

УДК 711.73

д. арх., професор Дьомін М.М.,

Київський національний університет будівництва та архітектури,
Фоменко М.С., Луцький національний технічний університет

ГІДРОДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ ЯК МАКРОПІДХІД ДЛЯ УПРАВЛІННЯ ТРАНСПОРТНИМ ПОТОКОМ

Розглянуто класичні рівняння гідродинаміки (газодинаміки) та порівняно їх з рівняннями, що відображають транспортний потік.

Ключові слова: *потік стисної рідини, гідродинаміка, газодинаміка, транспортний потік, рівняння стану, нерозривності, руху*

Постановка проблеми. Актуальність проблеми управління процесами вуличного руху в містах, особливо великих, визначається усе наростаючими диспропорціями в показниках зростання територій міста, а також територій, які формально знаходяться за межами міської смуги, але поєднуються повсякденними трудовими і культурно-побутовими зв'язками (процес так званої маятникової міграції), єдиною транспортною інфраструктурою, а також рівнем автомобілізації, яка хоча ще не досягла в містах України граничних значень, вже тепер створює великі проблеми в організації вуличного руху, і показниками ступеню розвиненості вулично-дорожньої мережі та її теоретичної й фактичної пропускної спроможності.

Посилюють проблему руху на вуличні мережі:

- низька щільність магістральної мережі;
- просторово незбалансоване і неузгоджене з системою транспорту функціональне зонування території міста;
- недостатньо розвинена система громадського транспорту і відсутність належної координації дії різних видів транспорту;
- нераціональне використання проїзних частин міських магістралей (вони дедалі усе більше стають місцями несанкціонованого паркування засобів індивідуального автотранспорту), і як наслідок незадовільної організації руху транспорту і пішоходів, недостатньої кількості місць тимчасового паркування засобів індивідуального транспорту тощо.

Сучасні принципи і методи організації руху транспорту у великих містах ґрунтуються на методології системно-структурного аналізу і математичного моделювання. Існує багато методів і моделей, які застосовуються в процесі містобудівних розрахунків на різних стадіях проектно-планувальних робіт, в процесі оперативного регулювання руху на міських магістралях.

В даній роботі зроблена спроба перевірити можливості та коректність застосування добре опрацьованого і перевіреного часом апарату класичної гідродинаміки для вирішення завдань організації руху міського транспорту.

Гіпотеза можливості і доцільності цього ґрунтується на тотожності процесів лінійного переміщення пластичної речовини в замкнутому просторі і уявленні про вулично-дорожню мережу, як трубопровідну, замкнену систему, яка складається із вузлів та ділянок. Аналогічно, вулична мережа має вузли – перехрестя різного типу, та відрізки вулиць (ділянки), що з'єднують суміжні вузли.

Напрями та інтенсивність руху транспорту по вуличній мережі визначається різницею потенціалів на вході на ділянку магістралі і виході з неї. Кількісні параметри місць концентрації міських функцій (зовнішнього транспорту, ділових, торговельних, виробничих, житлових тощо), що провокують, чи стримують структуру перевезень, види транспортних засобів, інтенсивність руху в години пік та, відповідно, щільність потоку й їхні розрахункові параметри та ін., визначається обсягами формування в цих місцях (зонах) пасажирів та вантажів, які можна розглядати в якості потенціалів (+ або -). Завдання наземних шляхів сполучення, їхня пропускна спроможність, зокрема вуличної мережі, забезпечити оптимальні умови транспортного руху.

Моделі і процеси, моделювання транспортних потоків на міських магістралях великих міст доцільно використовувати при складанні містобудівної документації, а також при створенні систем оперативного управління. Система оперативного управління не може існувати без автоматизованої системи моніторингу, тобто створення по-суті АСУ транспортним рухом.

Створення такої системи неможливо без розроблення інформаційних моделей об'єкту управління – вуличної мережі – , і предметної області, що означає крім самого об'єкту всю сукупність чинників та умов, які є необхідними для проведення відповідних розрахунків і прийняття відповідних рішень.

