

УДК 51

ПРО ЛІНІЙНІ РЕКУРЕНТНІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Дмитро Ільницький

Національний авіаційний університет, Київ

Науковий керівник – Олександр Глухов, канд.фіз.-мат.н., доц.

Ключові слова: рекурентна послідовність, диференціальне рівняння, характеристичне рівняння, метод невизначених коефіцієнтів.

В цій роботі описано спосіб побудови явних формул для послідовностей, заданих лінійними рекурентними співвідношеннями, аналогічний способу розв'язання лінійних диференціальних рівнянь. Спосіб полягає в розв'язанні характеристичного рівняння, знаходження загального розв'язку однорідного і частинного розв'язку для окремих класів функцій методом невизначених коефіцієнтів. Розглянемо його на двох прикладах.

Приклад 1. Послідовність: $0, 1, 6, 26, 97, 333, \dots$,

задана наступними рекурентними співвідношеннями:

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n + n + 1.$$

1) Характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 6 = 0$ має корені $k_1=2, k_2=3$.

Таким чином загальний розв'язок однорідного рівняння $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$ матиме наступний вигляд: $y_n = C_1 2^n + C_2 3^n$. Користуючись аналогією з диференціальними рівняннями, будемо шукати частинний розв'язок даного рівняння у вигляді $z_n = an + b$. Методом невизначених коефіцієнтів знаходимо:

$$a = 1/2, b = 5/4. \quad x_n = -3 \times 2^n + (7/4) \times 3^n + n/2 + 5/4.$$

Приклад 2. Розглянемо тепер наступну послідовність:

$0, 1, 3, 5, 5, 1, -7, -15, -15, 0, 33, \dots$, де $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n + 1$.

Характеристичне рівняння: $k^2 - 2k + 2 = 0$ має корені $k_1=1-i, k_2 = 1+i$.

$$k_1 = \sqrt{2} (\cos(\pi/4) - \sin(\pi/4)), \quad k_2 = \sqrt{2} (\cos(\pi/4) + \sin(\pi/4)).$$

Отже загальний розв'язок однорідного рівняння $y_{n+2} = 2y_{n+1} - 2y_n$ матиме наступний вигляд: $y_n = 2^{n/2} (C_1 \cos(\pi n/4) + C_2 \sin(\pi n/4))$

$$x_n = 2^{n/2} (-\cos(\pi n/4) + \sin(\pi n/4)) + 1.$$

Список використаних джерел:

1. Базилевич Л.Є. Дискретна математика у прикладах і задачах.— Львів, 2013. —486 с.
2. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. — Київ: Либідь, 2003. — 600 с.