МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Методичні рекомендації
до практичних занять
для студентів напряму 6.030601
«Менеджмент»

Київ 2009

УДК 519.85 (076.5)
ББК В 1873.4я7
М 34

Укладачі: І.О. Ластівка, О.С. Давидов

Рецензент: А.О. Антонова

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол №6/09 від 12.06.2009 р.)

І.О. Ластівка, О.С. Давидов

Математичне програмування: методичні рекомендації до практичних занять/ І.О. Ластівка, О.С. Давидов - К.: Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2009, - 82 с.

ISBN

У стислій формі подано основний теоретичний матеріал, наведено приклади розв' язання типових задач математичного програмування. У кінці кожного практичного заняття запропоновано запитання та завдання для самоперевірки і задачі з відповідями для самостійного розв'язання.

Для студентів усіх форм навчання напряму 6.030601 «Менеджмент».

УДК 519.85 (076.5)
ББК В 1873.4я7
М 34

ВСТУП

Матеріали розробки базуються на основних поняттях лінійної алгебри та аналітичної геометрії і можуть використовуватись, як викладачем так і студентом при опрацюванні на практичних заняттях тем «Математичного програмування» згідно з навчальною програмою, за якою дана дисципліна читається для студентів економічних спеціальностей.

В ній розглянуті різні форми задач лінійного програмування(Л.П.), геометрична інтерпретація та графічний метод розв39язання задач (Л.П.), симплекс–метод (С.–М.) та двоїстий (С.–М.) розв’язання задач(Л.П.). В розробці розглянуті також цілочисельні задачі (Л.П.)і методи їх розв’ячзання, задача про призначення

Кожне практичне заняття починається з ведення необхідної теорії, а потім приводяться розв’язаннятипових прикладів і задачі для самостійного розв’язання, які сприятимуть кращому розумінню та засвоєнню і застосуванню основних теоретичних положень.

Практичне заняття 1

МЕТОД ГАУССА. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

План

1. Суть методу Гаусса.
2. Зауваження, пов'язані з цим методом.
3. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Література: [1]; [2]; [3].

Методичні рекомендації

Мета заняття – навчитись розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), застосовуючи метод Гаусса.

Після виконання практичного заняття 1 студент повинен *уміти* розв'язувати СЛАР за методом Гаусса.

Метод Гаусса (метод виключення змінних) є універсальним і працює у випадку будь-якої системи. За цим методом не треба окремо досліджувати систему рівнянь на сумісність, оскільки остання система при перетвореннях дасть відповідь про сумісність. Розглянемо суть методу Гаусса на прикладі системи (3×3). Позначимо рівняння системи римськими числами, відповідно: I, II, III.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = в_1, & \text{I} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = в_2, & \text{II} \\ a_{31}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = в_3. & \text{III} \end{cases}$$

Починаємо з елемента a_{11} .

Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Якщо $a_{11} = 1$ – це випадок ідеальний, як наслідок, обчислення робимо в цілих числах. Поділимо на a_{11} рівняння перше і виключимо x_1 з другого і третього рівнянь. Тобто виконуємо такі операції:

$$\text{II} - \frac{\text{I}}{a_{11}} \cdot a_{21}; \quad \text{III} - \frac{\text{I}}{a_{11}} \cdot a_{31}.$$

У результаті таких перетворень дістанемо рівносильну систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = в_1, \quad \text{I} \\ \qquad a_{22}^*x_2 + a_{23}^*x_3 = в_2^*, \quad \text{II} \\ \qquad a_{32}^*x_2 + a_{33}^*x_3 = в_3^*. \quad \text{III} \end{cases}$$

Зірочка «$*$» над коефіцієнтами вказує на те, що коефіцієнти цієї системи після перетворень відрізняються від коефіцієнтів вихідної системи.

На другому кроці повторюємо процес виключення, але починаємо з рівняння II з елемента $a_{22}^* \neq 0$, перше рівняння залишається без зміни. Виконуємо таку операцію:

$$\text{III-}\frac{\text{II}}{a_{22}^*} \cdot a_{32}^* .$$

Отримаємо систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = в_1 \\ \qquad a_{22}^*x_2 + a_{23}^*x_3 = в_2^* \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 = \hat{в}_3. \end{cases}$$

Зауваження

1. За методом Гаусса, можемо отримати:

а) два однакові або пропорційні рядки, при цьому один з них опускається;

б) рядок нулів, включаючи праву частину, тоді він також опускається.

2. За методом Гаусса, завершуємо алгоритм:

а) якщо отримати рядок виду:

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = C\left(C = const\right)$$

(система розв'язань не має);

б) якщо на певному кроці неможливо зробити виключення змінної.

3. За методом Гаусса, можемо отримати:

а) вихідну систему, приведену до трикутного вигляду;

б) вихідну систему, приведену до трапеціадального вигляду.

У першому випадку робимо зворотний хід. З останнього рівняння обчислимо x_3 і підставимо його в друге. З одержаного визначимо x_2. Знайдені x_2 і x_3 підставимо в перше рівняння і визначимо x_1. У другому випадку розв'язок можна записати тільки в загальному вигляді. При цьому в лівій частині залишаємо змінні тих стовпчиків, які мають перші ненульові елементи рядків. Останні змінні переносимо вправо і вважаємо їх вільними.

Вільним елементам надаємо довільні значення і знаходимо розв'язки системи. Цих розв'язків можна записати безліч.
За методом Гаусса спочатку в прямому порядку вилучити невідомі під головною діагоналлю, а потім у зворотному, вилучити невідомі над головною діагоналлю, тим самим здійснюючи повне виключення невідомих.

Перетворення, які здійснюють при виконанні методу Гаусса, зручно виконувати з розширеною матрицею, що містить коефіцієнти всіх рівнянь, включаючи праву частину системи.

Приклад 1. Розв'язати систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, . \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Запишемо систему у вигляді розширеної матриці:

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \text{I - ðÿäî ê} \\ \text{II - ðÿäî ê} \\ \text{II² - ðÿäî ê.} \end{array} \end{array}$$

Спочатку отримаємо нулі нижче елемента $a_{11} = 2$. Для цього згідно алгоритму виконуємо такі дії:

$$\mathrm{I} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + \mathrm{II};\ \mathrm{I} \cdot \frac{1}{2} + \mathrm{III}.$$

Дістанемо систему у вигляді матриці:

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -13/2 & 5/2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 7/2 & 3 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III}. \end{array} \end{array}$$

Далі дістанемо нуль нижче елемента $a_{22} = -\dfrac{13}{2}$. Для цього виконаємо таку дію:

$$\text{II} \cdot \left(-\frac{1}{13}\right) + \text{III}.$$

Маємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -13/2 & 5/2 & -4 \\ 0 & 0 & 43/13 & 43/13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III.} \end{array}$$

В останній системі ми можемо отримати одиниці за головною діагоналлю, виконавши такі дії:

$$\text{I} \cdot \frac{1}{2};\ \text{II} \cdot \left(\frac{2}{13}\right);\ \text{III} \cdot \frac{13}{43}.$$

Тоді дістанемо матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 3 \\ 0 & 1 & -5/13 & 8/13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III.} \end{array} \tag{1.1}$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає цій матриці:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{3}{2} x_2 + \dfrac{1}{2} x_3 = 3, \\ \qquad x_2 - \dfrac{5}{13} x_3 = \dfrac{8}{13}, \\ \qquad\qquad x_3 = 1. \end{cases}$$

Підставляючи послідовно значення x_3 у друге рівняння, а далі x_2 і x_3 у перше, дістанемо

$$x_2 = \frac{8}{13} + \frac{5}{13} = 1;\ \ x_1 = 3 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

Отже, маємо такий розв'язок системи рівнянь:

$$x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1.$$

Якщо рухатись в обернену сторону, починаючи з елементу a_{33}, і отримувати нулі вище головної діагоналі, то повністю вилучемо змінні $x_1; x_2; x_3$. Для цього виконаємо такі дії в матриці (1.1)

$$\text{III} \cdot \left(\frac{5}{13}\right) + \text{II};\ \text{III} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \text{I}.$$

Тоді отримаємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III}. \end{matrix}$$

Далі переходимо по діагоналі до елементу a_{22} і отримаємо нуль вище цього елементу.

Для цього виконуємо таку дію

$$\text{II} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + \text{I}.$$

Тоді отримаємо матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ця матриця відразу дає розв'язок системи:

$$x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1.$$

Тобто, отримали той самий розв'язок.

Приклад 2. Розв'язати систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ -x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III}. \end{matrix}$$

За методом Гаусса отримаємо нулі нижче головної діагоналі

I крок I + II; I(–2) + III.

Дістанемо: $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III}. \end{matrix}$$

II крок $\text{I}(-1) + \text{III}$.

Маємо: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vline & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \vline & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vline & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III.} \end{matrix}$

Ця матриця містить рядок $0x+0y+0z=2$.

Згідно алгоритму Гаусса робимо висновок, що вихідна система несумісна, тобто розв'язків немає.

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає суть методу Гаусса?
2. Охарактеризувати зауваження, пов'язані з методом Гаусса.

Приклади для самостійного розв'язання

Розв'язати за методом Гаусса системи:

Приклад 1.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=12, \\ 2x_1+x_2+2x_3=9, \\ -3x_1+x_2+4x_3=10. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1=1;\ x_2=1;\ x_3=3.$

Приклад 2.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2, \\ 3x_1+3x_2+2x_3=5, \\ 5x_1+3x_2+4x_3=3. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=-2$.

Приклад 3.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=-2, \\ x_1+2x_2+3x_3=-1, \\ x_1+3x_2-2x_3=3. \end{cases}$$

Відповідь: система розв'язків немає.

Практичне заняття 2

РІЗНІ ФОРМИ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

План

1. Постановка різних форм запису ЗЛП.
2. Зведення загальної ЗЛП до задачі в стандартній формі і до задачі в канонічній формі.

Література: [1]; [2]; [3].

Методичні рекомендації

Мета заняття – ознайомитись з різними формами задачі лінійного програмування (ЗЛП). Після виконання практичного заняття 2 студент повинен знати різні постановки ЗЛП; уміти зводити ЗЛП до різних форм.

Загальна задача лінійного програмування:

а) цільова функція:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \max(\min). \tag{2.1}$$

б) при обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le в_i \ \left(i = \overline{1, e}\right); \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge в_i \ \left(i = e + \overline{1, r}\right); \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = в_i \ \left(i = r + \overline{1, m}\right); \tag{2.4}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{2.5}$$

Потрібно знайти такий розв’язок $\overline{x} = \left(x_1^0;\, x_2^0;\, \ldots,\, x_n^0\right)$, що задовольняє обмеження $(2.2)-(2.5)$ і максимізує або мінімізує функцію мети (2.1).

Задача (ЛП) називається записаною в симетричній формі, якщо потрібно знайти найбільше або найменше значення цільової функції:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{2.6}$$

При обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le в_i \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{2.7}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{2.8}$$

Стандартна форма запису ЗЛП:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min); \tag{2.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = в_i \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{2.10}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{2.11}$$

Будь-яка ЗЛП може бути зведена до стандартної форми. Якщо в загальній ЗЛП присутні обмеження у вигляді нерівностей $(\le)$, то в таке обмеження ми вводимо додаткову змінну x_{n+1} зі знаком «+» (де n – кількість змінних задачі; i – номер обмеження куди вводиться змінна).

В обмеження, в яких присутня нерівність $(\ge)$ вводиться додаткова змінна x_{n+1} зі знаком «-». Ці операції призводять до того, що нерівності перетворюються в рівності. Змінні x_j, відносно яких умова додатності не обумовлюється, подаємо у вигляді:

$$x_j = x_j^+ - x_j^-,$$

де $x_j^+ \ge 0;\ x_j^- \ge 0$.

Канонічна форма ЗЛП – це стандартна форма задачі, в якій кожне обмеження містить в собі зміну з коефіцієнтом одиниця в даному рівнянні і з коефіцієнтом нуль в усіх останніх. Праві частини цих рівнянь додатні, тому канонічну форму ЗЛП можна записати так:

$$(c_1 x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \to \min(\max); \tag{2.12}$$

$$x_1 + \ \ldots \ + a_{1m+1} x_{m+1} + \ \ldots \ + a_{1\hat{e}} \tilde{o}_{\hat{e}} + \ \ldots \ + a_{1n} x_n = \hat{a}_1$$

$$x_l + \ldots + a_{lm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{l\hat{e}}\tilde{o}_{\hat{e}} + \ \ldots \ + a_{ln}x_n = \hat{a}_l; \qquad (2.13)$$

---__

$$x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{m\hat{e}}\tilde{o}_{\hat{e}} + \ldots + a_{mn}x_n = \hat{a}_m.$$

$$x_j \geq 0; \left(j = \overline{1,n}\right). \qquad (2.14)$$

Змінні $x_1; x_2; \ldots x_m$ – це базисні змінні. Їм відповідають базисні вектори умов:

$$A_1; A_2; \ldots A_m.$$

Змінні $x_{m+1}; \ \ldots; \ x_n$ – позабазисні.

Відповідно: $A_{m+1}; \ ...; \ A_n$ – позабазисні вектори умов.

Канонічна форма дозволяє знайти початковий базисний розв'язок. Для цього внебазисні змінні покладаємо рівними нулю, тоді базисні дають розв'язок. Наша канонічна форма дає слідуючий початковий базисний розв'язок:

$$\overline{x} = \{в_1; в_2 : \ldots в_m; 0 : 0 : \ldots 0\}.$$

Означення. Ненульовий допустимий розв'язок ЗЛП називається базисним, якщо вектори умов, які відповідають додатнім компонентам цього розв'язку являються лінійно незалежними.

Будемо враховувати, що нульовий розв'язок ЗЛП завжди буде базисним.

Означення. Базисний розв'язок називається не виродженим, якщо він містить рівно m додатних компонент.

Наша канонічна форма дає нам не вироджений розв'язок.

Теорема. Допустимий розв'язок ЗЛП є вершиною допустимої області тоді і тільки тоді, коли цей розв'язок є базисним.

Приклад. Привести задачу до стандартного вигляду.

