

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ



ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ  
ОСНОВЫ

ИНФОРМАЦИОННО-  
ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ  
СИСТЕМ

*Ненаписанное исчезает...*

*Иван Бунин*  
(писатель, XX ст.)

*В любом случае есть только один способ правильно вести полемику: нужно сначала хорошо понять, о чем идет речь...*

*Платон*  
(древнегреческий философ, I ст. до н.э.)

**Theoretical basics of  
INFORMATION-  
MEASUREMENT  
SYSTEMS**

Textbook

*Edited by Member of the National Academy  
of science of Ukraine V. Babak*

Kyiv 2014

**Теоретические  
основы  
ИНФОРМАЦИОННО-  
ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ  
СИСТЕМ**

Учебник

*Под редакцией чл.-кор. НАН Украины,  
В. П. Бабака*

Киев 2014

УДК 681.518.3 (075.8)

ББК з960.7я7

И741

Авторы:

В. П. Бабак, С. В. Бабак, В. С. Еременко, Ю. В. Куц, Н. Б. Марченко,  
В. М. Мокийчук, Е. В. Монченко, Д. П. Орнатский, В. Г. Павлов,  
Н. А. Пустовойтов, Л. Н. Щербак

Рецензенты:

Б. С. Стогний, д-р техн. наук, профессор, академик НАН Украины,  
В. П. Малайчук, д-р. техн. наук, профессор

*Рекомендовано в печать ученым советом Университета новейших технологий,  
г. Киев и кафедрой информационно-измерительных систем Национального авиационного университета*

Теоретические основы информационно-измерительных систем: Учебник /  
И741 В. П. Бабак, С. В. Бабак, В. С. Еременко и др.; под ред. чл.-кор. НАН Украины  
В. П. Бабака / - К., 2014. – 832 с.  
ISBN 978-617-7031-26-9

В учебнике систематически изложены основные понятия, принципы построения и исследования информационно-измерительных систем, базирующиеся на математическом аппарате преобразования измерительных сигналов, технологиях измерения, передачи и обработки сигналов и данных, на помехоустойчивом кодировании, использовании современных информационно-коммуникационных каналов передачи информации, на алгоритмах шифрования и дешифрования передаваемых данных, методах исследования метрологических характеристик и пр. После каждой главы размещены основные выводы, вопросы для самоконтроля, а также ключевые слова на русском и английском языках.

Для студентов технических специальностей высших учебных заведений, аспирантов, научных и инженерно-технических работников и специалистов в области измерительных технологий.

УДК 681.518.3 (075.8)

ББК з960.7я7

© В. П. Бабак, С. В. Бабак, В. С. Еременко, Ю. В. Куц, Н. Б. Марченко,  
В. М. Мокийчук, Е. В. Монченко, Д. П. Орнатский, В. Г. Павлов,  
ISBN 978-617-7031-26-9 Н. А. Пустовойтов, Л. Н. Щербак, 2014

## Оглавление

Список сокращений .....	13
Предисловие .....	15
<b>Глава 1. Задачи функционирования информационно-измерительных систем (Л. Н. Щербак) .....</b>	<b>17</b>
1.1. Метрология как наука об измерениях. Термины и определения метрологии.....	18
1.2. Развитие средств измерений и классификация систем.....	24
1.3. Проблемы теории измерений и задачи функционирования систем.....	33
1.4. Аппаратно-программная реализация и пути развития систем...	53
Основные выводы .....	70
Вопросы для самоконтроля .....	73
Conclusions .....	74
<b>Глава 2. Количественные оценки измерительной информации (В. П. Бабак) .....</b>	<b>77</b>
2.1. Измерительная информация, функции и ее свойства.....	78
2.2. Количественные характеристики информации .....	81
2.3. Меры информации .....	83
2.4. Энтропия и её свойства .....	87
2.5. Производительность и избыточность источника информации	90
2.6. Связь информации с характеристиками сигналов.....	107
Основные выводы .....	111
Вопросы для самоконтроля .....	112
Conclusions .....	113
<b>Глава 3. Сигналы, их математические модели и преобразования (В. П. Бабак, С. В. Бабак).....</b>	<b>115</b>
3.1. Виды сигналов и их математические модели.....	116
3.2. Случайные сигналы и помехи .....	134
3.3. Числовые характеристики сигналов и помех .....	141
3.4. Математические модели сигналов с ограниченным спектром	146
3.5. Дискретные сигналы .....	158
Основные выводы .....	178
Вопросы для самоконтроля .....	181
Conclusions.....	182
<b>Глава 4. Методы анализа данных измерений (Ю. В. Куц, Н. А. Пустовойтов) .....</b>	<b>185</b>
4.1. Применение математических методов в задачах измерений...	186
4.2. Методы линейной вычислительной алгебры .....	193
4.3. Функциональные пространства. Методы представления функций .....	218
4.4. Элементы теории дифференциальных и разностных уравнений.....	236

Основные выводы .....	251
Вопросы для самоконтроля .....	252
Conclusions .....	253
<b>Глава 5. Статистическая обработка данных</b>	
<i>(В. С. Еременко, Ю. В. Куц, В. М. Мокийчук)</i> .....	255
5.1. Основные понятия статистической обработки данных измерений.....	256
5.2. Методы обработки данных измерений.....	264
5.3. Основы регрессионного анализа.....	276
5.4. Статистическая обработка случайных углов .....	280
5.5. Типовые методы обработки результатов измерений.....	296
Основные выводы .....	304
Вопросы для самоконтроля .....	307
Conclusions.....	309
<b>Глава 6. Статистическое оценивание характеристик случайных     процессов</b> <i>(Н. Б. Марченко, Л. Н. Щербак)</i> .....	313
6.1. Характерные особенности статистического оценивания характеристик стационарных процессов .....	314
6.2. Статистическое оценивание стационарности случайной последовательности .....	325
6.3. Статистическое оценивание временных характеристик стационарной последовательности .....	329
6.4. Статистическое оценивание спектральных характеристик стационарной последовательности .....	336
Основные выводы .....	343
Вопросы для самоконтроля .....	345
Conclusions.....	347
<b>Глава 7. Преобразователи измерительных систем</b>	
<i>(Ю. В. Куц, Е. В. Монченко, Д. П. Орнатский)</i> .....	349
7.1. Классификация и основные характеристики измерительных преобразователей.....	350
7.2. Основные типы датчиков.....	354
7.3. Модель идеального операционного усилителя.....	389
7.4. Модель реального операционного усилителя.....	396
7.5. Погрешности преобразователей на операционных усилителях	404
Основные выводы .....	414
Вопросы для самоконтроля .....	415
Conclusions.....	417
<b>Глава 8. Аналоговые интерфейсы</b> <i>(Ю. В. Куц, Д. П. Орнатский)</i> .....	419
8.1. Основные термины и определения.....	420
8.2. Разновидности аналоговых интерфейсов .....	425
8.3. Метрологические характеристики аналоговых интерфейсов ...	438
Основные выводы .....	442

Вопросы для самоконтроля .....	443
Conclusions.....	443
<b>Глава 9. Аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи</b> ( <i>Ю. В. Куц, В. С. Еременко</i> ) .....	445
9.1. Дискретизация, квантование и цифровое кодирование измерительных сигналов.....	446
9.2. Средства аналого-цифрового преобразования.....	452
9.3. Цифро-аналоговые преобразователи.....	473
Основные выводы .....	486
Вопросы для самоконтроля .....	489
Conclusions.....	490
<b>Глава 10. Цифровые интерфейсы</b> ( <i>Ю. В. Куц, В. Г. Павлов</i> ).....	493
10.1. Вычислительные ресурсы компьютеризированных систем. ...	494
10.2. Классификация цифровых интерфейсов .....	509
10.3. Параллельный интерфейс.....	512
10.4. Последовательный интерфейс .....	520
10.5. Интерфейс USB .....	534
Основные выводы .....	549
Вопросы для самоконтроля .....	551
Conclusions.....	552
<b>Глава 11. Передача измерительной информации в каналах систем</b> ( <i>В. П. Бабак, С. В. Бабак</i> ) . .....	555
11.1. Системы передачи данных .....	556
11.2. Виды информационных каналов, их математические модели и характеристики .....	561
11.3. Скорость передачи информации в каналах связи.....	575
11.4. Синтез элементов информационных систем. Оптимальный приёмник .....	586
11.5. Многоканальные сети передачи данных. Разделение информационных каналов .....	597
11.6. Помехоустойчивость систем передачи информации .....	605
Основные выводы .....	611
Вопросы для самоконтроля .....	612
Conclusions.....	613
<b>Глава 12. Кодирование измерительной информации</b> ( <i>В.П. Бабак, С.В. Бабак</i> ) .....	615
12.1. Кодирование источника сообщений и передача данных .....	616
12.2. Помехоустойчивое кодирование .....	631
12.3. Блочное помехоустойчивое кодирование .....	640
12.4. Свёрточное помехоустойчивое кодирование .....	660
Основные выводы .....	675
Вопросы для самоконтроля .....	677
Conclusions.....	677



<b>Глава 13. Шифрование и дешифрование измерительной информации</b> ( <i>В.П. Бабак, С.В. Бабак</i> ).....	679
13.1. Модели и системы шифрования.....	680
13.2. Шифрование в каналах связи .....	684
13.3. Алгоритмы и системы симметричного и асимметричного шифрования (криптографической защиты информации) .....	688
13.4. Электронная цифровая подпись .....	698
13.5. Стеганографические методы .....	711
13.6. Методы криптоанализа .....	723
Основные выводы .....	726
Вопросы для самоконтроля .....	728
Conclusions.....	729
<b>Глава 14. Защита измерительной информации от несанкционированного доступа</b> ( <i>В.П. Бабак</i> ) .....	731
14.1. Методы несанкционированного доступа к ресурсам информационных систем .....	732
14.2. Средства защиты от несанкционированного доступа .....	745
14.3. Моделирование систем и процессов защиты информации ...	750
14.4. Противодействие сетевому несанкционированному доступу.	759
Основные выводы .....	774
Вопросы для самоконтроля .....	777
Conclusions .....	777
<b>Глава 15. Метрологическое обеспечение систем</b> ( <i>В.С. Еременко, В.М. Мокийчук</i> ) .....	781
15.1. Содержание метрологического обеспечения систем .....	782
15.2. Основные метрологические характеристики систем.....	788
15.3. Методы определения метрологических характеристик систем.....	796
Основные выводы .....	818
Вопросы для самоконтроля .....	820
Conclusions.....	821
Предметный указатель.....	823
Список литературы .....	830

## Contents

List of abbreviations .....	13
Preface .....	15
<b>Chapter 1. Functional tasks of information-measurement systems</b> ( <i>L. Scherbak</i> ) .....	17
1.1. Metrology as a science of measurement. Metrology terms and definitions .....	18
1.2. Development of measurement means and classification of systems .....	24
1.3. Measurement theory problems and functional tasks of IMS systems.....	33
1.4. Hardware and software structure and ways of IMS development...	53
Main conclusions (Russian).....	70
Self-control questions .....	73
Main conclusions (English) .....	74
<b>Chapter 2. Quantitative evaluation of measurement information</b> ( <i>V. Babak</i> ) .....	77
2.1. Measurement information and its properties .....	78
2.2. Quantitative characteristics of information .....	81
2.3. Measures of information .....	83
2.4. Entropy and its properties .....	87
2.5. Productivity, redundancy and interference immunity of information source .....	90
2.6. Link between information and signals characteristics .....	107
Main conclusions (Russian).....	111
Self-control questions .....	112
Main conclusions (English) .....	113
<b>Chapter 3. Signals, their mathematical models and transformations</b> ( <i>V. Babak, S. Babak</i> ).....	115
3.1. Types of signals and their mathematical models .....	116
3.2. Random signals and interferences .....	134
3.3. Numerical characteristics of signals and interferences .....	141
3.4. Signals with bounded spectrum.....	146
3.5. Discrete signals .....	158
Main conclusions (Russian).....	178
Self-control questions .....	180
Main conclusions (English) .....	182
<b>Chapter 4. Methods of measurement data' analysis</b> ( <i>Y. Kutz, N. Pustovoytov</i> ) .....	185
4.1. Mathematical methods application in measurement tasks .....	186
4.2. Computational linear algebra methods .....	193
4.3. Methods of representing functions .....	218
4.4. Elements of the theory of differential and difference equations.....	236

Main conclusions (Russian).....	251
Self-control questions .....	252
Main conclusions (English) .....	253
<b>Chapter 5. Statistical data processing</b>	
( <i>V. Eremenko, Y. Kutz, V.Mokiychuk</i> ).....	255
5.1. Basic notions of statistical data processing.....	256
5.2. Processing of experimental data .....	264
5.3. Basis of regression analysis .....	276
5.4. Statistical processing of random angles .....	280
5.5 Typical methods of measurement data processing .....	296
Main conclusions (Russian).....	304
Self-control questions .....	307
Main conclusions (English) .....	309
<b>Chapter 6. Statistical evaluation of random processes' characteristics</b>	
( <i>N. Marchenko, L. Scherbak</i> ).....	313
6.1. Typical features of statistical evaluation of stationary processes characteristics .....	314
6.2. Statistical evaluation of random sequence stationary based on measurement data.....	325
6.3. Statistical evaluation of temporary characteristics of stationary sequence based on measurement data.....	329
6.4. Statistical evaluation of spectral characteristics of stationary sequences based on measurement data.....	336
Main conclusions (Russian).....	343
Self-control questions .....	345
Main conclusions (English) .....	347
<b>Chapter 7. Measuring systems converters</b>	
( <i>Y. Kutz, E. Monchenko, D. Ornatskiy</i> ).....	349
7.1. Converters classification and characteristics .....	350
7.2. Main types of sensors .....	354
7.3. Theory fundamentals of the ideal operational amplifier .....	389
7.4. Theory fundamentals of the real operational amplifier .....	396
7.5. Converters uncertainty at operational amplifier.....	404
Main conclusions (Russian).....	414
Self-control questions .....	415
Main conclusions (English) .....	417
<b>Chapter 8. Analog interfaces</b> ( <i>Y. Kutz, D. Ornatskiy</i> ).....	419
8.1. Main terms and definitions .....	420
8.2. Varieties of analog interfaces .....	425
8.3. Metrological characteristics of analog interfaces .....	438
Main conclusions (Russian).....	442
Self-control questions .....	443
Main conclusions (English) .....	443

<b>Chapter 9. Analog-to-digital and digital-to-analog converters</b>	
<i>(Y. Kutz, V. Eremenko)</i> .....	445
9.1. Sampling and quantization operations .....	446
9.2. Analog-to-digital signals conversion .....	452
9.3. Digital-to-analog converters .....	473
Main conclusions (Russian).....	486
Self-control questions .....	489
Main conclusions (English) .....	490
<b>Chapter 10. Digital interfaces</b> <i>(Y. Kutz, V. Pavlov)</i> .....	493
10.1. Computational resources of computerized systems.....	494
10.2. Digital interfaces classification .....	509
10.3. Parallel interface .....	512
10.4. Serial interface .....	520
10.5. USB interface .....	534
Main conclusions (Russian).....	549
Self-control questions .....	551
Main conclusions (English) .....	552
<b>Chapter 11. Transmission of measurement data in systems channels</b>	
<i>(V. Babak, S. Babak)</i> .....	555
11.1. Data transmission systems .....	556
11.2. Types of information channels, their mathematical models and characteristics.....	561
11.3. Information transmission speed in systems channels .....	575
11.4. Synthesis of systems elements. Optimal receiver .....	586
11.5. Multichannel data transmission networks. Separation of information channels.....	597
11.6. Information transmission systems' interference immunity .....	605
Main conclusions (Russian).....	611
Self-control questions .....	612
Main conclusions (English) .....	613
<b>Chapter 12. Coding of measurement information</b>	
<i>(V. Babak, S. Babak)</i> .....	615
12.1. Message source coding and data compression .....	616
12.2. Noiseproof coding .....	631
12.3. Block noiseproof coding .....	640
12.4. Convolutional noiseproof coding .....	660
Main conclusions (Russian).....	675
Self-control questions .....	677
Main conclusions (English) .....	677
<b>Chapter 13. Encryption and decryption of measuring information</b>	
<i>(V. Babak, S. Babak)</i> .....	679
13.1. Models, objectives and encryption systems .....	680
13.2. Encryption in communication channels .....	684

13.3. Algorithms and systems of symmetric and asymmetric encryption (cryptographic information protection).....	688
13.4. Electronic digital signature .....	698
13.5. Steganography methods .....	711
13.6. Cryptanalysis methods .....	723
Main conclusions (Russian).....	726
Self-control questions .....	728
Main conclusions (English) .....	729
<b>Chapter 14. Protection of measurement data from unauthorized access</b>	
<i>(V. Babak)</i> .....	731
14.1. Methods of unauthorized access to information systems resources.....	732
14.2. Means of protection from unauthorized access .....	745
14.3. Modelling of information protection systems and processes .....	750
14.4. Counteracting to network unauthorized access.....	759
Main conclusions (Russian).....	774
Self-control questions .....	777
Main conclusions (English) .....	777
<b>Chapter 15. Metrological provision of systems</b>	
<i>(V. Eremenko, V. Mokiychuk)</i> .....	781
15.1. Content of systems metrological provision .....	782
15.2. Basic metrological characteristics of systems .....	788
15.3. Methods to determine metrological characteristics of systems hardware and software means .....	796
Main conclusions (Russian).....	818
Self-control questions .....	820
Main conclusions (English) .....	821
Subject index.....	823
References .....	830

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АИ	- аналоговый интерфейс
АИМ	- амплитудно-импульсная модуляция
АЛУ	- арифметико-логическое устройство
АОП	- акустооптический преобразователь
АПСЗ	- алгебраическая проблема собственных значений
АЦП	- аналого-цифровой преобразователь
АЧХ	- амплитудно-частотная характеристика
БЛМ	- модель Белла - Лападула
БПФ	- быстрое преобразование Фурье
БС	- блок синхронизации
ГИ	- генератор импульсов
ДНФ	- дизъюнктивная нормальная форма
ДПФ	- дискретное преобразование Фурье
ДРР	- дисциплинное распределение ресурсов
ДУ	- дифференциальное уравнение
ИИС	- информационно-измерительная система
ИК	- измерительный канал
ИКС	- информационно-коммуникационная система
ИНС	- идеальный низкочастотный сигнал
ИОН	- источник опорного напряжения
ИП	- измерительный преобразователь
ИПС	- идеальный полосовой сигнал
ИС	- измерительная система
КПДП	- контроллер прямого доступа к памяти
КС	- компьютерная система
МЛ	- мажоритарная логика
МНК	- метод наименьших квадратов
МО	- метрологическое обеспечение
МОПТТ	- металл-окись-полупроводниковый полевой транзистор
МП	- микропроцессор
МХ	- метрологические характеристики
НСД	- несанкционированный доступ
НСП	- неисключенная систематическая погрешность
ОЗУ	- оперативное запоминающее устройство
ООС	- отрицательная обратная связь
ОУ	- операционный усилитель
ПАВ	- поверхностные акустические волны
ПЗУ	- постоянное запоминающее устройство
ПИП	- первичный измерительный преобразователь
ПК	- персональный компьютер
ПНЧ	- преобразователь напряжения-частоты

ПО	- программное обеспечение
ПП	- приемопередатчик
ППП	- преобразователь профиля поверхности
ПИИС	- полиметрическая информационно-измерительная система
РОН	- регистр общего назначения
РПП	- регистр последовательного приближения
РСИ	- реверсивный счетчик импульсов
РС-код	- код Рида - Соломона
РУ	- разностное уравнение
СД	- система диагностики
СИ	- система идентификации
СИТ	- средства измерительной техники
СК	- система контроля
СКО	- среднеквадратическое отклонение
СЛАУ	- система линейных алгебраических уравнений
СРО	- система распознавания образов
ССД	- система сбора данных
СТМ	- сканирующий туннельный микроскоп
СУ	- система управления
ТЗ	- техническое задание
ТИИС	- телеметрическая информационно-измерительная система
ТС	- термометр сопротивления
УВХ	- устройство выборки / хранения
ФМ	- фазомодулированный сигнал
ФНЧ	- фильтр нижних частот
ФЧХ	- фазочастотная характеристика
ХимПТ	- химический полевой транзистор
ЦАП	- цифро-аналоговый преобразователь
ЧМ	- частотно-модулированный сигнал
ШИМ	- широтно-импульсная модуляция
ЭВМ	- электронная вычислительная машина
ЭЦП	- электронная цифровая подпись
CRC-код	- циклический код для обнаружения ошибок
LSB-метод	метод наименьшего значимого бита
MLS-код	- последовательность максимальной длины
PKI	- инфраструктура открытых ключей
RSA	- алгоритм шифрования Риверста- Шамира - Адлемана
USB	- универсальная последовательная шина

## Предисловие

С момента публикации учебника «Теоретические основы информационной измерительной техники» (1983 г.) известного ученого в области измерений Орнатского П. П. прошло более 30-ти лет. Авторы настоящего издания представляют все трудности изложения материалов по информационно-измерительным системам (ИИС) в настоящее время. В издании сохранена методология изложения материалов упомянутого выше учебника – теоретические основы адаптированы к функционированию основных структурных модулей ИИС и их базовые положения заключаются в следующем.

