МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ.

Методичні рекомендації
до самостійної роботи для студентів
технічних та економічних спеціальностей

Київ 2020

УДК

Укладачі:
І. О. Ластівка – д-р техн. наук, проф.;

І. П. Кудзіновська – канд. техн. наук;

В. В. Кравченко

Рецензент:

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету(протокол № _ від __________).

Вища математика. Теорія ймовірностей. Випадкові події: методичні рекомендації до самостійної роботи для студентів технічних та економічних спеціальностей / уклад. : І. О. Ластівка, І.П. Кудзіновська, В.В. Кравченко. – К. : НАУ, 2020. – 48 с.

Укладено відповідно до програм курсів «Вища математика». Методичні рекомендації містять приклади розв’язання типових задач розділу «Теорія ймовірностей. Випадкові події», запитання для самоперевірки і завдання для самостійного виконання з відповідями.

Для студентів технічних та економічних спеціальностей.

ЗМІСТ

ВСТУП

Методичні рекомендації розроблено для вивчення розділу «Випадкові події», який є складовою частиною курсів «Вища математика» та «Теорія ймовірностей і математична статистика», що входять до програм підготовки студентів економічних та технічних спеціальностей.

Методична праця складаються з шести тем, кожна з яких містить основні теоретичні відомості, приклади розв’язування типових задач, запитання для самоперевірки, завдання для самостійного виконання з відповідями та перелік рекомендованих літературних джерел.

Навчальний матеріал викладено стисло, у поєднанні теоретичної строгості та доступності для сприйняття та проілюстровано прикладами розв’язування завдань, які слугують зразком оптимально інформативного оформлення розв’язання завдань.

Особливістю методичних рекомендацій є подання теоретичних відомостей та прикладів розв’язування задач у табличному вигляді, що полегшує сприйняття та засвоєння студентами навчального матеріалу. Значна кількість завдань для самостійної роботи має прикладну спрямованість, що сприяє зацікавленості у вивченні розділу «Випадкові події», формуванню теоретико-ймовірнісної інтуїції студента та умінню будувати математичні моделі реальних виробничих процесів та технологій.

Методичні рекомендації укладено відповідно до навчальних програм, призначені для самостійної роботи студентів технічних та економічних спеціальностей і орієнтовані на забезпечення теоретичної та методичної підтримки навчального процесу.

Тема 1. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

План

1. Поняття комбінаторики
2. Основні правила комбінаторики: правило суми і правило добутку.
3. Різні види сполук (звіт формул).

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5], [6], [7], [8]; [9]; [10]; [11], [12].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 1 студент повинен ***знати:*** основні правила комбінаторики: правила суми і добутку, поняття сполук (перестановки, розміщення і комбінації), формули для обчислення кількості сполук ; ***уміти:*** відрізняти різні види сполук, знаходити кількості сполук і використовувати при роз'язанні комбінаторних задач.

Основні теоретичні відомості

Комбінаторика- це розділ математики,орієнтований на роз'язання задач вибору елементів з заданої скінченної множини та розподілу їх в групи по заданим правилам (обмеженням)

Основні правила комбінаторики

Правило суми	Якщо об'єкт A можна обрати m способами, об'єкт B можна обрати n способами (ніякий вибір A не співпадає з вибором B), то один з об'єктів A або B можна обрати $(m+n)$ способами
Правило добутку	Якщо об'єкт A можна обрати m способами і при кожному виборі об'єкта A, об'єкт B можна обрати n способами, то вибір пари об'єктів A і B можна здійснити (mn) способами

Сполуки з n елементів по k :

Порядок → **Перестановки з n елементів**

$$P_n = n! \qquad \bar{P}_{n_1,n_2,\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1 \cdot n_2 \cdots n_k}$$

Порядок і склад → **Розміщення з n елементів по k**

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad \bar{A}_n^k = n^k$$

$\bar{A}^k$

Склад → **Комбінації з n елементів по k**

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

$\bar{C}_n^k$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Скількома способами можна розташувати в одному ряді із 10 місць на перонній стоянці хаб - аеропорту : а) десять літаків різних авіакомпаній; б) чотири літаки різних авіакомпаній.

Розв'язання

а) Сполуки відрізняються порядком елементів. $n=10$	$P_n = n!$
$P_{10} = 10! = 3628800$	3628800

б) Сполуки відрізняються складом і порядком елементів. $n=10, k=4.$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
$A_{10}^6 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{6!} =$ $= 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040$	5040

Приклад 2. У департаменті аеропорту працюють 25 осіб. В поточному місяці 5 співробітників департаменту мають поїхати для проходження стажування за кордон. Скільки різних складів груп для проходження закордонного стажування можна сформувати?

Розв'язання

Сполуки відрізняються лише складом елементів. $n = 25, k = 5.$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
$C_{25}^5 = \dfrac{25!}{5!\cdot(25-5)!} = \dfrac{25!}{5!\cdot 20!} = \dfrac{20!\cdot 21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{20!\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} =$ $= 53130$	53130

Приклад 3. Мережа закладів ресторанного типу «WOG café» в міжнародному аеропорту «Бориспіль» пропонує в меню 4 види бургерів, 5 видів основних страв та 10 видів десертів. Скільки різних меню для покупця «to go» можна скласти при умові, що до нього увійдуть по одній із названих страв?

Розв'язання

$n_1 = 4, k_1 = 1, m_1 = C_{n_1}^{k_1};$ $n_2 = 5, k_2 = 1, m_2 = C_{n_2}^{k_2};$ $n_3 = 10, k_3 = 1, m_3 = C_{n_3}^{k_3};$ $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$	$C_{n_1}^{k_1} = n_1;$ $C_{n_2}^{k_2} = n_2;$ $C_{n_3}^{k_3} = n_3$
$m_1 = C_2^1 = n_1 = 4;$ $m_2 = C_5^1 = n_2 = 5;$ $m_3 = C_{10}^1 = n_3 = 10;$ $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 4 \cdot 5 \cdot 10 = 200$	200

Приклад 4. В аеропорту є вакансії на посади: бухгалтера, двох співробітників департаменту авіаційної безпеки та трьох співробітників адміністративного департаменту. На посаду бухгалтера подали заяви 2 претенденти; на посади співробітників департаменту авіаційної безпеки – 5 осіб; на посади співробітників адміністративного департаменту – 6 осіб. Скількома способами можна зайняти ці посади?

Розв'язання

$n_1 = 2, k_1 = 1, m_1 = C_{n_1}^{k_1};$ $n_2 = 5, k_2 = 2, m_2 = C_{n_2}^{k_2};$ $n_3 = 6, k_3 = 3, m_3 = C_{n_3}^{k_3};$ $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$	$C_{n_1}^{k_1} = n_1;$ $C_{n_2}^{k_2} = \dfrac{n_2!}{k_2!(n_2 - k_2)!};$ $C_{n_3}^{k_3} = \dfrac{n_3!}{k_3!(n_3 - k_3)!}$
$m_1 = C_2^1 = n_1 = 2;$ $m_2 = C_5^2 = \dfrac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \dfrac{10!}{2!\cdot 3!} = 10;$ $m_3 = C_6^3 = \dfrac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = \dfrac{6!}{3!\cdot 3!} = 20;$ $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 2 \cdot 10 \cdot 20 = 400$	400

Запитання для самоперевірки

1. Сформулювати правило суми і правило добутку.
2. Дати означення сполук: перестановок, розміщень і комбінацій.
3. Дати означення повторним і безповторним вибіркам.
4. Дати означення розміщенням і комбінаціям з повтореннями.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Скількома способами можна розмістити в чергу біля vip-стійки реєстрації 6 пасажирів бізнес-класу на один авіа рейс , серед яких є одне подружжя, так, щоб чоловік і жінка цього подружжя:
а) опинилися поруч в черзі;
б) не були поруч в черзі на реєстрацію?

Завдання 2. Екзаменаційна програма курсу «Авіаційна метеорологія» підготовки пілотів НАУ містить 46 теоретичних питань. В екзаменаційному білеті 2 теоретичних питання. Скількома способами можна скласти білет № 1?

Завдання 3 . Збори співробітників департаменту аеропорту з 80 осіб обирають голову, секретаря і трьох членів ревізійної комісії. Скількома способами це можна зробити?

Завдання 4. Чотири співробітники комерційного департаменту аеропорту мають написати звіт з 17 розділів. Перший та другий мають написати по 5 розділів, третій – 4, четвертий – 3 розділи. Скількома різними способами можна розподілити розділи звіту між співробітниками департаменту?

Завдання 5. На посади генерального директора та заступника директора аеропорту висунуто 5 кандидатів. Скількома способами можна обрати керівництво аеропорту?

Завдання 6. Скількома способами можна купити вісім листівок у сувенірному кіоску аеропорту, де наявні шість різних видів листівок у продажі?

Завдання 7. Програма комплексного іспиту для студентів-пілотів аероклубу містить 60 питань. В екзаменаційному білеті 5 питань. Скількома способами можна скласти білет №2?

Завдання 8. У філії банку працюють 15 співробітників, троє з яких мають досвід роботи більше 10 років. Скільки можна скласти списків: а) по 8 співробітників; б) по 6 співробітників зі стажем менше 10 років; в) по 9 співробітників, два з яких мають досвід роботи більше 10 років?