Розглянемо приклад приведення ЗЛП до стандартного вигляду. Нехай задача задана у такому вигляді:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq в_i \left(i = \overline{1, m_1}\right)\left(m_1 \leq m\right);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \hat{a}_i \left(i = \overline{m_1 + 1, m}\right);$$

$$x_j \geq 0\left(j=\overline{1, n_1}\right) n_1 \leq n.$$

Усі необговорені змінні подаємо у вигляді:

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \ j = \overline{n_1+1, n};$$

$$x_j^+ \geq 0; \ x_j^- \geq 0.$$

Цільову функцію запишемо в такому вигляді:

$$\sum_{j=1}^{n_1} c_j x_j + \sum_{j=n_1+1}^{n} c_j x_j^+ - \sum_{j=n_1+1}^{n} c_j x_j^-.$$

Дістанемо обмеження цієї задачі:

$$\sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} x_j + \sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij} x_j^+ - \sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij} x_j^- \leq в_i; \quad \left(i=\overline{1, m_1}\right);$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} x_j + \sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij} x_j^+ - \sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij} x_j^- = в_i; \quad \left(i=\overline{m_1+1, m}\right).$$

На всі змінні поширюється умова додатності:

$$x_j \geq 0, \ j=\overline{1, n_1}; \ x_j^+ \geq 0; x_j^- \geq 0, \qquad j = n_1+1, n.$$

Щоб перетворити перші m_1 нерівність в рівності, введемо в кожне обмеження додаткову додатну змінну x_{n+i} або $t_i \left(i=1, m_1\right)$. Ці додаткові змінні ввійдуть і в цільову функцію з коефіцієнтом 0. Тому стандартна форма задачі буде мати такий вигляд:

– цільова функція:

$$\sum_{j=1}^{n_1} c_j x_j + \sum_{j=n_1+1}^{n} c_j x_j^+ - \sum_{j=n_1+1}^{n} c_j x_j^- + 0 \cdot \sum_{i=1}^{m_1} t_i \to \min;$$

– обмеження задачі:

$$\sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} x_j + \sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij} x_j^+ - \sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij} x_j^- + t = в_i; \qquad \left(i=\overline{1, m_1}\right);$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} x_j + \sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij} x_j^+ - \sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij} x_j^- = в_i; \qquad \left(i=\overline{m_1+1, m}\right).$$

На всі змінні поширюється умова додатності:

$$x_j \geq 0, \ j=\overline{1, n_1}; \qquad x_j^+ \geq 0; x_j^- \geq 0, \ j=\overline{n_1+1, n}; \qquad t_1 \geq 0, \ i=\overline{1, m_1}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Як записується ЗЛП в симетричній формі?

2. Як записується ЗЛП в стандартній формі?
3. Як записується ЗЛП в канонічній формі?
4. Що називається базисним розв'язком?
5. Що називається невиродженим розв'язком?

Приклади для самостійного розв'язання

Подати стандартний вигляд.

Приклад 1.

$$z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,3} \right).$$

Приклад 2.

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 7; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,3} \right).$$

Практичне заняття 3

ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ТА ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ (ЗЛП)

План

1. Геометрична інтерпретація ЗЛП та графічний метод розв'язання задачі на площині.

2. Графічне розв'язання ЗЛП, яка записана у стандартній формі.

Література: [1]; [2]; [3].

Методичні рекомендації

Мета заняття – навчитись розв'язувати ЗЛП графічно.

Після виконання практичного заняття 3 студент повинен *знати:*

– як будується допустима область, цільова функція;

– де знаходиться розв'язання задачі.

Уміти геометрично розв'язувати ЗЛП.

Геометрична інтерпретація і графічний метод розв'язання ЗЛП на площині.

Розглянемо частковий випадок задачі, записаної в симетричній формі (2.6) – (2.8) на площині:

$$c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min). \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le в_2, \\ ------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le в_m; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \tag{3.3}$$

Потрібно знайти вектор $\overline{x} = \{x_1^0, x_2^0\}$, який задовольняє систему обмежень (3.2) і (3.3) і максимізує або мінімізує функцію цілі (3.1).

Почнемо з обмежень, які задають нам допустиму область нашої задачі – опуклий багатогранник.

Означення. Опуклий багатогранник – це багатогранник, який разом з двома точками x_1 і x_2, які належать області *Д*, містить в цій області і опуклу комбінацію цих точок, тобто:

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in Д, \ \lambda \in [0,1].$$

Геометрично це зображено на рис. 3.1.

Рис. 3.1.

Обмеження (3.3) говорять про те, що ми знаходимось в 1 чверті прямокутної системи координат.

Обмеження (3.2) задають допустиму область Д, як перетин півплощин. Допустима область може бути:

1) замкненою;

2) відкритою;

3) пустою.

Цільовій функції, якщо прирівняти її до будь-якої $const$, буде відповідати пряма на площині. Якщо ця $const = 0$, то пряма пройде через початок координат.

З аналітичної геометрії відомо, що з прямою на площині пов'язаний вектор нормалі – вектор перпендикулярний до даної прямої.

В нашому випадку це вектор

$$c = \{c_1; c_2\}.$$

Для того, щоб знайти розв'язок ЗЛП потрібно пряму, яка відповідає цільовій функції, переміщати паралельно самій собі в напрямку вектора нормалі для задачі на максимум і в протилежну сторону для задачі на мінімум. Розв'язок знаходиться там, де в останній раз пряма дотикається до допустимої області це може бути або в вершині допустимої області, або на грані. У другому випадку люба точка грані може бути розв'язком.

Зауваження

Якщо область пуста – задача розв'язків не має.

Приклад. Розв'язати задачу графічно.

$$x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$$

Спочатку будуємо допустиму область (рис. 3.2):

$-x_1 + 3x_2 = 6 \ (1)$

x_1	0	3
x_2	2	3

$3x_1 - x_2 = 6 \ (2)$

x_1	2	3
x_2	0	3

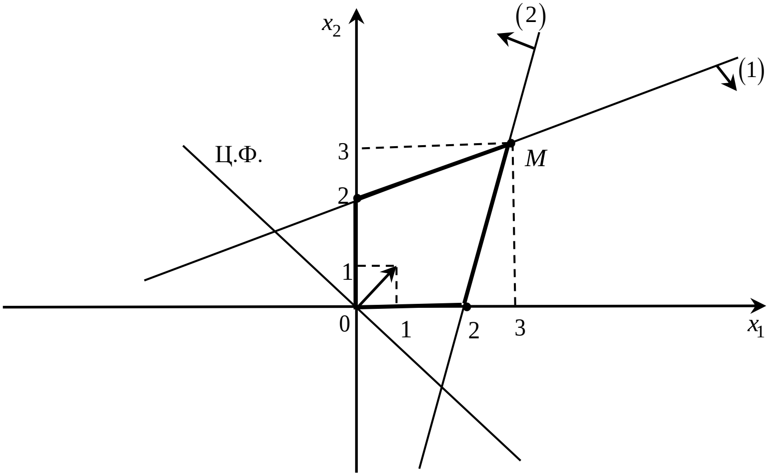

Рис. 3.2

З цільовою функцією пов'язаний вектор нормалі: $\overline{c} = \{1; 1\}$.

Пряма, перпендикулярна до вектора нормалі, відповідає цільовій функції. У нашому випадку задача на максимум, тому розв'язок буде знаходитись в точці *M*. Щоб знайти координати точки *M*, потрібно розв'язати систему рівнянь, які відповідають прямим, перетин яких задає точку *M*, тобто систему вигляду

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 6 \\ 3x_1 - x_2 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Застосуємо метод Крамера:

$$1)\, \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 9 = 8;$$

$$2)\, \Delta x_1 = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -6 - 18 = -24;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 18 = -24;$$

$$3)\, x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3.$$

Тому точка *M* має координати (3; 3). При цьому $z_{\max} = 6$.

Запитання для самоперевірки

1. Що називається опуклим багатогранником?
2. Як будується допустима область ЗЛП?
3. Як геометрично задається цільовафункція ЗЛП?
4. Де графічно знаходиться розв'язок ЗЛП?

Приклади для самостійного розв'язання

Знайти розв'язок графічно.

Приклад 1.

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \le 3, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$$

Відповідь: $\bar{x} = \{10; 7\}$.

Приклад 2.

$$z = 8x_1 + x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 1, \\ 3x_1 - 4x_2 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 .$$

Відповідь: $\bar{x} = \{7; 4\}$.

Графічне розв'язання задачі, яка записана в стандартній формі.

Крім задачі на площині геометрично може бути розв'язана ЗЛП, яка має такий вигляд:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ \dots\ + c_nx_n \to \max(\min); \tag{3.18}$$

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = в_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = в_2; \\
&-------------- \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots \ + a_{mn}x_n = в_m
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

$$
x_j \ge 0\left(j = \overline{1,n} \right). \tag{3.20}
$$

Задача може бути вирішена графічно, коли $n - m = 2$. За методом Гаусса вилучаємо перші m змінних з m рівнянь. Тоді система обмежень буде мати такий вигляд:

$$
\begin{cases}
x_1 + \quad \dots \ + \hat{a}_{1m+1}x_{m+1} + \hat{a}_{1m+2}x_{m+2} = \hat{a}_1 \\
\quad x_2 + \ \dots \ + \hat{a}_{2m+1}x_{m+1} + \hat{a}_{1m+2}x_{m+2} = \hat{a}_2 \\
-------------------- \\
\qquad x_m + \hat{a}_{mm+1}x_{m+1} + \hat{a}_{mm+2}x_{m+2} = \hat{a}_m .
\end{cases}
\tag{3.21}
$$

З цієї системи знаходимо $x_1; x_2; \ \dots \ x_m$.

$$
\begin{cases}
x_1 = \hat{в}_1 - \hat{a}_{1m+1}x_{m+1} - a_{1m+2}x_{m+2} \\
x_2 = \hat{в}_2 - \hat{a}_{2m+1}x_{m+1} - a_{2m+2}x_{m+2} \\
---------------- \\
x_m = \hat{в}_m - \hat{a}_{mm+1}x_{m+1} - a_{mm+2}x_{m+2} .
\end{cases}
\tag{3.22}
$$

Знайдені змінні підставляємо в цільову функцію (3.18), тоді отримаємо цільову функцію такого виду:

$$
\hat{c}_{m+1}x_{m+1} + \hat{c}_{m+2}x_{m+2} + \delta \to \max\left(\min\right). \tag{3.23}
$$

Галочка "$\hat{\ }$" над коефіцієнтами вказує на те, що коефіцієнти цієї системи і цільової функції після перетворень відрізняються від коефіцієнтів вихідної системи.

Якщо в обмеженнях (3.21) вилучити додатні змінні $x_1; x_2; \ldots; x_m$, то рівності перетворяться в нерівності:

$$
\begin{cases}
\hat{a}_{1m+1}x_{m+1} + \hat{a}_{1m+2}x_{m+2} \le \hat{a}_1 \\
\hat{a}_{2m+1}x_{m+1} + \hat{a}_{2m+2}x_{m+2} \le \hat{a}_2; \\
-------------- \\
\hat{a}_{mm+1}x_{m+1} + a_{mm+2}x_{m+2} \le \hat{a}_m .
\end{cases}
\tag{3.24}
$$

$$
x_{m+1} \ge 0; \quad x_{m+2} \ge 0. \tag{3.25}
$$

Задачі (3.23) – (3.25) розв'язуємо графічно на площині відносно змінних $x_{m+1};\ x_{m+2}$. Нехай розв'язок задачі буде пара $\left(x_{m+1}^0;\ x_{m+2}^0\right)$. Цю пару підставляємо в обмеження (3.22) і знаходимо змінні $x_1,\ \ldots,\ x_m$, тобто знаходимо розв'язок нашої задачі:

$$\hat{x}=\left\{x_1^0;x_2^0;\ldots x_{m+1}^0;x_{m+2}^0\right\}.$$

Приклад. Розв'язати задачу графічно.

$$z=2x_1-x_2+x_3-3x_4+4x_5\to\max;$$

$$x_1-x_2+3x_3-18x_4+2x_5=-4;$$

$$2x_1-x_2+4x_3-21x_4+4x_5=22;$$

$$3x_1-2x_2+8x_3-43x_4+11x_5=38;$$

$$x_j\ge 0\left(j=\overline{1,5}\right).$$

Умова $n-m=5-3=2$ виконується. Запишемо систему обмежень в матричній формі:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&3&-18&2&-4\\2&-1&4&-21&4&22\\3&-2&8&-43&11&38\end{array}\right)\Rightarrow.$$

Застосовуємо метод Гаусса і вилучаємо перші три змінних $x_1;x_2;x_3$.

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&3&-18&2&-4\\0&1&-4&15&0&30\\0&1&-1&11&5&50\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&3&-18&2&-4\\0&1&-2&15&0&30\\0&0&1&-4&5&20\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&0&-6&-13&-64\\0&1&0&7&10&70\\0&1&1&-4&5&20\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&1&-3&6\\0&1&0&7&10&70\\0&0&1&-4&5&20\end{array}\right).$$

Останню матрицю запишемо системою:

$$\begin{cases}x_1+x_4-3x_5=6\\x_2+7x_4+10x_5=70\\x_3-4x_4+5x_5=20.\end{cases}\qquad(*)$$

Знаходимо $x_1; x_2; x_3$:

$$x_1 = 6 - x_4 + 3x_5$$
$$x_2 = 70 - 7x_4 - 10x_5 \qquad (**)$$
$$x_3 = 20 + 4x_4 - 5x_5 .$$

Знайдені $x_1; x_2; x_3$ підставляємо в цільову функцію:

$$z = 2\left(6 - x_4 + 3x_5\right) - \left(70 - 7x_4 - 10x_5\right) +$$
$$-20 - 4x_4 - 5x_5 - 3x_4 + 4x_5 \to \max .$$

Розкриваємо дужки, приводимо подібні, отримаємо цільову функцію:

$$z = 6x_4 + 15x_5 - 38 \to \max . \qquad (1)$$

Якщо в системі (*) вилучити додатні змінні $x_1; x_2; x_3$, отримаємо обмеження:

$$\begin{cases} x_4 - 3x_5 \le 6, & (2) \\ 7x_4 + 10x_5 \le 70, & (3) \\ -4x_4 + 5x_5 \le 20, & (4) \end{cases}$$

$$x_4 \ge 0; x_5 \ge 0 . \qquad (5)$$

Ці обмеження задають допустиму область Д.

Отримана задача (1) – (5) може бути розв'язана відносно змінних x_4; x_5 графічно (рис. 3.3):

$x_4 - 3x_5 = 6 \ (1)$; $\quad 7x_4 + 10x_5 = 70 \ (2)$; $\quad -4x_4 + 5x_5 = 20 \ (3)$.

x_4	0	3
x_5	–2	–1

x_4	0	0
x_5	7	10

x_4	0	–5
x_5	4	0

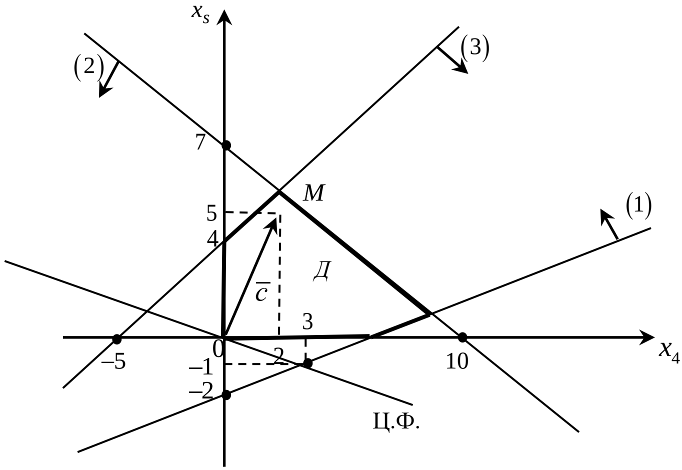

Рис. 3.3

Цільову функцію можна записати у вигляді

$$z = 2x_4 + 5x_5 - \frac{38}{3} \to \max .$$

Точка M є точкою розв'язку. Знаходимо її координати. Для цього розв'язуємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 7x_4 + 10x_5 = 70 \\ -4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_4 = 2 \\ x_5 = 5{,}5. \end{matrix}$$

Знайдені x_4 і x_5 підставляємо в систему (3.27) і знаходимо $x_1; x_2; x_3$:

$$x_1 = 6 - 2 + 3 \cdot 5{,}6 = 20{,}8;$$

$$x_2 = 70 - 72 - 10 \cdot 5{,}6 = 70 - 14 - 56 = 0;$$

$$x_3 = 20 + 8 - 28 = 0.$$

Практичне заняття 4

СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗЛП

План

1. Алгоритм симплексного методу (СМ). Суть однієї ітерації алгоритма.