Теоретические основы систем используют методы и результаты исследований естественных наук, включая современную математику и физику, технических наук для решения разноплановых задач измерений.

Теоретические основы систем условно можно разделить на два направления:

основы разработки и создания ИИС как технической системы;

основы функционирования ИИС как аппаратно-программных средств измерения, отображающих характерные специфику и особенности общности и конкретики проведения процессов измерения.

В настоящем издании изложены, в основном, материалы второго направления исследований функционирования ИИС.

Процесс измерения является совместной реализацией теории, методологии и практики, использующей средства измерения, интеллектуальный ресурс исследователей при постановке задач измерения, обоснование метода измерения, выполнение измерительного эксперимента, разработку информационного, алгоритмического и программного обеспечения для обработки данных измерений, получение результата и определение погрешности измерений.

Классические операции процесса измерения дополнены операциями защиты данных измерений, тем самым отображены современные тенденции обеспечения достоверности измерительной информации.

Процесс измерения характеризуется последовательным применением двух мер: физической меры (единицы или шкалы) при экспериментальном ее сравнении со значением измеряемой величины, а также нормированной вероятностной меры для статистического оценивания результата измерения и его качества (характеристики точности).

ИИС является продуктом использования научно-технического, информационного, интеллектуального, производственного, экономического и других ресурсов, и в интегральном виде отображает уровень развития и возможности информационно-измерительной техники в целом при решении научно-прикладных задач метрологии.

Современные ИИС могут быть реализованы как:

- реальные аппаратно-программные средства измерений;



- виртуальные ИИС с использованием современных информационно-измерительных технологий моделирования различных видов, включая имитационное, математическое, физическое, с широким использованием средств вычислительной техники для проведения имитационного измерительного эксперимента.

Виртуальные ИИС по сравнению с реальными имеют ряд преимуществ, их реализация требует меньших временных, производственных и финансовых затрат. Однако, в ряде случаев такие ИИС из-за информационной неопределенности объекта измерений не могут обеспечить получение объективных достоверных результатов и поэтому требуется провести натурный измерительный эксперимент с использованием реальных систем.

Потенциальные возможности современных систем на этапе информационного развития общества значительно возросли, что способствует как расширению предметных областей их применения, так и их использования для повышения эффективности известных и решения новых научно-прикладных задач метрологии.

В прогнозах развития ИИС авторы солидарны с другими коллегами - специалистами по измерениям. Никакие усовершенствования измерительных информационных технологий, включая компьютерные и интеллектуальные, не привели, не приводят и не могут очевидно привести в будущем к расширению номенклатуры измерений физических величин пока отсутствуют соответствующие сенсоры, формирующие первичную информацию при непосредственном взаимодействии их с объектом исследования. Дальнейшее развитие ИИС и использование их в различных отраслях науки и техники, включая квантовую метрологию и нанотехнологии, в значительной мере будет определяться разработкой новых принципов функционирования и создания на их основе новых видов сенсоров.

Обращаясь к читателям, отметим, что Вы можете всегда критиковать эту книгу за отсутствие в ней ваших любимых сюжетов. Но мы ни в коем случае не склонны просить за это прощение. По этому случаю мы выбрали в качестве девиза слова из песни Рикки Нельсона «Вечеринка в саду»: «Ты не можешь угодить всем, так что угоди самому себе».

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам – академику – секретарю НАН Украины, доктору технических наук, профессору Б. С. Стогнию и доктору технических наук, профессору, заведующему кафедрой Днепропетровского национального университета В. П. Малайчуку за замечания и рекомендации в написании книги.

*Киев, весна 2014*

*От авторов*



## **ЗАДАЧИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННО- ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ**

# **1**

- 1.1. Метрология как наука об измерениях.  
Термины и определения метрологии
- 1.2. Развитие средств измерений и  
классификация систем
- 1.3. Проблемы теории измерений и задачи  
функционирования систем
- 1.4. Аппаратно-программная реализация  
и пути развития систем

### 1.1. Метрология как наука об измерениях. Термины и определения метрологии

**О метрологии.** Теоретические основы функционирования информационно-измерительных систем (ИИС) как аппаратно-программных средств измерения рассматриваются в метрологии как науке об измерениях.

Термин *метрология* происходит от словосочетания двух греческих слов: *метрон* - *мера* и *логос* - *учение*. Истоки измерений, а соответственно и метрологии, уходят в давние времена становления жизни и сознательной деятельности человека на Земле.

Если рассматривать современную метрологию как *науку*, то она соответствует всем требованиям общего определения науки, а именно:

это сфера человеческой деятельности, функцией которой является получение знаний об окружающем мире путем использования процесса и инструментария измерений;

превратилась в производительную силу общества;

тесно связана с естественными, техническими и общественными науками, отраслями хозяйства.

Метрология как наука занимает важное место при проведении фундаментальных и прикладных исследований природы и общества и решает различные задачи теоретического, технического, технологического, экономического, социального направлений исследований.

В нормативных документах *метрология* определена так.

*Метрология* - наука об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства, а также о способах достижения заданной точности измерений.

Выделяют следующие направления исследований метрологии:

*теоретическая метрология* посвящена теории измерений;

*общая метрология* включает основы и методы, которые используются во всех предметных областях измерений;

*фундаментальная метрология* посвящена проблемам использования новых физических эффектов для создания и совершенствования прикладных методов и способов измерения, вопросам уточнения значений физических постоянных, обоснованию потенциально возможных границ измерения;

*законодательная метрология* посвящена законодательным вопросам обеспечения единства измерений.

В большинстве случаев практических процессов измерений в структуре метрологии выделяют следующие разделы:

*теорию измерений*;

*прикладную метрологию*, которая включает методы, способы, технические, программные и другие средства обеспечения единства измерений;

*законодательную метрологию* на основе использования законодательных актов, правил, требований и норм, которые регламентируются и контролируются государством для обеспечения единства измерений.

Отметим, что нормативные документы законодательной метрологии утверждаются и вступают в законную силу только после длительного по времени и многократного подтверждения результатов теоретических, имитационных и экспериментальных исследований по измерениям в различных отраслях науки и техники. Это приводит к тому, что некоторые наиболее новые результаты исследований по измерениям не находят своего отображения в действующих нормативных документах, а вступают в действие с задержкой во времени после практического подтверждения их сущности. Такое естественное поэтапное развитие законодательной метрологии. В данной книге использованы как материалы нормативных документов законодательной метрологии, так и результаты исследования по измерениям.

Приведенные ниже термины и определения метрологии (измерений) условно разделены на две группы. К первой группе относятся общие термины и определения процесса измерения, а ко второй – технические средства обеспечения процесса измерений, включая ИИС. процесс измерения в общем виде схематически изображен на рис. 1.1.

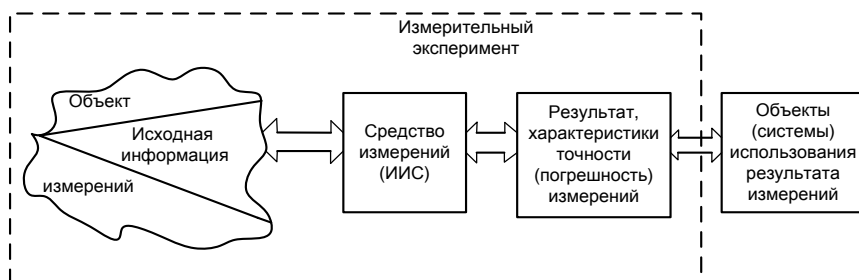


Рис. 1.1. Обобщенная схема процесса измерений

*Процесс измерения* обеспечивает при выполнении определенных условий реализацию комплекса действий для получения результата и характеристик точности (погрешности) измерений. Он включает: постановку задач измерения; определение метода измерений; разработку информационного, обеспечения (включая алгоритмическое и программное) для проведения измерений; выполнение измерительного эксперимента; получение данных измерений; статистическую обработку данных измерений; получение результата и характеристик точности измерений; предоставление полученных результатов измерений для дальнейшего использования. Разнообразие и разноплановость всех процессов измерений проявляется в специфике и характерных особенностях каждого конкретного процесса измерений.

**Термины и определения процесса измерений.** Ряд терминов и определений метрологии, которые приведены ниже, регламентируются нормативными документами (ДСТУ, ГОСТ, ISO и др.). Одним из основных понятий в теории измерений является понятие физической величины.

*Физическая величина* - это свойство, которое в качественном отношении является общей для многих физических объектов, но индивидуальная в коли-

чественном отношении у каждого из них.

В большинстве случаев физические величины изменяются во времени и в пространстве, что дает возможность практического применения физической величины при формировании первичной информации для исследований различных объектов измерений, свойства и характеристики которых изменяются в пространстве и во времени, например при измерении характеристик пространственно-временных электромагнитных полей. При описании явлений и процессов, а также свойств материальных тел используются различные физические величины, число которых достигает нескольких тысяч: электрические, магнитные, механические, акустические, оптические, химические, биологические и др. При этом указанные величины отличаются качественно и количественно и оцениваются различными числовыми значениями.

Значения физической величины при измерениях принято представлять в виде числа, вектора, функции, как размерные, так и безразмерные. Размерные значения физических величин называются *именованными* (например, *именованное число*).

При измерении исходной первичной информации объекта измерений, как правило, требуется найти такое отображение (преобразование) в другой вид (например, измерительный сигнал), чтобы имелась возможность приписать (определить) известную в практике измерений меру и путем последующих преобразований данных измерений определить результат и погрешность измерений. При этом такое отображение не является всегда однозначным, что характерно практически для всех видов измерений. При измерениях реализуется процесс получения опытным путем численного отношения между измеряемой физической величиной и некоторым ее значением, принятым за единицу измерения.

*Измерение* - отображение измеряемых величин их значениями путем эксперимента и вычислений с помощью специальных технических средств.

Важную роль при проведении измерений играют метод измерений и методика их выполнения.

*Метод измерения* - ряд способов использования средств измерительной техники и принципа измерения для создания измерительной информации.

*Методика выполнения измерений* - совокупность процедур и правил, выполнение которых обеспечивает получение результатов измерений с гарантированной точностью.

Количественная информация, полученная путем измерения, представляет собой измерительную информацию.

*Измерительная информация* - это количественные сведения о свойстве или свойствах материального объекта, явления или процесса, получаемые с помощью средств измерений в результате их взаимодействия с объектом.

Для энтропийной меры *количество измерительной информации* - это численная мера уменьшения неопределенности количественной оценки свойств объекта.

Взаимодействие объекта измерений и средств измерений в процессе эксперимента предполагает наличие сигналов, которые являются носителями информации. Важными носителями информации являются электрический ток, напряжение, электромагнитное поле и другие носители.

*Измерительный сигнал* - сигнал, функционально связанный с измеряемой физической величиной с заданной точностью.

Одним из основных определений при измерениях является следующее.

*Результат измерений* - значение физической величины, полученное путем ее измерения.

В большинстве случаев результат измерения - *именованное число*, найденное путем измерения значений физической величины. Результат измерения может быть принят как действительное значение измеряемой величины. Одна из основных задач измерения - оценка степени приближения или разности между истинным (точным) и действительным значениями измеряемой физической величины - *погрешности измерения*. Измерение уменьшает исходную неопределенность значения физической величины до уровня неизбежной остаточной неопределенности, определяемой погрешностью измерения. Значение погрешности измерения зависит от совершенства средств измерений, способа их использования и условий проведения измерительного эксперимента.

Погрешность измерения является непосредственной характеристикой точности измерения.

*Точность измерений* - главная характеристика качества измерений, отражает близость результата к истинному значению измеряемой величины.

На практике точность измерения принято подавать в форме погрешности измерения, которая непосредственно отражает разницу между результатом и истинным значением измеряемой величины в абсолютной, относительной или иной форме. Используют различные виды погрешностей.

*Абсолютная погрешность измерений* – разность между результатом измерений и истинным значением измеряемой величины.

*Относительная погрешность измерений* – отношение абсолютной погрешности измерений к истинному значению измеряемой величины.

*Систематическая погрешность* - составляющая погрешности, которая остается постоянной или прогнозируемо меняется в ряде измерений той же величины при неизменных условиях.

*Случайная погрешность* - составляющая погрешности, которая непредсказуемо меняется в ряде измерений той же величины.

Точность измерений имеет две основные составляющие - *правильность* и *сходимость (прецизионность)*, которые характеризуют близость результатов измерения к истинному значению при повторных измерениях. Точность принято выражать в форме погрешности, соответственно *правильность* характеризует *систематическая погрешность*, а *сходимость* - случайная.

*Правильность* - характеристика качества измерения, отражающая бли-

зость к нулю систематической погрешности.

*Сходимость* - характеристика качества измерения, которая отражает близость повторных результатов измерений одной и той же величины в одинаковых условиях.

К показателям качества измерений относят:

*правильность измерений;*

*сходимость измерений;*

*точность результата измерений* или точность измерений, которая отображает близость к нулю погрешности измерений;

*воспроизведение измерений*, которое отображает сходимость измерений, полученных в различных пространственных местах, в разное время, различными методами и средствами измерений.

Выше были приведены основные термины и определения процессов измерений, которые были условно отнесены к первой группе.

Рассмотрим далее основные термины и определения второй группы – средств измерений, используемых при реализации процессов измерений путем проведения измерительных экспериментов.

**Термины и определения средств измерений.** Средство измерительной техники (СИТ) является обобщающим термином, который используется для названия различных технических средств, специально предназначенных для измерений. К средствам измерительной техники относят средства измерений и их совокупности, например, измерительные приборы, индикаторы, меры, измерительные системы, измерительно-вычислительные комплексы.

*Средство измерительной техники* – техническое средство, которое используется во время измерения и имеет нормированные метрологические характеристики.

Такое средство имеет нормированные метрологические характеристики, воспроизводит и/или хранит единицу физической величины, размер которой принимает неизменным в пределах установленной погрешности в течение заданного интервала времени.

*Метрологические характеристики* - характеристики СИТ, которые нормируются для определения результата измерений и его погрешностей.

К СИТ относятся *средства измерений* и *измерительные устройства*.

*Средство измерений* - СИТ, которое реализует процедуру измерений.

К средствам измерений относятся регистрирующие средства измерений, измерительные приборы, измерительные каналы и измерительные системы. Средства измерения реализуют в идеальном случае линейную зависимость между значениями измеряемой величины и ее соответствующими размерами.

*Измерительное устройство* – СИТ, в котором выполняется одна из составных частей процедуры измерений (операция измерений).

К измерительным устройствам относятся следующие устройства: мера, компаратор, измерительный преобразователь, масштабный преобразователь и вычислительный компонент.

*Мера* – измерительное устройство, которое реализует воспроизведение и/или хранение физической величины заданного значения.

*Компаратор* – измерительное устройство, которое реализует сравнение однородных физических величин.

*Измерительный преобразователь* – измерительное устройство, которое реализует измерительное преобразование.

Измерительный преобразователь является средством измерений, предназначенным для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для передачи, дальнейшего преобразования, обработки и/или хранения, но не поддающимся непосредственному восприятию наблюдателя.

*Вычислительный компонент СИТ или числовой измерительный преобразователь* – измерительное устройство, которое является совокупностью средств вычислительной техники и программного обеспечения, и выполняющее вычислительные операции при измерении.

*Регистрирующее средство измерений* – средство измерений, в котором регистрируется сигнал измерительной информации.

*Измерительный прибор* – средство измерения, в котором создается визуальный сигнал измерительной информации.

Другими словами, измерительный прибор является средством измерений, предназначенным для выработки сигнала измерительной информации в форме, доступной для непосредственного восприятия наблюдателя.

Определения измерительной информационной системы ИИС будут более подробно рассматриваться в подразделе 1.4.

**Области применения ИИС.** На этапе развития общества роль ИИС значительно возросла, расширилась сфера ее применения. Практически во всех отраслях хозяйства, науки и техники в непрерывном режиме используются результаты измерений значительного количества измеряемых величин. На сегодня можно привести следующие данные количества измеряемых величин (погрешность при этом не указана):

число электрических и магнитных величин не превышает 100;

число неэлектрических величин постоянно увеличивается и на начало XXI ст. превышает 4000.

В виде конкретного примера определения предметных областей использования ИИС приведем перечень следующих видов измерений:

измерения геометрических величин;

измерения механических величин;

измерения параметров потока, расходов, уровня и объема сыпучих, жидких и газообразных веществ;

измерения давления, вакуумные измерения;

измерения оптических и оптико-физических величин;

измерения теплофизических величин и температуры;

измерения времени и частоты;

измерения электрических и магнитных величин;



измерения в радиоэлектронике;  
 измерения акустических величин;  
 измерения физико-химического состава и свойств веществ;  
 измерения характеристик ионизирующих излучений и ядерных констант.

Отметим две характерные особенности применения ИИС в различных областях как технических систем:

структура ИИС и основные принципы измерений являются практически одинаковыми для всех видов измерений;

специфика каждого конкретного процесса измерения реализуется путем использования соответствующих аппаратно-программных подсистем, модулей и блоков ИИС.

## 1.2. Развитие средств измерений и классификация систем

**Этапы развития.** В начальном периоде своего существования (оценивается условно в несколько сотен тысяч лет) человечеству для измерений достаточно было естественных органов чувств. Первые средства измерений возникли примерно несколько тысячелетий назад и прошли путь от простого мерного шнура с узлами до гигантского пятиэтажного «Атласа» – современного измерительного комплекса протонного ускорителя в Женеве, сенсорная подсистема которого со 140 млн датчиков фиксирует 800 млн столкновений протонов в одну секунду при проведении физических ядерных исследований.

До XIX ст. главным образом развивались именно технические средства измерения, а интеллектуальная часть процесса измерения полностью выполнялась человеком.

Первые попытки автоматизировать процесс измерения имели место в середине XIX ст. К числу таких попыток относится, например, измерение уровня воды в реке, когда устройство давало сигнал тревоги с приближением уровня воды к критической отметке.

Полная автоматизация измерительного эксперимента стала возможной только во второй половине XX ст., когда были созданы средства вычислительной техники, получили развития полупроводниковая и квантовая электроника, а миниатюризация электронных приборов достигла молекулярного и атомного уровня.

Весь период развития измерительной техники условно можно разделить на три этапа. С древнейших времен до начала XIX ст. – *механический* этап, когда наиболее актуальными были измерения длины, времени, массы, плоских углов и других связанных с ними величин. С освоением электрических и магнитных явлений, появлением первых электрических измерительных приборов начался второй, *электрический*, этап, когда почти все физические величины сначала превращались в электрические и магнитные величины, которые уже измерялись соответствующими техническими средствами. И, наконец, с середины XX ст. начался современный период – этап *ИИС и квантовой метрологии*, который в полной мере использует результаты предыдущих

двух этапов.

Рассмотрим на примерах некоторые исторические факты развития средств измерений.

**Измерения длины.** Длина, как наиболее распространенная физическая величина, стала первой международной единицей и дала название существующим системам физических единиц – *метрические*.

