УДК 519.17

О.Д. Глухов, канд. фіз.-мат. наук, Г.В. Тугай
(Національній авіаційний університет, Україна)

Про число бондів непланарних 3-реберно зв'язних графів

Розглянуто проблему оцінки числа k-бондів зв'язного графа та її застосування до моделювання складних дискретних систем. Отримані нові оцінки числа k-бондів непланарних 3-реберно зв'язних графів.

Постановка задачі.

В даній роботі розглядаються оцінки числа *k*-бондів непланарних 3-реберно зв'язних графів.

Нехай $G = G_n$ - 3-реберно зв'язний граф на n вершинах з множиною вершин G^0 і множиною ребер G_n^1, $|G_n^0| = n, |G_n^1| = m$ в якому допускаються кратні ребра і петлі; для кожного ребра u позначимо через ∂u множину його кінців (одну або дві вершини).

Для будь-якої множини $A \subset G^0$ графа G також позначимо:

$$J(A,G) = \{u \in G^1 : \partial u = \{a,b\}, a \in A, b \notin A\},$$

Якщо при цьому породжені підграфи $G[A]$ і $G[G^0 \setminus A]$ зв'язні і $|J(A,G)| = k$, то $J(A,G)$ називається *k*-бондом (мінімальним по включенню розрізом) графа G [1, 2].

Структурна стійкість складних дискретних систем.

Оцінка числа k-бондів має важливе значення для для моделювання дискретних систем, структура яких може змінюватись внаслідок випадкового розриву частини зв'язків. Моделями таких систем є квазівипадкові графи були введені в статті [3,4] .

Квазівипадковим графом на основі звичайного графа G з множиною G^0 вершин і множиною G^1 ребер, $|G^0| = n, |G^1| = m,$ називається граф $G(p)$ з випадковою множиною ребер $U = (G(p))^1$, де

$$Prob(u \in U) = p, \text{ якщо } u \in G^1, \; Prob(u \in U) = 0, \text{ якщо } u \notin G^1.$$

У випадку, коли G - 3-зв'язний граф, для ймовірності P справедлива оцінка [1]:

$$P \geq 1 - \sum_{k=3}^{m} \sigma_k q^k ,$$

де $q = 1 - p$, $\sigma_k = \sigma_k(G)$ - число k –бондів.

Оцінка числа бондів 3-зв'язних графів: планарні графи та загальний випадок.

Наступні два твердження дають оцінки числа бондів 3-зв'язних планарних графів і довільних 3-реберно зв'язних графів.

Теорема 1 [3] . Якщо G_n - простий (без петель і кратних ребер) планарний 3-зв'язний граф, $|G_n^0| = n, |G_n^1| = m$ то мають місце оцінки:

$$\sigma_3(G_n) \le 4n/3,$$

$$\sigma_k(G_n) \le \frac{1}{2k}(2m)^{k/2}, k \ge 4$$

Теорема 2 [4]. Якщо G - 3-реберно зв'язний граф на n вершинах, $n \ge 3$, то має місце наступна оцінка:

$$\sigma_k(G_n) \le \frac{(2n)^{k-2}}{(k-2)!}, k \ge 4.$$

Зауважимо, що остання оцінка має порядок $\sigma_k(G) \sim (m)^{k-2}$, що значно більш грубою оцінко., ніж оцінка $\sigma_k(G) \sim (m)^{k/2}$ для планарних графів.

Регулярні вкладення графів в 2-многовиди.

2-кліткове вкладення графа в G 2-многовид називається регулярним, якщо замикання кожної 2-клітки гомеоморфно замкненому диску, а замикання двох різних кліток не можуть мати більше одного спільного ребра графа. $|(\partial s_j \cap \partial s_k)^1| \le 1, \ j \ne k$ [5].

Нескладно довести наступні два твердження.

Лема 1. 2-кліткове вкладення графа в G 2-многовид регулярне тоді і тільки тоді, коли дуальний граф G^* є простим графом (графом без петель і кратних ребер).

Лема 2. Кожному розрізу k- розрізу U регулярно вкладеного графа G відповідає набір циклів $\{Z_j\}_1^s$ дуального графа G^*, який задовольняє умовам:

$$i \ne j \Rightarrow Z_i^1 \cap Z_j^1 = \varnothing, \ \bigcup_{j=1}^{s} Z_j^1 = U, \ \sum_{j=1}^{s} |Z_j^1| = k.$$

Оцінка числа бондів регулярно вкладеного графа.

Лема 3. Якщо G - простий (без петель і кратних ребер) 3-зв'язний граф, то числа $c_k(G)$ k-циклів має місце наступна нерівність:

$$c_k(G) \le \frac{1}{2k}(2m)^{k/2}, \quad k \ge 4.$$

Доведення. Дійсно, для числа $c_k(G)$) циклів довжини k графа G вірна нерівність:

$$c_k(G) \le (1/2k) \times Sp(A^k),$$

де A – матриця суміжності, графа G [6] , звідки врахувавши нерівність Єнсена:

$$(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k)^2 \le (\sum_{i=1}^{n} \lambda_k^2)^k \text{ , де } k \ge 2,$$

отримаємо необхідну оцінку для числа $c_k(G)$.

Теорема 3. Якщо граф G допускає регулярне 2-кліткове вкладення в 2-многовид, то для числа його k –бондів має місце наступна оцінка:

$$\sigma_k(G) \le \frac{1}{8k^2\sqrt{3}} \exp(A\sqrt{k})(2m)^{k/2}, \; A = \pi\sqrt{2/3}.$$

Доведення. Справді, згідно з лемами 1,2,3 маємо наступну нерівність для оцінки числа бондів:

$$\sigma_k(G) \le \sum |c_{s1}(G^*)| \times |c_{s2}(G^*)| \times \ldots |c_{sj}(G^*)|,$$

де сума береться по всім розбиттям $s_1 + s_2 + \ldots + s_j = k$.

Отже, $\sigma_k(G) \le p(k)(2m)^{k|2} / 2k,$ де $p(k)$ - число розбиттів .

Враховуючи відому оцінку Харді-Рамануджана [7]:

$$p(k) \le \frac{1}{4k\sqrt{3}} \exp(A\sqrt{k}), \; A = \pi\sqrt{2/3},$$

отримуємо необхідну нерівність для числа k –бондів.

Список літератури

1. Diestel R. Graph Theory. –Springer-Verlag, 2000. –322 P.
2. Bondy J.A., Murty U.S.R. Graph Theory– Springer-Verlag, 2008. –651 P.

3. Глухов А.Д. Квазислучайные графы и структурная устойчивость сложных дискретных систем. –Электрон. моделирование, 2016 , 38, №5, с.35–41.
4. Глухов О.Д. Про зв’язність планарних pr- графів пуассонівського типу.-II Український математичний конгрес, 27-29 серпня 2009 р.: тези доп. – К., 2009. – режим доступу: http://www.imath. kiev.ua/~congress2009.
5. Mohar B., Thomassen C., Graphs on Surfaces. – Baltimore: John Hopkins Univ. Press, 2001. – 291 P.
6. Цветкович Д., Дуб Н., Захс Х. Спектры графов. Теория и применение. – Киев: Наукова думка, 1984. –384 с.
7. Hall M, Combinatorial Theory. – Blaisdell Publ. Comp., Waltham-Toronto-London, 1967. – 424 P.