Завдання 9. Цінні папери нумеруються чотиризначними числами, складеними з 10 цифр. Скільки різних паперів можна випустити, якщо в нумерації не буде комбінації 0000?

Завдання 10. 25 учасників річних зборів акціонерів повинні обрати комітет правління, який складається з голови, секретаря, бухгалтера та ще чотирьох членів. Скільки існує способів заміщення а) вакантних місць голови, секретаря та бухгалтера претендентами; б) чотирьох інших посад правління (якщо голова, секретар та бухгалтер ще не обрані)?

Відповіді: 1) а) 12; б) 708; 2) 1035; 5) 20; 6) 1287; 7) 3478761; 8) а) 6435; б) 924; в)2376.

Тема 2. КЛАСИЧНЕ, ГЕОМЕТРИЧНЕ І СТАТИСТИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

План

1. Класичне означення ймовірності.
2. Статистичне означення ймовірності:
3. Геометричне означення ймовірності:

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5], [6], [7], [8]; [9]; [10]; [11], [12].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 2 студент повинен ***знати:*** класичне, статистичне та геометричне означення ймовірності; ***уміти:*** знаходити ймовірності випадкових подій, використовуючи класичне, статистичне та геометричне означення ймовірності.

Основні теоретичні відомості

Теорія ймовірностей. Основні поняття.

Ймовірність - це числова міра степеня об'єктивної можливості того, що подія відбудеться.

Класичне означення ймовірності:

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Статистичне означення ймовірності:

$$W(A)=\frac{m_1}{n_1}$$

Геометричне означення ймовірності:

$$P(A)=\frac{mesA}{mes\omega}$$

$P(A)$ - ймовірність події A; m - кількість наслідків випробування, що сприяють появі події A; n - загальна кількість наслідків випробування.
$W(A)$ - відносна частота події A; m_1 - кількість випробувань , в яких подія A мала місце; n_1 - загальна кількість проведених випробувань.
$P(A)$ - ймовірність події A; $mesA$ - міра області, що відповідає події A; $mes\omega$ - міра універсальної множини (універсуму).

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Вісім літаків авіакомпанії МАУ, серед яких: два Boeing 737 Classic; один – Embraer 190; три – Boeing 737 Next Generation і два – Boeing 777 -200ER, прибули в аеропорт і були розміщені випадковим способом на десяти стоянках, розташованих в одному ряду. Знайти ймовірність того, що між літаками Boeing 737 Classic опинились три літаки інших типів і не залишилось вільних стоянок.

Розв'язання

Випробування	*Вісім літаків МАУ розміщуються на стоянках в аеропорту*
Подія A	*Між літаками Boeing 737 Classic опинились три літаки інших типів і не залишилось вільних стоянок*
Ймовірність події A:	$P(A)=\dfrac{m}{n}$
$m=P_2\cdot A_6^3\cdot A_5^3$	$m=2\cdot 120\cdot 60=14400$
$n=A_{10}^8$	$n=1814400$

Відповідь:	$P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{2\cdot 120\cdot 60}{1814400}\approx 0,007$

Приклад 2. Двадцять екзаменаційних білетів з дисципліни «Льотні характеристики та планування польотів» освітньої програми підготовки пілотів містять по три питання, які не повторюються. Студент готовий відповісти лише на 50 питань курсу. Яка ймовірність того, що студент знає відповіді на всі питання білету, обраного ним на іспиті?

Розв'язання

Випробування	*Студент відповідає на питання білету*
Подія A	*Студент знає відповіді на всі питання білету*
Ймовірність події A:	$P(A)=\dfrac{m}{n}$
$m=C_{50}^{3}$	$m=19600$
$n=C_{60}^{3}$	$n=34220$
Відповідь:	$P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{C_{50}^{3}}{C_{60}^{3}}=\dfrac{19600}{34220}\approx 0,57$

Приклад 3. Друзі-пілоти домовилися зустрітися між 15.00 та 17.00 годинами в кафе аеропорту. Той, хто приїде першим, чекає другого протягом 20 хв, після чого їде. Знайти ймовірність того, що зустріч друзів відбудеться, якщо приїзд кожного з них протягом вказаного часу може відбутися в будь-який момент.

Розв'язання.

Позначимо через x час приходу M, через y — час приходу N. Множина всіх результатів випробування визначається умовами: $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2$, оскільки час приходу обмежено двома годинами.

Множина точок, координати $(x;\,y)$ яких задовольняють ці умови, заповнюють квадрат $OABC$ (рис. 1), сторона якого дорівнює 2, $mes\,G=S_{OABC}=4$. Подія C — зустріч відбулася. Цій події сприяють результати, для яких виконується умова: $|x-y| \le \frac{1}{3}$ $\left(\frac{1}{3}\text{ години дорівнюють 20 хв}\right)$, звідки:

$$\begin{cases} x-y \le \frac{1}{3}, \\ x-y \ge -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge x-\frac{1}{3}, \\ y \le x+\frac{1}{3}. \end{cases}$$

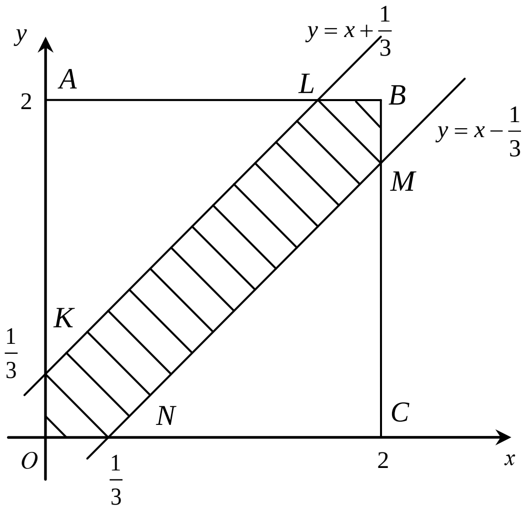

Рис. 1

Множина точок, координати $(x; y)$ яких задовольняють ці умови, заповнює заштриховану частину квадрата. Площа не заштрихованої частини квадрата:

$$S_{\Delta AKL}+S_{\Delta CNM}=\frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{1}{3}\right)\left(2-\frac{1}{3}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot 2=\frac{25}{9}.$$

За геометричним означенням ймовірності :

$$P(C)=\frac{S_C}{S_{OABC}}=\frac{S_{OABC}-(S_{\Delta AKL}+S_{\Delta CNM})}{S_{OABC}}=\frac{4-\frac{25}{9}}{4}=\frac{11}{36}$$

$$P(C)\approx 0,31.$$

Приклад 4. Два літаки прибувають у зону аеродрому в довільні моменти часу між 10-ю та 11-ю годинами. Посадка літака, що прибуває другим , може бути здійснена не раніше, ніж через 15 хвилин після посадки першого літака. Знайти ймовірність того,що другому літаку не доведеться чекати посадки.

Розв'язання.

Позначимо через x час прибуття першого літака, а через y — час прибуття другого літака.

Множина всіх результатів випробування визначається умовами: $0\le x\le 60,\ 0\le y\le 60$, оскільки час приходу обмежено однією годиною(60-ма хвилинами).

Множина точок, координати $(x;\,y)$ яких задовольняють ці умови, заповнюють квадрат $OABC$ (рис. 2), сторона якого дорівнює 60, $mes\,G=S_{OABC}=3600$.

Подія A — другому літааку не доведеться чекати посадки.
Цій події сприяють результати, для яких виконується умова: $|x-y|>15$, звідки:

$$\left[\begin{array}{l} x-y>15, \\ x-y<-15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y<x-15, \\ y>x+15. \end{array}\right.$$

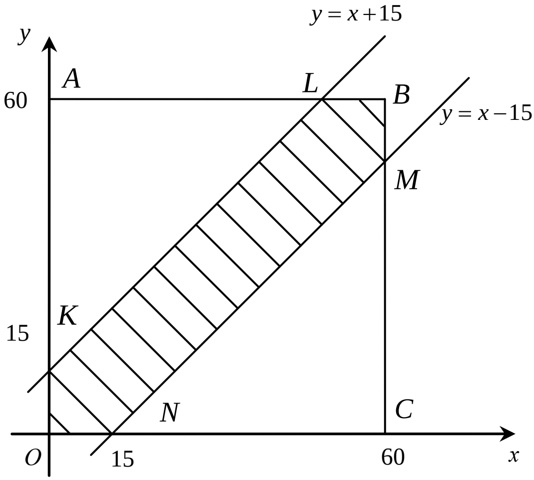

Рис. 2

Множина точок, координати $(x;\, y)$ яких задовольняють ці умови, заповнює незаштриховану частину квадрата. Площа незаштрихованої частини квадрата:

$$S_{\Delta AKL} + S_{\Delta CNM} = \frac{1}{2}\cdot(60-15)\cdot(60-15)+\frac{1}{2}\cdot(60-15)(60-15)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 45\cdot 45\cdot 2 = 2025$$

За геометричним означенням ймовірності :

$$P(A) = \frac{S_A}{S_{OABC}} = \frac{(S_{\Delta AKL} + S_{\Delta CNM})}{S_{OABC}} = \frac{2025}{3600} \approx 0,563$$

$$P(A) \approx 0,563.$$

Приклад 5. До авіакаси аеропорту звернулись 4 пасажири, кожний з яких рівноможливо замовляє квиток на один з 10 рейсів, що виконуються до міста М протягом поточної доби. Знайти ймовірність того, що:

а) пасажири замовлять квитки на різні рейси;

б) пасажири замовлять квитки на один рейс;

в) два пасажири замовлять квитки на один рейс.