2. Застосування СМ для розв'язку ЗЛП.

Література: [1]; [2]; [3].

Методичні рекомендації

Мета заняття: навчитись розв'язувати ЗЛП СМ.

Після виконання практичного заняття 4 студент повинен *знати:*

– яка задача може бути занесена в симплекс таблицю;

– одну ітерацію алгоритма (СМ);

– коли алгоритм закінчує роботу;

уміти:

– вибирати розв'язуючий елемент;

– робити симплекс-перетворення, тобто робити перехід від однієї симплекс-таблиці до іншої.

СМ є універсальним методом розв'язання ЗЛП. За його реалізації здійснюється орієнтоване перебирання вершин допустимої області, щоб перейти від одного базисного розв'язку до іншого. Розглянемо в чому полягає суть алгоритму СМ.

ЗЛП зводиться до задачі, записаній в канонічній формі (КФ). Нехай КФ задачі має вигляд (2.12 – 2.14) (див. пр. зан. 2). Цю КФ для зручності обчислень заносять в симплекс-таблицю, яку ми розглянемо зразу на прикладі. Одна інтеграція алгоритму полягає в такому.

Обчислюємо оцінки $\Delta_j = z_j - c_j = C_{Á} \cdot A_j - c_j$ для всіх позабазисних змінних. Для базисних ці оцінки завжди дорівнюють 0.

c_j – коефіцієнти цільової функції;

$C_Б$ – це коефіцієнти цільової функції, які відповідають базисним векторам умов тобто $c_1; c_2; \ldots; c_m$;

A_j – вектори умов нашої системи обмежень.

Якщо всі оцінки $\Delta_j \leq 0$ (для задачі на $\min$), то початковий розв'язок, який дає КФ, є оптимальним.

Якщо ні, то нехай якась оцінка $\Delta_к > 0$, в цьому випадку ми розглядаємо k-тий вектор умов задачі, тобто вектор $A_к$ – розв'язуючий стовпчик нашої задачі. Якщо таких оцінок більше, ніж одна, вибираємо максимальну з них:

$$\Delta_к = \max_{\Delta_j > 0} \left\{ \Delta_j \right\}.$$

Якщо у вибраному векторі умов всі коефіцієнти від'ємні, то в цьому випадку говорять, що цільова функція необмежена на допустимій множині:

– для задачі на min знизу;

– для задачі на max зверху.

Якщо якийсь коефіцієнт вибраного стовпчика більший за нуль, наприклад $a_{ек}$, то розглядаємо рядок, який відповідає цьому коефіцієнту. Тобто l - й рядок.

Якщо у вибраному стовпчику додатних коефіцієнтів більше ніж один, дістаємо оцінку:

$$\theta = \min_{a_{ік} > 0} \left\{ \frac{в_i}{a_{ік}} \right\}.$$

Тобто, беремо відношення (елементів стовпчика правих частин, до елементів вибраного стовпчика) і розглядаємо рядок, який відповідає цьому мінімальному відношенню. Він називається розв'язуючим рядком. Нехай це буде $е$-й рядок. Елемент $a_{ек}$, який знаходиться на перетині розв'язуючого стовпчика і розв'язуючого рядка називається розв'язуючим елементом.

За методом Гаусса, згідно з яким елемент $a_{ек}$ набуває значення 1, а всі останні елементи цього стовпчика набувають значень 0. При цьому вектор умов $A_к$ входить у число базисних векторів, а з базиса виходить вектор A_l. Після цих всіх операцій переходимо до нової вершини, допустимої багатогранної множини, і весь процес обчислень повторюється.

Розглянемо, як працює СМ для задачі, записаної в симетричній формі, і розв'язок якої наведено графічно в практичному занятті.

Приклад. Розв'язати СМ задачу:

$$z = x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 .$$

Зводимо задачу до канонічної форми:

$$z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max;$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 6,$$

$$3x_1 - x_2 + \ \ x_4 = 6,$$

$$x_j \ge 0;\ \left(j = \overline{1,4}\right).$$

Заносимо дані канонічної форми в симплекс-таблицю 4.1

Таблиця 4.1

N	$Б$	$C_Б$	A_o	1	1	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_3	0	6	-1	3	1	0
2	A_4	0	6	$\boxed{3}$	-1	0	1
$\Delta_j = z_j - c_j$				-1	-1	0	0

І крок $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 < 0,$

$\Delta_1 = \Delta_2 = -1,$ тобто не має різниці якій вектор ввести в базіс A_1 або A_2. Оцінка $\theta = \min\left(6/3\right) = 2$. Тому за алгоритмом вводимо в базис A_1, виводимо з базису A_4, тобто $A_1 \to Б \to A_4$.

Таблиця 4.2

N	$Б$	$C_Б$	A_o	1	1	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_3	0	8	0	$\boxed{8/3}$	1	1/3
2	A_1	1	2	1	−1/3	0	1/3
$\Delta_j = z_j - c_j$				0	−4/3	0	1/3

II крок $\Delta_2 < 0$, оцінка $\theta = \min\left(8/\frac{8}{3}\right) = 3$. Згідно з алгоритмом $A_2 \to Б \to A_3$.

Таблиця 4.3

N	$Б$	$C_Б$	A_o	1	1	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_2	1	3	0	1	3/8	1/8
2	A_3	1	3	1	0	1/8	9/24
$\Delta_j = z_j - c_j$				0	0	4/8	1/2

В табл. 4.3 всі $\Delta_j \geq 0$, тому ця таблиця дає оптимальний розв'язок:

$$\bar{x}_{\text{опт}} = \{3;3;0;0\}.$$

Оптимальний розв'язок вихідної задачі містить тільки дві координати, тому $\bar{x}_{\text{опт}} = \{3;3\}$.

Запитання для самоперевірки

1. Для яких форм запису ЗЛП можна застосовувати алгоритм СМ?
2. Як записати розв'язок, який дає канонічна форма?
3. Як вибрати розв'язуючий стовпчик?
4. Як вибрати розв'язуючий рядок?
5. Який елемент називається розв'язуючим?
6. У чому полягає один крок перетворення Гаусса?
7. Коли алгоритм завершує роботу?

Приклади для самостійного розв'язання

Знайти розв'язок, застосовуючи симплекс-метод для прикладів, поданих у практичному занятті 3.

Практичне заняття 5

ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ

План

1. Побудова двоїстої задачі (ДЗ) для задачі, яка записана в симетричній формі.

2. Зв'язок між оптимальними розв'язками прямої і двоїстої задачі (ДЗ).

3. Побудова двоїстої задачі, якщо пряма задана в стандартному вигляді.

4. Розв'язання приклада.

Література: **[1];** [2]; [3].

Методичні рекомендації

Мета заняття – навчитись будувати двоїсті задачі.

Після вивчення практичного заняття 5 студенти повинні *знати* як пов'язані між собою оптимальні розв'язки прямої і двоїстої задач; *уміти* знаходити розв'язок прямої і двоїстої задач.

Нехай шукана задача задана в такій симетричній формі:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max . \tag{5.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le в_i \left(i = \overline{1, m} \right). \tag{5.2}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1, n} \right). \tag{5.3}$$

Побудова двоїстої задачі:

1) якщо вихідна задача сформульована на максимум, то двоїста до неї формулюється на мінімум;

2) коефіцієнти цільової функції вихідної задачі стають вільними членами системи обмежень двоїстої задачі;

3) вільні члени системи обмежень вихідної задачі стають коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі;

4) матриця коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі є транспонованою до матриці коефіцієнтів системи обмежень вихідної задачі;

5) знаки нерівностей в обмеженнях двоїстої задачі протилежні знакам нерівностей обмежень вихідної задачі.

Якщо вихідна задача записана в симетричній формі, то двоїста до неї теж буде симетричною.

$$z' = \sum_{i=1}^{m} в_i y_i \to \min . \qquad (5.1')$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \left(j = \overline{1,n} \right). \qquad (5.2')$$

$$y_i \ge 0 \left(i = \overline{1,m} \right). \qquad (5.3')$$

Задачі (5.1) – (3) і $(5.1')$ – $(5.3')$ називають двоїстими або спряженими задачами. Оптимальний розв'язок однієї задачі тісно пов'язаний з оптимальним розв'язком іншої.

Теорема двоїстості

Якщо одна з задач має розв'язок, то й друга задача теж має розв'язок, до того ж, для оптимальних розв'язків цих задач $\overline{x} = \left(x_1; x_2; \ldots; x_n \right)$ і $\overline{y} = \left(y_1; y_2; \ldots; y_m \right)$ виконується така умова:

$$z\left(\overline{x}\right) = z'\left(\overline{y}\right),$$

тобто значення цільових функцій співпадають.

Зауваження

1) якщо цільова функція однієї з задач не обмежена, то умови іншої несумісні;

2) розв'язок двоїстої задачі можна отримати в останній симплекс-таблиці вихідної задачі в рядку оцінок в стовпчиках, які відповідають додатковим змінним;

3) розв'язок задачі (1) – (3) можна отримати множенням на (–1) відповідних елементів рядка оцінок останньої симплекс-таблиці двоїстої задачі.

Теорема. Для того, щоб розв'язки $\overline{x}$ і $\overline{y}$ були розв'язками пари двоїстих задач, потрібно і достатньо, щоб їх компоненти відповідали таким умовам:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - в_i\right)y_i = 0, \left(i = \overline{1,m}\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j\right)\cdot x_j = 0, \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Якщо вихідна задача подається в стандартній формі, то двоїста до неї задача буде несиметричною (на двоїсті змінні не накладається умова додатності, тобто умова (5.3')). Нехай пряма задача задана в стандартному вигляді:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \tag{5.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = в_{i,} \ \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{5.5}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{5.6}$$

Двоїста задача:

$$z' = \sum_{i=1}^{m} в_i y_i \to \min; \tag{5.4'}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq c_j \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{5.5'}$$

Нехай вихідна задача має вигляд:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min; \tag{5.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = в_i, \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{5.8}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{5.9}$$

Двоїста задача:

$$z' = \sum_{i=1}^{m} в_i y_i \to \max; \tag{5.7'}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j \leq c_j \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{5.8'}$$

У двоїстих задачах (5.4'), (5.5') і (5.7'), (5.8') не накладається умова додатності на змінні. Розглянемо приклад.

Нехай пряма задача записана в слідуючому вигляді:

$$z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 9, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0\left(j = \overline{1,3} \right).$$

Запишемо двоїсту задачу:

$$z' = 9y_1 + 5y_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 3, \\ 3y_1 + 2y_2 \ge 1, \\ 5y_1 + y_2 \ge 2; \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0; y_2 \ge 0.$$

Приведемо вихідну задачу до канонічного вигляду і занесемо її в симплекс-таблицю 5.1.

Таблиця 5.1

N	$Б$	$C_Б$	A_o	3	1	2	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_4	0	9	1	3	5	1	0
2	A_5	0	5	2	2	1	0	1
$\Delta_j = z_j - c_j$				-3	-1	-2	0	0

Оскільки вихідна задача сформульована на $\max$, то оптимальний розв'язок буде тоді, коли $\Delta_j \ge 0$. Застосовуємо декілька раз алгоритм симплекс-метода, в результаті отримаємо останню симплекс-таблицю 5.2

Таблиця 5.2

N	$Б$	$C_Б$	A_o	3	1	2	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_1	3	16/9	1	7/9	0	1/9	5/9
2	A_3	2	13/9	0	4/9	1	2/9	–1/9
$\Delta_j = z_j - c_j$				0	20/9	0	1/9	13/9

Всі $\Delta_j \geq 0$, тобто ця таблиця дає оптимальний розв'язок. Позабазисні змінні покладаємо рівними 0, тоді базисні змінні дають нам розв'язок: $\bar{x} = \left\{ \frac{16}{9}; 0; \frac{13}{9} \right\}$.

Оптимальний розв'язок двоїстої задачі знаходиться в рядку оцінок вихідної задачі в останній симплекс-таблиці в стовпчиках, які відповідають додатковим змінним (або векторам A_4, A_5).

Тобто, розв язок двоїстої задачі: $\bar{y} = \left\{ \frac{1}{9}; \frac{13}{9} \right\}$.

Виконується умова теореми двоїстості:

$$z_{\max} = z'_{\min} = \frac{74}{9}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте алгоритм запису ДЗ, якщо вихідна записана в симетричній формі.
2. Який зв'язок між розв'язками вихідної і ДЗ?
3. Яка необхідна і достатня умова того, щоб розв'язки $\bar{x}$ і $\bar{y}$ були розв'язками пари двоїстих задач?
4. Як будується (ДЗ), якщо вихідна задача задана в стандартній формі?

Приклади для самостійного розв'язання

1. Побудувати двоїсті задачі для прикладів, сформульованих в практичному занятті 3. Знайти оптимальні розв'язки пари двоїстих задач.
2. Побудувати двоїсті задачі для прикладів 1 і 2, які сформульовані в практичному занятті 2.

Практичне заняття 6

ДВОЇСТИЙ СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД (ДСМ) АБО МЕТОД ПОСЛІДОВНОГО УТОЧНЕННЯ

План

1. Алгоритм ДСМ. Суть однієї ітерації алгоритму.
2. Застосування ДСМ для розв’язання ЗЛП.

Література: [1; [2]; [3].

Методичні рекомендації

Мета заняття: навчитись розв'язувати ЗЛП ДСМ.

Після виконання практичного заняття 6 студент повинен *знати:*

– яка задача може бути занесена в симплекс-таблицю;

– одну ітерацію алгоритму ДСМ;

– коли алгоритм закінчує роботу;

уміти:

– вибирати розв'язуючий елемент;

– робити симплекс-перетворення, тобто робити перехід від однієї симплекс-таблиці до наступної.

Суть методу полягає в побудові оптимального недопустимого плану з послідовним перетворенням його в допустимий, не порушуючи умови оптимальності.

Недопустимий – це значить, що початковий опорний розв'язок може містить в собі від'ємні компоненти.