В рамках предметної області, засобами відповідного тезауруса має бути забезпечена ефективна взаємодія моделі об'єкта з зовнішнім інформаційним середовищем. В якості першого кроку у вирішенні поставленої проблеми необхідно визначитись з формалізованим описом динамічного об'єкту можливості і доцільності інкорпорування в систему управління міським транспортним рухом гідравлічних моделей.

Вступ. Транспортний потік – це одночасний рух по вулиці чи дорозі великої кількості автомобілів з різними швидкостями, ступенем завантаження та технічним станом, якими керують водії різної кваліфікації, психоемоційним

станом і, відповідно, часом реакції на зміну обстановки [1]. Це дискретне та імовірнісне явище, хоча потік може мати детерміновану і безперервну природу, коли автомобілі рухаються групами [9].

Відповідно до цього виникли два підходи для його опису – детерміністичний та вірогіднісний (стохастичний), на основі яких утворилися три класи моделей транспортного потоку: моделі-аналоги (макроскопічні), моделі слідування за лідером (мікроскопічні) та вірогіднісні моделі [8].

Макропідхід використовують для вивчення транспортного потоку як стаціонарного явища, що характеризується загальною середньою швидкістю, щільністю потоку та інтенсивністю руху, та питань ефективності [6, 9]. Він використовується для дослідження великомасштабних мереж вулиць та доріг, що складаються з великої кількості ділянок, для відображення потоків з високою щільністю [9].

Гідродинамічна модель транспортного потоку виникла внаслідок проведення аналогії між рухом транспортного потоку і течією по руслу стисної рідини, що дозволяє досліджувати швидкість стискання та розтягування транспортного потоку при виникненні перешкоди і після віддалення від неї [1].

В основу даної моделі лягли наступні припущення: 1) транспортний потік зберігається однаковим (рівняння нерозривності) та існує взаємооднозначна залежність між швидкістю та щільністю; 2) існує функціональна залежність між швидкістю та щільністю, тобто із зростанням щільності транспортного потоку швидкість знижується [8].

Мета. Для більш детального розгляду питання відповідності між величинами, які характеризують потік рідини або газу, та величинами, що характеризують транспортний потік, пропонується розглянути класичні рівняння гідродинаміки (газодинаміки) та порівняти їх з рівняннями, що відображають транспортний потік.

Основна частина. В першу чергу необхідно визначити, рідина чи газ більш подібні до транспортного потоку за своїми характеристиками.

В гідродинаміці і газу, і рідини прийнято об'єднувати в єдине поняття «рідина», розрізняючи їх за об'ємною пружністю, тобто стисливістю. Відповідно, нестисні рідини мають великий опір стиску (практично не піддаються стисканню) і малий опір зусиллям розтягу, а стисні рідини (гази) – характеризуються повною відсутністю опору стисканню [7].

Це і є їх основною відмінністю, що лягла в основу використання стисної рідини в якості аналога транспортного потоку.

Розглядаючи одномірний потік стисної рідини через канал постійного сечення можна порівняти його з однорядним транспортним потоком, який так

само складається з дискретних елементів: молекули газу – автомобілі в транспортному потоці [6].

Але в динаміці рідин розглядається відносний рух молекул, коли на них діє певна сила, то різниця між рідиною і газом менш істотна, ніж між твердими тілами та рідиною. Щільність речовини в рідкому стані більше щільності в газоподібному, але ця різниця вказує тільки на різницю у величині прикладеної сили, щоб отримати необхідні прискорення [3]. Відповідно, були виведені системи диференціальних рівнянь для різних ідеалізованих рідин (стисних і нестисних) [4].