Необходимость измерения длины возникла еще в процессе изготовления первых каменных орудий труда и сооружений. С развитием средств производства и оружия росли требования к точности этих измерений, а с переходом на оседлый образ жизни человечества появилась потребность разграничения земельных участков и выполнения многочисленных измерений при строительстве жилья, культовых и других сооружений.

В Египте, Вавилоне, Англии, Франции, России и других странах как *единица длины* чаще всего использовались разные размеры человеческого тела, например *пядь, локоть, сажень, аршин*.

Основателем метрической системы мер стала Франция. В мае 1790 г. Национальное собрание Франции приняло декрет о реформировании системы мер и поручило Парижской академии наук выполнить подготовительные работы, а 10 декабря 1799 г. глава французского правительства Бонапарт Наполеон утвердил введение во Франции метрической системы мер.

Развитие инструментария для измерения линейных размеров можно проиллюстрировать рядом примеров. Это уже упоминавшийся шнур, расстояние между узлами которого обычно составляло тогдашнюю единицу длины – локоть (около полуметра).

Постоянно растущие потребности практической деятельности привели к разработке различных инструментов измерения длины. Появляются *твердые* линейки с соответствующими делениями. Современные металлические линейки позволяют измерять отрезки прямых с погрешностью 0,5 мм. Штангенциркуль и микрометр позволили снизить погрешность измерения линейных размеров до 0,1 мм и 0,01 мм соответственно. Современные металлообрабатывающие станки снабжены измерительно-управляющими системами, позволяющими устанавливать деталь в пространстве с точностью 0,0025 мм.

При изготовлении радиоэлектронной техники уже достигнута точность измерения линейных размеров до 0,5 нм ( $1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$ ). Для решения таких измерительных задач соответствующая ИИС содержит, кроме значительного количества датчиков, микро - ЭВМ, блоков управления, еще и новейшие (сканирующие, зондовые, атомные и др.) микроскопы, позволяющие локализовать и даже перемещать отдельные молекулы и атомы.

**Угловые измерения.** Исторические факты свидетельствуют о том, что наряду с линейными размерами, временем, массой *угол* можно считать той величиной, которая имеет очень давнюю историю изучения и использования. Земледелие и прогнозирование сезонных природных явлений, архитектура и строительство, судоходство и астрономия и многие другие отрасли практиче-

ской деятельности человека нуждались в определении количественных оценок углов. Ряд выдающихся открытий в истории человечества был сделан благодаря именно использованию угловых измерений. Это, например, великие географические открытия целых материков, архипелагов, островов, проливов древними мореплавателями, которые определяли свое местонахождение по угловому положению звезд.

Геодезия и картография, навигация и локация, астрономия и физика, радиотехника, машиностроение и энергетика, геофизика, метеорология, геология, психология, биология, медицина - вот далеко неполный перечень областей применения измерений углов.

Истоки измерения углов уходят в седую старину (III-II тысячелетия до н.э.). Древние цивилизации шумеров, Вавилона и Египта имели начальные знания в этой области. Солнечные часы стали по сути первым преобразователем физической величины - времени в угол. В III-II тысячелетиях до н.э. в Вавилоне были сконструированы солнечные часы – *гномоны*, с помощью которых время определялось не по длине тени, а по ее направлению в пространстве. Это позволило значительно точнее и с постоянной чувствительностью определять время.

Используя измерения с гномоном в разных точках поверхности Земли древнегреческий ученый Эратосфен (278 - 196 гг. до н.э.) впервые вычислил длину дуги земного меридиана - 39375 км, что на 2 % отличается от определенного в наше время. Эратосфен также определил значение угла наклона эклиптики (орбиты движения Солнца на небесной сфере) к экватору Земли, которое было уточнено за 22 столетия лишь на 6 угловых минут.

Значительную роль в угловых измерениях в геометрии играло и играет число  $\pi$  - отношение длины окружности к ее диаметру (3,14 592 653 589 793 238 ...). Уже в середине первого тысячелетия китайский математик Цзу Чун Чжи ( 429 - 500 гг. ) подал приближенное значение числа  $\pi$  в простых дробях, сначала как  $\sim 3,1429$ , а позднее  $\sim 3,14159292$ .

При исследовании происхождения единиц измерения углов отмечают, что еще жрецы древнего Вавилона, осознавая процесс изменения природных циклов на Земле около 360 сут, разделили круг на соответствующее количество равных частей со значением угла в один градус -  $1^\circ$ . Разделение круга на  $360^\circ$ , каждого градуса - на 60 мин, каждой минуты - на 60 с происходит от шумеров (примерно 2100 до н.э.), которые умели измерять углы с точностью до нескольких угловых минут.

В дальнейшем, благодаря широкому использованию солнечных часов, в которых временные интервалы измеряются через углы, кратность единиц измерения угла числу 60, стали применять (несмотря на факт широкого использования десятичной системы) и для измерения времени: в одном часе 60 мин, в минуте – 60 с. Многовековая практика угловых измерений и традиции в этой области не дали возможности использовать метрическую десятичную систему единиц в области угловых измерений.

Разработанный для угловых измерений инструментарий насчитывает десятки наименований и предназначен для использования в различных областях науки и техники. Некоторые из таких инструментов вышли из практики использования и почти забыты, другие до сих пор используются в различных отраслях промышленно-хозяйственного комплекса. Так, например, в морском судоходстве – секстант, гирокомпас, буссоль; в астрономии – астролябия, квадрант, телескоп; в геодезии – теодолит, тахеометр; в военном деле – стереотруба, угломер как составная часть прицельных приборов; в метеорологии – анеморумбограф; в оптике – оптоволоконный гироскоп; в авиации – авиагоризонт, гировертикаль, гироскоп; в горном деле – горный компас; в машиностроении – микрометр, индикатор, угломер и т.д.

Качественный скачок в развитии угловых измерений связан с использованием лазерной и оптоволоконной техники, современными достижениями микросхемотехники и микроэлектроники. Так, например, для волоконно-оптических гироскопов достигнута точность определения углов составляет доли угловой секунды. Погрешность измерения углов современными теодолитами достигает 0,5' минуты.

**Угловые измерения в физическом эксперименте и измерительной технике.** Рассмотрим наиболее характерные примеры использования угловых измерений в физическом эксперименте.

Русские ученые М. В. Ломоносов и Г. В. Рихман использовали для исследования атмосферных электрических зарядов в 1752 – 1754 гг. разработанный ими прибор *электрический указатель* или *электрический гномон*.

Оригинальный способ использования угловых измерений реализован в приборе *крутильные весы Кулона*, который в 1785 г. был изобретен и применен французским физиком Шарлем Кулоном для определения закона взаимодействия точечных зарядов.

Английский химик и физик Генки Кавендиш применил угловые измерения в эксперименте 1798 г. по определению гравитационной постоянной. Полученное Кавендишем с помощью угловых измерений значение гравитационной постоянной только на 0,5 % отличалось от современного значения гравитационной постоянной.

В 1819 г. датский физик Ханс Кристиан Эрстед сделал открытие - электрический ток влияет на угловое положение магнитной стрелки. Исследование этого явления привело к изобретению целого ряда физических законов и создание теории электромагнетизма.

Термоэлектрические явления также были открыты с применением угловых положений магнитной стрелки. Их исследования связано с именем немецкого физика Томаса Иоганна Зеебека, который в 1821 г. открыл эффект, названный его фамилией. В 1851 г. французский физик Жан Бернар Леон Фуко выполнил знаменитый эксперимент с маятником для измерения периода колебаний (маятником Фуко). В 1899 г. русский физик Петр Николаевич Лебедев впервые экспериментально с использованием угловых измерений дока-

зал существование давления света и определил его значение.

В измерительной технике углы используют и для измерительных преобразований, и для представления результата измерения. Известно, например, что в 1846 – 1848 гг. появились *металлические манометры* М. Бурдона.

Преобразование электрического тока или напряжения в угол используют в электроизмерительных механизмах различных систем, зеркальных гальванометров, предназначенных для измерения сверхмалых токов и количества электричества и др. Эти приборы характеризуются не только удобством преобразования *физическая величина - угол*, но и отличаются высокой экономичностью, удобством восприятия глазом человека больших объемов измерительной информации.

Токовые весы (ампер-весы) использовались для воспроизведения единицы измерения тока – ампера - и входили в состав Государственного эталона силы постоянного электрического тока (ГОСТ 8.022-75).

Разработанные геометрические изображения на круге и обработки угловых величин получили виток нового применения и развития в исследовании широкого класса циклических процессов, к которым относится значительная часть процессов и явлений окружающего мира. Собственно и слово *цикл* происходит от греческого *kuklos* - круг, ведь наиболее естественной геометрической фигурой для отображения углов является именно круг.

Осознавая взаимосвязь всех процессов во Вселенной и себя как ее часть, человек с давних времен заметил связь между циклическостью земных процессов и циклическостью движения небесных тел, начал интересоваться и изучать циклические процессы как на микро-, так и на макроуровнях.

**Измерения в астрономии.** Потребность в систематическом изучении расположения и движения небесных тел возникла в связи с переходом человечества от собирательства и охоты к продуктивной экономике – земледелию и скотоводству. Урожай полностью зависел от своевременного выполнения всех этапов сельскохозяйственных работ, что невозможно без календаря. Наблюдение за Солнцем и Луной позволили установить моменты солнцестояний, равноденствий и, тем самым, определить величину года, т.е. создать календарь. Так возникла астрономия, все результаты которой построены на угловых измерениях положения небесных тел.

Первые астрономические измерительные приборы были выполнены в виде циркуля, одна из ножек которого фиксировалась горизонтально. В дальнейшем необходимость повысить точность измерений привели к сооружению стационарных каменных угломеров, которые в бронзовый век достигали гигантских размеров. Например, в Англии сохранилась одно из таких сооружений – Стоунхендж, который состоит из концентрических земляных валов, каменных колец и устройств для измерения угловых положений восхода Солнца, Луны и ярких звезд. Это был одновременно и культовый центр, диаметр которого достигал 156 м, а отдельные каменные столбы весят 35 т.

В Древнем Египте, Вавилоне, Центральной Америке культовые соору-

жения – пирамиды – также использовались для астрономических измерений.

Следующий толчок к развитию астрономических измерений дали потребности мореплавания: для нахождения координат корабля в океане необходимо было уметь измерять время и положение определенных небесных тел, а также иметь соответствующие приборы и расчетные таблицы. Известно использование знаменитых Птолемеевых таблиц положения Солнца, Луны, звезд с подробным описанием алгоритмов вычисления долготы и широты места нахождения корабля.

В средние века арабские ученые создали еще более точные астрономические таблицы. Для этого они строили большие квадранты и секстанты. Например, в Средней Азии в городе Самарканде сохранился и реконструирован большой квадрант Улугбека. Цена деления 1 град соответствовала 70,2 см (одна угловая минута 1' – 11,7 мм, а угловая секунда 1" – 0,2 мм). С помощью этого квадранта созданы звездные таблицы (координаты 1018 звезд), которыми пользовались до XVIII ст. Значение наклона эклиптики определено с точностью 32", а звездный год установлен с точностью 1'.

Новый – оптический период в развитии астрономии начался в 1609 г., когда Галилей создал первый телескоп и с его помощью открыл рельеф Луны и спутники Марса.

С усовершенствованием телескопов возрастала точность угловых измерений при нахождении положения и размеров небесных тел. Возникли два основных типа телескопов: рефракторы, в которых увеличение изображения достигалось благодаря использованию преломления света в системе расположенных соответствующим образом линз, а также рефлекторы, зеркала которых значительно усиливали свет от астрономических объектов.

В XX веке диаметры линз достигли 5 м, а зеркал – более 10 м.

Началось детальное изучение Луны, Марса, была *открыта* наша Галактика и созданы атласы многих других Галактик.

Измерения за пределами оптического диапазона электромагнитных колебаний (инфракрасных и ультрафиолетовых), а также в рентгеновском и гамма-диапазоне позволили выявить во Вселенной удивительные объекты: квазары, черные дыры, нейтронные звезды.

С появлением космической техники началась эра внеземной астрономии. Каждый из космических телескопов (автоматических космических станций) представляет собой огромные ИИС (комплексы), которые передают на Землю результаты измерений и изображения объектов Вселенной, недоступные для земных телескопов.

Одним из наиболее известных является космический телескоп «Хаббл», который работает на околоземной орбите с 1990 г. Гигантский объем измерительной информации, полученный «Хабблом» почти во всем диапазоне космических излучений, дал подробные картины известных и многочисленных новых объектов Вселенной. Так, впервые было получено изображение планеты вне Солнечной системы, установлены современные размеры видимой

Вселенной – 12,7 млрд световых лет.

**Измерения в фазометрии.** Становление фазометрии происходило по мере расширения круга задач измерений фазовых характеристик сигналов, а ее основные положения отражали известные методы угловых измерений.

Фазовый метод измерения применяют в радиолокации и радионавигации, авиационной и космической технике, геодезии, машиностроении, связи, неразрушающем контроле и т.д. Фазоизмерительные преобразования различных физических процессов и величин в фазовый сдвиг гармонических сигналов обеспечивает достижение высоких метрологических характеристик, поэтому фазометрия как метод преобразования и измерения уже давно вышла за пределы традиционного применения в радиотехнике, навигации и связи и с успехом используется в экспериментальной физике, радиофизике, неразрушающем контроле, экспериментальной медицине, новейших отраслях науки и техники во время проведения точных исследований. Фазовый метод измерения и созданные на его основе ИИС решили ряд важных научно-технических задач, связанных с прецизионным измерением расстояний, временных интервалов, углов и анализом характеристик сигнальных полей различной физической природы (электромагнитных, оптических, акустических).

**Сравнительный анализ фазовых и угловых измерений.** Фазовый сдвиг сигналов и угол имеют много общих свойств и одновременно различаются рядом характерных особенностей, которые должны быть учтены при проведении процесса измерения.

Близость (родство) природы угловых и фазовых измерений можно подтвердить следующим образом: 1) обе эти величины циклические и однозначно определяются в пределах интервала  $[0, 2\pi)$ ; 2) эти величины относительные, т.е. для их однозначного определения необходимо искусственно определять начальное направление в пространстве (для плоских углов), или опорные колебания с фиксированной начальной фазой ( для фазовых сдвигов сигналов); 3) их измеряют одинаковыми единицами - радианами или частями полного цикла. Наконец, мера фазового сдвига сигналов и плоского угла - величина (единственный случай в метрологии, когда мера задается трансцендентным числом), которая естественно воспроизводится: первая - по истечении одного полного цикла периодического гармоничного процесса, а вторая - как центральный угол полного круга. Эти особенности указывают на единую природу фазовых и угловых измерений, которые применяют для исследования различных процессов и величин, имеющих циклический характер.

Фазовые характеристики сигналов имеют и определенные особенности, и отличия по сравнению с углами на плоскости. Прежде всего это зависимость фазовых характеристик сигналов от частоты. Эта зависимость позволяет выполнять кумулятивные разночастотные (многомерные) фазовые измерения с целью расширения диапазона измерения за пределы интервала  $[0, 2\pi)$  - традиционного интервала измерений, преобразования распределенных на прямой величин в фазовые характеристики сигналов. Кроме того, угловые

измерения по характеру относятся к прямым измерениям, а фазовые - к косвенным, поскольку оценивают фазовую характеристику на основании измерений значений электрических сигналов (напряжений или токов), которые сопровождаются воздействием определенных дополнительных погрешностей измерения. Эти особенности и исследует, и использует фазометрия как отрасль измерительной техники.

**Из истории исследования погрешностей средств измерений.** Определение погрешностей являются одними из основных при использовании средств измерений. История развития таких средств подтвердила реальные результаты повышения их характеристик точности по мере развития измерительной техники во всех областях их использования. Рассмотрим два интересных факта, относящихся к истории исследований погрешностей средств измерения.

1. Разработанная в начале XIX ст. немецким математиком К. Гауссом теория погрешностей предназначалась прежде всего для удовлетворения потребностей угловых измерений в астрономии. Погрешности этих измерений были настолько малыми (доли процента), что допускали линейную аппроксимацию и позволили К. Гауссу и его последователям разработать и развить линейную теорию погрешностей измерений, однако для общего случая оценивания случайных углов значительно эффективнее теория погрешностей на круге. Этот факт в историческом аспекте ощутимо не сказался на популярности угловых измерений. Подтверждением такой гипотезы является теория и практика современных измерений углов, для которых значительно чаще применяют линейную теорию погрешностей, а не на круге.

2. Английский физик А. Майкельсон в середине XIX ст., анализируя открытия, полученные при проведении физических измерительных экспериментов, высказал гипотезу о том, что новые открытия в физике можно будет исследовать при проведении таких экспериментов с относительными погрешностями, которые меньше  $10^{-6}$ . В ряде случаев эта гипотеза в дальнейшем получила практическое подтверждение. Современные средства измерений при проведении физических измерительных экспериментов дают возможность обеспечить относительные погрешности результатов измерений, приближающиеся к потенциально возможным  $10^{-17} \dots 10^{-18}$ .

**Классификация ИИС.** В нормативных документах метрологии классификация всех видов ИИС не приведена и это объясняется следующим:

- а) при классификации ИИС необходимо четко выделить классификационные признаки, а это для всех видов ИИС сделать практически невозможно;
- б) классификацию ИИС можно только условно провести на определенном отрезке времени в связи с динамикой развития ИИС и измерительных информационных технологий.

На начало XXI ст. при становлении информационного этапа развития земной цивилизации в публикациях по метрологии предложена следующая условная классификация ИИС.



В соответствии с классификационными признаками, отражающими область применения, задачи функционирования и конструкцию, производится следующая классификация ИИС:

- а) функциональное назначение;
- б) вид и характер входных величин;
- в) вид выходной информации;
- г) вид структурно-функциональной схемы ИИС;
- д) принцип построения.

В зависимости от функционального назначения, т.е. в зависимости от вида решаемых задач, ИИС подразделяются на следующие классы:

- измерительные системы (ИС);
- системы контроля (СК);
- системы диагностики (СД);
- системы распознавания образов (СРО);
- системы идентификации (СИ);
- телеметрические ИИС (ТИИС);
- полиметрические ИИС (ПИИС).

В ряде публикаций по ИИС выделен класс статистических измерительных систем (СИС). Однако на сегодня выделять такой класс ИИС нецелесообразно, поскольку статистические методы обработки данных измерений являются основными методами обработки во всех современных ИИС, и, таким образом, по своей сути не могут служить признаком классификации систем.

Вид и характер величин, независимо от их физической природы, отражен в следующих классификационных признаках:

- а) количество измеряемых величин одновременно или последовательно во времени и в пространстве;
- б) характер изменения величин во времени и в пространстве;
- в) сосредоточенное (в одной пространственной точке) и распределенное расположение измеряемых величин в пространстве объекта измерений;
- г) дискретный, непрерывный, дискретно-непрерывный или непрерывно-дискретный характер изменения измеряемых величин;
- д) пассивный или активный метод формирования первичной информации о свойствах и характеристиках объекта измерений;
- е) виды и характер мешающих воздействий, включая естественные помехи, несанкционированный доступ и угрозы, применительно к каждой измеряемой величине и во всех аппаратно-программных трактах ИИС.

Классификацию ИИС по видам выходной информации, если не возникает острой необходимости, можно и не проводить, поскольку вид выходной информации определяется задачей функционирования ИИС. В случае возникновения необходимости классификационными признаками могут служить: унифицированные протоколы обмена информацией; результаты и погрешность измерений; результаты задач контроля, диагностики, идентификации, распознавания и другие с ЭВМ, АСУ, системами управления.

Остальные классификационные признаки связаны со структурными схемами и принципами построения ИИС. Так, различают следующие виды структурных схем ИИС:

- последовательного действия (одноканальная система);
- параллельного действия (многоканальная система);
- параллельно-последовательного действия (с коммутатором на входе);
- мультиплицированная структура.