Розв'язання

Випробування	*Замовлення чотирма пасажирами квитків в авіакасі аеропорту*
Подія A	*Пасажири замовлять квитки на різні рейси*
Подія B	*Пасажири замовлять квитки на один рейс*
Подія C	*Два пасажири замовлять квитки на один рейс*
Ймовірність події A:	$P(A)=\frac{m_1}{n}=\frac{A_{10}^4}{10^4}=\frac{5040}{10000}=0,504$
Ймовірність події B:	$P(B)=\frac{m_2}{n}=\frac{10}{10^4}=0,001$
Ймовірність події C :	$P(C)=\frac{m_3}{n}=\frac{10\cdot A_9^2}{10^4}=\frac{720}{10000}=0,072$

Приклад 6. В партії авіаційних деталей, кількість яких дорівнює 400, контролер з якості виявив 25 бракованих. Чому дорівнює відносна частота появи стандартних деталей?

Розв'язання

$n_1=400;$ $m=25;$ $m_1=n_1-m=400-25=375$	$W(A)=\frac{m_1}{n_1}$
$W(A)=\frac{m_1}{n_1}=\frac{375}{400}\approx 0,94$	0,94

Запитання для самоперевірки

1. Дати означення ймовірності для довільної події.
2. Чому дорівнює ймовірність достовірної та неможливої події.
3. Як пов’язані ймовірності протилежних подій .
4. Сформулювати класичне означення ймовірності. У чому полягає його недолік?
5. Сформулювати статистичне означення ймовірності.
6. Сформулювати геометричне означення ймовірності.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Телефонний номер довідкової служби міжнародного аеропорту «Бориспіль» складається з 5 цифр (не враховуючи кода міста Київ): (044)393-43-71. Пасажир, що набирає номер телефону аеропорту, забув останні дві цифри. Пам’ятаючи лише те, що забуті цифри різні і непарні, він набирає номер навмання. Знайти ймовірність того, що набраний потрібний номер телефону.

Завдання 2. Промінь авіа локатора переміщується зі сталою кутовою швидкістю $\propto$ радіан. Яка ймовірність того, що борт PS752 буде виявлено локатором в секторі β радіан, якщо поява літака в усіх напрямках рівно можлива?

Завдання 3. До авіакаси у випадковий момент часу у межах 15 хвилин звертаються 2 пасажири. Час, відведений на стандартне обслуговування одного пасажиру, складає 5 хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, який звернувся в авіакасу другим, буде вимушений очікувати.

Завдання 4. Яка ймовірність того, що чотиризначний номер випадково обраного автомобіля на автостоянці в аеропорту :

а) має всі цифри різні;

б) має тільки дві однакові цифри;

в) має дві пари однакових цифр;

Завдання 5. У групі 111 авіаційного коледжу навчається 12 студентів.

а) Яка ймовірність того, що у всіх студентів дні народження припадають на різні місяці?

б) Яка ймовірність того, що принаймні два студенти цієї групи народились в одному місяці?

Завдання 6. Рада директорів компанії складається з трьох бухгалтерів, трьох менеджерів і двох інженерів. У підкомітет повинно ввійти три чоловіка. Знайти ймовірність того, що навмання обраний підкомітет буде складатися: а) повністю з бухгалтерів; б) менеджера та двох бухгалтерів.

Завдання 7. Співробітники компанії X розподілені в таблиці за відділами та полами:

Підрозділи	Жінки	Чоловіки
Виробничій відділ	6	20
Сервісний центр	3	10
Склад	2	8
Автобаза	2	8
Відділ реалізації	5	10

Знайти ймовірність того, що навмання обраний службовець є: а) жінка; б) співробітник сервісного центру.

Завдання 8. В компанії X (за умовою завдання 8) організували консультаційний центр з двох співробітників. Знайти ймовірність того, що в центрі працюють: а) жінки; б) співробітники виробничого відділу.

Завдання 9. Із 1000 навмання обраних авіаційних запчастин при перевірці 4 виявилися бракованими. Скільки приблизно бракованих запчастин виявиться при перевірці 2400 деталей?

Завдання 10. При перевірці 200 авіаційних деталей виявлено, що відносна частота бракованих деталей на авіа складі дорівнює 0,05. Скільки виявлено бракованих деталей?

Відповіді: 1) 1/20; 5) а) $\frac{12!}{12^{12}}$; б) $1-\frac{12!}{12^{12}}$ 6) а) 0,01786; б) 0,16071; 7) а) 0,2432; б) 0,1757; 8) а) 0,0566; б) 0,1203; 9) 10; 10) 10.

Тема 3. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

План

1. Теореми додавання ймовірностей та наслідки з них.
2. Теореми множення ймовірностей та наслідки з них.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6]; [7]; [8]; [9]; [10]; [11]; [12].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 3 студент повинен ***знати:*** поняття суми, добутку, залежності та сумісності випадкових подій, умовної ймовірності, теореми додавання та множення подій і наслідки з них; ***уміти:*** знаходити ймовірності випадкових подій, використовуючи теореми додавання та множення подій і наслідки з них.

Основні теоретичні відомості

Теореми додавання

$$P(A+B)=P(A)+P(B),$$
$A,B-$ несумісні події

$$P(A)+P(B)=1,$$
$A,B-$ повна група подій

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$
$A,B-$ сумісні події

Ймовірність настання хоча б однієї події:
$$P(A+B)=1-P(\overline{A}\overline{B})$$

Теореми множення

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$A,B-$ незалежні події

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A),$$
$A,B-$ залежні події

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Підприємець придбав акції трьох компаній. Ймовірність отримання дивідендів за акціями першої компанії дорівнює 0,8, другої – 0,9, третьої – 0,85. Знайти ймовірність, що підприємець отримає дивіденди за акціями:

а) лише однієї компанії;
б) двох компаній;
в) жодної компанії;
г) хоча б однієї компанії.

Розв'язання

Випробування	*Перевірка факту отримання дивідендів за акціями*
Події A_i, $i=1,2,3$	*Підприємець отримає дивіденди за акціями $i-$ої компанії*
Протилежні події $\overline{A}_i$, $i=1,2,3$	*Підприємець не отримає дивіденди за акціями $i-$ої компанії*
Ймовірності подій A_i	$P(A_1)=0,8;\ P(A_2)=0,9;$ $P(A_3)=0,85$
Ймовірності протилежних подій $\overline{A}_i$	$P(\overline{A}_1)=1-0,8=0,2;$ $P(\overline{A}_2)=1-0,9=0,1;$ $P(\overline{A}_3)=1-0,85=0,15$
а) За теоремами додавання несумісних та множення незалежних подій, $A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$	$P(A)=0,8\cdot0,1\cdot0,15+0,2\cdot0,9\cdot0,15+$ $+0,2\cdot0,1\cdot0,85=0,056$
б) За теоремами додавання несумісних та множення незалежних подій, $B=A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$	$P(B)=0,8\cdot0,9\cdot0,15+0,8\cdot0,1\cdot0,85+$ $+0,2\cdot0,9\cdot0,85=0,334$
в) За теоремою множення незалежних подій, $C=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$	$P(C)=0,2\cdot0,1\cdot0,15=0,003$

г) За наслідком з теореми додавання несумісних подій, $P(D)=1-P(\overline{D})=1-P(C)$	$P(D)=1-0,003=0,997$

Приклад 2. У місті є два аеропорти, що здійснюють перельоти до Берліна. У першому з них продано 20% квитків до Берліна на певну дату, а у другому – 10%. Пасажир запланував на цю дату виліт до Берліна. Яка ймовірність, що він зможе придбати квиток на запланований рейс хоча б у одному з аеропортів?

Розв'язання

Випробування	*Придбання пасажиром квитка на рейс до Берліна*
Подія A	*Пасажир зможе купити квиток у першому аеропорту.*
Протилежна подія $\overline{A}$	*Пасажир не зможе купити квиток у першому аеропорту.*
Подія B	*Пасажир зможе купити квиток у другому аеропорту.*
Протилежна подія $\overline{B}$	*Пасажир не зможе купити квиток у другому аеропорту.*
Ймовірність події $\overline{A}$	$P(\overline{A})=0,2$
Ймовірність події $\overline{B}$	$P(\overline{B})=0,1$
Ймовірність настання хоча б однієї з подій (A або B): $P\left(A+B\right)=1-P\left(\overline{A}\overline{B}\right)$	$P\left(A+B\right)=1-0,2\cdot 0,1=0,98$

Приклад 3. З 75 рейсів міжнародного аеропорту «Бориспіль», 40 рейсів здійснюється до країн Європи. Яка ймовірність, що троє перших пасажирів, що придбали квитки на одну й ту ж дату, але на різні рейси, подорожуватимуть до країн Європи?

