https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj20-02-012
DOI: 10.30888/2663-5712.2023-20-02-012

УДК 517.521

STUDY OF NUMBER SERIES BY ENGINEERING STUDENTS: TYPICAL PROBLEMS AND TIPS FOR OVERCOMING THEM (FROM OWN TEACHING EXPERIENCE)

ВИВЧЕННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ СТУДЕНТАМИ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ: ТИПОВІ ПРОБЛЕМИ ТА ПОРАДИ ЩОДО ЇХ ПОДОЛАННЯ (З ВЛАСНОГО ДОСВІДУ ВИКЛАДАННЯ)

Repeta V.K. / Репета В. К.
c.f. and m.s., as.prof / к.ф-м.н., доц.
ORCID: 0000-0002-5615-7889
National Aviation University,
1 Lyubomyr Huzar Ave., Kyiv, 03058
Національний авіаційний університет,
проспект Любомира Гузара, 1, Київ, 03058
Repeta L.A. / Репета Л. А.
c.f. and m.s., as.prof. / к.ф-м.н., доц.
ORCID: 0000-0002-6547-3998
National Technical University of Ukraine
"Ihor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",
37 Peremogy Ave., Kyiv, 03056
Націона́льний техні́чний університе́т Украї́ни
«Ки́ївський політехні́чний інститу́т
і́мені І́горя Сіко́рського», проспект Перемоги, 37, Київ, 03056

Анотація. *Становлення сучасного інженера неможливе без ґрунтовної математичної підготовки. Для технічних спеціальностей у закладах вищої освіти є курс вищої математики. Ряди є важливою складовою цього курсу. На певних етапах опанування цього розділу студенти припускаються помилок, які повторюються з року в рік. У статті розглядаються типові проблеми, які виникають у студентів технічних спеціальностей під час вивчення числових рядів, і пропонуються певні рекомендації щодо їх подолання.*

Ключові слова: *числовий ряд, частинні суми, сума ряду, достатні ознаки збіжності.*

Вступ

Сучасний бурхливий розвиток техніки і технологій потребує висококваліфікованих освічених інженерів. Невід'ємною складовою такої освіти є математична підготовка. Недарма, кожен заклад освіти, який випускає спеціалістів технічного профілю містить у своїх навчальних програмах курс вищої математики або курс математичного аналізу. Важливим розділом цих курсів є розділ, пов'язаний з теорією рядів.

Ряди є важливим математичним апаратом для вивчення та дослідження функцій, проведення наближених обчислень. Перше знайомство з числовими рядами формується в старших класах загальноосвітньої школи під час вивчення арифметичної і геометричної прогресій.

Задача про перетворення нескінченного періодичного десяткового дробу у звичайний дріб за допомогою нескінченно спадної геометричної прогресії, також пов'язана із геометричним рядом. Окрім цього, у старших класах учні, здебільшого фізико-математичних класів, зустрічалися із завданнями, іноді олімпіадного характеру, на знаходження суми числового виразу

$f(1)+f(2)+...+f(n)$; за різних значень n ці суми по суті є частинними сумами відповідного числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Основний текст

Залежно від Навчальних програм теорію числових рядів у закладах вищої освіти ґрунтовно починають вивчати або після теми «Числові послідовності» або після вивчення диференціального та інтегрального числення функції однієї змінної [1]. Необхідною базою для опанування теорії рядів безперечно є теорія границь послідовностей, адже усі означення, пов’язані з рядами спираються саме на числові послідовності, їх границі та властивості. Приміром, за означенням числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є збіжним, якщо існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty} S_n$ послідовності його частинних сум $\{S_n\}=\{u_1+u_2+...+u_n\}$. Поняття границі послідовності фігурує не тільки в означеннях але й у формулюваннях багатьох теорем і тверджень.