Потік стисної рідини, як і транспортний потік, можна описати на макроскопічному та мікроскопічному рівні. В основному використовується макроскопічна модель, де стисна рідина розглядається як континіум, і характеризується середніми значеннями макроскопічних параметрів швидкості, щільності, тиску і температури від координат і часу [2]. Тобто ці параметри є рівномірно розподіленими в середині даного об'єму. Внаслідок цього виникла гіпотеза суцільного середовища, що лягла в основу рівнянь збереження маси, руху, кількості руху та енергії в потоці.

Рівняння стану

Транспортний потік. Загальне рівняння транспортного потоку, що пов'язує між собою такі макропараметри, як середні швидкість v (км/год), щільність k (авт/км) та інтенсивність q (авт/год), має вигляд [6]:

$$q = kv \quad (1)$$

Інтенсивність та щільність не можна вважати постійними величинами, вони змінюються у просторі і у часі. [10] Інтенсивність можна розглядати, як величину, зворотну середній тривалості часу між автомобілями, що рухаються один за одним, а щільність – як величину, зворотну інтервалу між автомобілями, і відповідно швидкості. Так як збільшення щільності призводить до зменшення швидкості. Тоді можна записати:

$$q(v) = k v(k) \quad (1a)$$

Потік стисної рідини. В термодинаміці зв'язок між макропараметрами відображає рівняння стану:

$$p = R\rho T, \quad (2)$$

де p – тиск, Па (Дж/м³);

R – газова стала, Дж/кг моль;

ρ – щільність, кг/м³;

T – абсолютна температура, К.

При русі стислої рідини, як і в транспортному потоці, ці параметри є динамічними характеристиками потоку і змінюються при переході від однієї точки в іншу, від одного моменту часу в інший [5].

Рівняння нерозривності

Потік стислої рідини. У потоці стислої рідини виділяють елементарний об'єм (рис. 1) у формі паралелепіпеда і записують умову на основі закону збереження маси для консервативної системи (обмін енергією із зовнішнім середовищем відсутній) в такому вигляді:

$$\frac{d(\rho\Delta V)}{dt} = 0 \quad (3)$$

де ΔV – об'єм елемента;

ρ - середня щільність елемента.

Продиференціювавши, маючи на увазі, що ρ і ΔV - змінні величини, і поділивши рівняння на $\rho\Delta V$ можна записати:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\Delta V} \frac{d\Delta V}{dt} = 0 \quad (4)$$

де $\frac{1}{\Delta V} \frac{d\Delta V}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ - швидкість відносної об'ємної деформації, об'єм елемента $\Delta V = dx dy dz$.

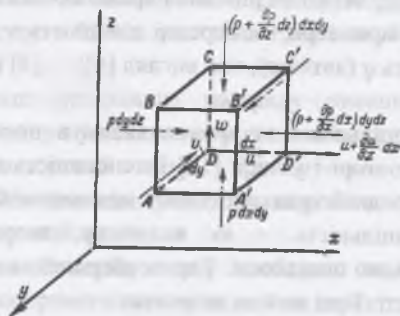


Рис. 1. Для виведення рівнянь нерозривності та руху

Так як $\rho = \rho(x, y, z, t)$, то повна похідна швидкості:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Маючи на увазі, що швидкості в трьох площинах $\frac{dx}{dt} = u; \frac{dy}{dt} = v; \frac{dz}{dt} = w$

Підставивши $\frac{d\rho}{dt}$ та $\frac{1}{\Delta V} \frac{d\Delta V}{dt}$ в рівняння (4) і перетворивши, отримуємо:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Рівняння (5) є рівнянням нерозривності газового потоку в диференціальній формі. Це рівняння було вперше отримане Ейлером в 1659 р.

Для рідини, що стискається, рівняння нерозривності зв'язує зміни об'єму і щільності частинки [5].