Алгоритм двоїстого методу полягає в таких аспектах:

1) вибираємо розв'язуючий рядок по найбільшому (за модулем) від'ємному елементу-стовпчика A_0;

2) вибираємо розв'язуючий стовпчик за найменшим (за модулем) відношенню елементів рядка оцінок до від'ємних елементів розв'язуючого рядка;

3) перераховуємо симплекс таблицю за правилами звичайного симплекс методу;

4) отриманий розв'язок перевіряємо на оптимальність. Признаком отримання допустимого оптимального розв'язку

є відсутність у стовпчику A_0 від'ємних елементів. Якщо в стовпчику A_0 є від'ємні елементи, то переходимо до пункту 1.

Зауваження 1

Якщо в розв'язуючому рядку немає ні одного від'ємного елемента, то задача не має розв'язку.

Зауваження 2

Якщо обмеження задачі задаються нерівностями ($\geq$), то двоїстий симплекс-метод дозволяє позбавитись від необхідності введення штучних змінних.

Розглянемо, як працює ДСМ на такому прикладі.

Приклад. Розв'язати ДСМ задачу:

$$z = x_1 + 9x_2 + 4x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 4; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \left(j = \overline{1,3} \right).$$

Вирівнюємо нерівності в рівності, для цього вводимо в кожне обмеження додаткову змінну:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_6 = 4. \end{cases}$$

Множимо кожне рівняння на (–1), тоді отримаємо:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = -5, \\ -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_6 = -4. \end{cases}$$

Ці додаткові змінні входять у цільову функцію з коефіцієнтом 0.

Отриману задачу заносимо до симплекс-таблиці і застосовуємо алгоритм ДСМ:

Таблиця 6.1

N	$Б$	$C_Б$	A_0	12	9	4	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	-6	-3	1	$\boxed{-2}$	1	0	0
2	A_5	0	-5	2	-1	1	0	1	0
3	A_6	0	-4	-4	-3	-2	0	0	1
$\Delta j \le 0$				-12	-9	-4	0	0	0

В стовпчику A_0 максимальне від'ємне число (–6). Знаходимо оцінку $\theta = \min\left\{\frac{-12}{-3}; \frac{-4}{-2}\right\} = 2$, тому за алгоритмом ДСМ $A_3 \rightarrow \acute{A} \rightarrow \grave{A}_4$. В таблиці виділений розв'язуючий елемент.

Таблиця 6.2

N	$Б$	$C_Б$	A_0	12	9	4	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_3	4	3	3/2	-1/2	1	-1/2	0	0
2	A_5	0	-2	7/2	-3/2	0	$\boxed{-1/2}$	1	0
3	A_6	0	2	-1	-4	0	-1	0	1
$\Delta j \le 0$				-6	-11	0	-2	0	0

Стовпчик A_0 містить в собі від'ємне число (–2). Знаходимо оцінку $\theta = \min\left\{\frac{-11}{\frac{-3}{2}}; \frac{-2}{\frac{-1}{2}}\right\} = 4$, тому згідно алгоритму ДСМ $A_4 \rightarrow \acute{A} \rightarrow \grave{A}_5$. В таблиці виділений розв'язуючий елемент.

Таблиця 6.3

N	$Б$	$C_Б$	A_0	12	9	4	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_3	4	5	-4/2	1	1	0	-1	0
2	A_4	0	4	-7	3	0	1	-2	0
3	A_6	0	6	-8	-1	0	0	-2	1
$\Delta j \le 0$				≤ 0	≤ 0	=0	=0	≤ 0	0

У стовпчику A_0 табл. 6.3 всі компоненти додатні і виконується умова оптимальності, тому таблиця дає оптимальний розвязок:

$$\overline{x}_{опт} = \{0;\ 0;\ 5\},$$

$$z\left(\overline{x}_{опт}\right) = 12\cdot 0 + 9\cdot 0 + 4\cdot 5 = 20.$$

Запитання для самоперевірки

1. Дайте визначення поняття оптимального недопустимого розв'язку?
2. Коли задача не має розв'язків?
3. Коли варто застосовувати ДСМ?
4. Як вибирається розв'язуючий рядок?
5. Як вибирається розв'язуючий стовпчик?
6. Коли алгоритм завершує роботу?

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад 1. Розв'язати ДСМ задачу:

$$z = 12x_1 + 27x_2 + 6x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 12, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6, \\ 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 \geq 24; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \left(j = \overline{1,3}\right).$$

Відповідь: $\overline{x}_{опт} = \{3;\ 0;\ 3\}$,

$$z\left(\overline{x}_{опт}\right) = 54.$$

Приклад 2. Розв'язати ДСМ задачу:

$$z = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 20, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 12, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 1; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \left(j = \overline{1,3}\right).$$

Відповідь: $\bar{x}_{опт} = \left\{ \frac{1}{2}; 0; \frac{19}{4} \right\}$,

$$z\left(\bar{x}_{опт}\right) = \frac{21}{4}.$$

Практичне заняття 7

ПОСТАНОВКА ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ (ТЗЛП)

План

1. Економічна модель транспортної задачі лінійного програмування (ТЗЛП), збалансованої.
2. Математична модель ТЗЛП.
3. Розподільна таблиця ТЗ.

Література: [1; [2]; [3].

Методичні рекомендації

Мета заняття: навчитись робити постановку транспортної задачі (ТЗ).

Після виконання практичного заняття 7 студент повинен *знати:*

– що таке збалансована ТЗ;

– що являє собою невироджений базисний розв'язок ТЗ; *вміти* згідно з умовою ТЗ будувати розподільну транспортну таблицю.

Економічна постановка транспортної задачі. Маємо *m* постачальників і *n* споживачів. Тобто є *m* пунктів відправлення $A_1; A_{2;} ...; A_m$, в яких знаходиться відповідно $a_1; a_2; ...; a_m$ одиниць однорідного вантажу і є *n* пунктів призначення $B_1; B_2; ...; B_n$ з потребами $b_1; b_2; ...; b_n$ відповідно. Передбачено, що від кожного постачальника A_i, до кожного споживача B_j існує транспортна комунікація. Відомі транспортні затрати c_{ij} перевезення одиниці вантажу з i - го пункту відправлення в j - й пункт призначення.

Розглянемо випадок, коли загальний запас вантажу в пунктах відправлення дорівнює сумарним потребам в пунктах призначення, тобто виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (7.1)$$

В цьому випадку ТЗ називається задачею закритого типу або збалансованою задачею.

Потрібно скласти такий план перевезень, тобто знайти, скільки одиниць вантажу потрібно відправити з i - го пункту відправлення в j - й пункт призначення, щоб задовольнити всі потреби споживачів і при цьому сумарні транспортні затрати були мінімальними.

Дамо математичне формулювання ТЗ

Нехай x_{ij} – кількість вантажу, який перевозиться з A_i в B_j пункт. Запишемо умову для кожного постачальника:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m} \right). \qquad (7.2)$$

Аналогічно запишемо умову для кожного споживача:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n} \right); \qquad (7.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 .$$

План $X = \left\{ x_{ij} \right\}\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$ (7.4)

повинен забезпечити мінімальну сумарну вартість перевезень.

Тобто, потрібно знати:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \right). \qquad (7.5)$$

Оскільки ТЗ є частинним випадком ЗЛП з $\left(m \times n \right)$ невідомими і $\left(m + n \right)$ обмеженнями в формі рівнянь, для неї мають силу всі загальні означення останньої.

Сформулюємо деякі твердження:

1) збалансована ТЗ завжди допустима і має оптимальний розв'язок;

2) не всі обмеження (7.2) і (7.3) є лінійно незалежними. Дійсно, якщо просумувати (7.2) і (7.3) в силу (7.1) отримаємо

одне і теж. Тому існує хоча б одна лінійна залежність. Звідси випливає, що невироджений базисний розв'язок ТЗЛП повинен містити в собі $(m+n-1)$ зайнятих кліток;

3) якщо в ТЗ всі числа $a_i, \left(i=\overline{1,m}\right); b_i, \left(j=\overline{1,n}\right)$ – цілі, то хоча б один оптимальний розв'язок задачі – цілочисельний.

Оскільки вся інформація, яка стосується ТЗЛП зводиться до матриці $C=\left\{c_{ij}\right\}$ $i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$, величинам $a_1; a_2; ...; a_m$; $b_1; b_2; ...; b_n$, то для наочності умови ТЗ представимо у вигляді розподільної транспортної табл. 7.1

Таблиця 7.1

<table>
<tr><td rowspan="6">Постачальники</td><td colspan="5">Споживачі</td><td>Запаси вантажу</td></tr>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>...</td><td>B_n</td><td>a_i</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>C_{11}</td><td>C_{12}</td><td></td><td>C_{1n}</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>C_{21}</td><td>C_{22}</td><td></td><td>C_{2n}</td><td>a_2</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td>A_m</td><td>C_{m1}</td><td>C_{m2}</td><td></td><td>C_{mn}</td><td>a_m</td></tr>
<tr><td>Потреби у вантажі</td><td>b_j</td><td>b_1</td><td>b_2</td><td></td><td>b_n</td><td>$\sum_i a_i = \sum_j b_j$</td></tr>
</table>

Питання для самоперевірки

1. Дайте математичне формулювання ТЗ.
2. Що називається невироджений базисним розв'язком?
3. Який вигляд має розподільча таблиця ТЗ?
4. Яка ТЗ називається задачею закритого типу?

Практичне заняття 8

МЕТОДИ ПОШУКУ ВИХІДНОГО ДОПУСТИМОГО БАЗИСНОГО РОЗВ'ЯЗКУ(ДБР)

План

1. Метод північно-західного кута.
2. Метод мінімальної вартості.

Література: [1]; [2]; [3].

Методичні рекомендації

Мета заняття – навчитись знаходити початковий базисний розв'язок.

Після виконання практичного заняття 8 студент повинен *знати:*

– алгоритм «північно-західного кута»;
– алгоритм мінімальної вартості;

уміти:

– будувати ДБР за методом північно-західного кута;
– будувати ДБР за методом мінімальної вартості.

Розв'язок ТЗЛП як і будь-якої іншої ЗЛП починається з побудови вихідного базисного розв'язку.

Існують різні методи знаходження початкового базисного розв'язку: північно-західного кута; мінімальної вартості; подвійної переваги; апроксимації Фогеля.

Зупинимось на перших двох.

Метод північно-західного кута

За цим методом починають з лівого верхнього кута транспортної таблиці. Розподіл ресурсів першого постачальника робиться таким чином, щоб спочатку максимально задовольнити потреби першого споживача, потім іншого і т.д. до повного розподілення вантажу, який знаходиться в пункті відправлення A_1. Потім аналогічно розподіляють ресурси іншого постачальника, третього і т. д. У результаті отримаємо ДБР ТЗ у вигляді ступінчатої структури.

Приклад 1. Побудувати початковий розв'язок ТЗ за правилом північно-західного кута, поданої таблицею:

Таблиця 8.1

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	^{70} 14	^{38}	^{24}	^{92}	14
A_2	^{58} 16	^{18} 4	^{54}	^{72}	20
A_3	^{19}	^{10} 18	^{100} 8	^{30}	26
A_4	^{3}	^{36}	^{12} 7	^{8} 34	41
b_j	30	22	15	34	$\sum_i a_i = \sum_j b_j = 101$ (задача збалансована)

Початковий розв'язок може бути записаний у вигляді матриці:

$$X = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 34 \end{pmatrix}.$$

В таблиці 8.1 $m+n-1=4+4-1=7$ заповнених клітинок, тому цей розв'язок є не виродженим. Цьому розв'язку відповідають витрати: $f_1 = 14\cdot 70 + 16\cdot 58 + 4\cdot 18 + 18\cdot 10 + 8\cdot 100 +$
$+7\cdot 12 + 34\cdot 8 =$ 12+34-8=2276.

Метод мінімальної вартості

Характерним для цього методу є те, що розподіл вантажів починається з клітинки, що відповідає найменшому тарифу і з усієї таблиці тарифів c_{ij}. Відповідна клітинка завантажується максимальним чином. При цьому можливі 3 випадки:

а) ресурси відповідного постачальника вичерпані;

б) потреби відповідного споживача повністю задоволені;

в) це випадок а) і б) одночасно, тобто коли повністю розподілений вантаж постачальника і повністю задоволені потреби споживача.

Таблиця тарифів зменшується, шляхом викреслення у випадку:

а) рядка;

б) стовпчика;

в) того та іншого.

Далі, в зменшеній таким чином таблиці тарифів, знову вибирають клітину з найменшим тарифом і процес розподілу продовжують доти, доки будуть розподілені всі запаси і задоволені потреби споживачів.

Приклад 2. Побудувати початковий розв'язок перевезень методом мінімальної вартості для ТЗ прикладу 1.

Таблиця 8.2

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	70	38	24 14	92	14
A_2	58	18	56 1	72 19	20
A_3	19	10 22	100	30 4	26
A_4	3 30	36	12	8 11	41
b_j	30	22	13	34	$\sum_{i=1} a_i = \sum_{j=1} b_j$

Початковий розв'язок може бути записаний у вигляді матриці:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 19 \\ 0 & 22 & 0 & 4 \\ 30 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Знову бачимо, що в табл. 8.2 заповнених клітинок сім, тому розв'язок невироджений. Цьому плану відповідають витрати: $f_2 = 14 \cdot 24 + 1 \cdot 56 + 19 \cdot 72 + 22 \cdot 10 + 4 \cdot 30 + 30 \cdot 3 + 11 \cdot 8 = 2276.$

Зауваження

Порівнюючи витрати на перевезення, ми бачимо, що початковий розв'язок, отриманий методом мінімальної вартості, є кращим, ніж розв'язок, отриманий методом північно-західного кута.

Питання для самоперевірки

1. Які ви знаєте методи побудови початкового розв'язку?
2. У чому полягає суть методу північно-західного кута?
3. У чому полягає суть методу мінімальної вартості?
4. Який з методів побудови початкового розв'язку є кращим?

Приклади для самостійного розв'язання

Знайти початковий ДБР за методом північно-західного кута та за методом мінімальної вартості, ТЗЛП, заданих таблицями 8.3 та 8.4.

Таблиця 8.3

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150
A_3	8	10	20	1	50
b_j	75	80	60	85	

Таблиця 8.4

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	4	1	2	5	3	200
A_2	2	1	8	3	5	100
A_3	4	8	7	1	2	150
A_4	6	2	5	7	4	50
b_j	150	150	50	60	90	

Порівняйте ці розв’язки.

Практичне заняття 9

МЕТОД ПОТЕНЦІАЛІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ (ТЗЛП)

План

1. Суть методу потенціалів.
2. Приклад на застосування цього методу.

Література: [1]; [2]; [3].

Методичні рекомендації

Мета заняття: навчитись розв'язувати ТЗ методом потенціалів.

