УДК 539.382.2

Ластівка Іван Олексійович
доктор технічних наук, професор,
завідувач кафедри вищої математики
Національний авіаційний університет
Ластивка Иван Алексеевич
доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой высшей математики
Национальный авиационный университет
Lastivka Ivan
Doctor of Technical Sciences, Professor,
Head of the Department of Higher Mathematics
National Aviation University

Богатирчук Анатолій Степанович
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри вищої математики
Національний авіаційний університет
Богатырчук Анатолий Степанович
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики
Национальный авиационный университет
Bogatyrchuk Anatoliy
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Higher Mathematics
National Aviation University

Кудзіновська Інна Павлівна
кандидат технічних наук, доцент
доцент кафедри вищої математики
Національний авіаційний університет
Кудзиновская Инна Павловна
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики
Национальный авиационный университет
Kudzinovs'ka Inna
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Higher Mathematics
National Aviation University

ДО РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОМПОЗИТНИХ ОБОЛОНОК З ОТВОРАМИ

К РАСЧЕТУ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК С ОТВЕРСТИЯМИ

TO CALCULATION OF THE TENSELY-DEFORMED STATE OF COMPOSITE SHELLS WITH HOLES

Анотація. *Запропоновано метод визначення напружено-деформованого стану циліндричної композитної оболонки з отворами. Використано модель оболонок типу Тимошенка. Застосовано метод скінченних елементів. Досліджено розподіл напружень навколо отворів залежно від зміни параметрів оболонки.*

Ключові слова: *оболонка, круговий отвір, композитний матеріал, метод скінченних елементів, гіпотеза Тимошенка, напружено-деформований стан.*

Аннотация. *Предложен метод определения напряженно-деформированного состояния цилиндрической композитной оболочки с отверстиями. Использована модель оболочек типа Тимошенко. Применен метод конечных элементов. Исследовано распределение напряжений вокруг отверстий в зависимости от изменения параметров оболочки.*

Ключевые слова: *оболочка, круговое отверстие, композитный материал, метод конечных элементов, гипотеза Тимошенко, напряженно-деформированное состояние.*

Summary. *The method of determination of the tensely-deformed state of cylindrical composite shell with holes is proposed. The shells model of Timoshenko is used. The method of finite elements is used. Distribution of tensions around the holes depending on the change of shell parameters is investigated.*

Key words: *shell, circular hole, composite material, finite elements method, hypothesis of Timoshenko, tensely-deformed state.*

Вступ. У сучасних технічних пристроях і різного роду системах спостерігається розширення класу конструкційних матеріалів і вдосконалення їх властивостей. Такими, зокрема, є композитні матеріли. У свою чергу, інтенсивне впровадження композитних матеріалів потребує розробки розрахункових моделей і методів, що враховують особливості структури і поведінки цих матеріалів. До таких особливостей, як відомо, належать їх анізотропія, шаруватий характер та порівняно низька міцність і жорсткість у напрямах, що не збігаються з напрямами армування. Ці особливості ускладнюють розрахункові моделі [1, с. 43].

У якості елементів конструкцій у різних областях промисловості часто використовуються оболонки з отворами, виготовлені з композитних матеріалів. Тому актуальною є проблема вдосконалення таких оболонок та розробка нових методів дослідження їх напружено-деформованого стану.

Основні результати розв'язання задач розрахунку напружено-деформованого стану композитних оболонок з отворами відображені в [2, с. 313].

Метою даної роботи є дослідження напружено-деформованого стану в композитній циліндричній оболонці з двома отворами під дією різноманітних навантажень.

Постановка задачі та методи дослідження. Розглянемо напружено-деформований стан циліндричної оболонки із композитного матеріалу, послабленої двома круговими отворами, розміщеними на одній твірній. Криволінійна система координат (α,β) розміщена так, що вісь α збігається з твірною, а вісь β — з напрямною, що проходить через середину лінії центрів отворів. Оболонка навантажена розтягуючою силою інтенсивності q_0.

Виділимо в оболонці окіл Ω, що містить отвори. Як відомо [1, с. 325], зони концентрації напружень навколо отворів мають локальний характер і практично затухають на відстані одного-двох діаметрів цих отворів. Тому припускаємо, що контур Γ околу Ω настільки віддалений від контурів отворів Γ_0, що зовні нього збурення напружень, спричинених наявністю отворів, практично затухають.