Розв'язання

Події A_i, $i=1, 2, 3$, залежні	*і-тий пасажир подорожуватиме до країн Європи*
Подія $A=A_1A_2A_3$	*Троє пасажирів, що придбали квитки,*

	подорожуватимуть до країн Європи
Ймовірність події A_1	$P(A_1)=\frac{40}{75}$
Умовна ймовірність події A_2 за умови настання A_1	$P_{A_1}(A_2)=\frac{39}{74}$
Умовна ймовірність події A_3 за умови настання A_1, A_2	$P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{38}{73}$
За теоремою множення залежних подій: $P(A)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)$	$P(A)=\frac{40}{75}\cdot\frac{39}{74}\cdot\frac{38}{73}=0{,}146$

Приклад 4. Ймовірність аварії при запуску ракети дорівнює 0,15, при цьому ймовірність аварії вже на старті дорівнює 0,12. Знайти ймовірність аварії ракети за умови її успішного старту.

Розв'язання

Випробування	*Запуск ракети*
Подія A	*Запуск ракети успішний*
Подія B	*Старт ракети успішний*
Протилежна подія $\bar{A}$	*Аварія при запуску ракети*
Протилежна подія $\bar{B}$	*Аварія на старті*
Ймовірність події $\bar{A}$	$P(\bar{A})=0{,}15$
Ймовірність події $\bar{B}$	$P(\bar{B})=0{,}12$
Ймовірність події A: $P(A)=1-P(\bar{A})$	$P(A)=1-0{,}15=0{,}85$
Ймовірність події B: $P(B)=1-P(\bar{B})$	$P(B)=1-0{,}12=0{,}88$
Умовна ймовірність події A за умови настання події B: $P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}$	$P_B(A)=\frac{0{,}85}{0{,}88}=0{,}966$

Умовна ймовірність протилежної події $\overline{A}$ за умови настання події *B*: $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$	$P_B(\overline{A}) = 1 - 0,966 = 0,034$

Запитання для самоперевірки

1. Дати означення суми та добутку подій.
2. Які події називаються сумісними? несумісними? Які події утворюють повну групу подій?
3. Сформулювати теореми додавання ймовірностей для несумісних і сумісних подій та їх наслідки.
4. Які події називаються залежними? незалежними? Дати означення умовної ймовірності випадкової події.
5. Сформулювати теореми множення ймовірностей для залежних і незалежних подій.
6. Якого вигляду набуває теорема додавання сумісних подій, коли ці події залежні? незалежні?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Компанія подала заявки на участь у трьох тендерах. Ймовірність виграти для цієї компанії перший тендер дорівнює 0,7, другий – 0,8, а третій – 0,9. Яка ймовірність того, що: а) компанія виграє хоча б один тендер; б) компанія виграє лише два тендери; в) компанія не виграє жодного з тендерів?

Завдання 2. Радіолокаційна система, що складається з двох незалежних станцій, призначена для виявлення літаків-порушників повітряного простору України на певній ділянці кордону. Імовірність безвідмовної роботи першої станції дорівнює 0,95, а другої – 0,85. Знайти ймовірність того, що система буде в робочому стані, якщо для цього потрібно, щоб працювала хоча б одна радіолокаційна станція.

Завдання 3. Відомо, що в деякому регіоні 40 % компаній мають у штаті юриста і 80 % – економіста. Вважаючи, що ці дві події незалежні, знайти ймовірність того, що деяка фірма з даного регіону має в штаті юриста і економіста.

Завдання 4. Відомо, що кількість одиниць товару в деякій партії виражається двозначним числом. Знайти ймовірність того, весь товар партії можна розподілити порівну: а) на 2 або на 3 магазини; б) на 2 і на 3 магазини.

Завдання 5. Магазин побутової техніки отримав від виробника 2 тостери та 3 електрочайники. Ймовірність продажу протягом тижня становить 0,7 для тостера та 0,8 для електрочайника. Знайти ймовірність того, що протягом тижня буде продано усі отримані тостери та електрочайники.

Завдання 6. До складального цеху авіазаводу надійшло 5 авіадеталей зарубіжних виробників і 7 авіадеталей вітчизняних виробників. Послідовно відібрано дві авіадеталі. Знайти ймовірність того, що друга авіадеталь виготовлена вітчизняним виробником, якщо відомо, що перша деталь виготовлена вітчизняним виробником.

Завдання 7. Протягом доби у аеропорту виконується 20 рейсів, причому 16 з них – власним літаковим парком. Знайти ймовірність того, що серед вибраних навмання трьох рейсів виявиться принаймні один, що виконується власним літаковим парком.

Завдання 8. Флот деякої авіакомпанії складається з десяти літаків Boeing та шести літаків Embraer. Для техогляду випадковим чином вибирають два літаки. Визначити ймовірність того, що це літаки одного виробника.

Завдання 9. Через метеорологічні умови літак змушений приземлятися у віддаленому аеропорту, маючи запас пального лише на 3 заходи на посадку. Ймовірність посадки літака за першого заходу дорівнює 0,8, за другого – 0,95, за третього – 0,995. Знайти ймовірність вдалої посадки літака.

Завдання 10. Ймовірність реалізації протягом певного терміну принаймні однієї одиниці товару з чотирьох наявних дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність реалізації однієї одиниці товару.

Відповіді: 1) а) 0,994; б) 0,398; в) 0,006; 2) 0,993; 3) 0,32; 4) а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{6}$; 5) 0,251; 6) $\frac{6}{11}$; 7) 0,996; 8) 0,5; 9) 0,99995; 10) 0,8.

Тема 4. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛИ БАЙЄСА

План

1. Формула повної ймовірності.
2. Формули Байєса.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6]; [7]; [8]; [9]; [10]; [11]; [12].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 4 студент повинен ***знати:*** формулу повної ймовірності, формули Байєса; умови застосування формул Байєса; ***уміти:*** знаходити ймовірності випадкових подій, використовуючи формулу повної ймовірності та умовні ймовірності гіпотез, використовуючи формули Байєса.

Основні теоретичні відомості

Алгебра подій

Теореми додавання

Теореми множення

Формула повної ймовірності

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+...+P(H_n)P_{H_n}(A)$$

Формули Байєса $P_A(H_i)=\dfrac{P(H_i)P_{H_1}(A)}{P(A)}, i=1,2,...,n$

Приклади розв’язування типових задач

Приклад 1. Пасажир планує придбати авіаквиток на рейс з Києва до Лондона на певну дату в одній з двох обраних ним авіакомпаній. Ймовірність придбання пасажиром квитка на рейс першої авіакомпанії з Києва до Лондона дорівнює 0,6, другої – 0,4. Ймовірність того, що покупець встигне скористатися промокодом (купоном на знижку) першої авіакомпанії складає 0,7, а другої – 0,8. Знайти ймовірність того, що пасажир придбає авіаквиток на рейс з Києва до Лондона на певну дату зі знижкою по промокоду авіакомпанії.

Розв'язання

Випробування	*Покупка авіаквитка пасажиром на рейс з Києва до Лондона*
Подія A	*Пасажир купив авіаквиток на рейс з Києва до Лондона на певну дату зі знижкою по промокоду авіакомпанії.*
Гіпотеза H_1	*Пасажир купив квиток першої авіакомпанії*
Гіпотеза H_2	*Пасажир купив квиток другої авіакомпанії*
Ймовірність гіпотези H_1	$P(H_1)=0,6$
Ймовірність гіпотези H_2	$P(H_2)=0,4$
Умовна ймовірність	$P_{H_1}(A)=0,7$
Умовна ймовірність	$P_{H_2}(A)=0,8$
За формулою повної ймовірності	$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)=$ $=0,6\cdot 0,7+0,4\cdot 0,8$
Відповідь:	$P(A)=0,66$

Приклад 2. Відомо, що пасажир з однаковою ймовірністю може купити авіаквиток на рейс з Києва до Парижа в одній з трьох обраних ним авіакомпаній-лоукостерів. Ймовірність затримки через технічну несправність рейсу першої авіакомпанії становить 0,01, другої –0,02 , третьої – 0,03 відповідно. Знайти ймовірність того, що рейс обраної пасажиром авіакомпанії з Києва до Парижа буде виконано без затримки (вчасно).

Розв'язання

Випробування	*Покупка пасажиром авіаквитка* з *Києва до Парижа*
Подія *A*	*Рейс обраної пасажиром авіакомпанії з Києва до Парижа буде виконано без затримки (вчасно).*
Гіпотеза H_1	*Пасажир придбав квиток на рейс 1-шої компанії*
Гіпотеза H_2	*Пасажир придбав квиток на рейс 2-ої компанії*
Гіпотеза H_3	*Пасажир придбав квиток на рейс 3-ої компанії*
Ймовірність гіпотези H_1	$P(H_1)=\frac{1}{3}$
Ймовірність гіпотези H_2	$P(H_2)=\frac{1}{3}$
Ймовірність гіпотези H_3	$P(H_3)=\frac{1}{3}$
Умовна ймовірність	$P_{H_1}(A)=1-0,01=0,99$
Умовна ймовірність	$P_{H_2}(A)=1-0,02=0,98$
Умовна ймовірність	$P_{H_3}(A)=1-0,03=0,97$
За формулою повної ймовірності	$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+$ $+P(H_3)P_{H_3}(A)=\frac{1}{3}\cdot 0,99+\frac{1}{3}\cdot 0,98+\frac{1}{3}\cdot 0,97=0,98$
Відповідь:	$P(A)=0,98$

Приклад 3. Кількість авіаквитків до економ та бізнес-класу літака на рейс з Києва до Мадрида складаюсь 80% та 20% загальної кількості авіаквитків на рейс відповідно. Ймовірність запізнення на рейс пасажира економ-класу становить 0,015, а бізнес-класу – 0,01. Знайти ймовірність того, що пасажир, який запізнився на рейс з Києва до Мадрида , придбав авіаквиток до бізнес-класу літака.