Після виконання практичного заняття 9 студент повинен *знати:*

– як записується двоїста задача, до задачі (7.1) – (7.5);

– двоїстий критерій оптимальності розв'язку ТЗЛП;

уміти:

– будувати потенціали для кожного постачальника і кожного споживача;

– перевіряти отриманий розв'язок на оптимальність;

– знаходити новий розв'язок.

Кожному постачальнику і кожному споживачеві ставлять у відповідність відповідні числа $u_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ і $v_j\left(j=\overline{1,n}\right)$, які називають відповідно потенціалами постачальників і споживачів.

Тоді двоїста задача до задачі (7.1) – (7.5) полягає в знаходженні потенціалів u_i і v_i які задовольняють обмеженням:

$$v_j - u_i \le c_{ij}, i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}. \quad (9.1)$$

і максимізують цільову функцію:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j b_j - \sum_{i=1}^{m} u_i a_i. \quad (9.2)$$

Теорема (двоїстий критерій оптимальності для ТЗЛП)

Допустимий базисний розв'язок (ДБР) $x^0 = \left\{ x_{ij}^0 \right\}$, оптимальний тоді і тільки тоді, коли існують потенціали $u_i, i = \overline{1,m};\ v_j, j = \overline{1,n}$ такі, що

$$v_j - u_i = c_{ij}, i;\ j : x_{ij}^0 > 0. \tag{9.3}$$

$$v_j - u_i \le c_{ij}, i;\ j : x_{ij}^0 > 0. \tag{9.4}$$

Алгоритм методу потенціалів саме і застосований на цьому критерії. Знаходиться вихідний ДБР, наприклад, за допомогою одного із згаданих методів в практичному занятті 8. З кожним розв'язком пов'язана система потенціалів, яка визначається згідно з формули (9.3). Передбачається, що ДБР – невироджений, тому в системі (9.3) є $(m+n-1)$ рівняння і $(m+n)$ невідомих. Відповідно до цього один з потенціалів, який вибирається довільним чином, може бути покладений довільній константі (найчастіше нулю). Після цього система стає замкненою і знаходяться всі інші потенціали.

Далі перевіряється умова (9.4). Якщо умова (9.4) виконується, то ДБР – оптимальний.

Якщо існує клітинка (k,l) така, що $v_l - u_{\hat{e}} > c_{\hat{e}l}$, то змінна $x_{\hat{e}l}$ повинна бути введена в число базисних. А якщо таких клітинок декілька, то вибирають клітинку (k,l) за умовою:

$$\left[\left(v_е - u_к \right) - c_{ке} \right] = \max \left[\left(v_j - u_i \right) - c_{ij} \right].$$

Для перерозподілу поставок будують цикл. У вершинах циклу розставляють «+» і «-», починаючи з клітинки (k,l), у яку ставлять знак «+», потім вздовж циклу знаки чергуються.

Далі обчислюємо оцінку θ для клітинок циклу зі знаком «-», тобто знаходимо:

$$\theta = \min \left\{ x_{ij}^0 \right\} \ (i, j) \ \text{є «-»} \tag{9.5}$$

Будуємо новий базисний розв'язок

$$x^1 = \left\{ x_{ij}^1, i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n} \right\}$$

за таким правилом

$$x_{ij}^{1}=\begin{cases} x_{ij}^{0}, \text{якщо}\left(i,j\right)-\text{не належить множині вершин циклу;} \\ x_{ij}^{0}, \text{якщо } \left(i,j\right)-\text{ належить множині вершин циклу зі заком "+"} \\ x_{ij}^{0}, \text{якщо}\left(i,j\right)-\text{належить множині вершин циклу зі знаком "-".} \end{cases}$$

У результаті виокнання вказаних процедур клітинка $\left(k,l\right)$ стає заповненою і вводиться до сукупності базисних, а клітинка з мінімальним числом x_{ij}^{0} стає порожньою і перестає бути базисною. Новий розв'язок перевіряють на оптимальність згідно з умовою (9.4) розглянутого алгоритму і все повторюється.

Розглянемо застосування методу потенціалів для розв'язування ТЗ.

Приклад 1. Вихідний (ДБР) побудуємо за методом «північно-західного» кута, а потім покладаємо $u_3 = 0$ і знаходимо всі інші потенціали.

Таблиця 9.1

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	2 80	5 20	4	6	100	0
A_2	8	– 4 120	+ 3 80	8	200	1
A_3	5	1 +	4 – 20	5 80	100	0
b_i	80	140	100	80	$\sum_i a_i = \sum_j b_j = 400$	
v_j	2	5	4	5		

Далі застосовуємо метод потенціалів

Таблиця 9.2

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	2 80	– 5 20	4	+ 6	100	-1
A_2	8	100	3 100	8	200	-3
A_3	5	1 + 20	4	– 5 80	100	0
b_i	80	140	100	80		
v_j	-2	1	0	5		

Таблиця 9.3

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	2 80	5	4	6 20	100	-1
A_2	8	4 100	3 100	8	200	-3
A_3	5	1 40	4	5 60	100	0
b_j	80	140	100	80		
v_j	1	1	0	5		

Критерій оптимальності для таблиці 9.3 використовується, тому ця таблиця дає оптимальний зв’язок:

$$X = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 100 & 100 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 60 \end{pmatrix}.$$

$$Z_{\min} = 1120.$$

Приклад 2

Початковий базисний розв'язок знайдемо за правилом мінімальної вартості.

Таблиця 9.4

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	– 9 30	8 190	5	+ 6 150	370	0
A_2	+ 6	10	3 230	– 4 10	240	2
A_3	5 390	6	7	9	390	4
b_i	420	190	230	160	$\sum_i a_i = \sum_j b_j$ (задача збалансована)	
v_j	9	8	6	6		

Далі застосовуємо метод потенціалів.

Таблиця 9.5

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	^{9} − 20	^{8} 190	^{5} +	^{6} 160	370	0
A_2	^{6} + 10	^{10}	^{3} − 230	^{4} 10	240	3
A_3	^{5}	^{6}	^{7}	^{9}	390	4
b_j	390	190	230	160		
v_j	9	8	6	6		

Таблиця 9.6

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	^{9}	^{8} 190	^{5} 20	^{6} 160	370	0
A_2	^{6} 30	^{10}	^{3} 210	^{4}	240	2
A_3	^{5} 390	^{6}	^{7}	^{9}	390	3
b_j	420	190	230	160		
v_j	8	8	5	6		

Критерій оптимальності для таблиці 9.6 виконується, тому ця таблиця дає оптимальний розв'язок:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 190 & 20 & 160 \\ 30 & 0 & 210 & 0 \\ 390 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Питання для самоперевірки

1. Як записується двоїста задача до ТЗ закритого типу?
2. Як формулюється двоїстий критерій оптимальності для ТЗЛП?
3. Як визначаються потенціали?
4. Як знаходиться новий розв'язок?

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад. Розв'язати ТЗЛП збалансовану, таблиця 9.7, застосовуючи метод потенціалів. Початковий розв'язок знайти методом «північно-західного» кута і методом мінімальної вартості.

Табл.9.7

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	8	2	1	65
A_2	5	7	4	2	55
A_3	3	2	8	6	70
b_j	30	60	58	42	

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 58 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 42 \\ 10 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Практичне заняття 10

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З РОЗБАЛАНСОМ. ВИРОДЖЕНА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

План

1. Постановка ТЗЛП відкритого типу.
2. Перетворення відкритої моделі задачі в закриту.
3. Метод розв'язку ТЗЛП з розбалансом.
4. Метод розв'язку виродженої ТЗЛП.

Література: [1]; [2]; [3].

Методичні рекомендації

Мета заняття: навчитись розв'язувати ТЗЛП з розбалансом.

Після виконання практичного заняття 10 студент повинен *знати:*

– що таке відкрита модуль ТЗЛП;

– як вона зводиться до задачі закритого типу;

– що таке вироджена задача;

вміти:

– розв'язувати ТЗЛП з розбалансом;

– розв'язувати вироджену ТЗЛП.

Транспортна задача лінійного програмування, у якій виконується умова:

$$\text{а) } \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \text{ або } \sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (10.1)$$

називається задачею відкритого типу або задачею з розбалансом.

У випадку а всіх потреб споживачів задовольнити неможливо але розв'язок, який відповідає мінімальним транспортним витратам побудувати можна.

Роблять це так: вводять фіктивного постачальника A_{m+1}, якому приписують запас вантажу, що дорівнює $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{m} a_j$.

Усі тарифи на перевезення вантажу від цього фіктивного постачальника будемо вважати рівними 0, тобто $c_{m+1}, j = 0$, для будь-якого $j = \overline{1, n}$.

У транспортній таблиці додається один рядок. На цільову функцію це не вплине, а система обмежень задачі стане сумісною. Ця розширена ТЗЛП може бути розв'язана методом потенціалів. Нехай x^* оптимальний розв'язок цієї задачі. Тоді $x^*_{m+1, j} > 0$, $j = \overline{1, n} -$ об'єм вантажу недоставленого споживачеві B_j.

У випадку б в математичну модель ТЗ вводиться фіктивний B_{m+1} пункт призначення з потребами $b_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Усі тарифи на перевезення в цей пункт будемо вважати рівними 0, тобто $c_{i,n+1} = 0, i = \overline{1, m}$.

У транспортній таблиці додається один стовпчик. Відкрита модель задачі перетворюється в закриту. Для нової задачі цільова функція одна і та ж, що і для вихідної, оскільки ціни на додаткові перевезення рівні нулю. Ця задача може бути розв'язана методом потенціалів. Нехай $x^* -$ оптимальний розв'язок цієї задачі. Тоді $x^*_{i,n+1} > 0, i = \overline{1,m}$ $-$ залишок вантажу на складі з номером A_i.

Зауваження

На будь-якій ітерації в методі потенціалів базисний розв'язок розглядають невиродженим, який повинен містити $m+n-1$ зайнятих кліток.

Якщо на певній ітерації або з самого початку з'являється вироджений базисний розв'язок (який містить менше, ніж $m+n-1$ додатню компоненту), то описаний метод потенціалів потребує модифікації. Існує дві можливості його модифікації: теоретична та практична.

1. Теоретична.

Слід збурити вихідну ТЗЛП таким чином:

a_i замінити на $\bar{a}_i = a_i + \varepsilon, j = \overline{1,m}, \varepsilon > 0;$

і b_j замінити на $\bar{b}_j = \begin{cases} b_j, j = \overline{1,n-1}, \\ b_j + m\varepsilon, j = n, \varepsilon > 0. \end{cases}$

Можна показати, що існує таке $\varepsilon > 0$, що ні на одній ітерації методу потенціалів збуреної ТЗЛП розв'язок не буде виродженим. Нехай $x^*(\varepsilon)$ її оптимальний розв'язок, а x^* $-$ оптимальний розв'язок вихідної (ТЗЛП).

Тоді $x^* = x^*(\varepsilon)/\varepsilon = 0.$

Зауваження

Цей метод є модифікацією методу збурень Чарнеса для загальної ЗЛП.

2. Практична.

У виродженому випадку існує хоча б один рядок і один стовпчик в транспортній таблиці, які містять одну додатню перевозку, яка стоїть на їх перетині (клітина (i, j)). Для усунення виродженості достатньо одну нульову перевозку у відповідному рядку або стовпчику врахувати додатною.

Потрібно ввести її таким чином, щоб вона не утворила циклу з заданими додатними перевозками. Рекомендовано вибрати клітину (k,l) в тому рядку або стовпчику, яка (який) містить максимальну додатню перевозку.

Розглянемо приклад задачі з розбалансом.

Приклад. Нехай ТЗЛП задається слідуючою таблицею 10.1

Табл.10.1

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	^{17}	^{10}	^{5}	^{5}	^{13}	34
A_2	^{12}	^{28}	^{25}	^{9}	^{10}	18
A_3	^{14}	^{15}	^{18}	^{9}	^{28}	6
A_4	^{25}	^{16}	^{21}	^{12}	^{8}	12
b_j	20	20	10	15	35	

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 70;\ \sum_{j=1}^{5} b_j = 100.$$

$\sum_{i=1}^{4} a_i < \sum_{j=1}^{5} b_j$, тому вводимо фіктивного постачальника A_5 з вантажем $a_5 = 100 - 70 = 30$.

Запишемо розширену таблицю 10.2, до якої потім застосуємо метод потенціалів. Початковий базисний розв'язок знайдемо за методом мінімальної вартості.

Таблиця 10.2

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	^{17}	^{20} 9	^{7} 10	^{5} 15	^{13}	34	0
A_2	^{12} 18	^{28}	^{25}	^{9}	^{10}	18	-3
A_3	^{14} 2	^{15} 4	^{18}	^{9}	^{28}	6	-5
A_4	^{25}	^{16} 7^{-}	^{21}	^{12}	^{8} $^{+}5$	12	-6
A_5	^{0}	^{0} $^{+}$	^{0}	^{0}	^{0} $^{-}30$	30	2
b_j	20	20	10	15	35		
v_j	9	10	7	5	2		

У таблиці 10.2 $m+n-1=5+5-1=9$ розв’язок не вироджений.

Таблиця 10.3

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	^{17}	^{20} 9	^{7} 10	^{5} 15	^{13}	34	0
A_2	^{12} 18 –	^{28}	^{25}	^{9}	+ ^{10}	18	-3
A_3	^{14} 2 +	^{15} – 4	^{18}	^{9}	^{28}	6	-5
A_4	^{25}	^{16}	^{21}	^{12}	^{8} 12	12	2
A_5	^{0}	^{0} + 7	^{0}	^{0}	^{0} – 23	30	10
b_j	20	20	10	15	35		
v_j	9	10	7	5	2		

Таблиця 10.4

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	^{17}	^{20} 9	^{7} 10	^{5} 15	^{13}	34	0
A_2	– ^{12} 14	^{28}	^{25}	^{9}	+ ^{10} 4	18	0
A_3	^{14} 6	^{15}	^{18}	^{9}	^{28}	6	-2
A_4	^{25}	^{16}	^{21}	^{12}	^{8} 12	12	2
A_5	^{0} +	^{0} 11	^{0}	^{0}	^{0} – 19	30	10
b_j	20	20	10	15	35		
v_j	9	10	7	5	2		

Таблиця 10.5

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
À$_1$	^{17}	^{20} 9	^{7} 10	^{5} 15	^{13}	34	0
À$_2$	^{12}	^{28}	^{25}	^{9}	^{10} 18	18	0
À$_3$	^{14} 6	^{15} 4	^{18}	^{9}	^{28}	6	-4
À$_4$	^{25}	^{16}	^{21}	^{12}	^{8} 12	12	-6
À$_5$	^{0} 14	^{0} 11	^{0}	^{0}	^{0} 5	30	10
b_i	20	20	10	15	35		
v_j	9	10	7	5	2		

У останній таблиці 10.5 виконується критерій оптимальности тому ця таблиця дає оптимальний розв'язок:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 10 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 14 & 11 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Проаналізуємо ще один приклад, який ми розглядали в практичному занятті приклад 9 приклад 2, але початковий базисний розв'язок отримаємо за методом північно-західного кута, який буде вироджений.

