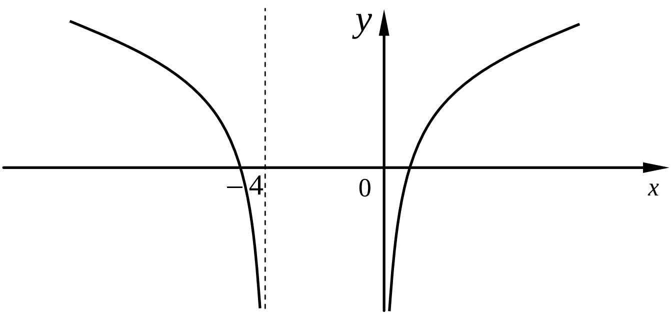

Рис. 6.2

2.6. $f(x)=\dfrac{|2x-10|}{x-5}$.

Область визначення функції $D(y)=(-\infty;\ 5)\cup(5;\ \infty)$. У точці $x=5$ функція має розрив.

Дослідимо цю точку розриву:

$$\lim_{x\to 5-0}\frac{|2x-10|}{x-5}=-2,\quad \lim_{x\to 5+0}\frac{|2x-10|}{x-5}=2.$$

Отже, в точці $x=5$ функція має скінченний розрив. Графік функції в околі точки $x=5$ має вигляд (рис. 6.3):

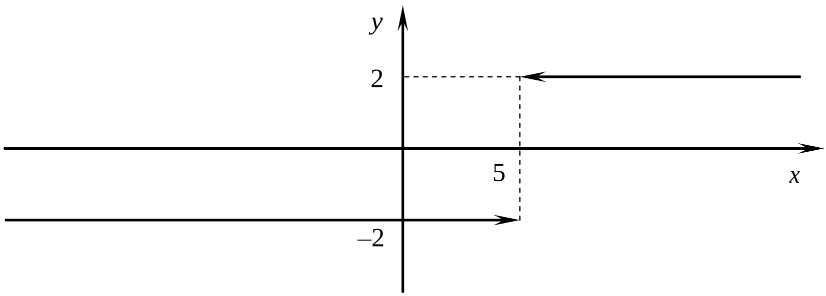

Рис. 6.3

2.7. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le -1, \\ 2x^3+1, & -1<x\le 1, \\ \dfrac{1}{5x}, & x>1. \end{cases}$

Область визначення функції $D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$. Крім $x=0$, функція має ще дві точки розриву $x_1=-1$ та $x_2=1$

$x_1=-1$, $f(-1)=-1+1=0$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -1-0} f(x) &= \lim_{x\to -1-0}(x+1)=0 \\ \lim_{x\to -1+0} f(x) &= \lim_{x\to -1+0}\left(2x^3+1\right)=-1 \end{aligned}\right\}$$ отже $x=-1$ – точка розриву I роду

$x_2=1$, $f(1)=2\cdot 1^3+1=3$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0}\left(2x^2-1\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{5x} = \dfrac{1}{5}\end{array}\right\}, \quad \text{отже } x=1 - \text{точка розриву I роду}$$

2.8. $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}x^2 & \text{при } x \le 4, \\ x & \text{при } x > 4.\end{cases}$

Область визначення функції $D(y)=R$. Оскільки функція задана двома різними формулами, для різних інтервалів зміни аргументу x може мати розрив у точці $x=4,$ де змінюється її аналітичний вираз.

Досліджуючи точку $x=4,$ знаходимо односторонні границі функції при прямуванні аргументу до точки зліва і справа:

$$\lim_{x\to 4-0} f(x) = \lim_{x\to 4-0}\left(-\frac{1}{4}x^2\right) = -4; \quad \lim_{x\to 4+0} f(x) = \lim_{x\to 4+0} x = 4.$$

Ліва і права границі функції скінченні, але не рівні між собою. Тому, внаслідок невиконання другої умови неперервності, в точці $x=4$ функція має скінчений розрив. Графік цієї функції має вигляд (рис. 6.4):

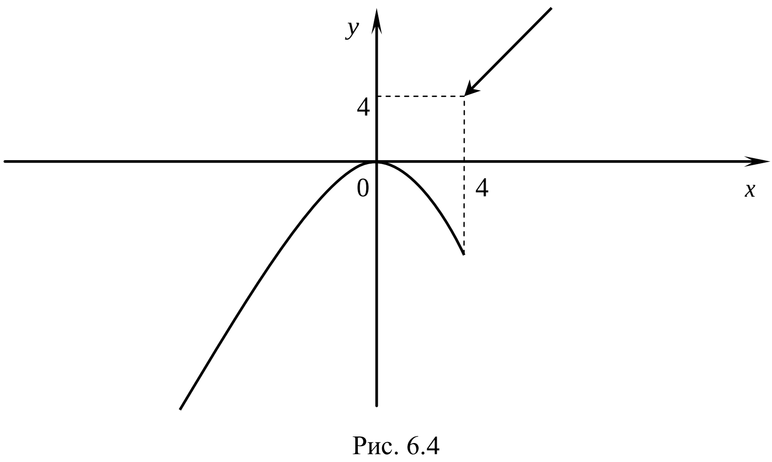

Рис. 6.4

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть різні означення неперервності функції в точці. Що таке неперервність складеної та оберненої функції?