Розв'язання

Випробування	*Пасажир подорожує*

Подія A	*Пасажир запізнився на рейс з Києва до Мадрида*
Гіпотеза H_1	*Пасажир придбав квиток до економ-класу*
Гіпотеза H_2	*Пасажир придбав квиток до бізнес-класу*
Ймовірність гіпотези H_1	$P(H_1) = 0{,}8$
Ймовірність гіпотези H_2	$P(H_2) = 0{,}2$
Умовна ймовірність	$P_{H_1}(A) = 0{,}015$
Умовна ймовірність	$P_{H_2}(A) = 0{,}01$
За формулою повної ймовірності	$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) =$ $= 0{,}8 \cdot 0{,}015 + 0{,}2 \cdot 0{,}01 = 0{,}014$
За формулою Байєса	$P_A(H_2) = \dfrac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}002}{0{,}014} \approx 0{,}014$
Відповідь:	$P_A(H_2) = 0{,}014$

Приклад 4. У групі з 24 чоловік, що здають екзамени в авіаційний університет, було: 3 учні, які в школі відмінно вчилися і вони знали відповіді на всі питання; 12 учнів, що закінчили школу без трійок, вони знали відповіді на 90% питань; 6 абітурієнтів, що закінчили технікуми і могли відповісти на 80% питань; і троє, що вчилися у вечірніх школах, вони могли дати відповіді на 60% питань. Один з абітурієнтів відповів на всі три питання. Яка ймовірність того, що: а) відповів відмінник з школи; б) відповів учень, що закінчив технікум ?

Розв'язання

Випробування	*Абітурієнт вілповідає на вступному екзамені*
Подія A	*Абітурієнтів відповів на всі три питання*
Гіпотеза H_1	*Учень навчався в школі відмінно*
Гіпотеза H_2	*Учень закінчив школу без трійок*

Гіпотеза H_3	*Учень закінчив технікум*
Гіпотеза H_4	*Учень закінчив вечірню школу*
Ймовірність гіпотези H_1	$P(H_1) = \frac{3}{24}$
Ймовірність гіпотези H_2	$P(H_2) = \frac{12}{24}$
Ймовірність гіпотези H_3	$P(H_3) = \frac{6}{24}$
Ймовірність гіпотези H_4	$P(H_4) = \frac{3}{24}$
Умовна ймовірність	$P_{H_1}(A) = 1$
Умовна ймовірність	$P_{H_2}(A) = 0,9$
Умовна ймовірність	$P_{H_3}(A) = 0,8$
Умовна ймовірність	$P_{H_4}(A) = 0,6$
За формулою повної ймовірності	$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) +$ $+P(H_3)P_{H_3}(A) + P(H_4)P_{H_4}(A) =$ $= \frac{3}{24}\cdot 1 + \frac{12}{24}\cdot 0,9 + \frac{6}{24}\cdot 0,8 + \frac{3}{24}\cdot 0,6 = 0,85$
За формулою Байєса	$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{24}\cdot 1}{0,85} \approx 0,15$
За формулою Байєса	$P_A(H_3) = \frac{P(H_3)P_{H_3}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{24}\cdot 0,8}{0,85} \approx 0,24$
Відповідь:	*а)* $0,15$ *б)* $0,24$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається гіпотезою?

2. Записати формулу повної ймовірності.

3. Якими властивостями володіють гіпотези у формулі повної ймовірності?

4. Записати формули Байєса.

5. При виконанні яких умов застосовують формули Байєса?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. У першому ящику міститься 20 авіаційних деталей, з них 15 стандартних: у другому — 30 деталей, з них 24 стандартних; а в третьому — 10 деталей, з них 6 стандартних. Навмання взята деталь з випадковим чином вибраного ящика виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що авіаційна деталь взята: а) з першого ящика; б) з другого ящика; в) з третього ящика.

Завдання 2. За умовою приклада 1 відомо, що пасажир купив авіаквиток на рейс з Києва до Лондона на певну дату. Квиток на рейс якої з авіакомпаній найімовірніше купив пасажир?

Завдання 3. За умовою приклада 2 відомо, що рейс, яким скористався пасажир відлетів з Києва до Парижу зі затримкою. Квиток на рейс якої з авіакомпаній найімовірніше купив пасажир?

Завдання 4. У цеху три типи автоматичних верстатів виготовляють однакові авіаційні деталі. Верстатів першого типу 5 штук, другого — 3 і третього — 2. Продуктивність їх однакова, але якість роботи різна. Відомо, що верстати першого типу випускають 94% деталей відмінної якості, другого — 90% і третього — 95%. Взята випадковим чином деталь виявилася відмінної якості. Знайти ймовірність того, що ця авіаційна деталь виготовлена на верстаті: а) першого типу; б) першого або третього типів.

Завдання 5. Через перешкоди система виявлення літака може дати помилкові дані про наявність цілі з ймовірністю 0,05, а за наявності цілі система виявляє її з йовірністю 0,9. Ймовірність появи літака в зоні роботи системи дорівнює 0,25. Надійшов сигнал про наявність цілі. Яка ймовірність помилки?

Завдання 6. Уразливими місцями військового літака є паливні баки, силова установка, система керування. Ймовірність влучення окремого снаряда в ці місця дорівнює 0,2; 0,55; 0,25 відповідно. При влученні снаряда в паливні баки літак може бути знищений з імовірністю 0,7; при влученні в силову установку — 0,4; при влученні в систему керування — 0,5. Знайти ймовірність знищення літака одним снарядом.

Завдання 7. До центру статистичних досліджень надходить інформація з трьох пунктів: з першого—50%, з другого—30%, з третього—20% усієї авіа логістичної інформації. Ймовірність допущення оцінки при обробці статистичних даних у першому пункті дорівнює 0,1, у другому—0,05, у третьому—0,15. Яка ймовірність того, що отримана центром у даний момент часу інформація цілком правильна?

Завдання 8. Два економісти заповнюють документи, які складають у спільну папку. Ймовірність зробити помилку для першого економіста дорівнює 0,1, а для другого —0,2. Перший економіст заповнив 40 документів, а другий—60. Під час перевірки навмання взятий із папки документ виявився з помилкою. Знайти ймовірність того, що його склав перший економіст.

Завдання 9. Фірма планує випускати новий товар на ринок. Підраховано, що ймовірність доброго збуту продукції на ринок дорівнює 0,6, поганого—0,4. Компанія проведе маркетингове дослідження, ймовірність правильності якого 0,8. Як змінюються початкові ймовірності рівня реалізації, якщо це дослідження передбачає поганий збут?

Завдання 10. Інвестор вкладає гроші в акції великого ризику, в акції сприйнятливого ризику та безризикові акції в пропорціях 10, 30 і 60%. Ймовірність отримання прибутку від цих акцій складає 0,6; 0,75; 0,9 відповідно. Знайти: а) ймовірність того, що інвестор отримав прибуток; б) якщо інвестор отримав прибуток, то яка ймовірність того, що він отриманий від безризикових акцій?

Відповіді: 1) 2) 3) 4) 5) 0,143; 6) 0,305; 7) 0,905; 8) 0,25; 9) 0,2727; 0,7273; 10) а) 0,825; б)0,6545.

Тема 5. ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

План

1. Формула Бернуллі.
2. Найвірогідніше число «успіхів» у схемі Бернуллі.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6]; [7]; [8]; [9]; [10]; [11]; [12].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 5 студент повинен ***знати:*** означення випробувань Бернуллі, формулу Бернуллі та умови її застосування, означення найвірогіднішого числа «успіхів» у цих випробуваннях, формулу для його обчислення; ***уміти:*** знаходити ймовірність настання події A k разів у n випробуваннях та найвірогідніше число її появи.

Основні теоретичні відомості

Випробування Бернуллі (схема Бернуллі) –
n повторних, незалежних випробувань
з можливими наслідками A і $\overline{A}$
($P(A)=p, P(\overline{A})=1-p=q$), $(0<p<1)$

Формула Бернуллі
(ймовірність настання події A
k разів у n випробуваннях)

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k)=1$$

Найвірогідніше число «успіхів» k_0
(найвірогідніша кількість появ події A у n випробуваннях)

$$np-q \le k_0 \le np+p$$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. За статистичними даними митного поста аеропорту 20 % усіх осіб, що повертаються з-за кордону, не декларують увесь товар, що має бути оподаткований. Яка ймовірність того, що з випадково відібраних шести осіб, які повернулись з-за кордону, не задекларували весь товар:

а) лише одна особа?

б) не менше двох осіб?