Приклад.

A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	^{9} 370	^{8}	^{5}	^{6}	370	0
A_2	^{6} 50	^{10} − 190	^{3} + 0	^{4}	240	3
A_3	^{5}	^{6} +	^{7} − 230	^{9} 160	390	-1
b_j	420	190	230	160		
v_j	9	13	6	8		

Число заповнених клітинок дорівнює 5, а невироджений розв'язок повинен мати $m = n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$. Тому ми маємо вироджений випадок. Нульову додатню перевозку заносимо в клітину (2; 3), яка не утворює циклів з заповненими клітинками.

Далі застосовуємо метод потенціалів.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	9 370	8	5	6	370	0
A_2	6 – 50	10	3 + 190	4	240	3
A_3	5 +	6 190	7 – 40	9 160	390	-1
b_j	420	190	230	160		
v_j	9	13	6	8		

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	9 – 370	8	5	6 +	370	0
A_2	6 10	10	3 230	4	240	3
A_3	5 + 40	6 190	7	9 – 160	390	4
b_j	420	190	230	160		
v_j	9	10	6	13		

B_j / À$_i$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
À$_1$	− 210 ^{9}	+ ^{8}	^{5}	160 ^{6}	370	0
À$_2$	10 ^{6}	^{10}	230 ^{3}	^{4}	240	3
À$_3$	+ 200 ^{5}	− 190 ^{6}	^{7}	^{9}	390	4
b_i	420	190	230	160		
v_j	9	10	6	6		

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	− 20 ^{9}	190 ^{8}	+ ^{5}	160 ^{6}	370	0
A_2	+ 10 ^{6}	^{10}	− 230 ^{3}	^{4}	240	3
A_3	390 ^{5}	^{6}	^{7}	^{9}	390	4
b_j	420	190	230	160		
v_j	9	10	6	6		

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	^{9}	190 ^{8}	20 ^{5}	160 ^{6}	370	0
A_2	30 ^{6}	^{10}	210 ^{3}	^{4}	240	2
A_3	390 ^{5}	^{6}	^{7}	^{9}	390	3
b_j	420	190	230	160		
v_j	8	8	5	6		

Для цієї таблиці виконується критерій оптимальності, тому вона дає нам оптимальний розв'язок.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 190 & 20 & 160 \\ 30 & 0 & 210 & 0 \\ 390 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Питання для самоперевірки

1. Яка ТЗ називається задачею закритого типу, а яка – відкритою?

2. Як ТЗ відкритого типу (два випадки) зводиться до задачі закритого типу?

3. Як пояснити оптимальний розв'язок, отриманий у розширеній таблиці?

4. Що таке вироджений розв'язок ТЗЛП?

5. Як на практиці вироджений розв'язок зводиться до невиродженого?

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад. Розв'язати ТЗЛП з розбалансом, застосовуючи метод потенціалів.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	19	9	14	17	9	34
A_2	4	21	27	8	29	18
A_3	22	30	4	1	24	6
A_4	10	22	8	5	27	12
b_j	20	20	10	15	19	

Приклад. Розв'язати ТЗЛП методом потенціалів. Початковий розв'язок знайти методом «північно-західного» кута, отримавши вироджений розв'язок.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	24	19	5	9	23	33
A_2	15	16	3	13	6	31
A_3	7	28	29	21	20	33
A_4	4	28	29	21	20	33
b_j	33	25	25	25	22	

Практичне заняття 11

УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ, НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

План

1. Спосіб зведення задачі на умовний екстремум до задачі на звичайний екстремум.

2. Спосіб знаходження найбільшого і найменшого значення функції кількох змінних.

Література: [1]; [2]; [3].

Методичні рекомендації

Мета заняття: навчитись розв'язувати приклади на умовний екстремум і знаходити найбільше і найменше значення функції кількох змінних.

Після виконання практичного заняття 3.1 студент повинен *знати:*

– методику зведення задачі на умовний екстремум до задачі на звичайний екстремум;

– алгоритм відшукування найбільшого та найменшого значення функції кількох змінних;

вміти:

– розв'язувати задачі на умовний екстремум;

– знаходити найбільше і найменше значення кількох змінних.

Умовний екстремум

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$ за умови, що її аргументи зв'язані між собою співвідношенням:

$$\varphi(x, y) = 0. \qquad (11.1)$$

Співвідношення (11.1) визначає на площині $0xy$ деяку лінію L і називається рівнянням зв'язку. Нехай координати точки $M_0(x_0, y_0)$ задовольняють рівняння зв'язку (11.1), тобто точка M_0 лежить на лінії L.

Означення. Функція $z = f(M)$ має в точці M_0 умовний мінімум (максимум) за умови зв'язку (11.1), якщо існує такий окіл точки M_0, що для довільної точки $M(x, y)(M \neq M_0)$ із цього околу, координати якої задовольняють рівняння зв'язку (11.1), виконується нерівність:

$$f(M) > f(M_0);\ (f(M) < f(M_0)).$$

Таким чином, умовний максимум (мінімум) – це найбільше (найменше) значення функції в точці M_0 по відношенню не до всіх точок із деякого околу точки M_0, а тільки до тих з них, які задовольняють умову $\varphi(x, y) = 0$ (належать лінії L).

Наприклад, умовний мінімум функції $z = x^2 + y^2$ за умови $x + y = 1$ досягається в точці $M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, тоді як безумовний екстремум в точці $O(0; 0)$.

Точки умовного максимуму та мінімуму називаються точками умовного екстремуму.

Не завжди рівняння зв'язку можна параметризувати або розв'язати відносно певної змінної. У цьому випадку застосовують метод множників Лагранжа, який полягає в тому, що задача про умовний екстремум функції $z = f(x, y)$ за умови

$\varphi(x,y)=0$ заміняється еквівалентною задачею про звичайний екстремум функції Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y), \tag{11.2}$$

де λ – множник Лагранжа, який не залежить від x та y.

Відзначимо, що в довільній точці $M(x,y)$, координати якої задовольняють рівняння зв'язку $\varphi(x,y)=0$, виконується рівність:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y).$$

Для знаходження точок можливого екстремум функції (11.2) потрібно розв'язати систему трьох рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\ \frac{\partial L}{\partial y}=0,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0. \tag{11.3}$$

відносно незалежних змінних x, y та λ.

Якщо x_0, y_0, λ_0 один із розв'язків системи (11.3), то $M_0(x_0,y_0)$ – точка можливого екстремуму функції $z=f(x,y)$ за умови $\varphi(x,y)=0$.

Далі досліджується знак іншого диференціала Лагранжа d^2L у точках можливого екстремуму, при цьому враховується співвідношення:

$$d\varphi=0 \Leftrightarrow \frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy=0\left(dx^2+dy^2\neq 0\right).$$

Якщо $d^2L(M_0)>0$, то M_0 – точка умовного мінімуму, якщо $d^2L(M_0)<0$ – точка умовного максимуму.

Для функції $u=f(x_1,x_2\ldots,x_m)$ задача про умовний екстремум формулюється так: знайти екстремум функції m змінних $u=f(x_1,x_2\ldots,x_m)$ за умови, що незалежні змінні $x_1, \ldots, x_m$ задовольняють k рівнянь зв'язку$(k>m)$:

$$\varphi_1(x_1,\ldots,x_m)=0,\ \varphi_2(x_1,\ldots,x_m)=0,\ \varphi_k(x_1,\ldots,x_m)=0.$$

У цьому випадку допоміжна функція Лагранжа має вигляд

$$L(x_1,\ldots,x_m,\lambda_1,\ldots\lambda_k)=f(x_1,\ldots,x_m)+\lambda_1\varphi_1+\ldots+\lambda_k\varphi_k,$$

стаціонарні точки якої знаходять із системи $m+k$ рівнянь

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=0,\ldots,\ \frac{\partial L}{\partial x_m}=0;$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=\varphi_1=0,\ldots,\frac{\partial L}{\partial \lambda_k}=\varphi_k=0.$$

Приклад 1. При яких розмірах прямокутний паралелепіпед об'ємом 32 $см^3$, відкритий зверху, має найменшу поверхню.

Розв'язання. Позначимо довжини ребер паралелепіпеда через x, y і z (рис.1). Тоді $x\,y\,z=32$. Площа поверхні паралелепіпеда без верхньої грані обчислюється за формулою:

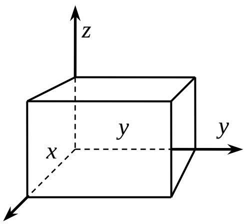

Рис.11.2

$$S\left(x,y,z\right)=xy+2xz+2yz\ .(11.4)$$

Таким чином, маємо задачу: знайти умовний екстремум функції $S\left(x,y,z\right)$ за умови зв'язку:

$$xyz-32=0\ . \qquad (11.5)$$

Складаємо функцію Лагранжа:

$$L=xy+2xz+2yz+\lambda\left(xyz-32\right), \quad (11.6)$$

необхідні умови екстремуму якої мають вигляд:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=y+2z+\lambda yz=0;\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=x+2z+\lambda xz=0;\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=2x+2y+\lambda xy=0;\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=xyz-32=0.\end{cases} \qquad (11.7)$$

Відзначимо, що за умовою задачі жодна зі змінних x, y, z не може дорівнювати нулю.

Розв'яжемо систему (11.7). Віднімаючи від першого рівняння системи друге, дістанемо

$$(y-x)(1+\lambda z)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ 1+\lambda z=0 \end{array}\right. .$$

Випадок $1+\lambda z=0$ неможливий, оскільки тоді $y+2z+\lambda yz=0 \Leftrightarrow y(1+\lambda z)+2z=0 \Rightarrow z=0$.

Отже, $x=y$ і система (9) набирає вигляду:

$$\begin{cases} y=x; \\ 4x+\lambda x_2^2=0; \\ x(1+\lambda z)+2z=0; \\ x^2 z=32. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=-\dfrac{4}{\lambda}; \\ z=-\dfrac{2}{\lambda}; \\ \left(-\dfrac{4}{\lambda}\right)^2\left(-\dfrac{2}{\lambda}\right)=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-1; \\ x=4; \\ y=4; \\ z=2. \end{cases}$$

Таким чином, $P(4;4;2;-1)$ – стаціонарна точка функції L, а $M(4;4;2)$ – точка можливого екстремуму функції (11.4) за умови (11.5).

Обчислимо $d^2L(P)$:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}=0; \quad \frac{\partial^2 L(P)}{\partial x \partial y}=1+\lambda z/p=-1;$$

$$\frac{\partial^2 L(P)}{\partial x \partial z}=1+\lambda y/p=-2; \quad \frac{\partial^2 L(P)}{\partial y \partial z}=1+\lambda z/p=-2;$$

Тоді

$$d^2L(P)=-2dxdy-4dxdz-4dydz\,. \qquad (11.8)$$

Виразимо dz через dx і dy :

$$d(xyz-32)=0 \Leftrightarrow yzdx+xzdy+yxdz=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow dz=-\frac{z}{x}dx-\frac{z}{y}dy, \;\; x\neq 0, \;\; y\neq 0.$$

У точці $M(4;4;2): dz=-\dfrac{1}{2}dx-\dfrac{1}{2}dy.$

Підставляючи значення dz у формулу (11.8), дістанемо $d^2L(P)=-2\left(dxdy-2(dx-dy)\dfrac{dx+dx}{2}\right)=dx^2+dy^2+(dx+dy)^2>0.$

Отже, функція $S(x,y,z)$ за умови (11.6) досягає в точці $M(4;4;2)$ мінімуму, при цьому $S_{\min} = 48.$

Найбільше і найменше значення функції кількох змінних

Нехай у замкненій та обмеженій області D задано неперервну функцію $z = f(x,y)$. Тоді, згідно з теоремою Вейерштрасса, функція z досягає в області D свого найбільшого або найменшого значення.

Відшукування цих значень проводиться за таким алгоритмом:

1) знайдемо всі точки можливого екстремуму функції z, які належать області D. Це стаціонарні точки і точки, в яких не існує хоча б одна частинна похідна: $\dfrac{dz}{dx}$ або $\dfrac{dz}{dy}$;

2) знайдемо всі точки межі області D, в яких може бути екстремум. Для цього потрібно, наприклад, скласти функцію Лагранжа і знайти її стаціонарні точки і точки, в яких хоча б одна Із частинних похідних не існує;

3) знайдемо точки перетину різних гладких частин і межі;

4) обчислимо значення функції у відібраних точках і виберемо серед них найбільше і найменше значення.

Зауважимо, що немає необхідності перевіряти достатні умови екстремуму.

Приклад 1. Знайти найбільше і найменше значення функції $u = x - 2y + 2z$ в області $D = \{(x,y) / x^2 + y^2 + z^2\}.$

Розв язання. Область D куля радіуса 1 з центром у початку координат.

Обчислимо частинні похідні функції $u(x,y,z)$ *:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \frac{\partial u}{\partial y} = -2; \frac{\partial u}{\partial z} = 2.$$

Оскільки частинні похідні не рівні нулю в жодній точці кулі, то стаціонарних точок функція $u(x,y,z)$ не має. Отже, її максимальне та мінімальне значення досягається на сфері $x^2+y^2+z^2=1$.

Складемо функцію Лагранжа:

$L=x-2y+2z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$ і розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x=0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=-2+2\lambda y=0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=2+2\lambda z=0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-1. \end{cases}$$

З перших трьох рівнянь системи знаходимо:

$$x=-\frac{1}{2\lambda}, \qquad y=\frac{1}{\lambda}, \qquad z=-\frac{1}{\lambda}.$$

Підставляючи ці значення в останнє рівняння системи, дістанемо:

$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=1,$$

звідки $\lambda=\pm\frac{3}{2}$. Параметру $\lambda=\frac{3}{2}$ відповідає точка $M_1\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$, а $\lambda=-\frac{3}{2}$ – точка $M_2\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$. Обчислимо значення функції $u\left(x,y,z\right)$ в точках M_1 і M_2:

$$u\left(M_1\right)=-\frac{1}{3}-2\cdot\frac{2}{3}+2\left(-\frac{2}{3}\right)=-3;$$

$$u\left(M_2\right)=\frac{1}{3}-2\left(-\frac{2}{3}\right)+2\cdot\frac{2}{3}=3.$$

Отже,

$$\max_D u\left(x,y\right)=u\left(M_2\right)=3; \max_D u\left(x,y\right)=u\left(M_1\right)=-3.$$

Питання для самоперевірки

1. Які точки називаються точками умовного екстремуму?

2. Які методи використовують при розв'язанні задач на умовний екстремум?

3. У чому полягає суть методу множників Лагранжа?

4. Який алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значення?

Приклади для самостійного розв'язання

Знайти умовний екстремум функції:

1) $z = x^2 - y^2$, якщо $x + 2y - 6 = 0$;

2) $z = 8 - 2x - 4y$, якщо $x^2 + 2y^2 - 12 = 0$;

3) $u = xyz$, якщо $x + y - z = 8$.