2. Що таке одностороння неперервність функції однієї змінної в точці, необхідна і достатня умова неперервності, класифікація точок розриву?

3. Розгляньте локальні властивості неперервних функцій.

4. Доведіть теореми про арифметичні дії над неперервними функціями, про неперервність суперпозиції функцій.

5. Розгляньте неперервність функції на множині, неперервність елементарних функцій.

6. Доведіть теореми про функції, неперервні на замкненій множині: теореми Больцано-Коші, теореми Вейєрштрасса.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчисліть односторонні границі.

1.1. $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{5}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{5}{x-2}$. **1.2.** $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{|x-3|}{x-3}$, $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{|x-3|}{x-3}$.

1.3. $\lim\limits_{x\to \pm 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$. **1.4.** $\lim\limits_{x\to 1+0}5^{\frac{1}{x-1}}$, $\lim\limits_{x\to 1-0}5^{\frac{1}{x-1}}$.

1.5. $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\le 0,\\ x^2+4, & x>0.\end{cases}$

Завдання 2. Дослідіть функцію $f(x)$ на неперервність. У точках розриву знайдіть лівосторонню і правосторонню границі функції. Визначте характер точок розриву.

2.1. $f(x)=3^{\frac{1}{x+2}}$. **2.2.** $f(x)=\dfrac{2}{1-3^{3+x}}$. **2.3.** $f(x)=2+\dfrac{1}{1-x}$.

2.4. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le -1;\\ 2x^2-1, & -1<x\le 1;\\ \dfrac{1}{x}, & x>1.\end{cases}$ **2.5.** $f(x)=\begin{cases}e^{x+3}, & \text{якщо } x<-3;\\ 10-x^2, & \text{якщо } |x|\le 3;\\ 2^{\frac{1}{x-2}}, & \text{якщо } x>3.\end{cases}$

2.6. $f(x)=\dfrac{2}{3^{\frac{1}{2x+1}}}$. **2.7.** $f(x)=\dfrac{1}{5^{2x-3}-3}$. **2.8.** $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$.

2.9. $f(x)=\begin{cases} x, \ x\le 0; \\ 1-\cos x, \ 0<x<\pi; \\ \sin x, \ x\ge\pi. \end{cases}$ **2.10.** $f(x)=8^{\frac{1}{x-3}}+1$.

Відповіді: **1.1.** $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{5}{x-2}=\infty$; $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{5}{x-2}=-\infty$.

1.2. $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{|x-3|}{x-3}=1$; $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{|x-3|}{x-3}=-1$. **1.3.** (3;3).

1.4. $\lim\limits_{x\to 1+0}5^{\frac{1}{x-1}}=\infty$; $\lim\limits_{x\to 1-0}5^{\frac{1}{x-1}}=0$. **1.5.** (–1;4).

2.1. $x=-2$ – точка розриву II роду. **2.2.** $x=-3$ – точка розриву I роду. **2.3.** $x=1$ – точка розриву II роду. **2.4.** $x=-1$ – точка розриву I роду; $x=1$ – функція неперервна.

2.5. $x=3$ – точка розриву I роду; $x=-3$ – функція неперервна.

2.6. $x=-\dfrac{1}{2}$ – точка розриву II роду. **2.7.** $x=\dfrac{3}{2}$ – функція неперервна. **2.8.** $x=0$ – точка розриву I роду. **2.9.** $x=\pi$ – точка розриву I роду; $x=0$ – функція неперервна. **2.10.** $x=3$ точка розриву II роду.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вища* математика: Збірник задач: навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П.Вовкодав [та ін.]; За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2011. – 480 с.

2. *Вища* математика: навч. посібник / І. О. Ластівка, О. І. Безверхий, І. П. Кудзіновська. – К. : НАУ, 2018. – 452 с.

3. *Вища* математика. Модуль 2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної: навч. посібник / Я. В. Крисак, Т. А. Левковська, Р. В. Горідько, Л. О. Чуб – К. : НАУ, 2006. – 284 с.

4. *Высшая* математика для экономистов: учебник для вузов / Н. Ш.Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд. – М. : ЮНИТИ, 1998.– 471 с.

5. *Денисюк В. П.* Вища математика: підручник: у 2 ч. Ч. 1. / В. П. Денисюк, В. К. Репета. – 2-ге вид., виправ. – К. : НАУ, 2013. – 472 с.

6. *Дубовик В. П.* Вища математика: навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Вища шк., 1993. – 648 с.

7. *Математика* для економістів : навч. посібник У 3 ч. Ч. 1 / І. О. Ластівка, В. С. Коновалюк, І. В. Шевченко [та ін.]. – К. : НАУ, 2012. – 432 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів

Укладачі: ЛАСТІВКА Іван Олексійович
КОВТОНЮК Інна Юхимівна
ЧУБ Людмила Олексіївна