Віднесемо серединну поверхню оболонки до системи криволінійних ортогональних координат (α,β). Надалі виходимо з варіаційного рівняння Лагранжа, записаного для околу Ω:

$$\iint_{\Omega}\left\{\delta V_0-\left(p_1\delta u_1+p_2\delta u_2+p_n\delta w+m_1\delta\gamma_1+m_2\delta\gamma_2\right)\right\}A_1A_2\,d\alpha\, d\beta-$$
$$-\int_{\Gamma_1}\left(T_{tt}^0\delta u_t+T_{ts}^0\delta u_s+T_{th}^0\delta w+G_{tt}^0\delta\gamma_t+G_{ts}^0\delta\gamma_s\right)d\Gamma=\mathbf{0}, \quad (1)$$

$$\delta V=T_1\delta\varepsilon_1+T_2\delta\varepsilon_2+S_{12}\delta\delta_{12}+G_1\delta k_1+G_2\delta k_2+$$
$$+2H_{12}\delta k_{12}+Q_1\delta\varepsilon_{13}+Q_2\delta\varepsilon_{23},$$

де V_0 — питома енергія деформації; u_1, u_2, w, γ_1, γ_2 — узагальнені переміщення серединної поверхні оболонки, через які виражається поле переміщень

$$U_1=u_1(\alpha,\beta)+z\gamma_1(\alpha,\beta),$$
$$U_2=u_2(\alpha,\beta)+z\gamma_2(\alpha,\beta), \qquad \left(-\frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2}\right), \quad (2)$$
$$W=w(\alpha,\beta).$$

Геометричні співвідношення між компонентами деформацій і узагальненими переміщеннями мають вигляд:

$$\varepsilon_1=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}+k_\alpha w,\quad \varepsilon_2=\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+k_\beta w,$$
$$\varepsilon_{12}=\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right)-2k_{\alpha\beta}w, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{13}=\gamma_1+\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\delta\left(-k_\alpha u+k_{\alpha\beta}v\right),$$
$$\varepsilon_{23}=\gamma_2+\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\delta\left(-k_\beta v+k_{\alpha\beta}u\right),$$

$$\chi_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha} + \frac{\gamma_2}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad \chi_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta} + \frac{\gamma_1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha},$$

$$2\chi_{12} = \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\gamma_1}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\gamma_2}{B}\right).$$

Співвідношення пружності для композитної оболонки матимуть вигляд:

$$T_1 = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{13}\varepsilon_{12},$$
$$T_2 = B_{22}\varepsilon_2 + B_{12}\varepsilon_1 + B_{23}\varepsilon_{12},$$
$$S_{12} = B_{13}\varepsilon_1 + B_{23}\varepsilon_2 + B_{33}\varepsilon_{12},$$
$$G_1 = D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 + D_{13}2\chi_{12},$$
$$G_2 = D_{22}\chi_2 + D_{12}\chi_1 + D_{23}2\chi_{12},$$
$$H_{12} = D_{13}\chi_1 + D_{23}\chi_2 + D_{33}2\chi_{12},$$
$$Q_1 = K_1\varepsilon_{13}, \quad Q_2 = K_2\varepsilon_{23}. \qquad (4)$$

Тут B_{ij}, D_{ij}, K_i — узагальнені жорсткості матеріалу оболонки:

$$B_{ij} = c_{ij}h, \; D_{ij} = \frac{h^3}{12}c_{ij}, \; K_1 = \mu hG, \; K_2 = \mu hG,$$

де $c_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}, \; c_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \; c_{12} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \; c_{13} = c_{23} = 0,$

$$c_{33} = G_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \; \mu = \frac{5}{6}.$$

Граничні умови на контурах отворів запишуться у вигляді

$$T_\rho = -\frac{q_0}{4\pi R}(1 + \cos 2\theta),$$
$$S_{\rho\theta} = \frac{q_0}{4\pi R}\sin 2\theta, Q_\rho = 0, \; G_\rho = H_{\rho\theta} = 0. \qquad (5)$$

Підставивши співвідношення (3) у вирази (4), а останні — у рівняння (1) з урахуванням (5), отримаємо варіаційне рівняння відносно змінних $u_1, \; u_2, \; w, \; \gamma_1, \; \gamma_2$:

$$I(u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2) = 0.$$

Для розв'язання задачі застосуємо метод скінченних елементів [4, с. 31]. Розіб'ємо область на квадратичні ізопараметричні елементи, що мають по вісім вузлів. На кожному з цих елементів введемо локальну систему координат (ξ, η) таку, що $|\xi| \le 1, \; |\eta| \le 1$. При цьому перетворення від локальних координат до глобальних здійснюється за допомогою функцій форми

$$\varphi_i = \frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi + \eta_0 - 1), \quad (i = 1,3,5,7);$$
$$\varphi_i = \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1+\eta_0), \quad (i = 2,6);$$
$$\varphi_i = \frac{1}{2}(1+\xi_0)\left(1-\eta^2\right), \quad (i = 4,8) \qquad (6)$$