Відповіді:

1) $z_{\min} = f(-2;-4) = -12$;

2) $z_{\min} = f(2;2) = -4;\ z_{\max} = f(-2;-2) = 20;$

3) $u_{\min} = f(2;2;2) = 8.$;

Знайти найбільше і найменше значення функції у вказаній області.

1) $z = x^2 + y^2 - xy = 3x + 3y + 7, x \ge 0, y \le 0, x - y \le 3;$

2) $z = x^3 + y^3 - 3x - 9y + 9, x + |y| \le 3;$

3) $z = x + 2y - 2z; z \le \sqrt{9 - x^2 - y^2}, z \ge x^2 + y^2 - 9.$

Відповіді:

1) $z_{\min} = f(1;-1) = 4;\ z_{\max} = f(0;0) = f(0;-3) = f(3;0) = 7;$;

2) $z_{\max} = f(3;0) = 27; z_{\min} = f\left(\frac{7}{6};\frac{11}{6}\right) = -12,75;$

3) $u_{\max} = f\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};-8\frac{11}{16}\right) = 18\frac{1}{8}; u_{\min} = f(-1;-2;2) = -9;$

Практичне заняття 12

ЦІЛОЧИСЕЛЬНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

План

1. Суть методу відтинання Гоморі.
2. Суть методу гілок і меж (алгоритм Ленд-Дойг).
3. Розв'язування прикладів на застосування цих методів.

Література: [1]; [2]; [3].

Методичні рекомендації

Мета заняття – навчитись розв'язувати задачі цілочисельного програмування (ЗЦП), застосовуючи названі методи. Після виконання практичного заняття 12 студент повинен *знати:*

– алгоритм методу Гоморі;

– алгоритм методу гілок і меж;

вміти:

– розв'язувати ЗЦП, використовуючи метод Гоморі;

– розв'язувати ЗЦП, використовуючи метод гілок і меж. Постановка цілочисельної задачі лінійного програмування (ЦЗЛП).

ЦЗЛП будемо називати задачу знаходження вектора $x=\left(x_1,\dots,x_n\right)\in E^n$, що мінімізує цільову функцію:

$$L\left(X\right)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j, \tag{12.1}$$

задовольняючи умови

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \underset{(\geq)}{\overset{(\leq)}{=}} b_i, i=1,\ \dots,\ m, \tag{12.2}$$

$$x_j\geq 0, j=1,\ \dots,\ n, \tag{12.3}$$

$$x_j - \text{ціле},\ \ j=1,\ \dots,\ k\left(k\leq n\right). \tag{12.4}$$

Якщо $k=n$ то (12.1) – (12.4) називається повністю цілочисельною ЗЛП (ПЦЗЛП), інакше – частково цілочисельною ЗЛП (ЧЦЗЛП).

Як бачимо, сформульовані задачі (12.1) – (12.4) відрізняються від звичайної ЗЛП наявністю умов (12.4). Це призводить до необхідності застосування спеціальних методів їх розв'язування.

Далі будуть розглянуті деякі методи розв'язування повністю цІлочисельної задачі (12.1) – (12.4).

Метод відтинання Гоморі

Ідея розв'язування була запропонована Данцигом. Пропонувалось розв'язати задачу (12.1) – (12.3), відкинувши умову (12.4), знайти її оптимальний розв'язок: x^*. Якщо умова цілочисельностI виконується, то x^* – оптимальний розв'язок задачі (12.1) – (12.4).

Якщо задача (12.1) – (12.3) розв'язку немає, то і ПЦЗЛП розв'язку немає.

Якщо розв'язок задачі (12.1) – (12.3) не є цілочисельним, то будуємо додаткове обмеження (нерівність), яке називається відтинанням, але таке, щоб воно не відкинуло ні одного допустимого розв'язку. Тобто, щоб воно задовольняло двом умовам:

1) отриманий розв'язок йому не задовольняв;

2) будь-який цілочисельний розв'язок йому задовольняв.

Гоморі запропонував метод побудови таких обмежень, які призводять до побудови цілочисельного розв’язку за кінцеве число кроків.

Нехай розв’язана задача (12.1) – (12.3) і канонічна форма:

$$\begin{cases} x_1 + \quad \ldots + \alpha_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 + \ldots + \alpha_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad x_m + \alpha_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{12.5}$$

дає оптимальний розв’язок: $x^* = \{b_1, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0\}$ і нехай деяке b_1 – не ціле, тоді:

$$b_i = [b_i] + \{b_i\};\ 0 \le \{b_i\} < 1,$$

де $[b_i]$ – ціла частина, $\{b_i\}$ – дробова частина.

Розглянемо i – те рівняння, яке входить до (4.5):

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \left(\left[a_{ij} \right] + \left\{ a_{ij} \right\} \right) x_j = \left(\left[b \right] + \left\{ b_i \right\} \right)$$

Перепишемо його так:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \left[a_{ij} \right] x_j - \left[b_i \right] = \left\{ b_i \right\} - \sum_{j=m+1}^{n} \left\{ a_{ij} \right\} x_j . \qquad (12.6)$$

Покажемо, що шуканим обмеженням, яке:

1) відтинає x^* від допустимої області;

2) не відтинає ні одного цілочислового розв'язку;

є нерівність:

$$\left\{ b_i \right\} - \sum_{j=m+1}^{n} \left\{ a_{ij} \right\} x_j \le 0. \qquad (12.7)$$

1) перевіряється просто: треба x^* підставити в (12.5);

2) теж перевірити просто: якщо x – цілочисельний розв'язок, то ліва частина (12.6) – цілочисельна, тоді і права частина повинна бути цілочисельною.

Обмеження (12.7) містить нерівність $(\le)$. Якщо б обмеження (12.7) було б (>0), то у зв'язку з тим, що $0 \le \left\{ b_i \right\} < 1$ і $0 \le \left\{ a_{ik} \right\} < 1$ повинна була б виконуватись нерівність:

$$\left\{ b_i \right\} - \sum_{j=m+1}^{n} \left\{ a_{ij} \right\} x_j < 1,$$

що заперечує умові цілочисельності.

Суть алгоритму методу Гоморі

1. Вихідну задачу розв'язуємо симплекс-методом (С-М), відкидаючи умову (12.7). Нехай x^* – розв'язок задачі (12.1) – (12.3). Якщо всі компоненти в x^* – цілі, то розв'язок задачі (12.1) – (12.4) знайдено. Якщо хоча б одна координата не ціла, то переходимо до другого пункту.

2. Для першої з них будуємо відтинання Гоморі – обмеження (12.7).

3. Приєднуємо це обмеження до обмежень 12.5.

4. Розв'язуємо розширену задачу лінійного програмування двоїстим С-М. Якщо в отриманому розв'язку хоча б одна координата не ціла, то процес повторюється.

За кінцеву кількість кроків отримаємо цілочисельний розв'язок.

Зауваження

Ознакою відсутності цілочисельного розв'язку в ЗЦЛП є поява хоча б одного рядка з дробовим вільним членом і цілими останніми коефіцієнтами. У цьому випадку відповідне рівняння не має розв'язку в цілих числах.

Далі розглянемо приклад на застосування запропонованого методу.

Приклад 1. Розв'язати ЦЗЛП: $x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0, x_j \ - \text{цілі}.$$

Розв'язання. Вводячи додаткові змінні $x_3, x_4, x_5 \ge 0$ зводимо її до канонічної ЗЛП і розв'язуємо її звичайним симплекс-методом:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5} \right).$$

Таблиця 12.1

№	Б	$C_Б$	A_0	1	2	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	2	1	-2	1	0	0
2	A_4	0	2	-2	$\boxed{1}$	0	1	0
3	A_5	0	3	1	1	0	0	1
$\Delta_j = z_j - c_j$				-1	-2	0	0	0

Вектор A_2 вводимо в базис, а вектор A_4 виводимо з базису $A_2 \to Б \to A_4$

Таблиця 12.2

1	A_3	0	6	-3	0	1	2	0
2	A_2	2	2	-2	1	0	1	0
3	A_5	0	1	$\boxed{3}$	0	0	-1	1
$\Delta_j = z_j - c_j$				-5	0	0	2	0

Вектор A_1 вводимо в базис, а вектор A_5 виводимо з базису $A_1 \to Б \to A_5$

Таблиця 12.3

1	A_3	0	7	0	0	1	1	1	0
2	A_2	2	8/3	0	1	0	1/3	2/3	0
3	A_1	1	1/3	1	0	0	-1/3	1/3	0
$\Delta_j = z_j - c_j$				0	0	0	1/3	5/3	
4	A_6	0	-2/3	0	0	0	$\boxed{-1/3}$	-2/3	1

Згідно з алгоритмом Гоморі будуємо додаткове обмеження:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 \le 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 \le -\frac{2}{3}.$$

Одержану задачу лінійного програмування ЗЛП розв'язуємо двоїстим симплекс-методом.

Таблиця 12.4

№	Б	$C_Б$	A_0	1	2	0	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_3	0	5	0	0	$\boxed{1}$	0	-1	3
2	A_2	2	2	0	1	0	0	0	1
3	A_1	1	1	1	0	0	0	1	-1
4	A_4	0	2	0	0	0	1	2	-3
$\Delta_j = z_j - c_j$				0	0	0	0	1	1

У стовпчику A_0 всі елементи цілі, тому отримуємо:

$x^* = \{1; 2; 5; 8; 0\}$ – розв'язок; при такому розв'язку максимальне значення цільової функції: $Z_{\max} = 5$.

Метод гілок і меж (алгоритм Ленд-Дойг)

Цей метод, як і метод Гоморі, широко використовується для розв'язання задач цілочисельного лінійного програмування. Метод належить до класу комбінаторних методів і зводиться до направленого перебору варіантів розв'язків оптимізаційної задачі.

Розглянемо як працює цей метод на прикладі ПЦЗЛП на площині.

Знайти вектор $\bar{x} = \{x_1; x_2\}$, що мінімізує (максимізує) цільову функцію

$$L(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \tag{12.8}$$

і задовольняє систему обмежень:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2\ R_1\ b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2\ R_2\ b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2\ R_m\ b_m \end{aligned} \tag{12.9}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,2}\right), \tag{12.10}$$

$$x_j \ - \text{цілі} \ \left(j = \overline{1,2}\right). \tag{12.11}$$

Символ $R_i\left(i = \overline{1,m}\right)$ – це один зі знаків: $\geq; =; \leq$.

Вважається, що багатогранна множина, яку задають співвідношення (12.9) – (12.11) – обмежена, а коефіцієнти c_j цільової функції (12.8) – цілі числа.

Приведемо метод «гілок і меж», який запропонували Ленд і Дойг.

Розвізуємо ЗЛП (12.8) – (12.10), яка отримана з вихідної ПЦЗЛП (12.8) – (12.11) відкиданням умови цілочисельності змінних (12.11). Якщо її розв'язок $x^0 = \left\{x_1^0; x_2^0\right\}$ – цілочисельний, то він є розв'язком задачі (12.8) – (12.11) і ми на цьому зупиняємось.

Якщо ні, то $L\left(x^0\right)$ – дає нижню оцінку цільової функції ЗЦЛП на множині $D^0 = D$, що визначається співвідношеннями (2), (3).

Нехай деяка координата x_j^0 не є цілочисельною, тобто:

$$x_j^0 = \left[x_j^0\right] + \left\{x_j^0\right\},$$

де $\left[x_j^0\right]$ – ціла частина, $\left\{x_j^0\right\}$ – дробова частина.

У цьому разі здійснюється розгалуження множини D^0 на дві підмножини: $D^{1,1}$ і $D^{1,2}$, додавання до обмежень, що задають D^0, обмежень:

$$x_j \le \left[x_j^0\right] \text{ і } x_j \ge \left[x_j^0\right] + 1.$$

Зауваження

Якщо таких компонент декілька, то розгалуження здійснюється за нецілочисельною компонентою x_j^0 з мінімальним j.

Далі розв'язування ЗЦЛП (12.8) – (12.11) зводиться до розв'язку двох ЗЛП, які визначаються підмножинами $D^{1,1}$ і $D^{1,2}$.

Нехай $x^{1,1}$ і $x^{1,2}$ – оптимальні розв'язки цих задач. Якщо ці розв'язки цілочисельні, то оптимальним розв'язком буде той, для якого значення цільової функції (оцінка) буде менша (більша).

Якщо ні $x^{1,1}$, ні $x^{1,2}$ не цілочислові, тоді проводимо розгалуження тієї з задач, для якої оцінка менша (більша).

Зауваження

Очевидно, що кожна наступна задача, яка складається у процесі застосування методу «гілок і меж», відрізняється від попередньої тільки однією нерівністю – обмеженням. Тому, розв'язуючи кожну наступну задачу, недоцільно розв'язувати її симплекс-методом з самого початку. Рекомендовано почати розв'язування з останнього кроку попередньої задачі, в системі обмежень якої усунути "старі" (одне або два рівняння) – обмеження і ввести в цю систему нові рівняння – обмеження.

Процес розгалуження закінчується в тому випадку, коли на певному кроці для однієї з задач нижнього рівня отримаємо цілочисельний оптимальний розв'язок, причому значення цільової функції (ЦФ) на ньому не більше (не менше), як значення ЦФ на оптимальних розв'язках інших задач нижнього рівня, причому ці розв'язки можуть бути нецілочисельними.

Зауваження

Вихідна задача в процесі розгалуження розпадається на більш простіші. Тому розв’язування цієї задачі може бути зображено у вигляді дерева, в узлах (вершинах) якого позначені номери поточних задач.

Зрозуміло, що розглянутий метод через скінченність допустимої множини D є скінченним. Однак у загальному випадку неможливо аналітично оцінити кількість ітерацій, необхідних для розв’язання конкретної оптимізаційної задачі. Практика свідчить, що для задач з великим числом змінних кількість ітерацій може виявитися неприпустимо великою навіть під час її розв’язання на ЕОМ.