Для одновимірного потоку рідини, що стискається, можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

Транспортний потік. Так само можна вивести рівняння нерозривності для транспортного потоку на ділянці дороги довжиною від x до $x+dx$, зміну кількості автомобілів можна виразити через зміну інтенсивності q за час dt та через зміну щільності k та моментами часу t та $t+dt$ на певній ділянці dx (рис. 2). Прирівнявши ці вирази можна отримати «рівняння збереження автомобілів» або за аналогією зі стислою рідиною «рівняння нерозривності» [6].

$$\frac{dk}{dt} + \frac{dq}{dx} = \frac{dk}{dt} + \frac{d(kv)}{dx} = 0 \quad (7)$$

Рівняння руху

Потік стислої рідини. Розглянемо у потоці рідини елементарний паралелепіпед (рис. 1), в якому знаходиться певна маса рідини. Використаємо стосовно нього теорему кількості руху: похідна за часом від кількості руху маси, що знаходиться у виділеному елементі, рівна геометричній сумі всіх зовнішніх сил, що діють на елемент (тобто імпульсу). [5]

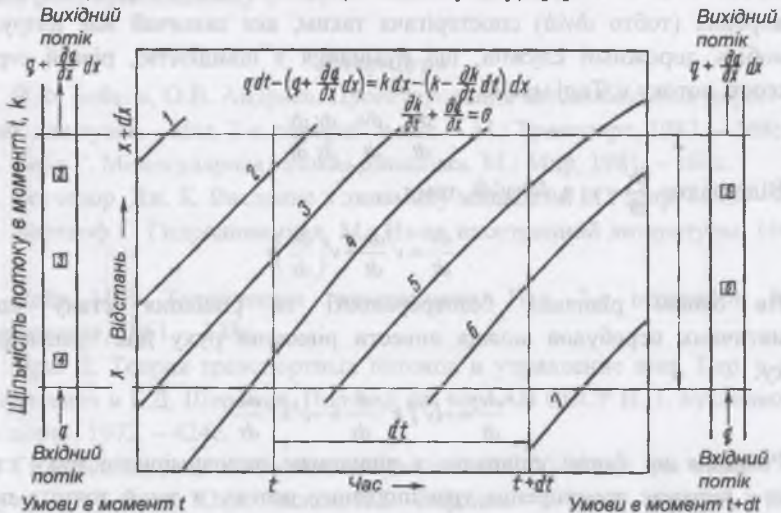


Рис. 2. Виведення рівняння нерозривності для транспортного потоку

На грань $ABCD$ у напрямку осі x діє сила тиску $pdydz$, імпульс якої буде $pdydzdt$. Імпульс сил тиску, що діє на протилежну грань $A'B'C'D'$, рівний

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydzdt$$

Окрім сил тиску на елемент можуть діяти масові сили. Позначимо через X , Y і Z проекції одиничної масової сили на осі координат x , y і z . Тоді проекції повної масової сили на координатні осі будуть:

$$X\rho dx dy dz, Y\rho dx dy dz, Z\rho dx dy dz$$

Імпульс масових сил в проекції вісь x $X\rho dx dy dz dt$, тоді сумарний імпульс рівний зміні кількості руху:

$$X\rho dx dy dz dt - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz dt = \rho dx dy dz du$$

де $\rho dx dy dz du$ - маса елемента.

Так як нас цікавить одномірний потік рідини, надалі будемо розглядати тільки проекцію на вісь x . Відповідно,

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (8)$$

Нехтуючи впливом масових сил $X=0$ отримуємо [5].

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (9)$$

Транспортний потік. Нехай швидкість v в точці x буде визначатися тільки щільністю k в x : $v=v(k(x, t))$. Нехай також $v'=dv/dk$. Прийемо середне прискорення (тобто dv/dt) спостерігача таким, яке зазвичай має патрульний автомобіль дорожньої служби, що рухається з швидкістю, рівній середній швидкості потоку v . Тоді маємо

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Відповідно $\frac{dx}{dt} = v$, а $dv=v'dk$, тому

$$\frac{dv}{dt} = v' \frac{dk}{dt} + v \left(\frac{dk}{dx} \right) v$$

На основі рівняння безперервності та рівняння стану шляхом математичних перебудов можна вивести рівняння руху для транспортного потоку:

$$\frac{dv}{dt} = -(v')^2 k^{-1} \frac{dk}{dx} = -c^2 k^{-1} \frac{dk}{dx} \quad (10)$$

Рівняння по формі співпадає з рівнянням одновимірного руху стислої рідини і виражає прискорення транспортного потоку в даній точці в певний момент часу.