При классификации по принципам построения ИИС используются следующие признаки:

- наличие специального канала связи;
- унификация состава системы;
- порядок выполнения операций: последовательный или параллельный;
- наличие или отсутствие структурной и информационной избыточности;
- наличие или отсутствие адаптации, характер адаптации;
- наличие или отсутствие информационной обратной связи;
- вид используемых сигналов: аналоговые или кодоимпульсные;
- наличие стандартного интерфейса.

В качестве отдельного класса рассматриваются телеметрические ИИС (ТИИС). По своим функциям они могут относиться к любому из перечисленных выше классов. Специфика этих систем заключается в том, что они предназначены для телеизмерений — измерений на расстоянии и, следовательно, имеют более протяженные каналы связи, чем другие ИИС.

В последнее время разработаны и эффективно используются на практике в Украине при измерениях характеристик потока, расходов, уровня и объема сыпучих, жидких и газообразных веществ ИИС, которые получили название *полиметрические ИИС*. Этот современный класс ИИС реализует измерения временных и частотных характеристик, импульсных сигналов наносекундной длительности — так называемых *полиметрических сигналов*. Задачи измерения характеристик жидких, сыпучих и газообразных веществ сводится к измерению характеристик, как зондирующего, так и отраженного полиметрических сигналов, распространяющихся в исследуемых средах.

### 1.3. Проблемы теории измерений и задачи функционирования систем

**Введение.** Из истории развития земной цивилизации известно, что сознательная деятельность человека связана с измерениями. Вероятно, что процесс счета различных предметов был одним из начальных этапов развития измерений как науки, так как при этом определенному набору физических объектов было поставлено в соответствие некоторое число как абстрактный (математический) объект — число из натурального ряда. В дальнейшем измерения способствовали становлению геометрии, астрономии, математики и других наук. Сейчас процессы измерений встречаются практически во всех сферах деятельности человека. В одних случаях исследователи проводят измерительный эксперимент, а в других такой эксперимент ставит и проводит

сама природа.

При расширении предметных областей применения измерений современная метрология не ограничивается исследованием только физических величин, измерению подлежат и другие свойства, характеристики объектов измерений. К множеству объектов измерений принадлежат объекты материального мира, включая средства, устройства и системы различных отраслей науки и техники, природные явления, процессы в физике, химии, биологии, медицине, психологии, педагогике, социологии, технологические процессы в промышленности; в ряде отраслей хозяйства страны необходимо определить характеристики качества изготавливаемых товаров обслуживания.

Например, свойства и характеристики жизнедеятельности человека определяют как биофизические величины и они являются основными при измерениях в медицине, биологии. Оценивание цветовых гамм изображений, определение силы ветра, дождя, уровней землетрясения, уровней знаний – это примеры явлений, исследования которых на основе измерений необходимы для практической деятельности. Таким образом, число объектов измерений очень значительно, а их природа очень разнообразна.

При измерениях выделяют два направления исследований.

*Измерения в узком смысле*, при котором происходит сравнение измеряемой величины (в большинстве случаев физической) с другой известной величиной того же рода (качества), установленной в качестве единицы.

*Измерения в широком смысле*, при котором совокупность определенных элементов применяется для упорядочения исследуемых процессов, явлений, свойств, состояний и характеристик объекта по соответствующим признакам и/или характеристикам. По своей сути измерения в широком смысле - нахождение соответствий между числами и объектами, их состояниями или процессами по определенному правилу.

Примером могут быть экспертные оценки, шкалы наименований и др.

Несмотря на условную простоту измерений при формализации задач измерений и при разработке общей теории измерений возникают определенные трудности обобщения разнообразия и многогранности измерений.

Основная трудность создания общей теории измерений, которая в настоящее время находится на стадии разработки, состоит в обосновании единых положений проведения исследований разноплановых и разнородных процессов измерений. Есть и другой путь построения такой теории – это выделить группы или разбить на классы условно однородные объекты измерений и для каждого класса разрабатывать свою теорию измерений, например квантовую теорию, теорию квалиметрии, теорию коллометрии, репрезентативную теорию измерений, информационно-статистическую теорию измерений и др. Оба пути создания теории измерений имеют право на использование, при этом каждый из них имеет определенные преимущества и недостатки. Однако с точки зрения методологии измерений как отображения реального мира создание общей теории измерений является, на наш взгляд, более

фундаментальной идеей метрологии.

Американский математик и основатель кибернетики Н. Винер в работе по созданию новой теории измерений (1921 г.) писал: «...глубоко укоренившейся популярной идеей есть то, что математика – другое имя для измерений». Известный советский ученый в области математики, механики и кораблестроения А. Н. Крылов в 1931 г. отмечал, что «...прикладная математика есть наука о величинах, точно измеряемых». Известны и другие высказывания ученых об измерениях.

Современная теория измерений использует не только методы физики, математики, включая методы теории меры, прикладной и вычислительной математики, теории вероятностей и математической статистики, но и методы ряда естественных и технических наук.

Методология постановки практически всех задач измерений приводит к трем основным проблемам теории измерений, которые в общем виде можно сформулировать так.

*Проблема отображения* – осуществление гомоморфного отображения свойства, характеристики объекта исследования в информацию для измерений – измерительную информацию, при этом операции и соотношения с элементами (модулями) объекта при проведении процесса измерений гомоморфны операциям и соотношением над данными измерений.

*Проблема единства меры* – установление одной и той же меры – результата измерений и определения условий, при которых различные методы и способы измерений представляют одни и те же количественные значения измеряемой величины.

*Проблема защиты информации при измерениях* – состоит в формировании, передаче, обработке, регистрации и представлении заказчику данных измерений, использования соответствующих средств измерений, минимизирующих воздействия как естественных помех, так и несанкционированного доступа, преднамеренных угроз.

Следует отметить, что проблема защиты информации для измерения в публикациях по измерениям в явном виде не акцентируется. Такая проблема, как повышение помехоустойчивости измерений, более известна в метрологии и она отражена во многих публикациях. Однако проблема помехоустойчивости является только составной частью более важной и актуальной для современной метрологии проблемы – защиты информации при измерениях в целом. В данной книге решению задач защиты информации в ИИС уделено должное внимание.

Гомоморфное отображение, в отличие от изоморфного, характеризуется отображением только в одну сторону. Это дает возможность постоянно совершенствовать процесс измерения при исследовании одного и того же объекта, что и реализуется путем развития теории и практики измерений.

Отметим, что при разработке моделей важную роль играют аксиомы теории измерений. Роль аксиом при создании той или иной науки, включая и

создание общей теории измерений, фундаментальна. Яркими примерами роли аксиом является геометрия, базирующаяся на системе аксиом Эвклида, которая была сформулирована более 2000 лет назад, и теория вероятностей – на системе аксиом А. Н. Колмогорова (30-е годы XX ст.), на основании которой из описания азартных игр теория вероятностей стала одним из основных направлений современной математики. Первые шаги в создании системы аксиом теории измерений относятся к концу XIX ст. – немецкий математик Р. Дедекинд (1888) работал над аксиоматикой теории чисел, ставя цель преодолеть противоречия между соизмеримыми и несоизмеримыми числами. В последующие годы был предложен ряд систем аксиом, например при исследованиях психологических измерений в рамках так называемой репрезентативной теории измерений и др.

В большинстве случаев широкое использование современных методов указанных различных наук в теории измерений можно объединить на базе применения моделей, в первую очередь физических и математических, исследуемых процессов в задачах функционирования ИИС. Несмотря на тот факт, что такие модели являются вторичными, то есть копиями, отображениями, которые не в полной мере соответствуют реальности при проведении процесса измерений, роль этих моделей в методологии измерений очень значительна и имеет фундаментальный характер.

Используя современные методы теории измерений рассмотрим модели задач функционирования ИИС, в первую очередь модели процесса измерений при решении научно-прикладных проблем метрологии.

**Модели процесса измерений.** В начале рассмотрим *теоретическую модель* исходной информации объекта измерений, а более конкретно – физическую и математическую модели.

В процессе создания *физической модели* в первую очередь отображаются физические свойства, характеристики объекта измерений, его элементов, модулей, их действий и взаимодействий между собой с учетом физических законов. При этом модель записывается с использованием математических формул с размерностями единиц физических величин.

*Математическая модель* в большей мере формализует процесс отображения свойств объекта измерений в модель. Математические методы являются эффективными методами исследований и, в зависимости от постановки задачи измерений для одного и того же объекта измерений, могут использовать различные математические модели с одной стороны, а с другой – использовать одну и ту же модель для исследования различных по физической природе объектов.

Каждая из моделей, физическая и математическая, дополняют друг друга и дают возможность проводить процесс измерений более эффективно, например обосновать пути повышения точности результатов измерений.

Сформулируем определение *теоретической модели* исходной информации объекта измерений в следующей редакции.

*Теоретическая модель исходной информации объекта измерений* – это совокупность знаний, предположений, гипотез, начальных и граничных условий, которые гомоморфно отображают основные свойства, характеристики в пространстве и во времени исходной информации, построенной в виде целостной, непротиворечивой, логически выдержанной структуры, сформулированной с использованием необходимых объектов, терминов и символов данной науки для решения заданного класса задач.

На примере математической модели исходной информации объекта измерений рассмотрим основные этапы ее использования при теоретических исследованиях процесса измерений.

На *первом этапе* на основании всестороннего анализа априорных сведений об объекте измерений, его основных свойств и характеристик, подлежащих измерению, *создается модель* с использованием математических объектов, терминов и символов, и предлагается для дальнейшего использования.

На *втором этапе предложенная модель* используется для решения разнообразных задач измерений в различных предметных областях с целью определения результата и погрешности измерений.

На *третьем этапе* производится анализ полученных результатов измерения с применением предложенной модели, в том числе и обоснования ответа на вопрос - удовлетворяют ли результаты необходимых для теории и практики измерений требованиям по характеристикам точности. По результатам анализа принимается один из возможных вариантов:

- а) *предложенная модель* рекомендуется для дальнейших исследований;
- б) предложенную модель нужно усовершенствовать, внести в нее изменения, полученные при практическом ее использовании и рекомендовать *усовершенствованную модель* для дальнейшего использования;
- в) разработать на основе полученных на практике результатов исследований *новую модель*.

Практически во всех случаях при построении моделей процесса измерений используется измеримое вероятностное пространство с нормированной вероятностной мерой. Этот факт зафиксирован в нормативных документах метрологии. В ряде публикаций по теории измерений предложено при построении моделей процесса измерений использовать также измеримое топологическое пространство с мерой (зарядом). Совместное использование двух указанных измеримых пространств позволяет построить логическую взаимосвязь применения двух указанных выше мер, т.е. вначале физической, а потом вероятностной мер при проведении процесса измерений.

Построение математических моделей процесса измерений производилось с учетом следующих факторов:

- а) не используется гипотеза и соответствующие постулаты теории измерений про истинное значение измеряемой величины;
- б) исходная информация для измерений, включая физические величины, может изменяться в пространстве и во времени;

в) определение (приписывание) меры при проведении измерительных экспериментов происходит в два этапа:

1) определение меры (заряда) при выполнении операции сравнения однородных по физической природе измеряемой величины и воспроизводимой единицы системы измерений, что дает возможность представлять результат измерений с указанием единицы системы измерений;

2) использование нормированной вероятностной меры для обеспечения единства измерений при проведении измерительных экспериментов в разных пространственных местах, в разное время, различными методами и средствами измерений при одинаковых контролируемых условиях с целью определения результата и погрешности измерения, относящихся к одному виду объектов измерения, и тем самым определения повторяемости на практике полученных результатов измерений, например доверительных интервалов с заданной вероятностью или расширенной неопределенности.

При проведении измерительного эксперимента первоначально происходит следствие (событие), которое дает возможность решить проблему отображения свойства объекта исследования в измерительной информации. При измерениях в узком смысле для такого отображения используются сенсорные модули средств измерений – первичные измерительные преобразователи (датчики) – для преобразования физических величин в электрические сигналы. При измерениях в широком смысле в результате операции упорядочения (сравнения) также имеет место соответствующее следствие.

В последующих действиях при проведении измерительного эксперимента происходит операция сравнения однородных физических величин и информации для измерений, вернее следствию измерительного эксперимента приписывается мера (заряд). В тех случаях, когда информации для измерения нельзя прописать меру и возникает необходимость получения результата операции сравнения, требуется использование других оценок, например экспертных оценок, шкал наименований и др.

**Модель процесса измерений на основе топологического пространства.** При разработке математических моделей процесса измерений, относящейся к одному виду объектов измерений, каждому из следствий измерительного эксперимента ставится в соответствие определенный элемент  $x$  некоторого множества  $x \in X$ .

Использование измеримого топологического пространства Хаусдорфа  $(X, \mathfrak{S})$  в качестве математической модели исследований следствий измерительных экспериментов обосновывается следующим:

а) следствие измерительного эксперимента, которое получается при реализации определенного комплекса условий и действий, может быть не обязательно числом, т.е. следствие  $x$  может быть представлено как элемент  $x \in X$  произвольного первичного множества – пространства  $X$ ;

б) формирование алгебры или  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{S}$  открытых подмножеств  $X$ ,

так называемой топологии, которая рассматривает различные комбинации следствий с окрестностями, т.е. в топологическом пространстве  $(X, \mathfrak{T})$  отношения между элементами множеств и классом множеств описывают в терминах окрестностей, что дает возможность рассматривать окрестность как некоторую область значений погрешности определения следствия измерительного эксперимента;

в) использование измеримого топологического множества Хаусдорфа из всего класса топологических пространств для задач измерений носит принципиальный характер, поскольку позволяет на пространстве  $(X, \mathfrak{T})$  выделить любые две окрестности следствий  $x \in X$ , которые не пересекаются.

Известно также, что *мера*, как функция множества, является математической моделью таких физических величин, как масса, длина, площадь, объем и др. Мера принимает только неотрицательные действительные значения. Однако при измерениях встречаются физические величины, например отрицательный электрический заряд, которые принимают отрицательные значения. Простым и естественным обобщением меры является заряд. Термин *заряд* заимствован из физики. Заряд в физике отличается от массы тем, что масса всегда неотрицательная, а заряд может быть произвольного знака. Такое же отличие между *мерой* и *зарядом* как математических объектов.

В дальнейшем рассмотрим модели двух видов процессов измерения, которые по своей сути отображают процессы измерений в узком и широком смыслах соответственно.

К первому виду относят процессы измерений, характерной особенностью которых является возможность по условию задачи измерений приписать следствию каждого измерительного эксперимента меру (заряд).

*Серии следствий измерительных экспериментов процесса измерений в узком смысле – процесса измерений первого вида, относящихся к одному и тому же объекту исследования и проведенных при одинаковых контролируемых условиях, ставится в соответствие математическая модель – измеримое топологическое пространство Хаусдорфа с зарядом  $(X, \mathfrak{T}, q)$ , где множество  $X$  как пространство-носитель описывает множество всех возможных следствий измерительного эксперимента, алгебры или  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\mathfrak{T}$  как один из вариантов топологии  $\mathfrak{T}$  открытых подмножеств  $X$ , а заряд  $q$  как действительная функция в топологии  $\mathfrak{T}$ .*

Одна из важных характеристик средства измерений (ИИС) есть их разрешающая способность. Такая характеристика дает возможность разделить два произвольных близких следствия измерительного эксперимента как разные точки измеримого топологического пространства  $(X, \mathfrak{T})$ . Разрешающая способность используется для классификации средств измерений и ее конкретные значения зависят от выбора метода измерений и реализации средства измерений (ИИС), как технической системы. Таким образом для ИИС имеет



место следующее.

*Потенциальная разрешающая способность ИИС служит основой для построения системы окрестностей измеримого топологического пространства Хаусдорфа  $(X, \mathfrak{T})$ .*

В результате проведения серии  $n(n \geq 1)$  измерительных экспериментов, относящихся к одному виду объектов измерений, имеем дискретную последовательность значений заряда

$$q_1, q_2, \dots, q_n; \quad (1.1)$$

которая используется в дальнейшем для определения результата и погрешности измерений.

*Результат измерений является однозначно определенной функцией последовательности значений заряда (1.1):*

$$\theta_n = f(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (1.2)$$

*которая удовлетворяет условиям определенных задач измерений.*

Такая функция по сути является алгоритмом обработки следствий измерительных экспериментов при решении задачи измерений.

Для определения погрешности измерений в топологическом пространстве Хаусдорфа с зарядом  $(X, \mathfrak{T}, q)$  можно ввести метрику – расстояние  $\rho(q_i, q_j)$  между элементами  $q_i, q_j$  множества зарядов, которая в общем случае зависит от функции (1.2) и, как известно, удовлетворяет известным условиям, а именно:

- 1)  $\rho(q_i, q_j) = 0$ , тогда и только тогда, когда  $i = j$ ;
- 2) условию симметрии  $\rho(q_i, q_j) = \rho(q_j, q_i)$ ;
- 3) условию треугольника  $\rho(q_i, q_m) \leq \rho(q_i, q_j) + \rho(q_j, q_m)$  для  $\forall i, j, m$ .

Сформулируем следующее определение погрешности измерений для процессов измерения первого вида.

*Погрешностью измерений в топологическом пространстве Хаусдорфа с зарядом  $(X, \mathfrak{T}, q)$  является диаметр множества значений заряда  $\{q\}$ , т.е*

*точная верхняя грань между парами элементов множества  $\{q\}$*

$$\sup_{ij} \{ \rho(q_i, q_j) \mid i, j = 1, 2, \dots; q_i, q_j \in \{q\} \}. \quad (1.3)$$

Таким образом, в общем случае при нахождении погрешности измерений (1.3) не используется истинное значение физической величины. Но приведенное определение погрешности измерений согласовано и для случаев, когда такое значение величины есть. Для подтверждения гипотезы о существовании истинного значения величины необходимо выполнения таких условий:

а) существование границы последовательности диаметров множества значений заряда  $\{q\}$ , которая в пределе стремится к 0;

б) согласование гипотезы существования истинного значения величины с ее физической природой.

В случае выполнения только условия а) необходимо признать, что истинного значения величины не существует.

Для процессов измерений второго вида по условию задачи измерений не имеется возможности приписать меру (заряд) и они относятся к измерениям в широком смысле.

Как упоминалось выше, при измерениях в широком смысле производится упорядочение объектов измерений по соответствующим признакам и/или характеристикам. При этом обязательной процедурой упорядочения является операция сравнения указанных признаков или характеристик, которую можно условно назвать измерительным экспериментом. Результатом операции сравнения является ее следствие, которое можно рассматривать как элемент у некоторого множества  $U$ .

*Серии следствий процесса измерения в широком смысле – процесса измерения второго вида, относящихся к одному виду объектов исследования и проведенных в одинаковых контролируемых условиях, ставится в соответствие математическая модель  $(Y, \mathfrak{T})$  – измеримое топологическое пространство Хаусдорфа, где множество  $U$  как пространство-носитель описывает множество следствий измерительного эксперимента, а топология  $\mathfrak{T}$  как один из вариантов топологии открытых множеств  $U$ .*

Построим произвольное множество топологий  $\{\mathfrak{T}_n, n = 1, 2, \dots\}$  на фиксированном множестве следствий  $U$ .

Пересечение произвольного множества топологий  $\mathfrak{T}_o = \bigcap_n \mathfrak{T}_n$  также является топологией в  $U$ .

*При фиксированном  $U$  результатом измерений в широком смысле является пересечение  $\mathfrak{T}_o = \bigcap_n \mathfrak{T}_n$  произвольного множества топологий  $\{\mathfrak{T}_n, n = 1, 2, \dots\}$  в  $U$ .*

Из данного утверждения следует, что самая слабая топология  $\mathfrak{T}_o$  множества  $U$  содержится во всех возможных топологиях  $\{\mathfrak{T}_n, n = 1, 2, \dots\}$  в  $U$  и является результатом измерений.

Предложенные модели процессов измерения в основном характерны для процессов, которые проводятся, как правило, в одной организации, предприятии, в одном производственном объединении.

***Модель процесса измерений на основе вероятностного пространства.***  
Рассмотрим математическую модель процесса измерений, которые получены в различных пространственных точках, например в различных районах, областях, регионах и стране в целом, в разное время, различными методами и средствами измерений при контролируемых условиях. Сформулируем следующее определение.