Розв'язання

Випробування, $n=6$	*Перевірка правильності заповнення пасажиром декларації*
Подія A	*Пасажир не задекларував увесь товар, що оподатковується*
Протилежна подія $\bar{A}$	*Пасажир задекларував увесь товар*
Ймовірність події A, p	$P(A)=p=0,2$
Ймовірність події $\bar{A}$, $q=1-p$	$P(\bar{A})=q=1-0,2=0,8$
а) За формулою Бернуллі $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $k=1$	$P_6(1)=C_6^1 p\ q^6=\dfrac{6!}{1!5!}(0,2)\cdot(0,8)^5=$ $=1,2\cdot 0,8^5=0,393$
б) $P_6(k\ge 2)=1-P_6(k<2)$, $P_6(k<2)=P_6(0)+P_6(1)$, $P_6(k\ge 2)=1-(P_6(0)+P_6(1))$	$P_6(0)=C_6^0 p^0 q^6=\dfrac{6!}{0!6!}(0,2)^0\cdot(0,8)^6=$ $=0,8^6=0,262$, $P_6(k\ge 2)=1-(0,262+0,393)=0,345$

Приклад 2. У терміналі A міжнародного аеропорту облаштовано 14 стійок для реєстрації пасажирів. Ймовірність відсутності черги на реєстрацію біля кожної з них в деякий момент часу дорівнює 0,3. Знайти найвірогіднішу кількість вільних стійок для реєстрації в даний момент та ймовірність цієї кількості.

Розв'язання

Випробування, $n=14$	*Перевірка наявності черги на реєстрацію біля стійки*
Подія A	*Стійка вільна (черга відсутня)*
Протилежна подія $\bar{A}$	*Біля стійки є черга*
Ймовірність події A, p	$P(A)=p=0,3$
Ймовірність події $\bar{A}$, $q=1-p$	$P(\bar{A})=q=1-0,3=0,7$
За формулою найвірогіднішого числа «успіхів» k_0 $np-q\le k_0\le np+p$	$14\cdot0,3-0,7\le k_0\le14\cdot0,3+0,3$ $3,5\le k_0\le4,5,\quad k_0=4$
За формулою Бернуллі $P_n\left(k\right)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $k=4$	$P_{14}(4)=C_{14}^4 p^4 q^{10}=\dfrac{14!}{4!10!}(0,2)^4\cdot(0,8)^{10}=$ $=\dfrac{11\cdot12\cdot13\cdot14}{1\cdot2\cdot3\cdot4}(0,2)^4\cdot(0,8)^{10}=0,172$

Приклад 3. За статистичними даними податкової інспекції кожен шостий підприємець допускає помилки при оформленні податкової декларації. Працівник інспекції перевірив 35 поданих підприємцями декларацій. Скільки підприємців найвірогідніше припустились помилок у своїх деклараціях?

Розв'язання

Випробування, $n=35$	*Перевірка наявності помилок у декларації*
Подія A	*Декларацію заповнено з помилками*
Протилежна подія $\bar{A}$	*Декларацію заповнено без помилок*
Ймовірність події A, p	$P(A)=p=\dfrac{1}{6}$
Ймовірність події $\bar{A}$, $q=1-p$	$P(\bar{A})=q=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$
За формулою найвірогіднішого числа «успіхів» k_0	$35\cdot\dfrac{1}{6}-\dfrac{5}{6}\le k_0\le35\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}$ $5\le k_0\le6$, $k_0=5$ або $k_0=6$

$np - q \le k_0 \le np + p$	

Приклад 4. Ймовірність опадів впродовж дня у грудні над територією деякого аеропорту є величиною сталою протягом усього місяця. Відомо, що найвірогідніша кількість днів з опадами у грудні дорівнює 14. Знайти ймовірність випадання опадів впродовж дня у грудні над територією аеропорту.

Розв'язання

Випробування, $n = 31$	*Перевірка наявності опадів впродовж дня над територією аеропорту*
Подія A	*Наявність опадів протягом дня*
Протилежна подія $\overline{A}$	*Відсутність опадів*
Найвірогідніше число «успіхів» k_0	$k_0 = 14$
За формулою найвірогіднішого числа «успіхів» k_0 $np - q \le k_0 \le np + p$	$31p - 1 + p \le 14 \le 31p + p,$ $32p - 1 \le 14 \le 32p,$ $\begin{cases} 32p - 1 \le 14, \\ 32p \ge 14; \end{cases} \begin{cases} 32p \le 15, \\ 32p \ge 14; \end{cases} \begin{cases} p \le 0,47, \\ p \ge 0,44 \end{cases}$
Ймовірність випадання опадів впродовж дня у грудні над територією аеропорту	$0,56 \le p \le 0,6$

Запитання для самоперевірки

1. Які випробування називаються незалежними? випробуваннями Бернуллі?

2. Записати формулу Бернуллі для знаходження ймовірності появи k разів деякої події у n випробуваннях Бернуллі.

3. Записати формулу для знаходження найвірогіднішого числа появи деякої події у n випробуваннях Бернуллі.

4. Для якої кількості випробувань доцільно використовувати формулу Бернуллі?

5. Чому дорівнює сума ймовірностей $\sum_{k=0}^{n} P_n(k)$?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. У зону аеродрому протягом години прибуває 10 літаків. Імовірність стандартного заходу на посадку для кожного літака становить 0,8. Знайти ймовірність того, що втручання диспетчера для посадки знадобиться: а) двом літакам; б) хоча б одному літаку; в) не менше, ніж двом літакам. Знайти найвірогіднішу кількість літаків, яким знадобиться втручання диспетчера для посадки.

Завдання 2. Контрольна робота з теорії ймовірностей містить 5 завдань. Імовірність правильного виконання кожного з цих завдань деяким студентом дорівнює 0,8. Щоб викладач зарахував контрольну роботу, студентові необхідно виконати не менш ніж три завдання. Знайти ймовірність того, що студенту зарахують контрольну роботу.

Завдання 3. Кількість помилок у рахунках торгових підприємств становить 5 %. Аудитор перевіряє 10 навмання вибраних рахунків. Якщо не виявиться жодної помилки, то рахунки підприємства далі не перевірятимуть. Яка ймовірність того, що в 10 рахунках підприємства: а) не буде жодної помилки; б) буде 3 помилки; в) буде 3 - 5 помилок?

Завдання 4. Інвестор укладає договір на фондовій біржі. Ймовірність укладання однієї угоди за день дорівнює 0,7. Виходячи із припущення, що протягом 10 робочих днів укладається не більше однієї угоди за день, знайти ймовірності таких подій: а) буде укладено 7 угод; б) буде укладено не менше 8 угод.

Завдання 5. При деякому технологічному процесі 90% всієї продукції – вищого сорту. Знайти найвірогіднішу кількість виробів вищого сорту в партії з 200 виробів.

Завдання 6. У аеропорту є 12 перонних автобусів для перевезення пасажирів до літаків. Імовірність технічних неполадок для кожного автобуса у середньому дорівнює 0,15. Знайти ймовірність того, що перевезення пасажирів до літаків здійснюватиметься в нормальному режимі, якщо для цього потрібно, аби одночасно працювало не менш як 9 перонних автобусів.

Завдання 7. Податковий інспектор отримав для перевірки 10 декларацій про доходи платників податку. За статистикою 40%

таких декларацій містять похибки. Яка ймовірність того, що лише 4 з отриманих декларацій містять похибки?

Завдання 8. Агентство з нерухомості отримує в середньому 40% звернень з приводу аренди квартир. Навмання відібрано 8 звернень. Яка ймовірність, що серед них з приводу аренди квартири буде: а) три звернення; б) жодного звернення?

Завдання 9. Товарознавець відібрав для перевірки 6 виробів. Імовірність того, що виріб буде визнано придатним до продажу становить 0,75. Яка ймовірність, що хоча б один виріб буде визнано придатним до продажу? Знайти найвірогідніше число придатних виробів і обчислити ймовірність цього числа.

Завдання 10. На біржі виставлено 10 цінних паперів. Імовірність того, що вони подорожчають протягом одного дня, дорівнює 0,6. Знайти ймовірності того, що подорожчає: а) рівно 5 паперів; б) не більше, ніж 4 папери; в) 3-5 паперів.

Відповіді: 1) а) 0,302; б) 0,893; в) 0,624; $k_0 = 2$; 2) 0,842; 3) а) 0,01; б) 0,0011; в) 001146; 4) а) 0,267; б) 0,38; 5) 180; 6) 0,687; 7) 0,251; 8) а) 0,279; б) 0,017; 9) 0,9998; 5; 0,35596; 10) а) 0,2; б) 0,166; в) 0,3548.

Тема 6. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ВИПРОБУВАНЬ БЕРНУЛЛІ

План

1. Локальна та інтегральна теореми Муавра - Лапласа.
2. Теорема Пуассона.
3. Ймовірність відхилення відносної частоти від сталої ймовірності.
4. Найпростіший потік подій.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6]; [7]; [8]; [9]; [10]; [11]; [12].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 6 студент повинен ***знати:*** локальну та інтегральну теореми Муавра - Лапласа, властивості функцій Гауса та Лапласа, теорему Пуассона, формулу знаходження ймовірності відхилення відносної частоти від сталої ймовірності, поняття та формулу найпростішого потоку подій; ***уміти:*** знаходити наближене значення ймовірності за теоремами Муавра - Лапласа і Пуассона, ймовірність відхилення відносної частоти від сталої ймовірності та ймовірність появи події A k разів за час t для найпростішого потоку подій.