Коефіцієнт $-(v')^2 k^{-1} = \emptyset$ можна розглядати, як коефіцієнт тертя у випадку динаміки рідин.

В загальному випадку дане рівняння записують у вигляді:

$$\frac{dv}{dt} = -c^2 k^n \frac{dk}{dx} \quad (11)$$

Розв'язком даного рівняння при $n=-1$ буде [9]:

$$v = c \cdot \ln \frac{k_c}{k} \quad (12)$$

Дану модель у 1959 році запропонував Грінберг Г. Це ж рівняння (формула 12) у 1959 році вивели Гейзік Д., Герман Р. та Поттс Р. з нелінійної моделі слідування за лідером при стаціонарному потоці [6].

В газовій динаміці існування формального зв'язку між макро- та мікроскопічними величинами означає, що рівняння збереження маси (безперервності), кількості руху та енергії в потоці, можуть бути отримані будь-яким з цих підходів [2]. Це ж характерно і для транспортного потоку.

Висновок. Очевидно, що порівнюючи рівняння транспортного потоку з класичними формулами газодинаміки, можна виявити відповідності між величинами, що характеризують потік стисної рідини, і величинами, що характеризують транспортний потік:

- 1) дискретні величини: молекула – автомобіль;
- 2) змінні величини: щільності ρ , $кг/м^3 - k$, $авт/км$
швидкості u , $м/с - v$, $км/год$

Рівняння нерозривності та руху є однаковими для обох систем (у випадку рівняння руху при показнику $n=-1$).

Література

1. В.Ф. Бабков, О.В. Андреев. Проектирование автомобильных дорог. Ч. 1: Учебник для вузов. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Транспорт, 1987. – 368с.
2. Берд Г. Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981. – 160с.
3. Бетчелор Дж. К. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. – 778с.
4. Биркгоф Г. Гидродинамика. М.: Из-во иностранной литературы, 1963. – 235с.
5. Дейч М.Е. Техническая газодинамика. Изд. 2-е переработ. М.-Л. Госэнергоиздат, 1961. – 338с.
6. Дрю Д. Теория транспортных потоков и управление ими. Пер. с англ. Е.Г. Коваленко и Г.Д. Шермана. Под ред. гл. кор. АН СССР И.П. Бусленко. М., «Транспорт», 1972. – 424с.
7. Гидравлика, водоснабжение и канализация: Учебник для вузов / В.И. Калицун, В.С. Кедров, Ю.М. Ласков, П.В. Сафонов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1980. – 359 с.
8. Семенов В.В. Математическое моделирование динамики транспортных потоков мегаполиса. <http://spkurdyumov.narod.ru/Mat100.htm#Ma316>.

9. Управление дорожным движением / Х. Иносэ, Т. Хамада; Пер. с англ. М.П. Печерского; Под ред. М.Я. Блинкина. – М.: Транспорт, 1983. – 248с.

10. Хейт Ф. Математическая теория транспортных потоков / М.: Мир, 1966. – 286с.

Аннотация

Рассмотрены классические уравнения гидродинамики (газодинамики) и проведено сравнение их с уравнениями, которые отображают транспортный поток.

Ключевые слова: поток сжимаемой жидкости, гидродинамика, газодинамика, транспортный поток, уравнение состояния, неразрывности, движения.

Annotation

Classic equalizations of hydrodynamics (gas dynamics) are considered and comparison is conducted them with equalizations, which represent a transport stream.

Keywords: stream of coercible liquid, hydrodynamics, gas dynamics, transport stream, equalization of the state, indissolubility, motion.