*Теория, методология и практика обеспечения единства измерений, относящихся к одному виду объектов измерений, при проведении последовательности процессов измерения в различных пространственных местах, в разное время, различными методами и средствами измерений в контролируемых условиях использует исходную (первичную) модель случайной величины  $\xi(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , которая задана на измеримом вероятностном пространстве  $(B, \mathcal{F}, P_\xi)$  с нормируемой вероятностной мерой  $P_\xi \in [0,1]$ , где  $B$  – пространство результатов измерений,  $\mathcal{F}$  – алгебра или  $\sigma$ -алгебра подмножеств пространства  $B$ , а  $P_\xi$  – нормированная мера, характеризует повторяемость в пространстве и во времени подмножеств  $\mathcal{F}$ .*

Предложенные модели описывают разные виды процессов измерения.

Так, к процессам измерения первого вида относятся процессы, при проведении которых следствию измерительного эксперимента можно приписать меру (заряд). Это в первую очередь процессы измерений физических величин, которые, как отмечалось выше, относятся к измерениям в узком смысле.

Процессы измерений второго вида относятся к измерениям в широком смысле, для которых обязательной является операция сравнения с последующим упорядочением исследуемых объектов по определенному виду признаков и/или характеристик.

Для обеспечения единства измерений, относящихся к одному виду объектов измерений, используется принципиально другая модель – случайная величина  $\xi(\omega)$ , которая нашла широкое применение в теории измерений.

Случайная величина  $\xi(\omega)$  является наиболее простой случайной функцией и служит первичной исходной моделью. В общем случае для обеспечения единства измерений и оценки полученных результатов измерений могут быть использованы другие случайные функции, например случайный вектор или случайный процесс.

**Процесс измерений.** Можно выделить четыре вида формирования первичной информации исследований для различных видов объектов при их взаимодействии и взаимосвязи с ИИС:

а) объект измерений является *источником (генератором) информации;*

б) объект измерений является линейным или нелинейным, инерционным или безынерционным, одномерным или многомерным *преобразователем поступающей на его вход информации*, формируемой ИИС, которую условно называют тестовой, а сам преобразователь – объект измерений – описывается соответствующим оператором преобразования  $Z[\cdot]$ ;

в) объект измерений является *источником (генератором), который формирует свою характерную, отличную от входной, информацию*, а входную информацию ИИС при этом считают возмущающей (стимулом или раздражителем);

г) характер динамики (изменений во времени) исследуемых свойств, со-

стояний и характеристик объекта измерений задается (управляется) ИИС.

Иллюстрация вариантов такой взаимосвязи и взаимодействия изображена на рис. 1.2.

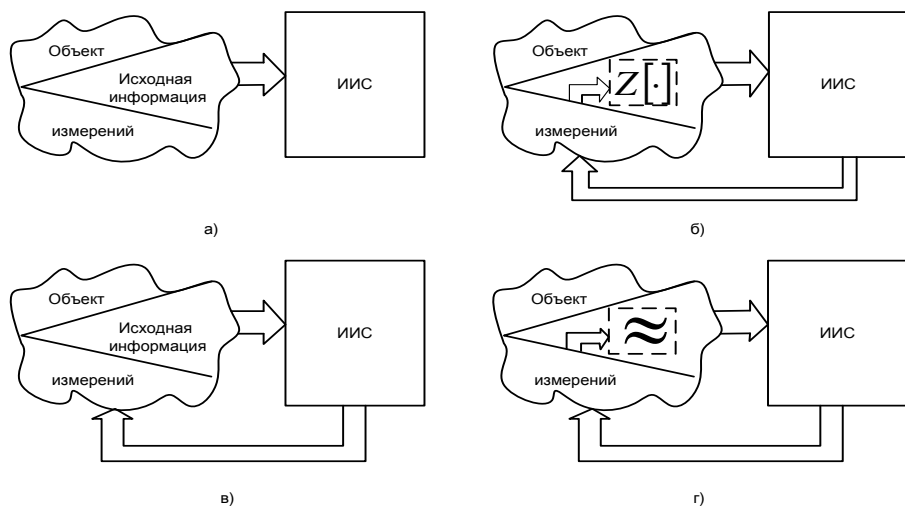


Рис. 1.2. Варианты взаимосвязи и взаимодействия объекта исследования и ИИС

В большинстве случаев информация для исследований представляется в виде измерительных сигналов, которые являются физическими процессами передачи информации. В ряде случаев возникает проблема преобразования информации для исследований, в другие виды информации – измерительную информацию – для обеспечения решения задач измерений, особенно это актуально для экономики, медицины, психологии, педагогики, качества пищевых продуктов и т.д.

Рассмотрим основные действия при проведении процесса измерений, выделив при этом следующие основные направления исследований.

Возможности современной метрологии позволяют использовать три направления исследований для реализации процесса измерений:

а) *математического моделирования* на основе разработки информационного обеспечения, использования средств вычислительной техники и проведения *вычислительного (компьютерного) измерительного эксперимента*;

б) *физического моделирования* на основе использования физических моделей объекта исследований, как однородных по физической природе, например исследования аэродинамических характеристик модели самолета в аэродинамической трубе, так и другой физической природы, например электрические модели механических узлов и механизмов, обоснованного выбора средства измерения и проведения *имитационного (моделирующего) измерительного эксперимента*;

в) *экспериментального или натурного исследования* реального объекта исследования на основе использования средств измерений (ИИС) и проведе-

ния *натурного измерительного эксперимента*.

Первое направление – *математическое моделирование* – относят к теоретическим исследованиям, второе – к *физическому моделированию*, а третье – к *натурному эксперименту*. Если рассматривать при этом использования средств измерений (ИИС), то соответственно имеем для:

математического моделирования – *виртуальное средство измерения (виртуальная ИИС)*, которое включает в себя средство вычислительной техники, в общем случае типовое, а в ряде случаев и специализированное, информационное, включая алгоритмическое и программное обеспечение для моделирования реализаций моделей информации для исследований, их обработку при вычислении результата и погрешности измерения;

физического и натурного моделирования – *современные средства измерения (ИИС) как аппаратно-программные средства измерений*.

Все указанные выше направления исследований процесса измерений нельзя считать независимыми друг от друга, хотя возможен случай, когда процесс измерений в зависимости от полученных результатов может быть реализован только в одном из направлений. Так, например, математическое моделирование дает возможность исследовать разные варианты реализации процесса измерения, а, в случае необходимости, на основе сравнительного анализа их результатов можно выбрать один из них для принятия решения.

Процесс измерения для каждого из трех направлений исследования, как отмечалось выше, имеет свою специфику, конкретное содержание и представляет собой определенную последовательность действий. Так, например, при теоретических исследованиях для реализации процесса измерений необходимо выполнить такую последовательность действий:

- разработать физическую и математическую модели информации для измерений и определить их основные характеристики;
- обосновать постановку задачи измерений;
- выбрать метод решения задачи измерений;
- создать информационное обеспечение, включая алгоритмическое и программное, для решения задачи измерения;
- выбрать средство вычислений;
- провести вычислительный измерительный эксперимент;
- вычислить результат и погрешность измерений;
- провести анализ полученных результатов и принять решение.

**Задачи измерений.** Постановка задачи измерения для перечисленных выше направлений исследований имеет две составные части:

- 1) постановку задачи, где отображается вид и взаимосвязи всех моделей и объектов процесса измерений;
- 2) постановку вопроса, на который нужно ответить при решении задачи.

Отметим, что в большинстве задач измерений ответ на поставленный вопрос содержится в неявном виде в постановке задачи, а саму задачу измерений на практике часто разбивают на две связанные между собой задачи:

а) до проведения измерительного эксперимента - *априорная постановка задачи*, когда решением задачи является множество всех возможных результатов измерений, анализ которых может быть прогнозом ожидаемого результата измерений и соответствующего значения погрешности;

б) после проведения измерительного эксперимента - *апостериорная постановка задачи*, когда полученный результат измерений на основе обработки следствий проведенного измерительного эксперимента дает возможность принять решение о достижении цели эксперимента.

**Погрешности измерений.** Практическая ценность измерений при исследованиях различного рода объектов в первую очередь определяется результатом и погрешностью измерений, которая является количественной характеристикой отклонения полученного результата измерений от истинного.

Согласно существующим положениям *погрешность измерений* является функцией истинного значения измеряемой величины, которое, как правило, постулируется. Но такая гипотеза в большинстве случаев не может быть обоснованной, иногда истинное значение невозможно найти, а иногда его наличие противоречит физической природе величины. Это привело к созданию в современной метрологии нового направления оценки результата и соответственно погрешности измерений – *неопределенность результата измерений (далее - неопределенность)*.

Рабочая группа Международной организации по стандартизации (ISO), в состав которой вошли эксперты различных международных метрологических организаций, опубликовала документ GUM 1993, который используется в качестве рекомендаций единственных в международной практике правил отражения неопределенности измерений, стандартизации, калибровки средств измерительной техники, аккредитации метрологических служб, измерительных лабораторий и т.п. Данный документ стал фактическим стандартом выражения качества измерений в международной практике и сегодня происходит процесс гармонизации GUM 1993 с соответствующими стандартами Украины по метрологии.

Необходимость появления такого руководства определялось значимостью и своевременным выполнением множества процессов измерения во всем мире. Без теоретического обоснования, в основном используя практический опыт проведения процессов измерений, было введено практическая методика вычисления результата и погрешностей измерений, исключив из применения при этом *истинное значение измеряемой величины*. Несмотря на то, что данное руководство методика действует как нормативный документ в большинстве стран, его положения не всегда принимаются однозначно некоторыми метрологами, что нашло отражение и в публикациях. И это, на наш взгляд, связано с отсутствием теоретического обоснования неопределенности результата измерений.

Более подробно рассмотрим погрешности измерений как один из основных объектов исследований задач измерений, тем более что в публикациях по

метрологии теория погрешностей рассматривается как один из основных разделов общей теории измерений. В настоящее время целесообразно рассматривать два подхода при исследовании погрешностей:

- а) традиционный с использованием истинного или условно истинного значения измеряемой величины;
- б) с использованием неопределенности, в основе которой определяется расширенная неопределенность с заданным уровнем доверия.

Такая целесообразность обосновывается с целью использования накопленного в метрологии опыта и значительного объема результатов исследования погрешностей измерений, полученного при традиционном подходе, для сравнительного анализа полученных результатов исследований с применением неопределенности.

Классификация погрешностей базируется на следующих признаках: источниках формирования;

закономерностях или характере изменения погрешностей во времени и/или пространстве;

форме или способе отражения количественной оценки погрешности измерений и ее характеристик.

Коротко рассмотрим известные виды погрешностей измерений метрологических характеристик исследуемых объектов.

Классификация различных видов погрешностей приведена на рис.1.3.

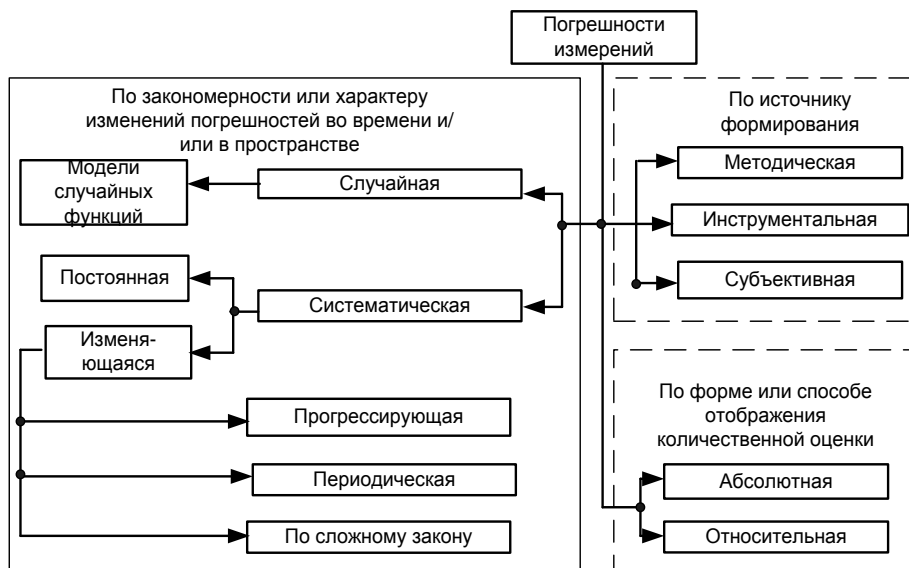


Рис. 1.3. Классификация видов погрешностей измерений

1. Источники, к которым относятся выбранный метод измерений, аналоговые и аппаратно-программные средства измерений и исследователи в процессе измерений формируют следующие виды погрешностей:

*методическую*, в состав которой входят:

а) неадекватность моделей объектов измерения реальным;

б) выбранный метод измерений, который реализован в аппаратно-программных средствах измерений и соответствующие погрешности преобразований, вычислений сигналов, например использование преобразований непрерывных сигналов в цифровые, для которых характерны погрешности дискретизации по времени и погрешности квантования по уровню сигналов;

*инструментальную*, которая определяется метрологическими и эксплуатационными, включая и точностные, характеристики аппаратно-программных средств измерений;

*субъективную* (личную), которая зависит от индивидуальных свойств исследователей, такая погрешность, в основном, характерна при использовании аналоговых средств измерений, но в определенной степени проявляется и при использовании аппаратно-программных средств измерений.

2. В зависимости от закономерности или характера изменения погрешности во времени и/или пространстве выделяют:

*случайную*, которая описывается случайными функциями (случайная величина, случайный вектор, случайный процесс, векторный случайный процесс, случайное поле) и формируется действием во времени и/или пространстве значительным количеством факторов, физическая природа которых является стохастической (случайной);

*систематическую*, которая описывается детерминированными функциями, например, математическим ожиданием случайной величины.

3. Количественные характеристики погрешностей измерений определяют двумя способами:

*абсолютная погрешность* измерений определяется выражением

$$\Delta X = X_{\epsilon} - X_o,$$

где  $X_{\epsilon}$  - результат измерений, а  $X_o$  - истинное значение измеряемой величины, например, если измеряемая величина описывается случайной величиной  $\xi(\omega)$ , то в качестве  $X_o$  можно использовать математическое ожидание  $X_o = a_1 = \mathbf{M}\{\xi(\omega)\}$  или, если измеряемая величина изменяется во времени и ее математической моделью является случайный процесс  $\xi(\omega, t)$ , то в качестве  $X_o$  можно использовать

$$X_o = a_1(t) \Big|_{t=t_{\epsilon}} = \mathbf{M}\{\xi(\omega, t)\} \Big|_{t=t_{\epsilon}},$$

где  $t_{\epsilon}$  - фиксированный момент времени измерений;

*относительная погрешность* измерений определяется отношением в относительных единицах  $\delta X = \Delta X / X_o$

или в процентах  $\delta X = (\Delta X / X_o) \cdot 100 \%$ .

С относительной погрешностью измерений связана точность измерений.



*Точность измерений* определяется отношением  $\gamma = 1/\delta X$  и относится к количественным характеристикам измерений.

Так, например, если  $\delta X = 10^{-2}$ , то точность измерений равна 10 и такая характеристика может быть использована в основном при сравнениях результатов измерений. На практике точность измерений используется редко.

По сути *неопределенность результата измерений* закреплено в соответствующих рекомендациях по определению результатов измерений, рекомендованных для практического использования международными организациями метрологов и нашла свое отражение в соответствующих отечественных стандартах по метрологии.

**Неопределенность результата измерений.** Сам термин *неопределенность измерений* означает сомнение относительно достоверности результате измерений.

Принципиальным отличием концепции неопределенности результата измерений от традиционной, которая была сформирована во второй половине двадцатого века, заключается в следующем. Достоверность результатов измерений с учетом погрешностей базируется на полученных в процессе проведения измерительного эксперимента данных измерений, известных характеристик средств измерений и условий проведения эксперимента. При этом такие понятия, как *погрешность* и *истинное значение измеряемой величины*, заменяются понятиями *неопределенность* и *оценочное значение измеряемой величины*, а деление (классификация) видов погрешностей – *случайная* и *систематическая* - заменяется на деление по способу *оценивания неопределенностей измерений по типу А* с использованием методов математической статистики и *по типу В* с использованием и других методов.

Рассмотрим методы оценки и способы отображения неопределенности результатов измерений.

Как упоминалось выше, по методу оценки выделяют:

*тип А*, к которому относятся составляющие, которые оцениваются статистическими методами обработки данных многократных измерений;

*тип В*, к которому относятся составляющие, оцениваемые и другими методами обработки данных измерений.

По способу отображения выделяют:

*стандартную неопределенность* результата измерений как стандартное среднеквадратическое отклонение;

*суммарную неопределенность* как стандартную неопределенность результата измерений, которую получают из значений других величин, связанных с измеряемой величиной;

*расширенную неопределенность* как интервальную оценку неопределенности измерений, которая определяется произведением стандартной неопределенности на коэффициент *охвата*, который зависит от вида закона распределения и уровней заданных вероятностей;

*относительную неопределенность* - отношение стандартной, суммарной или расширенной неопределенности к оценке измеряемой величины.

Приведем примеры определения количественных характеристик неопределенности результатов измерений.

1. *Стандартная неопределенность типа А*. Считается, что данные измерений параметра  $\theta$  как случайной величины  $\xi(\omega)$  задается выборкой.

$$x_1, x_2, \dots, x_n. \quad (1.4)$$

Статистическая оценка математического ожидания - среднего значения - вычисляется по формуле

$$\tilde{a}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j, \quad (1.5)$$

а статистическая оценка дисперсии соответственно

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - a_1)^2. \quad (1.6)$$

Тогда выборочное (экспериментальное) среднеквадратическое отклонение  $s$  является стандартной неопределенностью данных измерений типа А.

2. *Стандартная неопределенность типа В*. Такое количественную характеристику неопределенности вычисляют при заданной функции плотности вероятностей  $p(x)$ , например, для:

равномерного распределения  $p(x) \in [b_1, b_2]$  стандартная неопределенность данных измерений типа В вычисляется по формуле

$$U(x) = (b_2 - b_1) / \sqrt{12}; \quad (1.7)$$

гауссова распределения по формуле

$$k_p U(x) = L(p) / k_p, \quad (1.8)$$

где  $L(p)$  - заданный доверительный интервал с известной доверительной вероятностью  $P$ , а  $k_p$  - коэффициент охвата; так, значение  $k_p \in \{1.64; 1.96; 2.58\}$  соответственно для вероятности  $P \in \{0.9; 0.95; 0.99\}$ .

3. *Суммарная неопределенность*. Такая количественная характеристика неопределенности исчисляется как характеристика косвенных измерений.

Считается заданной  $n$ -мерная функция последовательности аргументов  $\{x_j, j = \overline{1, n}\}$  вида

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.9)$$

При этом последовательность величин  $\{x_j, j = \overline{1, n}\}$  являются непосредственно измеряемыми величинами (прямой метод измерений), по данным измерений которых необходимо определить стандартную неопределенность  $n$ -мерной функции (1.9).

Суммарная дисперсия данных измерений  $n$ -мерной функции при условии линейной зависимости функции от каждого из аргументов  $x_j$ , а также для случая независимых между собой также случайных аргументов определяется выражением

$$\sigma^2(y) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 \sigma_j^2(x_j), \quad (1.10)$$

где  $\sigma_j(x_j)$  - стандартная неопределенность по типу А или по типу В данных измерений каждого из аргументов  $x_j$ .

Тогда  $\sigma(y)$  является суммарной стандартной неопределенностью данных измерений функции (1.9).