Основні теоретичні відомості

Випробування Бернуллі –
n повторних, незалежних випробувань
з можливими наслідками A і $\overline{A}$
($P(A) = p, P(\overline{A}) = 1 - p = q$), $(0 < p < 1)$

↓

кількість випробувань n – велика
($n \to \infty$)

↓

граничні теореми випробувань Бернуллі
(асимптотичні формули)

Граничні теореми випробувань Бернуллі

$npq < 10$

теореми

Муавра - Лапласа

$npq < 10$

теорема Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ \lambda = np$$

локальна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x);$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

інтегральна

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x');$$

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \ x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Функція Гауса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}};$$

табульована (дод. 1);

1) $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

2) $\varphi(x) \approx 0$, якщо $x > 4$

Функція Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz;$$

табульована (дод. 2);

1) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

2) $\Phi(x) \approx 0,5$, якщо $x > 5$

Наближене значення ймовірності того, що відхилення відносної частоти $\frac{m}{n}$ від імовірності p за абсолютною величиною не перевищує заданого числа $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Ймовірність появи події A k разів за час t для найпростішого (пуассонівського) потоку подій:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

де λ – інтенсивність потоку (середнє число подій, які з'являються за одиницю часу)

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Авіакомпанія виконує протягом місяця 400 рейсів. Ймовірність повного комерційного завантаження кожного рейсу становить 82 %. Яка ймовірність того, що протягом місяця з повним комерційним завантаженням буде виконано:

а) 328 рейсів?

б) від 300 до 355 рейсів?

Розв'язання

Випробування, $n = 400$	*Перевірка наявності повного комерційного завантаження рейсу*
Подія A	*Комерційне завантаження рейсу повне*
Протилежна подія $\bar{A}$	*Комерційне завантаження рейсу неповне*
Ймовірність події A, p	$P(A) = p = 0,82$
Ймовірність події $\bar{A}$, $q = 1 - p$	$P(\bar{A}) = q = 1 - 0,82 = 0,18$
а) За локальною теоремою Муавра - Лапласа: $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$; $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $k = 328$	$x = \frac{328 - 400 \cdot 0,82}{\sqrt{400 \cdot 0,82 \cdot 0,18}} = 0$; $\varphi(0) = 0,3989$ (дод.1); $P_{400}(328) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,82 \cdot 0,18}} \cdot 0,3989 =$ $= \frac{0,3989}{7,68} = 0,052$

б) За інтегральною теоремою Муавра - Лапласа: $P_n\left(k_1 \le k \le k_2\right) \approx$ $\approx \Phi\left(x''\right) - \Phi\left(x'\right);$ $x' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}};$ $x'' = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}};$ $k_1 = 300,\ k_2 = 355$	$x' = \dfrac{300 - 400 \cdot 0,82}{\sqrt{400 \cdot 0,82 \cdot 0,18}} = \dfrac{-28}{7,68} = -3,65;$ $x'' = \dfrac{355 - 400 \cdot 0,82}{\sqrt{400 \cdot 0,82 \cdot 0,18}} = \dfrac{27}{7,68} = 3,51;$ $\Phi\left(x'\right) = \Phi\left(-3,65\right) = -0,499\,84;$ $\Phi\left(x''\right) = \Phi\left(3,51\right) = 0,49977;$ (дод. 2) $P_{400}(300 \le k \le 355) \approx 0,499\,77 +$ $+0,49984 = 0,999\,61$

Приклад 2. Ймовірність браку під час виготовлення певного типу авіаційних деталей становить 0,001. Знайти ймовірність виявлення не менше двох бракованих деталей під час перевірки партії, що складається з 5 000 деталей.

Розв'язання

Випробування, $n = 5000$	*Перевірка деталі на наявність браку*
Подія A	*Деталь бракована*
Ймовірність події A, p	$P(A) = p = 0,001$
За теоремою Пуассона: $P_n\left(k\right) \approx \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ \lambda = np$	$\lambda = np = 5\,000 \cdot 0,001 = 5;$ $P_{5\,000}(k \ge 2) = 1 - P_{5\,000}(0) - P_{5\,000}(1) \approx$ $\approx 1 - e^{-5} - 5e^{-5} = 1 - 0,00674 -$ $-0,03369 = 0,95957$

Приклад 3. В осінньо-зимовий період регулярність польотів становить 80%. На грудень було заплановано 625 рейсів. Знайти ймовірність того, що відносна частота регулярності польотів у грудні відрізняється від ймовірності за модулем не більше ніж на 0,04.

Розв'язання

Випробування, $n = 625$	*Перевірка рейсу на дотримання графіка*
Подія A	*Рейс виконано за графіком*
Протилежна подія $\bar{A}$	*Рейс виконано з порушенням графіка або відмінено*

Ймовірність події A, p	$P(A)=p=\dfrac{80\%}{100\%}=0{,}8$
Ймовірність події $\bar{A}$, $q=1-p$	$P(\bar{A})=q=1-0{,}8=0{,}2$
За формулою ймовірності відхилення відносної частоти події від її імовірності: $P\left(\left\|\dfrac{m}{n}-p\right\|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)$; $\varepsilon=0{,}04$	$P\left(\left\|\dfrac{m}{625}-0{,}8\right\|\le 0{,}04\right)\approx$ $\approx 2\Phi\left(0{,}04\cdot\sqrt{\dfrac{625}{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=$ $=2\Phi(2{,}5)=2\cdot 0{,}4938=0{,}9876$

Приклад 4. Бюро кредитних історій отримує від банків в середньому 4 запити протягом 1 с. Вважаючи потік запитів найпростішим, обчислити ймовірність того, що за 2 с бюро отримає:

а) 5 запитів;

б) від 2 до 4 запитів.

Розв'язання

Подія A	*Надходження запиту до бюро*
Випробування	*Підрахунок кількості запитів, що надійшли протягом 2 с*
За формулою для найпростішого потоку подій $P_t(k)=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$; $t=2$ с, $\lambda=4$ с$^{-1}$; а) $k=5$; б) $2\le k\le 4$	$\lambda t = 2\cdot 4$ с$^{-1}\cdot$ с $=8$; а) $P_2(5)=\dfrac{8^5}{5!}e^{-8}=0{,}092$ б) $P_2(2\le k\le 4)=P_2(2)+P_2(3)+$ $+P_2(4)=\dfrac{8^2}{2!}e^{-8}+\dfrac{8^3}{3!}e^{-8}+\dfrac{8^4}{4!}e^{-8}=$ $=\left(32+\dfrac{256}{3}+\dfrac{512}{3}\right)\cdot e^{-8}=0{,}097$

Запитання для самоперевірки

1. Для якої кількості випробувань Бернуллі доцільно використовувати граничні теореми?

2. Сформулювати локальну та інтегральну теореми Муавра - Лапласа, вказати умови їх застосування.

3. Навести формули та властивості функцій Гауса та Лапласа.

4. Сформулювати теорему Пуассона, вказати умови її застосування.

5. Записати формулу знаходження ймовірності відхилення відносної частоти від сталої ймовірності.

6. Що називається потоком подій? найпростішим (пуассонівським) потоком подій?

7. Записати формулу знаходження ймовірності появи події A k разів за час t для найпростішого потоку подій.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Імовірність запізнення рейсу у деякому аеропорту дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що з трьохсот рейсів 75 запізниться?

Завдання 2. Рекламну листівку надруковано тиражем 90000 примірників. Ймовірність типографського браку примірника листівки дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має 5 бракованих листівок.

Завдання 3. За статистичними даними авіаційної каси 10% клієнтів замовляють квитки до аеропорту *N*. Знайти ймовірність того, що зі 100 клієнтів, що звернулись в авіакасу, замовлять квиток до аеропорту *N*: а) менше 15 осіб; б) 5 - 12 осіб; в) більше 20 осіб.

Завдання 4. Авіакомпанія має 100 літаків. Імовірність готовності до польоту для кожного літака дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що готовими до польоту буде більше половини літаків.

Завдання 5. Випадковим чином з партії відібрано 300 авіадеталей. Імовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед відібраних авіадеталей відносна частота появи нестандартної деталі відхилиться від імовірності 0,2 за абсолютною величиною не більше ніж на 0,01.

Завдання 6. Середня кількість звернень, що надходять до довідкової служби аеропорту кожної хвилини, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що протягом двох хвилин надійде 5 звернень.

Завдання 7. Радіоприлад містить 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного, причому кожний може вийти з ладу під час роботи приладу з імовірністю 0,002. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: а) під час роботи приладу з ладу вийдуть 3 мікроелементи; б) від трьох до шести.

Завдання 8. Відомо, що дрібні платежі (до 5 тис. грн.) складають 75% усіх транзакцій у системі електронних платежів. Знайти ймовірність, що з чотирьохсот вибраних навмання платежів дрібними виявиться: а) 290 платежів; б) 320 платежів.