Вивчення теорії числових рядів, як правило, здійснюють за наступною схемою:

- уведення основних означень і понять;
- елементарні властивості числових рядів;
- необхідна ознака збіжності і достатня ознака розбіжності;
- знакододатні числові ряди, достатні ознаки їх збіжності;
- знакозмінні ряди, ряд Лейбніца, ознака Лейбніца;
- абсолютна й умовна збіжності знакозмінних рядів.

Виокремимо деякі проблемні моменти та типові помилки, які щороку у тій чи іншій мірі кожен викладач спостерігає під час вивчення студентами теорії числових рядів.

1. Знаходження суми числового ряду або доведення його розбіжності. Вже саме поняття числового ряду та його суми викликає у багатьох студентів певне нерозуміння, зокрема того, як можна додавати нескінченну кількість доданків і отримати при цьому скінченну суму. Студентам слід пояснити, що насправді ніхто не додає нескінченну кількість доданків, що є неможливим. Загалом розв’язання задачі визначення суми числового ряду відбувається у кілька кроків, на першому з яких потрібно записати й ретельно проаналізувати частинні суми ряду, спробувати аналітично записати загальний член ряду (відповідно й усі інші, починаючи від u_1 до u_{n-1}) так, щоб можна було частинну суму S_n «згорнути» до кількох доданків. На другому кроці залишається лише знайти границю $\lim_{n\to\infty} S_n$ послідовності частинних сум $\{S_n\}$ заданого ряду і зробити висновок про його збіжність та суму.

Такі задачі доцільно починати з нескінченних сум арифметичних та геометричних прогресій, які знайомі студентам ще зі школи. А далі переходити до більш складних випадків.

Зокрема, не буде зайвим навести та проілюструвати студентам таку задачу.

Нехай потрібно знайти суму

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k ,$$

де $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — задані числа або функціональні вирази, причому $u_k = g(k)$.

Якщо $f(k)$ — функція натурального аргументу k така, що

$$u_1 = f(1) - f(2),\; u_2 = f(2) - f(3),\; \ldots,\; u_n = f(n) - f(n+1), \qquad (1)$$

тоді частинна сума

$$S_n = f(1) - f(n+1).$$

Аналогічно, якщо

$$u_1 = f(2) - f(1),\; u_2 = f(3) - f(2),\; \ldots,\; u_n = f(n+1) - f(n), \qquad (2)$$

тоді

$$S_n = f(n+1) - f(1).$$

Основна проблема цього методу — вибір функції $f(n)$. У загальному випадку представлення (1) чи (2) дістати досить непросто, оскільки для цього часто потрібно проявити певну міру інтуїції, винахідливості, виконати нестандартні дії тощо. Проте таке представлення завжди існує.

Може трапитися так, що $u_n = f(n+k) - f(n)$, де k — деяке натуральне число відмінне від 1. Тоді

$$S_n = f(n+1) + f(n+2) + \ldots + f(n+k) - f(1) - f(2) - \ldots - f(k).$$

Цю схему, наприклад, застосовують для знаходження суми рядів вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+k)} \quad (k \in N),$$

не акцентуючи здебільшого увагу на наведених вище формулах.

Розглянемо детальніше складніший приклад. Знайдемо суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{24n+60}{(n+2)(n+3)(n+6)} .$$

Стандартний підхід – представлення загального члена ряду у вигляді суми елементарних дробів. Отримаємо

$$\frac{24n+60}{(n+2)(n+3)(n+6)} = \frac{3}{n+2} + \frac{4}{n+3} - \frac{7}{n+6} .$$

А тепер «лайфхак», що значно полегшує подальше розв’язання: звертаємо увагу та те, що сума чисельників елементарних дробів дорівнює нулю: $3 + 4 - 7 = 0$. Цей факт дає змогу записати загальний член ряду у вигляді

$$\frac{24n+60}{(n+2)(n+3)(n+6)} = 3\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + 7\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+6}\right).$$