Определения суммарной стандартной неопределенности данных измерений является достаточно сложной задачей, обусловленной следующим:

измеряемая  $n$ -мерная функция вида (1.9) в общем случае описывается случайным полем, а ее аргументами являются случайные функции (случайные величины, случайные процессы), т.е. зависимость функции (1.9) от аргументов в общем случае является и функциональной, и статистической;

определение функции (1.9), а также взаимной статистической зависимости ее аргументов для каждого испытуемого объекта является самостоятельной задачей, которую можно решить, используя как методы теории измерений, так и методы математической статистики;

суммарная стандартная неопределенность вида (1.10) характеризует самый простой случай функциональной и статистической зависимости  $n$ -мерной функции (1.9) – линейную зависимость, а для более сложных случаев используются другие выражения. Так, например, для коррелированных случайных аргументов  $x_i$  и  $x_j$  для вычисления суммарной стандартной неопределенности имеет место формула

$$\sigma^2(y) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 \cdot \sigma_j^2(x_j) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} r_{ij} \sigma_i(x_i) \sigma_j(x_j), \quad (1.11)$$

где  $r_{ij}$  - коэффициент корреляции случайных аргументов  $x_i$  и  $x_j$  ( $i \neq j$ ).

4. *Расширенная неопределенность.* Такая интервальная мера неопределенности вычисляется по формуле

$$U = k_o \sigma(y), \quad (1.12)$$

где  $\sigma(y)$  - суммарная стандартная неопределенность (примеры формул для их вычисления (1.10) и (1.11)), а  $k_o$  - коэффициент охвата.

Для большинства практических задач коэффициент охвата  $k_o$  при построении доверительного интервала принимает значения  $k_o \in \{1,5, \dots, 3,0\}$ .

Так, значение коэффициента охвата  $k_o$  для гауссовых распределения при заданном уровне доверия **P** приведены в табл.

<b>P</b>	0,68	0,9	0,95	0,99	0,997
$k_o$	1	1,65	1,96	2,58	3

Таким образом, расширенная неопределенность данных измерений обосновывает интервал с заданным уровнем доверия, который покрывает значительную часть данных измерений функций вида (1.9).

Как отмечалось выше, расширенная неопределенность является наиболее весомой интервальной мерой при измерениях.

Отметим, что по результатам сравнительного анализа традиционных методов и методов неопределенности при измерениях метрологических характеристик можно сделать следующие выводы:

на основе использования неопределенности в полной мере используется данные и результаты измерений, полученных при использовании практически всех методов измерений;

в современных стандартах по метрологии, гармонизированных с международными, и научных публикациях по неопределенности измерений приведены методики пересчета погрешностей, полученных традиционным методом, в характеристики неопределенности результатов измерений.

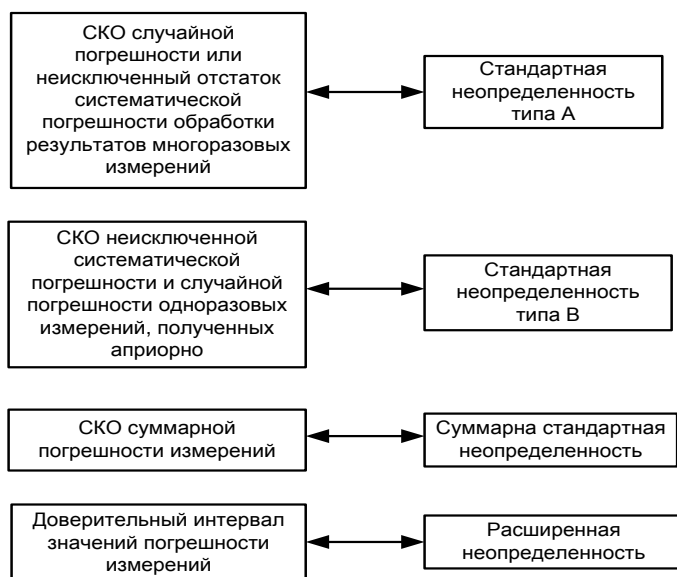


Рис.1.4. Иллюстрация взаимосвязи указанных оценок погрешностей измерений

В качестве выводов по рассмотрению приведенных материалов по погрешностям измерений на рис. 1.4 представлена иллюстрация взаимосвязи между традиционными методами получения оценок погрешностей и современными методами.

менным подходом их оценки согласно концепции неопределенности.

**Задачи функционирования ИИС.** Перечень и номенклатура задач функционирования ИИС разнообразна и это связано с предметными областями использования ИИС. Можно выделить три основных направления использования ИИС в качестве: *только средства измерения; измерительной системы для последующего решения задач контроля, диагностики распознавания образов, идентификации, управления и др.; инструментария для исследований* в медицине, экономике, социологии, психологии, философии и др.

Все указанные направления использования ИИС имеют свою специфику исследования, что отражается на задачах функционирования ИИС. С другой стороны, возможности решения задач ИИС ограничены, ИИС имеют свою специфику функционирования, которую в первую очередь следует рассматривать как *систему реализации измерительной информационной технологии*, другими словами, только ИИС может реализовать в классе всех технических систем измерительную информационную технологию.

Известно, что по определению *информационная технология* – это совокупность методов, аппаратных, вычислительных и программных средств, объединенных в единую технологическую цепочку, и обеспечивающую сбор, преобразование, передачу, обработку, защиту и распространение полученной информации для дальнейшего использования.

Соответственно измерительная информационная технология реализует проведение процесса измерений на базе использования ИИС и получения результата и погрешности измерений.

На рис. 1.5 приведена последовательная цепочка преобразования информации в ИИС.

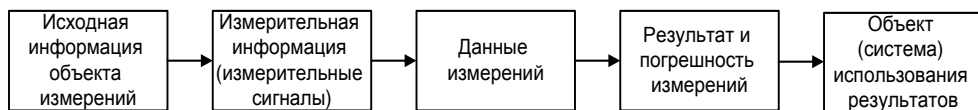


Рис. 1.5. Последовательность преобразования информации об исследовании объекта

С целью конкретизации задач функционирования ИИС приведем на рис. 1.6 функциональную схему ИИС в общем виде.

Основные задачи функционирования ИИС при реализации измерительной информационной технологии можно сформулировать так.

1. Обеспечение нормированных метрологических характеристик функционирования ИИС как средства измерения.

2. Гомоморфное преобразование исходной информации объекта измерений с помощью первичных измерительных преобразователей ИИС в измерительную информацию (измерительные сигналы).

3. Преобразование измерительных сигналов в данные измерений соответствующими устройствами сравнения (компаратор, АЦП) ИИС для последующих передачи, накопления, хранения и обработки.

4. Обработка данных измерений устройствами ИИС и определение ре-

зультата и погрешности измерений для последующего их использования.

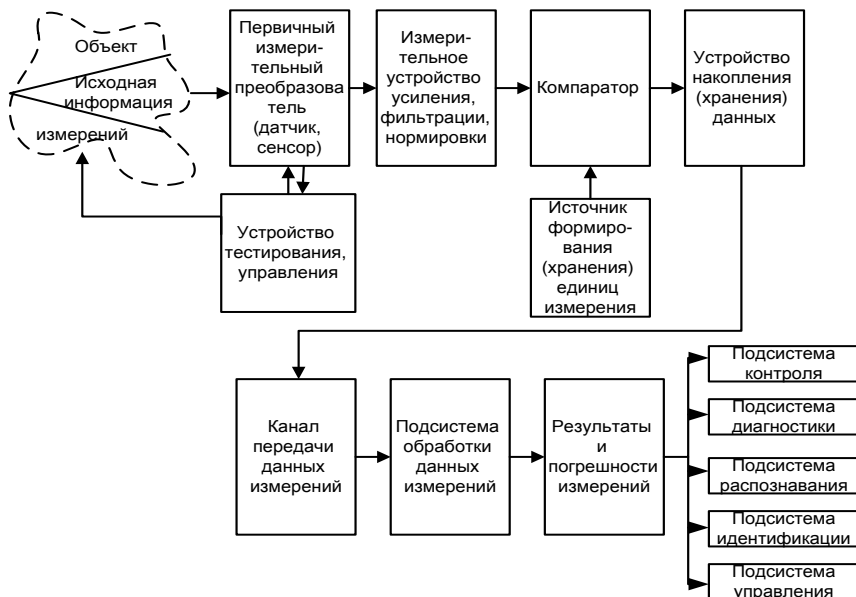


Рис. 1.6. Обобщенная функциональная схема ИИС

5. Использование полученных результатов измерений для последующего решения задач контроля, диагностики, распознавания, идентификации, управления и др.

6. Защита информации для исследований на всех этапах ее преобразований, передачи и обработки аппаратно-программными средствами ИИС.

В данной книге основное внимание уделено задачам реализации измерительной информационной технологии и защиты информации при проведении процесса измерений.

#### 1.4. Аппаратно-программная реализация и пути развития систем

**Основные виды ИИС.** Такая система относится к классу технических систем, ИИС в классе средств измерений имеет более сложную структуру для решения задач прямых, косвенных, совокупных или совместных измерений.

Остановимся на трех определениях ИИС.

**А.** Общее определение технической системы, включая ИИС.

*Техническая система* – совокупность элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которая образует определенную целостность, единство.

**Б.** Определение ИИС в широком смысле, когда система реализует в первую очередь измерительную информационную технологию с последующим решением задач контроля, диагностики, распознавания образов, идентификации, управления и др.

В широком смысле *информационно-измерительная система (ИИС)* - это совокупность функционально объединенных измерительных, вычислительных и других вспомогательных технических средств для получения измерительной информации, ее преобразования, обработки с целью представления потребителю в требуемом виде либо автоматического осуществления логических функций контроля, диагностики, распознавания, идентификации и др.

**В.** Определение ИИС в узком смысле, когда система реализует только измерительную информационную технологию, и в дальнейшем именуется измерительной системой в соответствии с нормативными документами.

В узком смысле *ИИС* – измерительная система (ИС) как совокупность определенным образом соединенных между собой линиями связи средств измерений (измерительных преобразователей, мер, измерительных коммутаторов, измерительных приборов) и других технических устройств (компонентов измерительной системы), образующих измерительные каналы, реализующая процесс измерений и обеспечивающая автоматическое (автоматизированное) получение результатов измерений (выражаемых числом или кодом) в общем случае изменяющихся во времени и распределенных в пространстве величин, характеризующих определенные свойства (состояние) объекта измерений.

Используя классификацию ИИС в зависимости от вида решаемых задач, которая была рассмотрена в подразделе 1.2, а также учитывая приведенные выше определения ИИС на рис. 1.7 приведены виды ИИС, которые в основном используются для получения измерительной информации.

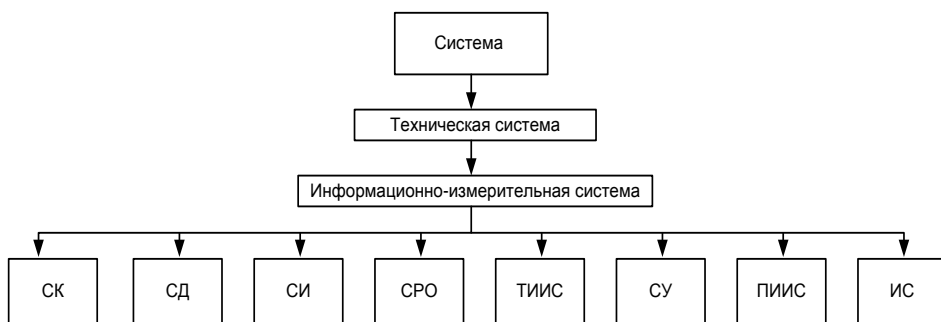


Рис. 1.7. Основные виды ИИС:

СК – система контроля; СД – система диагностики; СИ – система идентификации; СРО – система распознавания образов; ТИИС – телеметрическая ИИС; СУ – система управления; ПИИС – полиметрическая ИИС; ИС – измерительная система

Коротко рассмотрим задачи функционирования основных видов ИИС.

*Системы контроля (СК).* Такие системы в основном, применяются для контроля проведения различного рода технологических процессов. При этом число контролируемых характеристик и параметров процессов, в большинстве случаев, превышает несколько десятков, а иногда и несколько сотен и по-

этому задачи их контроля выполняются автоматически или автоматизированными системами.

В задачах контроля, как правило, известны математические модели проведения процесса, динамики изменений во времени и в пространстве характеристик и параметров процесса, и установлены границы (нормы) их изменения, в большинстве случаев это доверительные интервалы. После проведения измерений операция *контроля* отображает *качественную сторону* проведения технологического процесса и установления соответствия между текущими значениями контролируемых характеристик и параметров процесса установленным нормам.

По результатам контроля принимается решение: *процесс происходит в нормальном режиме* или *процесс не соответствует установленным нормам*. Такая же задача контроля относится и к различного рода объектам. В результате контроля принимается решение: *объект исправен* или *неисправен* для дальнейшей эксплуатации.

*Системы диагностики (СД)*. Принцип работы таких систем, в большинстве случаев, состоит из выполнения последовательности операций (рис. 1.8).

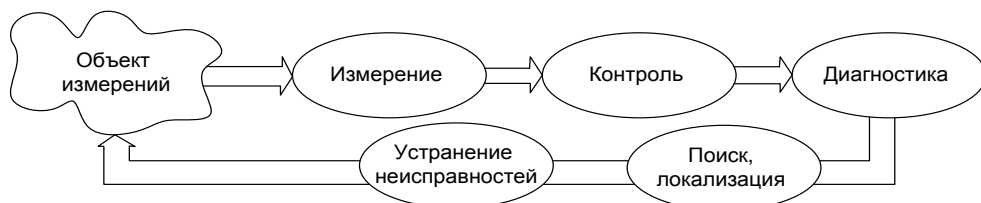


Рис. 1.8. Последовательность операций систем диагностики

Объектами систем диагностики являются технические системы. Их основная задача состоит в определении работоспособности элементов, узлов диагностируемой системы, их поиске и локализации неисправностей.

СД подразделяют на диагностические и прогнозирующие системы. Диагностические системы предназначены для установления точного диагноза, т.е. для обнаружения факта неисправности и локализации места неисправности. Прогнозирующие СД по результатам проверки в предыдущие моменты времени предсказывают поведение объекта в будущем.

По виду используемых сигналов СД подразделяют на аналоговые и кодовые. По характеру диагностики или прогнозирования различают статистические и детерминированные СД. При статистической оценке объекта решение выносится на основании ряда измерений или проверок сигналов, характеризующих объект. В детерминированной СД параметры измерения реального объекта сравниваются с параметрами образцовой системы (в СД должны храниться образцовые параметры проверяемых узлов).

*Системы идентификации (СИ)*. Теория, практика и, соответственно, основы идентификации технических систем развивались в рамках теории автоматического управления, технической кибернетики в последние десятилетия



XX ст. Одной из основных задач идентификации технических систем является так называемая *задача черного ящика* (рис. 1.9).

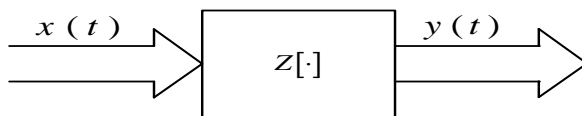


Рис. 1.9. Упрощенная структура идентификации технической системы

- а) линейные с постоянными или переменными во времени параметрами – инвариантные или неинвариантные, стационарные или нестационарные;
- б) нелинейные неинерционные или инерционные.

Рассмотрение СИ в классе ИИС соответствует современным информационным технологиям развития технических систем. При этом наряду с классической постановкой задачи *черного ящика* – определения оператора  $Z[\cdot]$  – требуется и решение задачи измерения  $Z[\cdot]$  с соответствующим определением погрешности результата измерения.

*Системы распознавания образов (СРО)*. Решение задач распознавания образов ИИС связано с расширением предметных областей использования ИИС. Это распознавание голографических изображений, деталей на конвейере, рукописные и печатные буквы, различные виды сигналов.

В постановке задачи распознавания образов имеют много общего с задачами идентификации объектов. Так, если задача идентификации объекта решена, то в задаче распознавания образов идентифицируемый объект необходимо отнести к определенному классу и сделать его распознаваемым в этом классе.

*Телеметрические ИИС (ТИИС)*. Такие системы используются для проведения измерений исследуемых объектов и передачи данных измерений на большие расстояния. Широко известно эффективное использование ТИИС для работы космических аппаратов, ракетной техники и др.

*Полиметрические ИИС (ПИИС)*. Как отмечалось в 1.2, этот сравнительно новый вид ИИС применяется для измерений и контроля количественных и качественных характеристик жидких, сыпучих сред и их изменениях в ходе технологических процессов, связанных с их производством, транспортировкой, хранением, потреблением в нефтехимической, судостроительной, авиационной, транспортной, пищевой и других отраслях промышленности.

Эффективность ПИИС основывается на формировании с последующим использованием *полиметрического сигнала*. Изменение характеристик полиметрического сигнала при его прохождении в жидких средах дает возможность получить измерительную информацию о количественных и качественных характеристиках исследуемых жидких сред. Следует отметить, что практические результаты применения ПИИС превышают уровень оперативного контроля известных средств измерения как зарубежного, так и отечественно-

го производства.

**Измерительная система.** Анализируя функционирование различных видов ИИС, отметим, что практически все такие системы в своем составе используют типовую структуру ИС. Поэтому вначале более подробно рассмотрим основные части ИС, а именно ее аппаратную и программную части.

*Аппаратная часть ИС.* Наиболее крупной структурной единицей, для которой могут нормироваться метрологические характеристики (МХ), является измерительный канал ИС.

*Измерительный канал (ИК)* - конструктивно или функционально выделяемая часть ИС, выполняющая законченную функцию от восприятия измеряемой величины до получения результата ее измерений, выражаемого числом или соответствующим ему кодом, или до получения аналогового сигнала, один из параметров которого - функция измеряемой величины.

Структура измерительного канала в большинстве случаев является типовой и представляет собой последовательное соединение различного рода модулей средств измерений (рис. 1.10).

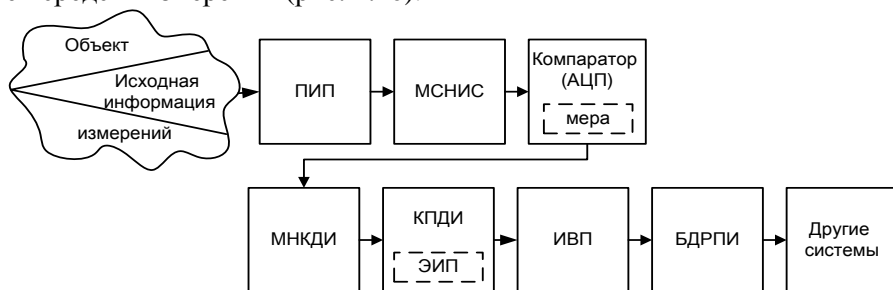


Рис. 1.10. Обобщенная схема измерительного канала ИС:

ПИП – первичный измерительный преобразователь; МСНИС – модуль согласования, усиления, фильтрации и нормировки; МНКДИ – модуль накопления, кодирования и передачи данных измерений; КПДИ – канал передачи данных измерений с эквивалентным (суммарным) источником помех (ЭИП); ИВП – измерительно-вычислительная подсистема приема, декодирования и обработки данных измерений; БДРПИ – база данных накопления и передачи в другие системы результатов и погрешностей измерений

Кратко остановимся на описании функционирования модулей (блоков, устройств) средств измерений ИК ИС.

ПИП, датчики, сенсоры ИК ИС преобразовывают информацию для исследования объекта измерений в измерительные сигналы, в большинстве случаев в электрические. Характеристика ПИП при преобразовании и формировании измерительного сигнала должна быть линейной исходя из необходимости реализации основной идеи измерений. Поэтому такая задача является составной частью общей задачи измерения и результаты ее решения приведены в многочисленных публикациях. В теории ИИС выделено целое научно-техническое направление исследования – сенсорная электроника. В

рамках этого направления проводят исследования, например сенсоры: физических величин, химические, биосенсоры, радиационные, оптические и оптоэлектронные, акустоэлектронные, наносенсоры и др.

МСНИС обеспечивает усиление, фильтрацию (согласованную, оптимальную) с целью уменьшения воздействия помех, корректировку (линеаризацию) функции преобразования ПИП, уменьшение аддитивных и мультипликативных погрешностей преобразований, нормирования измерительных сигналов.

В современных ИС в качестве компаратора используются аналогово-цифровые преобразователи (АЦП). Характеристики АЦП, в первую очередь частота дискретизации и шаг (уровень) квантования по интенсивности измерительных сигналов, выбираются из широкого ассортимента продукции типовых АЦП на основе анализа их метрологических характеристик, обеспечения характеристик точности их преобразований.