Завдання 9. Відомо, що під час авіаперевезення певна продукція може бути пошкоджена з імовірністю 0,001. Знайти ймовірність, що при авіаперевезенні партії з 3000 одиниць даної продукції буде пошкоджено хоча б одна одиниця.

Завдання 10. У середньому до авіакаси звертаються з приводу придбання квитків 60 осіб за 1 год. Ураховуючи, що такі особи утворюють найпростіший потік, обчислити ймовірність того, що за 3 хв до каси надійдуть: а) 3 пасажири; б) не більш як 3.

Відповіді: 1) 0,053; 2) 0,0607; 3) а) 0,953; б) 0,7; в) 0,00048; 4) 0,99998; 5) 0,328; 6) 0,16; 7) а) 0,1804; б) 0,5213; 8) а) 0,0237; б) 0,0033; 9) 0,9502; 10) а) 0,224; б) 0,647.

ДОДАТКИ

Додаток 1

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	39890	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2703	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0001
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $\Phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{z^{2}}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,47	0,1808	0,94	0,3264	1,41	0,4207
0,01	0,0040	0,48	0,1844	0,95	0,3289	1,42	0,4222
0,02	0,0080	0,49	0,1879	0,96	0,3315	1,43	0,4236
0,03	0,0120	0,50	0,1915	0,97	0,3340	1,44	0,4251
0,04	0,0160	0,51	0,1950	0,98	0,3365	1,45	0,4265
0,05	0,0199	0,52	0,1985	0,99	0,3389	1,46	0,4279
0,06	0,0239	0,53	0,2019	1,00	0,3413	1,47	0,4292
0,07	0,0279	0,54	0,2054	1,01	0,3438	1,48	0,4306
0,08	0,0319	0,55	0,2088	1,02	0,3461	1,49	0,4319
0,09	0,0359	0,56	0,2123	1,03	0,3485	1,50	0,4332
0,10	0,0398	0,57	0,2157	1,04	0,3508	1,51	0,4345
0,11	0,0438	0,58	0,2190	1,05	0,3531	1,52	0,4357
0,12	0,0478	0,59	0,2224	1,06	0,3554	1,53	0,4370
0,13	0,0517	0,60	0,2257	1,07	0,3577	1,54	0,4382
0,14	0,0557	0,61	0,2291	1,08	0,3599	1,55	0,4394
0,15	0,0596	0,62	0,2224	1,09	0,3621	1,56	0,4406
0,16	0,0636	0,63	0,2357	1,10	0,3643	1,57	0,4418
0,17	0,0675	0,64	0,2389	1,11	0,3665	1,58	0,4429
0,18	0,0714	0,65	0,2422	1,12	0,3686	1,59	0,4441
0,19	0,0753	0,66	0,2454	1,13	0,3708	1,60	0,4452
0,20	0,0793	0,67	0,2486	1,14	0,3729	1,57	0,4418
0,21	0,0832	0,68	0,2517	1,15	0,3749	1,58	0,4429
0,22	0,0871	0,69	0,2549	1,16	0,3770	1,59	0,4441
0,23	0,0910	0,70	0,2580	1,17	0,3790	1,60	0,4452
0,24	0,0948	0,71	0,2611	1,18	0,3810	1,61	0,4463
0,25	0,0987	0,72	0,2642	1,19	0,3830	1,62	0,4474
0,26	0,1026	0,73	0,2673	1,20	0,3849	1,63	0,4484
0,27	0,1064	0,74	0,2703	1,21	0,3869	1,64	0,4495
0,28	0,1103	0,75	0,2734	1,22	0,3883	1,65	0,4505
0,29	0,1141	0,76	0,2764	1,23	0,3907	1,66	0,4515
0,30	0,1179	0,77	0,2794	1,24	0,3925	1,67	0,4525
0,31	0,1217	0,78	0,2823	1,25	0,3944	1,68	0,4535
0,32	0,1255	0,79	0,2852	1,26	0,3962	1,69	0,4545
0,33	0,1293	0,80	0,2881	1,27	0,3980	1,70	0,4554
0,34	0,1331	0,81	0,2910	1,28	0,3997	1,71	0,4564
0,35	0,1368	0,82	0,2939	1,29	0,4015	1,72	0,4573
0,36	0,1406	0,83	0,2967	1,30	0,4032	1,73	0,4582
0,37	0,1443	0,84	0,2995	1,31	0,4049	1,74	0,4591
0,38	0,1480	0,85	0,3023	1,32	0,4066	1,75	0,4599
0,39	0,1517	0,86	0,3051	1,33	0,4082	1,76	0,4608
0,40	0,1554	0,87	0,3078	1,34	0,4099	1,77	0,4616
0,41	0,1591	0,88	0,3106	1,35	0,4115	1,78	0,4625
0,42	0,1628	0,89	0,3133	1,36	0,4131	1,79	0,4633
0,43	0,1664	0,90	0,3159	1,37	0,4147	1,80	0,4641
0,44	0,1700	0,91	0,3186	1,38	0,4162	1,81	0,4649
0,45	0,1736	0,92	0,3212	1,39	0,4177	1,82	0,4656
0,46	0,1772	0,93	0,3238	1,40	0,4192	1,83	0,4664

Закінчення дод. 2

x	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)
1,84	0,4671	2,06	0,4803	2,44	0,4927	2,82	0,4976
1,85	0,4678	2,08	0,4812	2,46	0,4931	2,84	0,4977
1,86	0,4686	2,10	0,4821	2,48	0,4934	2,86	0,4979
1,87	0,4693	2,12	0,4830	2,50	0,4938	2,88	0,4980
1,88	0,4699	2,14	0,4838	2,52	0,4941	2,90	0,4981
1,89	0,4706	2,16	0,4846	2,54	0,4945	2,92	0,4982
1,90	0,4713	2,18	0,4854	2,56	0,4948	2,94	0,4984
1,91	0,4719	2,20	0,4861	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,92	0,4726	2,22	0,4868	2,60	0,4953	3,00	0,49865
1,93	0,4732	2,24	0,4875	2,62	0,4956	3,20	0,49931
1,94	0,4738	2,26	0,4881	2,64	0,4959	3,40	0,49966
1,95	0,4744	2,28	0,4887	2,66	0,4961	3,60	0,499841
1,96	0,4750	2,30	0,4893	2,68	0,4963	3,80	0,499928
1,97	0,4756	2,32	0,4898	2,70	0,4965	4,00	0,499968
1,98	0,4761	2,34	0,4904	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,99	0,4767	2,36	0,4909	2,74	0,4969	5,00	0,499997
2,00	0,4772	2,38	0,4913	2,76	0,4971		
2,02	0,4783	2,40	0,4918	2,78	0,4973		
2,04	0,4793	2,42	0,4922	2,80	0,4974		

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для студентов вузов. – 9-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.

2. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. – 8-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003. – 405 с.

3. *Михайленко В. В.* Теорія ймовірностей і математична статистика: підручник / В. В. Михайленко, І. О. Ластівка. – К.: НАУ, 2013. – 564 с.

4. *Ластівка І.О., Мартиненко В.П., Паламарчук Ю.А., Шевченко І.В.* Вища математика. Модуль 8. Теорія ймовірностей. Випадкові події: Навч. посібник. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2006. – 108 с.

5. *Ластівка І.О., Паламарчук Ю.А.* Теорія ймовірностей та математична статистика: Практикум для студентів економічних спеціальностей. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2009. – 236 с.

6. *Жлуктенко В.І., Наконечний С.І.* Теорія ймовірностей і математична статистика. – Ч. 1. Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.

7. *Жильцов О.Б.* Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов; за ред. Г.О. Михаліна. К.: Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. – 336 с.

8. *Самойленко М.І., Кузнецов А.І., Костенко О.Б.* Теорія ймовірностей: Підручник – Харків: ХНАМГ, 2008. – 194 с.

9. *Барковський В. В.* Теорія ймовірностей та математична статистика / В. В. Барковський, Н. В. Барковська, О. К. Лопатін. – К.: ЦУЛ, 2002. – 448 с.

10. *Дорош А. К.* Теорія ймовірностей та математична статистика / А. К. Дорош, О. П. Коханівський. – К.: НТУУ «КПІ», 2006. – 268 с.

11. *Іванюта І. Д.* Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики / І. Д. Іванюта, В. І. Рибалка, І. А. Рудоміно-Дусятська. – К.: Слово, 2003. – 272 с.

12. *Каніовська І. Ю.* Теорія ймовірностей у прикладах і задачах / І. Ю. Каніовська. – К.: ІВЦ "Видавництво «Політехніка»", ТОВ "Фірма «Періодика»", 2004. – 156 с.

13. *Малютіна Т. І.* Вища математика для економістів. Ч. 4. Теорія ймовірностей і математична статистика: практикум: у 4 ч. / Т. І. Малютіна, К. А. Дахер ; Державний вищий навчальний заклад "Українська академія банківської справи Національного банку України". – Суми: ДВНЗ "УАБС НБУ", 2009. – 159 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ.

Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів
технічних та економічних спеціальностей

Укладачі: ЛАСТІВКА Іван Олексійович
КУДЗІНОВСЬКА Інна Павлівна
КРАВЧЕНКО Вікторія Валеріївна