Тоді

$$S_n = 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right) + 7\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{n+6} - \frac{1}{n+7} - \frac{1}{n+8}\right)$$

і шукана сума

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = 1 + 7\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 5\frac{19}{60}.$$

Допитливим студентам слушно запропонувати розглянути загальну задачу знаходження суми ряду вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_l(n)}{(n+\alpha_1)(n+\alpha_2)...(n+\alpha_{m-1})(n+\alpha_m)},$$

де $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ – цілі невід'ємні числа, $0\le\alpha_1<\alpha_2<...<\alpha_m$; $P_l(n)$ – многочлен l-го степеня, $m-l>1$ [2], й обґрунтувати, що у представленні

$$\frac{P_l(n)}{(n+\alpha_1)(n+\alpha_2)...(n+\alpha_{m-1})(n+\alpha_m)}=\frac{A_1}{n+\alpha_1}+\frac{A_2}{n+\alpha_2}+...+\frac{A_{m-1}}{n+\alpha_{m-1}}+\frac{A_m}{n+\alpha_m}$$

за вказаних умов завжди справджуються рівності:

1) $A_1+A_2+...+A_m=0$;

2) $$\frac{P_l(n)}{(n+\alpha_1)(n+\alpha_2)...(n+\alpha_{m-1})(n+\alpha_m)}=A_1\left(\frac{1}{n+\alpha_1}-\frac{1}{n+\alpha_2}\right)+$$
$$+(A_1+A_2)\left(\frac{1}{n+\alpha_2}-\frac{1}{n+\alpha_3}\right)+...+(A_1+A_2+...+A_{m-1})\left(\frac{1}{n+\alpha_{m-1}}-\frac{1}{n+\alpha_m}\right).$$

2. Необхідна ознака збіжності: якщо ряд $\sum_{k=1}^{n}u_k$ збігається, то $\lim_{n\to\infty}u_n=0$. На практиці часто можна спостерігати таку картину: на прохання викладача сформулювати цю ознаку, яка складається лише з одного рядка, студенти чомусь все переплутують і здебільшого кажуть навпаки, що якщо $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, то ряд $\sum_{k=1}^{n}u_k$ є збіжним. Цієї помилки студенти припускаються з року в рік. Пояснення такого негативного феномену слід шукати насамперед у неуважності та небажанні осмислити формулювання ознаки — можливо, занадто воно коротке, щоб приділяти йому достатню увагу. Якщо ж разом із необхідною ознакою збіжності запитувати студентів ще й достатню ознаку розбіжності, то тоді багато студентів просто губляться. У цьому разі розгляд класичних рядів як гармонічного та геометричного дещо покращують ситуацію.

3. Знакододатні ряди. У курсі вищої математики для технічних спеціальностей розглядають зазвичай п'ять достатніх ознак збіжності знакододатних рядів (дві ознаки порівняння—перша й гранична, Д'Аламбера, Коші—радикальна та інтегральна). Ці ознаки умовно можна об'єднати в дві групи: перша — ознаки порівняння, друга — ознаки Д'Аламбера та Коші. Різниця між цими групами ознак очевидно полягає в тому, що для застосування ознак порівняння потрібно правильно вибрати еталонний ряд. Для правильного вибору ряду для порівняння потрібно, по суті, знати збігається чи розбігається початковий ряд. Тоді виникає слушне запитання: навіщо проводити доведення того, що вже й так відомо?

І все ж таки зауважимо, що серед двох ознак порівняння переважно зручнішою є гранична ознака порівняння. Це пов'язано з тим, що задача знаходження границі відношення двох виразів є більш стандартизованою, ніж задача порівняння двох виразів, до того ще й потрібно знати, з яким знаком потрібно довести нерівність, тоді як під час застосування граничної ознаки можна використовувати широкий набір еквівалентних як нескінченно малих так і нескінченно великих величин. Проте зустрічаються випадки, коли слід користуватися саме ознакою порівняння.