В общем случае полученные с выхода АЦП данные измерений в модуле МНКПДИ накапливаются, кодируются с целью защиты информации для последующей передачи по каналу передачи данных измерений.

В качестве канала передачи используются: проводные, включая оптоволоконные, линии связи; радиоканалы; высоковольтные линии электропередачи; акустические и гидроакустические каналы и др.

ИВП с соответствующим интерфейсным входным каналом обеспечивает прием, декодирование и обработку данных измерений с целью вычисления результата и погрешности измерений. Значительная часть современных ИВП строится на базе контроллеров модульного исполнения, включающих в себя аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи, процессор, модули дискретной (бинарной) информации (входные и выходные), вспомогательные устройства. Состав, конфигурация, программное обеспечение таких комплексов конкретизируется с учетом специфики объекта.

*Программная часть ИС.* При функционировании ИС исходят из того, что «мягкое оборудование», в состав которого входит функциональное информационное обеспечение ИО (математическое и программное (ПО)), не является самостоятельным объектом, так как оно работает только в процессе функционирования в составе ИС.

Информационное обеспечение ИС, в дальнейшем ПО, при анализе функционирования имеет характерные особенности:

- а) ПО не подвержено износу;
- б) если обнаруженные в процессе отладки и опытной эксплуатации ПО ошибки устраняются, а новые не вносятся, то такой объект рассматривается как *молодеющая система* (термин взят из теории надежности);
- в) работоспособность программ в значительной степени зависит от используемой входной информации, так как от значения входного набора зависит реализация исполнения программы;
- г) если при возникновении ошибок дефекты не диагностировать и не

устранять, то ошибки ПО будут носить систематический характер;

д) работоспособность ПО зависит от области применения ИС; при расширении или изменении области применения ИС работоспособность может существенно изменяться без изменения самого ПО.

Исходную информацию о работоспособности аппаратной части ИС – структурных элементов системы - можно получить путем обработки статистических данных о результатах эксплуатации некоторого количества однотипных образцов ИС. Возможности использования такого подхода для программного продукта ограничены, так как копии программного обеспечения идентичны и вместе с тиражированием ИС тиражируются и дефекты – проектные ошибки. Но существует и другая возможность использования предыдущего опыта функционирования ПО. Характеристики числа допущенных проектных ошибок являются довольно устойчивым показателем качества работы сложившегося коллектива программистов и используемых ими средств систем автоматического проектирования ПО. Если регистрировать сведения о проектных ошибках во всех ранее разработанных проектах, то после соответствующей обработки можно получить заслуживающие доверия исходные данные для оценки работоспособности нового ПО.

В процессе отладки и эксплуатации, когда появляются статистические данные об обнаруженных дефектах, исходное число дефектов как одну из важных характеристик качества программирования можно оценить с помощью методов математической статистики.

Модели работоспособности ПО и методы ее оценки разделены на две группы:

а) модели и методы проектной оценки работоспособности, основанные на исходных данных, которые можно получить до начала отладки и эксплуатации программ;

б) модели и методы статистической оценки работоспособности ПО, основанные на результатах отладки на этапах опытной или нормальной эксплуатации ИС.

В качестве исходных данных используются структурная схема функционального программного обеспечения (ФПО) по каждой функционально самостоятельной операции (ФСО), а также описание входов и выходов каждого структурного элемента, межмодульных и внешних связей комплекса алгоритмов и программ. Типовая структура ФПО имеет в своем составе ФПО верхнего (ФПО ВУ) и нижнего (ФПО НУ) уровней.

**Метрологическое обеспечение ИС.** В соответствии с нормативными документами *метрологическое обеспечение (МО)* – установление и использование метрологических норм и правил, а также разработки, изготовления и применения технических средств, необходимых для достижения единства и точности измерений.

Отметим следующие характерные особенности разработки МО ИС:

а) комплектацию ИС как единого, законченного изделия из частей, вы-

пускаемых различными заводами-изготовителями, только на месте эксплуатации;

б) многоканальность систем, в результате чего метрологической аттестации может подлежать не вся ИС, а только часть ее ИК;

в) разнесенность на значительные расстояния (иногда на десятки, сотни километров) отдельных частей ИС и, как следствие, различие внешних условий, в которых они находятся;

г) возможность развития, наращивания ИС в процессе эксплуатации или возможность изменения ее состава (структуры) в зависимости от целей эксперимента;

д) размещение отдельных частей ИС может быть проведено на перемещающихся объектах. В результате одна (передающая) часть ИС может работать с различными приемными частями в процессе одного и того же цикла измерений по мере перемещения объекта. При выпуске и эксплуатации таких ИС заранее неизвестны конкретные экземпляры приемной и передающей частей, которые будут работать совместно, тем самым отсутствует „стабильный” объект, для которого регламентируются метрологические требования;

е) использование ПИП, встроенных в технологическое оборудование, что затрудняет контроль ИС в целом;

ж) использование в составе ИС вычислительной техники обуславливает проблему аттестации алгоритмов обработки результатов измерений.

Особенности ИС делают особенно актуальной для них проблему расчета МХ измерительного канала ИС по МХ образующих их компонентов. Метод расчета МХ измерительного канала ИС существенно зависит от того, относятся ли образующие его СИ к линейным устройствам. Методы расчета нелинейных систем зависят от вида нелинейности, возможности разбиения СИ на линейную инерционную и нелинейную безынерционную части от других обстоятельств и отличаются большим разнообразием. При расчете МХ измерительного канала ИС можно выделить следующие характерные этапы:

а) определение погрешности, обусловленной взаимодействием выходных и входных цепей последовательно включенных СИ;

б) определение погрешности, вносимой линиями связи;

в) определение погрешности, обусловленной взаимным влиянием ИК, если не приняты меры к исключению такого влияния;

г) приведение МХ частей ИК, в том числе характеристик погрешностей, указанных в а), б), в), к одной точке ИК, как правило, к его выходу;

д) суммирование (объединение) МХ составных частей, в результате которого получают расчетные значения МХ измерительного канала.

Различают простые ИК, реализующие прямые измерения какой-либо величины, и сложные ИК, реализующие косвенные, совокупные или совместные измерения, начальная часть которых разделяется на несколько простых ИК, например при измерениях мощности в электрических сетях начальная часть ИК состоит из простых каналов измерений напряжения и тока.

Протяженность ИК может составлять от десятков метров до нескольких сотен километров. Число ИК - от нескольких десятков до нескольких тысяч. Информация от датчиков передается обычно электрическими сигналами (реже - пневматическими) - ток, напряжение, частота следования импульсов.

**Метрологическая надежность ИС.** Среди задач функционирования ИС метрологическое обеспечение занимает особое место. Это подтверждено тем фактом, что для исследования работы ИС в теории надежности выделено целое направление – *метрологическая надежность ИС*.

Под метрологической надежностью работы при реализации определенного комплекса условий ИС подразумевается получение решений необходимого количества, в общем случае  $n$ , заданных задач измерений характеристик (параметров) измерительных сигналов с требуемыми характеристиками точности (далее выполнение ИС последовательности  $n$  заданных функций).

По формальному признаку теория надежности исследует работоспособность всех видов технических систем. Поэтому выделение отдельного направления метрологической надежности только для ИС подчеркивает важность и значимость ИС в классе технических систем.

Приведем краткие, но фундаментальные основные положения метрологической надежности ИС – систему аксиом метрологической надежности ИС в следующей редакции.

**Аксиома 1.** *Измерительная система (далее система) обеспечивает выполнение во времени и в пространстве  $j$ -той ( $j = 1, n$ ) заданной функции из последовательности  $n$  функций, если изменения значений и характеристик информационного сигнала, который гомоморфно отображает выполнение  $j$ -той функции системой, находятся в установленных пределах. Анализ изменений значений и характеристик информационного сигнала производится по результатам одного из вариантов:*

- а) проведение вычислений, в том числе компьютерного моделирования с использованием математической модели сигнала;*
- б) обработки реальных данных измерений и контроля, значений и характеристик сигнала;*
- в) выполнение вариантов а) и б), а также проведения сравнительного анализа их результатов.*

**Аксиома 2.** *Система является работоспособной (обеспечивает безотказную работу) на определенном временном интервале, если система при этом выполняет последовательность  $n$  заданных функций, а выполнение каждой из них удовлетворяет условиям аксиомы 1.*

**Аксиома 3.** *Количественные или нормированные меры выполнения системой одной, нескольких или всей последовательности  $n$  заданных функций, являются характеристиками метрологической надежности как функции времени. Определение характеристик метрологической надежности производится по результатам выполнения одного из вариантов а) или б), или в), указанных в аксиоме 1. Основной интегральной характеристикой метрологической надежности системы является количественная мера – длина временного интервала работоспособности (эксплуатации) системы.*

**Аксиома 4.** *Система не обеспечивает работоспособность начиная с некоторого фиксированного момента времени, если при реализации определен-*

ного комплекса условий применения системы происходит событие (разладка) следующего вида:

г) отказ в узком смысле при невыполнении системой, начиная с указанного выше времени, одной из последовательности  $n$  заданных функций;

д) отказ в широком смысле при невыполнении системой, начиная с указанного выше времени, одной или нескольких функций из последовательности  $n$  заданных функций.

Определения временных моментов отказов работоспособности системы типа г) или д) производится по результатам выполнения одного из вариантов а) или б), или в), указанных в аксиоме 1.

Предложенная система аксиом метрологической надежности является непротиворечивой и неполной:

непротиворечивой, потому что реальные системы удовлетворяют указанным аксиомам;

неполной, поскольку указанные аксиомы могут быть использованы на различных этапах жизненного цикла измерительных систем, например на этапах проектирования и эксплуатации и получить при этом несовпадающие результаты исследований, которые затем необходимо согласовать., а также при применении системы аксиом можно формировать различные варианты постановок задач исследований метрологической надежности одной и той же системы.

Относительно независимости использования аксиом необходимо отметить следующее. В аксиоме 1 сформулированы практически все условия реализации всех последующих аксиом. Поэтому комбинации каждой из аксиом 2 или 3, или 4 вместе с аксиомой 1 могут быть использованы независимо друг от друга.

Приведенная система аксиом метрологической надежности ИС дает возможность проводить широкий круг теоретических и прикладных исследований их функционирования.

Перейдем к рассмотрению обобщенной структуры ИИС, которая должна отображать разнообразие и многоплановость решаемых системой задач.

**Структура ИИС.** Для каждого вида ИИС используется последовательность аппаратных модулей (измерительных, интерфейсных, обрабатывающих, управляющих). Состав ИИС содержит:

а) множество разновидностей первичных измерительных преобразователей, размещенных в определенных точках пространства стационарно или перемещающихся в пространстве по определенному закону;

б) множество измерительных преобразователей;

в) группу АЦП, а также аналоговых устройств допускового контроля;

г) множество цифровых устройств, содержащее формирователи импульсов, преобразователи кодов, коммутаторы, специализированные цифровые вычислительные устройства, устройство памяти, устройство сравнения кодов, каналы цифровой связи, универсальные программируемые вычислительные устройства - микропроцессоры, микроЭВМ и др.;

д) группу цифровых устройств вывода, отображения и регистрации;

е) указанные функциональные блоки соединяются между собой через стандартные интерфейсы или устанавливаются жесткие связи;

ж) интерфейсные устройства (ИФУ), содержащие системы шин, интерфейсные узлы и ИФУ аналоговых блоков, служащие для приема командных сигналов и передачи информации о состоянии блоков;

з) устройство управления, формирующее командную информацию, принимающее информацию от функциональных блоков и подающее команды на исполнительные устройства для воздействия на объект измерений.

По своим функциональным задачам ИИС имеют очень широкий диапазон применений. В то же время структуры построения ИИС имеют очень много общего между собой, и на рис. 1.11 приведена обобщенная структурная схема ИИС с учетом приведенных выше компонент (составляющих).

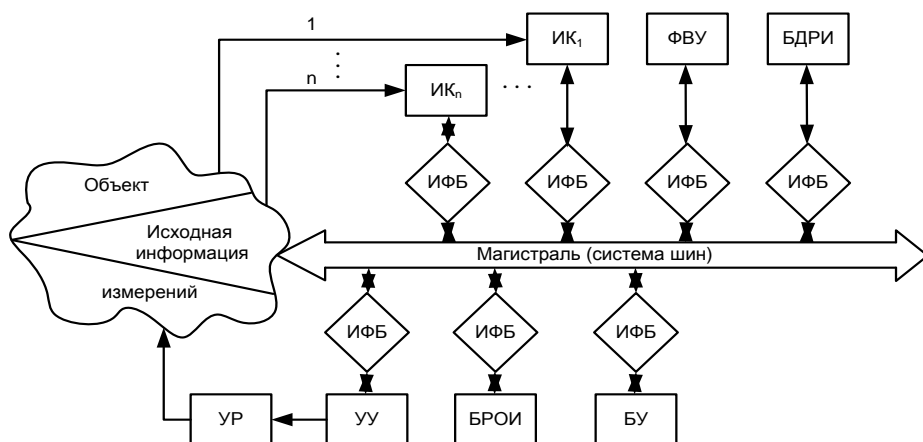


Рис. 1.11. Обобщенная структурная схема ИИС

Кратко отметим характерные типовые структурные компоненты ИИС.

Система имеет  $n$  ( $n > 1$ ) измерительных каналов ( $ИК_1, \dots, ИК_n$ ), состав каждого из них был подробно описан выше в данном параграфе (см. рис. 1.8). При этом для измерений  $n$  физических величин объекта исследования используются  $n$  различных первичных измерительных преобразователей ( $ПИП_1, \dots, ПИП_n$ ). Преобразователи размещаются стационарно и/или перемещаются по заданному закону в пространстве вблизи и/или на объекте исследования и служат для непосредственного восприятия информации для исследований и дальнейшего ее преобразования в  $n$  измерительных сигналов. Таким образом, ПИП образуют стационарную и/или динамическую перемещающуюся в пространстве  $n$ -мерную антенную (сенсорную) решетку.

Каждая из ИИС имеет свое функциональное вычислительное устройство (ФВУ) для решения функциональной задачи, например контроля, диагностики, управления технологическим процессом и др. База данных результатов исследования (БДРИ) используется для накопления, текущего использования и хранения полученных результатов.

Соответственно на схеме рис. 1.11 обозначены: БУ – блок управления, осуществляет управление работой ИИС в соответствии в заданной програм-



мой функционирования; БРОИ – блок регистрации, отображения и индикации, используется для диалогового режима *исследователь-оператор ИИС*; УУ – устройство управления, используется для выработки сигнала управления в цепи обратной связи по полученным результатам измерений в текущем режиме; УР – устройство регистрации.

Современные ИИС используют агрегатный или модульный принцип построения, при котором отдельные модули (блоки) выполняются в виде отдельных самостоятельных блоков. При выполнении различных операций формирования, преобразования, передачи измерительных сигналов в ИИС используются типовые и специализированные интерфейсные устройства.

Взаимосвязь между отдельными блоками ИИС, а это измерительные преобразователи АЦП, ЦАП и др., осуществляется через *интерфейсные блоки* (ИФБ) по командам, которые формируются в блоке управления (БУ) и передаются через ИФБ. Составными элементами интерфейса являются электрические цепи, которые именуются *линиями интерфейса*. Часть линий, объединенных по функциональным назначениям, именуются *шиной*, а все множество линий – *магистралью*. Более подробно функционирование интерфейсных устройств ИИС будет описано в разделе.

**Этапы жизненного цикла ИИС.** Рассмотрим основное содержание *этапов жизненного цикла ИИС* (рис.1.12).



Рис. 1.12. Иллюстрация этапов жизненного цикла ИИС

*Начальный этап.* Перед началом этапа проектирования ИИС (далее - системы) выполняется значительный объем работ по обоснованию, разработке и согласованию технического задания на создаваемую систему между за-

казчиком (ведомством, министерством) и исполнителем - разработчиком системы (конструкторское бюро, проектный или научно-исследовательский институты). В техническом задании (ТЗ) на систему приведены все технические характеристики, в первую очередь метрологические характеристики, характеристики надежности, временные сроки выполнения разработки системы, проведение испытаний, сертификация и передача системы для эксплуатации, стоимость разработки системы.

*Этап проектирования.* На этапе проектирования системы выполняется значительный объем теоретических, имитационных и экспериментальных (лабораторных) исследований, на основе результатов которых разрабатывается техническая и конструкторская документация на изготовление опытных и серийных образцов системы, проводятся работы по подготовке производства.

На этом этапе проводятся, в основном, теоретические и имитационные исследования с целью получения расчетных характеристик функционирования конкретно разрабатываемой системы. Расчетные характеристики являются базовыми, используются на последующих этапах жизненного цикла системы и могут быть скорректированными при дальнейших исследованиях.

При этом математический аппарат разработки технических систем используется в полном объеме. На последующих этапах жизненного цикла системы получены результаты теоретических и имитационных (моделирующих) исследований, которые могут дополняться данными натурных испытаний, эксплуатации, корректироваться, уточняться, подтверждаться статистическими гипотезами с использованием критериев согласия. Таким образом, на этапе проектирования системы использование такого математического аппарата позволяет создать методологию проведения теоретических, имитационных и экспериментальных исследований для всех этапов жизненного цикла ИИС.

*Методы теории измерений* (метрологии) используются в полной мере при проектировании подсистем ИИС различного назначения.

*Методы теории восстановления* являются основным аппаратом при решении задач резервирования систем для обеспечения их функционирования.

На этапе проектирования обосновываются постановки прямых задач резервирования элементов блоков, модулей, подсистем создаваемой системы и получаемые расчетные данные элементов. Использование таких данных настройки является неотъемлемым важным разделом проектирования систем.

*Методы теории планирования экспериментов (испытаний)* на этапе проектирования ИИС обосновываются в зависимости от постановки задач. Так, например, в процессе проведения испытаний решаются задачи:

- подтверждение принципов функционирования системы;
- совместимость работы их модулей и подсистем;
- проверка расчетных моделей, использованных при проектировании;
- оценка и подтверждение необходимого уровня характеристик функционирования для долговечности и ремонтпригодности системы.

Разрабатываются методы проведения испытаний, статистической обра-

ботки данных испытаний, согласование расчетных характеристик функционирования с полученными экспериментальными характеристиками.

*Методы теории массового обслуживания* используются при постановках задач резервирования элементов, модулей, подсистем создаваемой ИИС.

*Методы теории управления* используются при проектировании подсистем управления создаваемой системы.

*Методы вычислительной математики* дают возможность определить точностные характеристики исследуемых характеристик функционирования при проведении компьютерных экспериментов.

*Методы математического и имитационного моделирования* являются основными на этапе проектирования системы, путем реализации:

математического обеспечения;

программного обеспечения и проведения соответствующего измерительного вычислительного эксперимента для сравнительного анализа вариантов структуры создаваемой системы.

Методы программирования, создания баз данных дают возможность с использованием средств вычислительной техники использовать цифровые методы разработки технической и конструкторской документации для создания и изготовления системы.

*Уровень автоматизации проектирования.* Автоматизация проектирования является важным фактором, влияющим на уровень работоспособности сложных технических систем, поскольку позволяет решить следующие задачи: существенно снизить количество проектных ошибок, повысить качество конструкторской и технологической документации, создать условия для многовариантного проектирования и выбора оптимального варианта, сократить сроки проектирования, высвободив определенное время на доработку технических решений, согласование параметров проведения испытаний.

Особенно большое значение для повышения качества и надежности систем имеет использование при разработке программного обеспечения систем автоматизированного проектирования, поскольку позволяет использовать высокие технологии программирования, развитые системы тестирования и проводить автономные и комплексные испытания программного обеспечения с помощью инструментальных средств еще до изготовления технических систем, в которых планируется использование этих программных средств.

По уровню автоматизации в настоящее время различают три класса системы автоматизированного проектирования: системы низкоавтоматизированного (до 25 %), среднеавтоматизированного (от 25 до 50%), высокоавтоматизированного (более 50 %) проектирования.