співвідношеннями

$$\alpha = \sum_{i=1}^{8}\alpha^i\phi_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{8}\beta^i\phi_i, \qquad (7)$$

де $\xi_0 = \xi\xi_i, \;\; \eta_0 = \eta\eta_i, \;\; (\xi_i, \eta_i), \; \left(\alpha^i, \beta^i\right)$ — координати i-го вузла відповідно в локальній і глобальній системах координат.

Зв'язок з глобальною системою координат (α, β) здійснюється за допомогою співвідношень

$$\alpha = \sum_{i=1}^{8}\alpha^i\varphi_i(\xi, \eta), \quad \beta = \sum_{i=1}^{8}\beta^i\varphi_i(\xi, \eta).$$

Якщо потрібно розглядати криволінійний відрізок в локальній системі координат, що збігається, наприклад, зі стороною елемента $\eta = -1$, то у такому випадку цей відрізок кривої буде задано співвідношеннями

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3}\alpha^i\varphi_i(\xi), \; \beta = \sum_{i=1}^{3}\beta^i\varphi_i(\xi, \eta) \quad (-1 \le \xi \le 1),$$

а елемент дуги матиме вигляд

$$d\Gamma = \left\{\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha^i\varphi_i'(\xi)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{3}\beta^i\varphi_i'(\xi)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} d\xi.$$

Переміщення на кожному з елементів інтерполюються поліномами

$$u_1 = \sum_{i=1}^{8}u_1^i\phi_i, \ldots, \; \gamma_2 = \sum_{i=1}^{8}\gamma_2^i\phi_i, \qquad (8)$$

де $u_1^i, \ldots, \gamma_2^i$ — шукані переміщення в i-му вузлі.

Для заміни варіаційного рівняння його дискретним аналогом необхідні вирази похідних від переміщень $u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2$ за змінними α, β. Для цього використаємо відомі формули зв'язку похідних у двох різних системах координат $\delta = J\mu$, де

$$\delta = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^T, \; \mu = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right)^T,$$

$$\Delta = \left(\sum_{i=1}^{8}\alpha^i\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}\right)\left(\sum_{i=1}^{8}\beta^i\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}\right) - \left(\sum_{i=1}^{8}\alpha^i\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}\right)\left(\sum_{i=1}^{8}\beta^i\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}\right),$$

$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} & \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} & \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \end{pmatrix}$ — матриця Якобі. Розв'язуючи їх відносно μ, що в даному випадку можливо, завдяки невиродженості перетворення, отримаємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\frac{\partial \beta}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial \beta}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}}{\det J}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \frac{-\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \alpha}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}}{\det J}.$$

Тоді шукані похідні від переміщень з урахуванням відповідних формул матимуть такий вигляд:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{8}u_1^i\left\{\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}\sum_{j=1}^{8}\beta^j\frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}\sum_{j=1}^{8}\beta^j\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi}\right)\Big/\Delta\right\};$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{8}u_1^i\left\{\left(-\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}\sum_{j=1}^{8}\alpha^j\frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}\sum_{j=1}^{8}\alpha^j\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi}\right)\Big/\Delta\right\};$$

$$\Delta = \left(\sum_{i=1}^{8} \alpha^i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}\right)\left(\sum_{i=1}^{8} \beta^i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}\right) - \left(\sum_{i=1}^{8} \alpha^i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}\right)\left(\sum_{i=1}^{8} \beta^i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}\right).$$

Похідні від інших узагальнених переміщень u_2, w, γ_1, γ_2 матимуть аналогічні вирази заміною символа u_1 відповідно на u_2 і т.д.

Отримані співвідношення підставляємо у варіаційне рівняння, в яке попередньо підставлені граничні умови, а змінні u_1, u_2, w, γ_1, γ_2 виражені через $u_1^{\,i}$, $u_2^{\,i}$, w^i, $\gamma_1^{\,i}$, $\gamma_2^{\,i}$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових варіаціях δu_1, δu_2, δw, $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$ і враховуючи їх незалежність, отримаємо в результаті вирази для обчислення коефіцієнтів матриці системи алгебраїчних рівнянь.