Приміром, ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ легко дослідити на збіжність, якщо спочатку побудувати графіки функцій $y=\ln x$ та $y=x$. З графіків цих функцій видно, що для всіх додатних значень x справджується нерівність $\ln x<x$. Отже, для всіх натуральних n, починаючи з 2, $0<\ln n<n$ і $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$. Тоді $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}>\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$. Оскільки гармонічний ряд розбігається, то й заданий ряд також розбіжний. Після дослідження цього ряду слушно запропонувати студентам дослідити на збіжність, наприклад, ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln\left(1+n^2\right)}$.

Ознаки Д'Аламбера і Коші сприймаються студентами набагато краще, тому що є заданий зрозумілий алгоритм дій. Проте і тут є підводні камені.

А саме, якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ границя відношення $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, то це не дає відповіді про збіжність розглядуваного ряду, у цьому випадку виникає потреба застосовувати іншу ознаку. Чи можна наперед передбачити такий результат? Так, якщо $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, то це означає, що u_n та u_{n+1} є еквівалентними, якщо $n\to\infty$. І навпаки, якщо u_n та u_{n+1} є еквівалентними, якщо $n\to\infty$, то $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$. Тому перед тим, як застосувати ознаку Д'Аламбера доцільно перевірити чи будуть еквівалентними n-й та наступний $(n+1)$-й члени знакододатного ряду, зокрема за $n\to\infty$ еквівалентними є такі вирази $\ln n$ та $\ln(n+1)$, поліноми k-го степеня $P_k(n)$ та $P_k(n+1)$ тощо. Приміром, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)\ln^2 n}{n^3}$ досліджувати за ознакою Д'Аламбера не має сенсу. Аби ця ознака була продуктивною, необхідно, щоб загальний член ряду містив принаймні один вираз $g(n)$, який не еквівалентний виразу $g(n+1)$ за $n\to\infty$. Наприклад, якщо $g(n)=n!$ чи $g(n)=a^n$.

Така ж ситуація з радикальною ознакою Коші. У випадку, коли для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ границя $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$ потрібно застосовувати інші ознаки.

4. Знакозмінні ряди. Здебільшого розглядають ряди Лейбніца, тобто ряди, в яких знаки членів строго чергуються. Перевірка умов ознаки Лейбніца у типових випадках до серйозних проблем не призводить. Значно складнішою є задача визначення як збігається збіжний знакозмінний ряд – абсолютно чи умовно.

Причиною цьому, на наш погляд, є поверхневе розуміння означення абсолютної та умовної збіжності збіжного знакозмінного ряду.

Висновок

У статті авторами проаналізовано труднощі, які постають перед здобувачами вищої освіти під час вивчення теми «Числові ряди». Указано типові помилки, які виникають під час опанування теоретичного матеріалу та його застосування на практиці. Запропоновано своє бачення подолання деяких з цих проблем.

Література:

1. Репета В.К. Вища математика. Підручник – 2-е вид., виправ. – К.: НАУ, 2017. – Ч.2. – 504 с.

2. Репета В.К., Репета Л.А. Застосування перетворення Абеля до знаходження суми числових рядів певного вигляду. АВІА-2021: XV міжнародна науково-технічна конференція, 20-22 квітня 2021 р. – Київ, 2021.– С.16.24–16.27.

Abstract. *Becoming a modern engineer is impossible without thorough mathematical training. For technical specialties in institutions of higher education, there is a course of higher mathematics. Rows are an important section of this course. At certain stages of mastering this section, students make mistakes that are repeated from year to year, in particular, errors when calculating the sum of a numerical series, applying the necessary sign of convergence, using sufficient signs of convergence for series with positive terms, etc. The article examines typical problems that students of technical specialties have when studying number series and offers certain recommendations for overcoming them.*

Key words: *numerical series, partial sums, series sum, sufficient signs of convergence.*

Стаття відправлена: 19.07.2023 г.