

УДК 517.962.24

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛОГІСТИЧНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ ОДИНАРНОЇ ОБМЕЖЕНОЇ ПОПУЛЯЦІЇ

Глєб Гут, Анастасія Федорець
Національний авіаційний університет, Київ

Науковий керівник – Віктор Репета, к.ф.-м.н., доц.

Ключові слова: чисельність популяції, різницеве рівняння, логістичне рівняння

Вступ. Однією із основних задач теорії динаміки популяцій є прогнозування зміни стану популяцій, розрахунки їх кількості у майбутньому.

Для опису чисельності популяції можна використати апарат різницевого рівняння. Найпростіше різницеві рівняння виглядають за припущення, що чисельність N_{t+1} кожного наступного покоління залежить лише від чисельності N_t попереднього покоління у вигляді зв'язку: $N_{t+1} = f(N_t)$.

Вчений Рікер у праці [1] запропонував розглядати функцію $f(N_t)$ у вигляді:
 $f(N_t) = N_t \exp(r(1 - N_t / K))$.

Тоді рівняння

$$N_{t+1} = N_t \exp(r(1 - N_t / K)) \quad (1)$$

можна розглядати, як різницевий аналог логістичного рівняння $\frac{dN}{dt} = rN(1 - N / K)$, в якому $N(t)$ – чисельність популяції у момент часу t , K – ємність екологічної ніші популяції, яка визначає обмеженість зростання популяції; параметр r характеризує швидкість зростання популяції, $N(0)$, N_0 – початкова чисельність популяції.

Результати. Рівноважним розв'язком (нерухомою точкою) рівняння (1) є значення $N_t = N^* = \text{const}$, за якого справджується рівність $N^* = N^* \exp(r(1 - N^* / K))$, звідки отримуємо: $N^* = K$.

Позначимо $\left| \frac{df(N)}{dN} \right| \Big|_{N=N^*} = A$. Тоді $A = |r - 1|$.

Якщо $0 < A < 1$, то за $1 < r < 2$ відхилення від рівноваги зникають монотонно, а за $0 < r < 1$ відхилення мають затухаючий характер.

Складнішою є поведінка розв'язків рівняння (1) за $r > 2$. Для всіх $r \in (2; 2,526]$ виникають двоточкові цикли; за умови $2,526 < r < 3,102$ виникають цикли довжини 4, 8, 16, ..., 2^k , ..., проте такі цикли виникають не для всіх r з цього проміжку, приміром, за значення

$r = 2,71111$ виникають 48 точкові цикли; за $r \geq 3,102$ виникають триточкові цикли, цикли довжини 3, 6, 12, ..., $3 \cdot 2^{k-1}$, ..., цикли довжини 15, 30, 60, ..., $15 \cdot 2^{k-1}$, ..., цикли довжини 4, 8, 16, ..., 2^k , ... тощо і хаотичні розв'язки.

Частина отриманих результатів для випадку $K = 1000$, $N_0 = 500$ залежно від значень r ($r > 2,526$) вміщено у табл. 1.

Таблиця 1

Характеристика розв'язків рівняння (1) залежно від значень параметра r

N з/п	Значення параметра r	Характеристика розв'язків рівняння (1)
1	(2,526; 2,65635)	Періодичні коливання з періодом 4 (4 точковий цикл)
2	(2,65636; 2,6846)	Періодичні коливання з періодом 8 (8 точковий цикл)
3	(2,6846; 2,6907)	Періодичні коливання з періодом 16 (16 точковий цикл)
4	(2,6907; 2,69201)	Періодичні коливання з періодом 32 (32 точковий цикл)
5	(3,10244; 3,1596)	Періодичні коливання з періодом 3 (3 точковий цикл)
6	(3,1596; 3,1874)	Періодичні коливання з періодом 6 (6 точковий цикл)
7	(3,1874; 3,19386)	Періодичні коливання з періодом 12 (12 точковий цикл)
8	(3,19386; 3,19528)	Періодичні коливання з періодом 24 (24 точковий цикл)
9	3,2199	Періодичні коливання з періодом 15 (15 точковий цикл)
10	3,22	Періодичні коливання з періодом 30 (30 точковий цикл)
11	3,22001	Періодичні коливання з періодом 60 (60 точковий цикл)
12	(3,58556; 3,60429)	Періодичні коливання з періодом 4 (4 точковий цикл)
13	(3,60429; 3,61384)	Періодичні коливання з періодом 8 (8 точковий цикл)

Зауваження. Періодичність коливань настає після набуття змінною t певного значення.

Висновок. Розв'язкам логістичного різницевого рівняння (1) за певних значень параметра r притаманні значно ширші властивості, ніж розв'язкам логістичного рівняння, зокрема, за певних значень r вони циклічно повторюються, причому точкові цикли можуть мати різну довжину, найпростіші з яких є 2 та 3 точковими циклами. Це дає змогу використовувати різницеве логістичне рівняння (1) для математичного моделювання динаміки популяційних систем тощо.

Список використаних джерел:

1. Ricker, W. E. Stock and Recruitment // Journal of the Fisheries Research Board of Canada. — 1954. — Т. 11, № 5. — С. 559—623.