Для обчислення внесків у величину коефіцієнтів цієї системи рівнянь, що відповідають фіксованому вузлу за елементом E, що містить цей вузол, необхідно проінтегрувати отримані вирази за цим елементом. Для цього використаємо квадратурні формули Гаусса, що мають по два вузли за кожною змінною:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} W_i W_j G(\xi_i,\eta_j).$$

Інтегруючи за кожним елементом E та складаючи внески при однакових варіаціях у вузлі, що вносять усі елементи, які містять цей вузол, отримаємо алгоритм формування матриці системи, що має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{N}\left(A_i^{1,n}u_1^n + A_i^{2,n}u_2^n + A_i^{3,n}w^n + A_i^{4,n}\gamma_1^n + A_i^{5,n}\gamma_2^n\right) = B_i,$$

$$(i = 1,2,3,\ldots,5N),$$

де N — число вузлів сітки, $u_1^n,\ldots,\gamma_2^n$ — шукані переміщення в n-му вузлі області оболонки. Величини $A_i^{k,n}$ визначають матрицю жорсткості. Матриця симетрична і має стрічкову структуру. Ширина стрічки залежить від способу нумерації вузлів. Розбиття області Ω на елементи, інтегрування, формування матриці системи рівнянь і її розв'язування виконуються на комп'ютері за допомогою програми, складеної на мові C++ [4, с. 71].

Результати обчислень. Для прикладу проведено обчислення для циліндричної оболонки з наступними параметрами:

$$\frac{r}{\sqrt{Rh}} = 1,\ \frac{l}{r} = 2{,}5,\ \nu = 0{,}3,\ \frac{E}{G} = 2(1+\nu),$$

де R, r — відповідно зовнішній та внутрішній радіуси оболонки, h — товщина, l — відстань між центрами отворів, E — модуль Юнга, G — модуль зсуву, ν — коефіцієнт Пуассона.

Припускалось, що оболонка навантажена розтягуючою силою інтенсивності q_0. Унаслідок симетрії відносно осей координат розрахунки проводились для чверті оболонки. Визначався напружено-деформований стан оболонки при фіксованій відстані між отворами $l\ \left(\frac{l}{r_0} = 2{,}5\right)$, в залежності від зміни відношення параметрів $\frac{h}{R}$ у межах, указаних у таблиці 1, обчислювались коефіцієнти концентрації кільцевих сил $k_{1\theta} = \frac{T_\theta}{q}$ і максимальних по товщині оболонки кільцевих моментів $k_{2\theta} = \frac{6G_\theta}{qh}$ по контуру отвору, де $q = \frac{q_0}{2\pi R}$ — максимальна сила в оболонці без отвору.

Результати розрахунків наведено в табл. 1.

Висновки. У результаті проведених досліджень розроблено алгоритм знаходження напружено-деформованого стану циліндричних оболонок з отворами, виготовлених із композитного матеріалу, отримано співвідношення для коефіцієнтів для формування матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких звелась задача, а також складено програму на мові C++, отримано конкретні числові результати.

Розроблений метод дозволяє обчислювати напружено-деформований стан у довільній точці композитної оболонки з отворами і може бути використаний при проектуванні і розрахунку елементів конструкцій відповідної форми.

Таблиця 1

Коефіцієнти концентрації кільцевих сил та кільцевих моментів

$\frac{h}{R}$	θ					
	0		$\frac{\pi}{2}$		π	
	$k_{1\theta}$	$k_{2\theta}$	$k_{1\theta}$	$k_{2\theta}$	$k_{1\theta}$	$k_{2\theta}$
$6.25\cdot10^{-4}$	-1.28	0.38	3.66	-0.35	-0.56	0.50
$2.5\cdot10^{-3}$	-1.20	0.49	3.80	-0.28	-0.32	0.76
$1.0\cdot10^{-2}$	-1.22	0.50	3.81	-0.28	0.31	0.92
$4.0\cdot10^{-2}$	-1.23	0.50	3.81	-0.27	-0.30	0.99

Література

1. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов / В. В. Васильев. — М.: Машиностроение, 1988. 272 с.

2. Методы расчета оболочек. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / [А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, Вал.Н. Чехов, Вик.Н. Чехов, К. И. Шнеренко]. — К.: Наук. думка, 1980. 636 с.

3. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. — К.: Наук. думка, 1982. 296 с.

4. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация: пер. с англ. / О. Зенкевич, К. Морган. — М.: Мир, 1986. 318 с.

5. Глинський Я. М. С++ і С++ Builder / Я. М. Глинський, В. Є. Анохін, В. А. Ряжська. — Львів: Деол, 2003. 192 с.