Приклад. Розв’язати методом «гілок і меж» задачу цілочисельного лінійного програмування:

$$L(x) = -4x_1 - x_2 \to \min;$$

$$-4x_1 + x_2 \le 4, \quad x_1 + x_2 \le 6, \quad x_1 - 3x_2 \le 4,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 \ - \text{цілі}.$$

Як і у випадку методу Гоморі, знайдемо оптимальний розв’язок ЗЛП, відкинувши умову цілочисельності. Для цього застосовується симплекс-метод. У цьому прикладі розв’язок можна знайти графічно:

$$\begin{array}{lcl} -4x_1 + x_2 \le 4 & & -4x_1 + x_2 = 4; \\ x_1 + x_2 \le 6 & \Rightarrow & x_1 + x_2 = 6; \\ -x_1 + 3x_2 \ge -4 & & -x_1 + 3x_2 = -4; \end{array}$$

1) $-4x_1 + x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 4 + 4x_1;$

$x_1 = 0;\ x_2 = 4;\ x_1 = 1;\ x_2 = 8;$

2) $x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 6 - x_1;$

$x_1 = 0;\ x_2 = 6;\ x_1 = 5;\ x_2 = 1;$

3) $-x_1 + 3x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = \dfrac{-4 + x_1}{3};$

$x_1 = 4;\ x_2 = 0;\ x_1 = 1;\ x_2 = -1.$

Цільова функція:

$-4x_1 - x_2 \to \min;$

$$-4x_1 - x_2 = 0,\ x_2 = -4x_1;$$
$$x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_1 = 1;\ x_2 = -4;$$
$$C = (-4; -1).$$

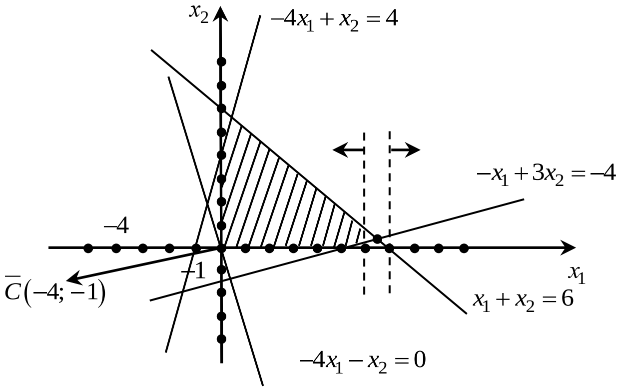

Рис.12.1

Знайдемо x^* на 0 кроці:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 = -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 4 + 3x \\ (4 + 3x_2) + x_2 = 6 \end{array}\right. \Rightarrow 4 + 4x_2 = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2};$$

$x^0 = \left(x_1^0; x_2^0\right) = \left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$ – оптимальний розв’язок ЗЛП, що отриманий з вихідної ЦЗЛП відкиданням умови цілочисельності:

$$L\left(x^0\right) = -\frac{45}{2}.$$

Будемо позначати через D з належними індексами допустимі області допоміжних ЗЛП.

Знайдемо нижню границю:

$$\zeta\left(D^0\right) = \left]-\frac{45}{2}\right[= -22.$$

Проводимо розгалуження множини D^0:

$$D^0 = D^{1,1} \cup D^{1,2}$$

$$D^{1,1} = \left\{ x : x \in D^0, x_1 \le \left[\frac{11}{2} \right] = 5 \right\};$$

$$D^{1,2} = \left\{ x : x \in D^0, x_1 \ge \left[\frac{11}{2} \right] + 1 = 6 \right\}.$$

Додаємо кожне з цих обмежень до вихідної ЗЛП:

Розв'язуємо допоміжні ЗЛП:

$$L(x) = -4x_1 - x_2 \to \min,\ x \in D^{1,1} : ("+" x_1 \le 5); \qquad (1)$$

$$L(x) = -4x_1 - x_2 \to \min,\ x \in D^{1,2} : ("+" x_1 \ge 6). \qquad (2)$$

Розв'язок задачі (1) має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5; \\ 5 + x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 1; \end{cases}$$

$$x^{1,1} = (5;1)$$

$$L\left(x^{1,1}\right) = -21.$$

Задача (2) розв'язку не має, оскільки відсутній перетин з множиною D^0. Але $x^{1,1} = (5;1)$ – розв'язок цілочисельний і є розв'язком не лише поточної ЗЛП, а і вихідної ЦЗЛП: $L\left(x^{1,1}\right) = -21$.

Наведений розв'язок ілюструється такою схемою, поданою на рис. 12.2

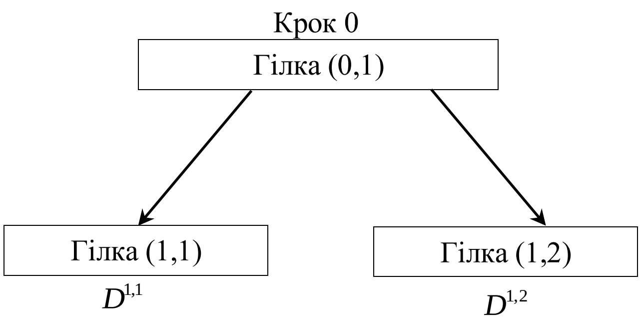

Рис. 12.2

$+x_1 \le 5$ | $+x_1 \ge 6$

$x^{1,1} = (5;1)$ | $D^{1,2} = \varnothing$

$L\left(x^{1,1}\right) = -21$ | $\zeta = +\infty$

Отже, $x^* = (5,1)$ – розв'язок вихідної ЦЗЛП, $L(x^*) = -21$.

Запитання для самоперевірки

1. Яка задача називається повністю цілочисельною задачею і яка частково цілочисельною задачею ЛП?
2. У чому полягає суть методу Гоморі?
3. У чому полягає суть методу гілок і меж?

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад 1. Розв'язати методом Гоморі ЦЗЛП:

$$z(x) = -4x_1 + x_2 \to \min$$

$$-4x_1 + x_2 \le 4$$

$$x_1 + x_2 \le 6$$

$$x_1 - 3x_2 \le 4$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$$

$$x_1;\ x_2 \ - \text{цілі.}$$

Відповідь: $X_{\text{опт}} = \{5;1\}$; $Z(X_{\text{опт}}) = -21$.

Приклад 2. Розв'язати ЦЗЛП методом гілок і меж:

$$z(x) = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$x_1 - 2x_2 \le 2$$

$$-2x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_1 + x_2 \le 3$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$$

$$x_1;\ x_2 \ - \text{цілі}$$

Відповідь: $X_{\text{опт}} = \{1;2;5;8;0\}$; $Z(X_{\text{опт}}) = 5$.

Приклад 3. Розв'язати (ЦЗЛП) методом гілок і меж

$$z(x) = -2x_1 - x_2 \to \min$$

$$6x_1 + 4x_2 \le 24$$

$$x_1 - x_2 \le 3$$

$$-x_1 + 3x_2 \le 3$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$$

$x_1;\ x_2$ – цілі

Відповідь: $X_{\text{опт}} = \{3;1\};\ Z(X_{\text{опт}}) = -7.$

Практичне заняття 13

ЗАДАЧА ПРО ОПТИМАЛЬНІ ПРИЗНАЧЕННЯ

План

1. Економічна постановка і математична модель задачі про оптимальні призначення.
2. Суть Угорського методу, розв'язання поставленої задачі.
3. Приклад на застосування запропонованого методу.

Література: [1]; [2]; [3].

Після виконання практичного заняття 13 студент повинен *знати:*

– постановку задачі про оптимальні призначення;

– алгоритм Угорського методу;

вміти:

– записувати математичну модель задачі про оптимальні призначення;

– застосовувати алгоритм Угорського методу до поставленої задачі.

Економічна постановка задачі

Є n видів робіт $\left(j = \overline{1,n}\right)$ та n виконавців цих робіт.

Передбачено, що *i*–й виконавець може виконати будь-яку *j*–ту роботу, але з цим пов'язані витрати c_{ij}.

Ці витрати утворюють матрицю $C = \{c_{ij}\};\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}.$ Потрібно призначити кожного виконавця на виконання однієї роботи так, щоб пов'язані з цим витрати були мінімальними.

Математична модель цієї задачі

Потрібно знайти матрицю $X = \{x_{ij}\};\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}$ розв'язків поставленої задачі, де

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i\text{-й виконавець виконує } j\text{-ту роботу} \\ 0, \text{ якщо } i\text{-й виконавець не виконує } j\text{-ту роботу.} \end{cases}$$

При цьому виконуються такі обмеження:

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\left(i = \overline{1,n}\right)$ кожен виконавець отримав роботу;

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1\left(j = \overline{1,n}\right)$ кожна робота отримала виконавця.

І мінімізується така функція мети:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Цю задачу розв'язують Угорським методом. Розглянемо в чому полягає суть Угорського методу.

Крок 0. Перетворюємо матрицю C у матрицю $C'\left(C \to C'\right)$:

$$C' = \left\{c'_{ij}\right\} = \left\{c_{ij} - \min_{1 \le i \le n} c_{ij}\right\}.$$

Матрицю C' перетворюємо в матрицю $D\left(C' \to D\right)$:

$$D = \left\{d_{ij}\right\} = \left\{c'_{ij} - \min_{1 \le j \le n} c'_{ij}\right\}$$

Матриця D містить в собі як мінімум один 0 в кожному рядку і кожному стовпчику.

Крок 1. а) помічаємо зірочкою «*» будь-який 0 першого стовпчика матриці D, помічаємо зірочкою «*» будь-який 0 другого стовпчика матриці D, який не лежить в рядку з раніше позначеним 0. Якщо такого не знайдеться, переходимо до 3-го стовпчика і так далі;

б) якщо число 0, із «*» дорівнює n, тобто 0*$=n$ то на цьому зупиняємося і задача враховується розв'язаною. До того ж на місті x_{ij}, які відповідають 0* ставимо 1, останні елементи прирівнюємо;

в) якщо число 0*$< n$, то переходимо на крок 2.

Крок 2. а) Помічаємо «+» стовпчики, які містять 0* і вважаємо елементи цих стовпчиків зайнятими. Надалі з'являться і зайняті рядки.

Означення. Незайняті елементи – це елементи які лежать на перетині незайнятого рядка і незайнятого стовпчика.

б) Якщо в матриці немає ні одного незайнятого 0, тоді переходимо на крок 5.

в) Якщо є незайняті 0, то помічаємо штрихом «’» перший незайнятий 0, продивляючись по черзі рядки матриці D.

г) Якщо в рядку з $0'$ немає 0*, то переходимо на крок 3.

Крок 3. Знімаємо зайнятість $\oplus$ з елементів стовпчика, в яких знаходиться 0* і вважаємо їх незайнятими. Елементи рядка з $0'$ вважаємо зайнятими (ставимо «+» на $i-$ тому рядку) і переходимо на крок 2 пункт б.

Крок 4. Будуємо ланцюжок від $0'$ до 0*, далі по горизонталі до $0'$; далі по вертикалі до 0* і так далі, доки він не обірветься на одному з $0'$ (можливо на першому). Знімаємо зірочки («*») з нулів вздовж ланцюга, а кожний штрих («’») замінюємо на («*»). Знімаємо всі позначки, крім зірочок («*»). При цьому кількість 0* збільшилась на 1. Далі переходимо на крок 1 пункт б.

Крок 5. Знаходимо мінімальний незайнятий елемент, який віднімаємо з елементів всіх незайнятих рядків і додаємо до елементів всіх зайнятих стовпчиків, при цьому з’явиться як мінімум, один незайнятий 0, далі перходимо на крок 2 пункт в.

Зауваження

1. Якщо в задачі про оптимальні призначення, цільову функцію треба максимізувати, то для її розв’язання можна застосувати Угорський метод, замінивши матрицю *C* на –*C*.

2. За означенням в задачі про оптимальні призначення матриця витрат квадратна. Якщо матриця *C* не є квадратною, то вона перетворюється до такої додаванням потрібної кількості додаткових рядків або стовпців з відповідними елементами $c_{ij}=0$. У 1-му випадку роботи, що отримали оптимальні призначення в додаткових рядках, залишаються без виконавців. У 2-му – виконавці, які отримали оптимальні призначення в додаткових стовпцях, залишаються без роботи.

Приклад. Розв’язати задачу про призначення Угорського методу, заданою матрицею:

$$C=\begin{pmatrix}11&15&20&16\\12&13&17&14\\14&16&19&18\\14&15&18&20\end{pmatrix}\Rightarrow C'\begin{pmatrix}0&2&3&2\\1&0&0&0\\3&3&2&4\\3&2&1&6\end{pmatrix}\Rightarrow D\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}+&\oplus&+&-\end{array}\\\begin{pmatrix}0*&2&3&2\\1&0*&0&0'\\1&\boxed{1}&0*&2\\2&1&0&5\end{pmatrix}\end{array}\Rightarrow$$

$\boxed{1}$ – за алгоритмом це мінімальний незайнятий елемент матриці.

$$\begin{array}{cc}\begin{array}{cccc}+&\oplus&\oplus&-\end{array}&\\\begin{pmatrix}0^*&1&3&1\\2&0^*&1&0'\\1&0'&0^*&1\\2&0'&0&4\end{pmatrix}&\begin{array}{c}-\\+\\+\\-\end{array}\end{array}\Rightarrow\begin{pmatrix}0^*&1&3&1\\2&0&1&0^*\\1&0'&0^*&1\\2&0^*&0&4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

В отриманій матриці число нулів з зірочкой дорівнює 4 (розміру матриці C), тому вона дає оптимальний розв’язок задачі:

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Згідно цієї матриці, оптимальні призначення запишуться так:

$$\begin{array}{c}1\rightarrow 1\\2\rightarrow 4\\3\rightarrow 3\\4\rightarrow 2\end{array}$$

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте економічну постановку задачі.
2. Як будується математична модель задачі?
3. До якого класу задач вона належить?
4. У чому полягає суть Угорського методу?

Приклади для самостійного розв'язання

Розв'язати задачі про призначення Угорським методом за заданими матрицями.

Приклад 1.

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 15 & 20 & 16 \\ 26 & 13 & 22 & 14 \\ 14 & 16 & 19 & 18 \\ 14 & 24 & 18 & 20 \end{pmatrix}.$$

Відповідь:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 8 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & 6 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Відповідь:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Список використаної літератури

1. *Математическое* программирование в примерах и задачах/ И.Л. Акулич. – М.: Высш. шк., 1986 – 319 с.

2. *Математичне* програмування: Навч. посібник/ М.М. Глушик, І.М. Копич, О.С. Пенцак, В.М. Сороківський. Львів: «Новий Світ – 2000», 2005. – 216 с.

3. *Исследование* операций в экономике под ред. Н.Ш. Кремера – М.: ЮНИТИ, 1999. – 407 с.

ЗМІСТ

Вступ…………………………………………………………3
1. Метод Гаусса. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)…………………………………….4
2. Різні форми задач лінійного програмування (ЗЛП)…………...10
3. Геометрична інтерпретація та графічний метод розв'язку (ЗЛП)………………………………………………...14
4. Симплексний метод (СМ) розв'язування ЗЛП………………..23
5. Теорія двоїстості…………………………………………….27
6. Двоїстий симплекс-метод (ДСМ) або метод послідовного уточнення оцінок……………………………………………...32
7. Постановка транспортної задачі лінійного програмування (ТЗЛП)………………………………………………………….36
8. Методи пошуку вихідного допустимого базисного розв'язку (ДБР)…………………………………………………………...39
9. Метод потенціалів для розв'язку ТЗЛП……………………..…43
10. ТЗЛП з розбалансом. Вироджена (ТЗЛП)…………………….48
11. Умовний екстремум, найбільше і найменше значення функції кількох змінних……………………………………………...57
12. Цілочисельне програмування……………………………….65
13. Задача про оптимальні призначення………………………..76
14. *Література*………………….…………………………….82