*Этап изготовления и испытания опытных образцов, модулей, подсистем ИИС.* При наличии проектной и конструкторской документации на создаваемую систему проводится следующие работы:

подготовка производства для изготовления опытных образцов модулей, блоков, изделий, подсистем;

при изготовлении опытных образцов выполняется операции входного контроля комплектующих изделий, элементов электронных блоков и механических конструкций;

реализуется разработанная на этапе проектирования методика и соответствующие планы проведения испытаний с использованием средств измерений для получения данных измерений, характеристик и параметров информационных сигналов, исследуемых опытных образцов модулей, подсистем;

реализуется разработанная на этапе проектирования методика статистической обработки данных испытаний и определения экспериментальных метрологических характеристик исследуемых модулей, подсистем;

по результатам сравнительного анализа расчетных и экспериментальных метрологических характеристик вносятся необходимые коррективы в проектную техническую и конструкторскую документацию;

по результатам сравнительного анализа с использованием статистических методов согласования вносятся соответствующие коррективы в расчетные соответствующие математические модели, математическое и программное обеспечение компьютерного моделирования при определении метрологических характеристик.

По результатам исследований проводится корректировка проектной и конструкторской документации на разработку серийного образца системы.

*Этап создания серийного образца, сертификация и передача в эксплуатацию ИИС.* На этом этапе жизненного цикла системы выполняются следующие работы:

подготовка производства для изготовления серийных образцов системы с заданными метрологическими характеристиками;

при изготовлении серийных образцов системы выполняется методика, разработанная на этапе проектирования, наладки различных модулей подсистем, проверка функционирования для реализации заданных функций;

проверка изготовленного серийного образца действующей системы на функционирование и проведение ее сертификации с использованием метрологически аттестованных измерительных средств, включая сертификацию метрологических характеристик системы.

*Этап эксплуатации ИИС.* Данный этап жизненного цикла системы является наиболее длительным по времени и включает в себя выполнение следующих операций:

- а) транспортировка, наладка и запуск в эксплуатацию системы;
- б) мониторинг функционирования системы в заданных режимах с использованием подсистем измерений, контроля, диагностики и управления;
- в) формирование базы данных измерений функционирования системы с последующей статистической обработкой данных измерений характеристик, параметров информационных сигналов;
- г) реализации методики, которая была разработана на этапе проектирования, построения долгосрочного мониторинга и определения прогнозируе-

мых метрологических характеристик системы;

д) реализация методики ремонта системы;

е) корректировка математического и программного обеспечения компьютерного моделирования вариантов модернизации действующей системы, проведения моделирующего эксперимента и формирование рекомендаций модернизаций системы с целью повышения эффективности ее использования с соответствующим улучшением метрологических характеристик ИИС;

ж) реализация рекомендаций по модернизации системы.

*Заключительный этап жизненного цикла ИИС.* Данный этап является наиболее наукоемким в жизненном цикле ИИС и состоит в формировании данных исследований всех этапов, их систематизации и теоретическом, по использованию математического аппарата, обобщению результатов функционирования конкретного вида ИИС.

На данном этапе выполняется также работы по утилизации ИИС как системы, которая исчерпала свой технический ресурс.

**Пути развития ИИС.** В истории развития общества первые десятилетия XXI ст. относят к информационному этапу развития. Разработка и внедрение современных информационных технологий, широкое использование средств вычислительной техники способствовало развитию средств измерений, в первую очередь ИИС. Сфера предметных областей использования ИИС постоянно расширяется, возрастает число решаемых задач измерений при увеличении требований к характеристикам точности результатов измерений. Аппаратно-программная структура ИИС отображает многоплановость и разносторонность процессов измерений, достигнутый уровень развития технических систем и метрологии.

Теория и практика создания и применения современных ИИС подтверждают тот факт, что ИИС решают как самостоятельные системные задачи измерений, так и входят в другие технические системы. Решения научно-технических проблем адаптации, самоорганизации ИИС дают возможность включения их в класс интеллектуальных технических систем.

Качественно новые возможности использования ИИС для решения задач автоматического контроля, диагностики, идентификации, распознавания образов значительно расширило предметные области применения ИИС.

Пути развития ИИС неразрывно связаны с развитием технических систем во всех отраслях науки и техники. Пути развития ИИС как инструментария фундаментальной теоретической и прикладной метрологии связаны с развитием как аппаратной, так и программной подсистем ИИС при тесном их взаимодействии.

Расширение номенклатуры измеряемых величин является важнейшей задачей развития измерительных информационных технологий. Решение этой задачи достигается путем разработки новых сенсоров со стабильными и гарантируемыми свойствами.

Для научной поддержки этих работ необходимо использовать в реальном

времени по мере их появления все новейшие достижения фундаментальных наук физико-химического и физико-математического профиля и всех современных технологий в области создания и обработки материалов и сплавов, полупроводниковых и иных микротехнологий, САПР-технологий.

Из результатов многолетнего практического опыта работы метрологов следует, что никакие усовершенствования измерительных информационных технологий, включая компьютерные и интеллектуальные, не привели, не приводят и не могут привести в будущем к расширению номенклатуры измерений физических величин, пока отсутствуют соответствующие сенсоры, формирующие первичную информацию при непосредственном взаимодействии их с объектом измерений.

На рис. 1.13 приведены основные объекты развития и использования средств измерений (ИИС), а также их взаимосвязи.

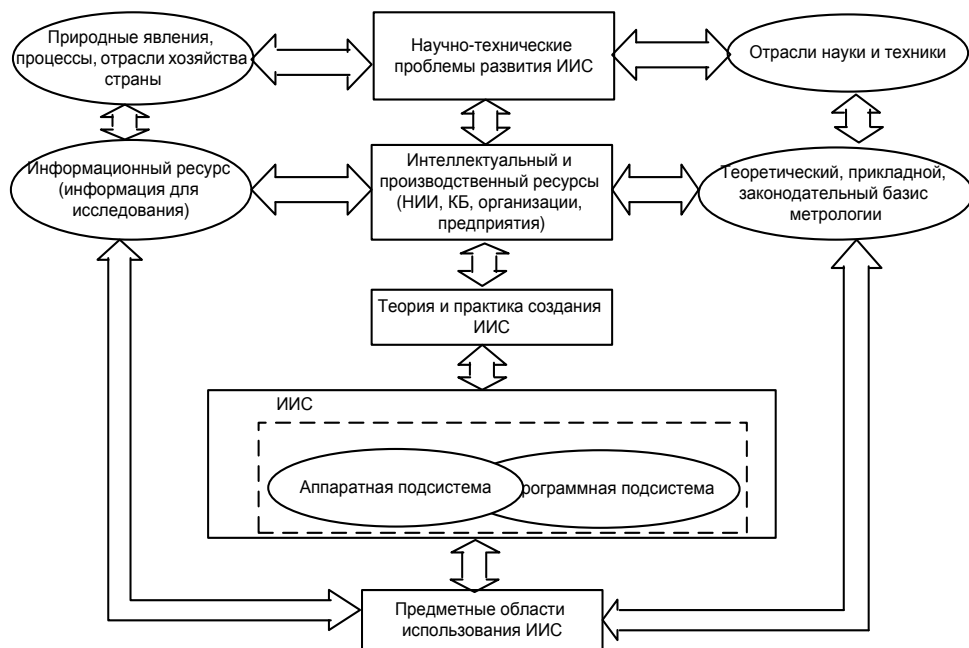


Рис. 1.13. Обобщенная структура взаимосвязи основных объектов применения ИИС

Измерительные информационные технологии, реализуемые в ИИС, выделяются из обширного множества информационных технологий тем, что реализуют специфические процедуры, присущие только им:

- а) получение исходной измерительной информации в результате взаимодействия сенсоров с объектом измерений (ОИ);
- б) преобразование измерительной информации с заданной и гарантированной точностью;
- в) сопоставление сигналов измерительной информации с размерами об-

щепринятых единиц измерения, оценка и представление характеристик погрешности результатов измерения (остаточной неопределенности значений измеряемых величин).

Реализация в ИИС современных компьютерных измерительных информационных технологий (КИИТ) дает дополнительные новые свойства благодаря использованию аппаратных и программных средств искусственного интеллекта, в том числе экспертных систем, программ вычисления, нейронных и генетических алгоритмов. Появляются реальные возможности хранения, уточнения и оперативного использования математических моделей ОИ и измеряемых величин, физических и метрологических моделей применяемых ИИС. Обеспечивается способность КИИТ к самообучению и адаптации к изменяющимся условиям измерений. Оператор получает возможность активно влиять на ход выполнения методики измерений благодаря гибкому программированию и развитым средствам диалога, но в связи с этим затрудняются возможности защиты программ обработки данных с целью обеспечения их сохранности и гарантий в отношении метрологических свойств этих программ, как этого требуют нормативные акты по вопросам обеспечения единства измерений и защиты информации.

Любая самая совершенная и интеллектуальная КИИТ должна быть метрологически корректной и удовлетворять требованиям системы обеспечения единства измерений в соответствии с государственными законодательными актами и международными нормативными документами.

Для научной поддержки эффективного и метрологически корректного осуществления новых возможностей КИИТ необходимо включение в круг интересов теории измерений или развитие в ее интересах разделов прикладной математики, адекватных новым проблемам. Представляется естественным, что эти разделы математики должны быть адаптированы к специфическим особенностям теории и практики измерений.

---

### *Основные выводы*

---

Метрология определена как наука об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства, а также о способах достижения заданной точности измерений в различных местах их применения.

Основными направлениями исследования метрологии является теория измерений, прикладная и законодательная метрологии.

Измерение является единением теории, методологии и практики.

Определение процесса измерений базируется на использовании определений физической величины, метода измерений, измерительного эксперимента, результата и погрешности измерений.

Информационно-измерительные системы (ИИС) как аппаратно-програм-

ные средства измерений нашли широкое применение в отраслях народного хозяйства страны, различных областях науки и техники.

Примерами предметных областей применения ИИС являются измерения: электрических и магнитных величин в электродинамике и радиоэлектронике; времени, частоты, механических величин в машиностроении; контролируемых характеристик и параметров различных технологических процессов; диагностических характеристик функционирования технических систем; количественных характеристик жидких, сыпучих сред и их изменений в ходе технологических процессов, связанных с их производством, транспортировкой, потреблением в нефтехимической, судостроительной, авиационной, транспортной, пищевой и других отраслях промышленности.

На начало XXI ст. число измеряемых электрических и магнитных величин на сегодня стабилизировалось порядка 100, а число других величин превышает 4000.

В истории развития средств измерения условно выделены три этапа развития: механический, электрический и информационный на основе использования современных ИИС и квантовой метрологии.

В качестве примеров развития средств измерений приведены средства измерений длины, угловых величин в астрономии и фазометрии.

Классификацию ИИС принято проводить на определенном временном интервале развития таких систем и измерительных информационных технологий. На начало XXI ст. выделяют классификационные признаки ИИС, к которым относятся функциональное назначение систем, вид и характер входных физических величин, формат выходной информации, структура функционирования аппаратной и программной подсистем.

По функциональному назначению выделены следующие виды ИИС: контроля, технической диагностики, распознавания образов, идентификации, телеметрические, полиметрические и измерительные.

К измерениям в узком смысле относят измерения, при которых происходит сравнение измеряемой величины с другой известной величиной того же рода (качества).

К измерениям в широком смысле относят измерения, при которых совокупность определенных элементов используется для упорядочения исследуемых процессов, явлений, свойств и характеристик объектов.

При создании теории измерений важную роль играют физические и математические модели процессов измерения, которые отображают использование меры физической величины при формировании данных измерений и вероятностной меры при статистическом оценивании результата и характеристик точности измерений.

Применение вероятностной меры в задачах измерения в значительной мере обусловила необходимость создания современной концепции неопределенности измерений.

Случайная величина является исходной (первичной) моделью для обес-



печения единства измерений, относящихся к одному виду объектов измерения, при проведении последовательности процессов измерения в различных пространственных местах, в разное время, различными методами и средствами измерений в контролируемых условиях. А нормированная вероятностная мера характеризует повторяемость в пространстве и во времени результата и характеристик точности измерений.

Математическая модель процессов измерений в узком смысле представляет собой измеримое топологическое пространство Хаусдорфа с зарядом (мерой) с последующим определением результата и погрешности измерений.

В топологическом пространстве отношение между точками множества – следствием измерительного эксперимента – и классом множества – топологией – описывается в терминах окрестностей точек, что дает возможность физической интерпретации окрестностей точек как некоторых областей значений погрешности определения следствий эксперимента.

Математическая модель процессов измерений в широком смысле описывается измеримым топологическим пространством Хаусдорфа с последующим определением результата измерений.

Использование пространства Хаусдорфа из всего класса топологических пространств для задач измерений носит принципиальный характер, так как дает возможность выделить две окрестности точек, которые не пересекаются.

Математическая модель процесса измерений в виде измеримого топологического пространства Хаусдорфа обосновывает разрешающую способность ИИС для реализации такого процесса.

Для описания видов входной информации ИИС выделены четыре способа формирования первичной информации исследования для различных видов объектов при их взаимодействии и взаимосвязи с ИИС.

Выделены три основных направления исследований современной метрологии: математическое моделирование процесса измерения и проведения вычислительного (компьютерного) измерительного эксперимента; физическое моделирование процесса измерения; проведение натурного измерительного эксперимента с применением ИИС.

Результат решения задачи измерений состоит из решений трех научно-технических проблем: гомоморфного отображения свойств, характеристик объекта измерений; установления одной и той же меры для результата измерений и определения условий, при которых различные методы и способы измерений представляют одни и те же количественные значения измеряемой величины; защиты информации при формировании, передаче, обработке, регистрации и представлении заказчику данных измерений.

На сегодня анализ погрешности измерений принято проводить с использованием двух подходов: традиционного на основе применения истинного значения измеряемой величины; современного на основе неопределенности измерений, а затем установления взаимосвязи полученных результатов анализа погрешности по обоим подходам.

Наиболее крупной структурной подсистемой ИИС, для которой нормируются метрологические характеристики, является измерительный канал.

К основным этапам жизненного цикла ИИС относятся этапы: проектирования; изготовления и испытания опытных образцов, модулей и подсистем; создания серийного образца, сертификация и передача в эксплуатацию; эксплуатации; заключительный этап.

Прогнозируемое развитие ИИС, как основного аппаратно-программного инструментария фундаментальной, теоретической и прикладной метрологии, неразрывно связано с развитием технических систем в различных отраслях науки и техники, использованием научно-технического, интеллектуального, информационного, производственного, экономического и других ресурсов.

---

### **Вопросы для самоконтроля**

---

- 1. На конкретных примерах рассмотрите измерения как процедуру определения количества исследуемой физической величины.*
- 2. Дайте определение метрологии и рассмотрите три основных направления исследований метрологии.*
- 3. Что такое физическая величина? Назовите конкретные виды таких величин.*
- 4. Дайте определение основных видов погрешностей измерений.*
- 5. Приведите примеры предметных областей использования ИИС.*
- 6. Назовите конкретные факты из истории измерения длины.*
- 7. Приведите примеры использования угловых измерений при проведении физических экспериментов.*
- 8. Какие общие и отличные характеристики угловых и фазовых измерений?*
- 9. Приведите наиболее характерные признаки классификации ИИС.*
- 10. Дайте определение математической модели информации для исследований и укажите основные этапы развития модели.*
- 11. Какие меры используются при проведении процессов измерения?*
- 12. Дайте определение математической модели процесса измерения первого вида.*
- 13. Что такое измеримое топологическое пространство Хаусдорфа с зарядом?*
- 14. Как определяется результат и погрешность измерения процессов измерения в узком смысле?*
- 15. Дайте определение математической модели процесса измерения в широком смысле.*
- 16. Как определяется результат измерения в широком смысле?*
- 17. Укажите основные направления исследований процесса измерений.*
- 18. Что такое натуральный измерительный эксперимент?*

19. Приведите три основные научно-технические проблемы для получения результата решения задачи измерений.
20. Рассмотрите классификацию погрешности измерения.
21. Приведите основные формулы определения абсолютной и относительной погрешностей.
22. Дайте основные определения неопределенности результата измерения.
23. Проведите сравнительный анализ погрешностей при использовании традиционного подхода и подхода неопределенности результата измерений.
24. Проведите сравнительный анализ трех определений ИИС.
25. Какие задачи решает система автоматического контроля технологических процессов?
26. Назовите основные задачи функционирования систем технической диагностики.
27. Проведите сравнительный анализ задач функционирования систем идентификации и системы распознавания образов.
28. Проведите анализ функциональной схемы измерительного канала ИИС.
29. Изобразите обобщенную схему ИИС и рассмотрите основные операции ее функциональных узлов.
30. Рассмотрите основное содержание этапов жизненного цикла ИИС.
31. Приведите основные пути развития ИИС.

---

### **Conclusions**

---

Information-measuring systems as hardware and software measuring means are widely used in all sectors of the national economy.

Metrology is defined as the science of measurement, methods and means of ensuring their unity and also about ways of achieving desired measurement accuracy.

The main research directions of metrology are theory of measurements, applied and legal metrology.

Determination of the measurement process is based on the use of physical quantity definition, measurement method, measuring experiment, and result of measurement error.

Examples of IMS subject field application are measurements of: electric and magnetic quantities in radio electronics, time and frequency, mechanic quantities.

At the beginning of XXI century the number of measuring electric and magnetic quantities was stabilized at 100, the number of other quantities is more than 4000.

The history of measuring instruments development is divided into three stages: mechanical, electrical and informational, based on the use of modern IMS and quantum metrology.

Instruments of length measurement, angular measurement in astronomy and phasometry are given as examples of measurement instruments development.

It is agreed that IMS classification should be carried out in some certain time intervals of development of such systems and measurement information technologies.

At the beginning of XXI century there are following classification features of IMS, such as functional purpose of systems, type and nature of inputted physical quantities, output information format, functional structure of hardware and software subsystems.

According to functional purpose there are following IMS types: automatic control, technical diagnostics, image recognition, identification, telemetric, polymetric and measuring.

Measurements in narrow sense can be described as comparison of measuring quantity with single unit of known quantity of the same kind (quality)

To measurements in a broad sense belong those ones when the set of certain elements is used to streamline studied processes, phenomenas, properties and characteristics of objects.

When creating general theory of measurement, important role is devoted to physical and mathematical models of measuring object.

Mathematical model of measuring object is defined as a combination of knowledge, assumptions, hypotheses, initial and boundary conditions; homomorphically displays main properties, characteristics of measuring object in space and in time; built in the form of complete, consistent, logical structure formulated using mathematical objects, terms and symbols to solve a given class of problems.

There are three stages of formation and development of the mathematical model. At the first stage mathematical model is created based on the analysis of a priori information about measuring object. At the second stage proposed model is used to solve a variety of measurement tasks in various subject areas. At the third stage analysis of measurement results is conducted using proposed model and one of three options is accepted: a) proposed model is recommended for further researches; b) proposed model should be improved and improved model to be recommended for further use; c) to develop a new model.

Mathematical model of measurement process in narrow sense is a measurable Hausdorff topological space with a charge (measure), followed by determination of result and measurement error.

Mathematical model of measurement process broadly is described by measurable Hausdorff topological space with subsequent determination of measurement result.

Mathematical model of measurement process in the form of a measurable Hausdorff topological space substantiates IMS resolution to implement such a process.

To describe the types of IMS input information there are four ways of forming primary research information for different types of objects in their interaction and interrelationship with IMS.

Three main directions of modern metrology research are distinguished: mathematical modeling of measurement process and computing (computerized) measuring experiment; physical modeling of measurement process; conducting full-scale measuring experiment using IMS.

The result of solving the measurement problem consists from solving three technical problems: homomorphic mapping of properties, characteristics of measurement object; establishing of a single measure for measurement result and determination of conditions when various methods and measurement techniques give

the same numerical values of measured quantity; information protection during formation, transmission, processing, recording and presentation of measurement data.

Today analysis of measurement errors is agreed to perform using two approaches: traditional, based on the use of exact (conditional exact) value of measuring quantity; contemporary, based on measurement uncertainty and establishment of interrelation between results of error analysis.

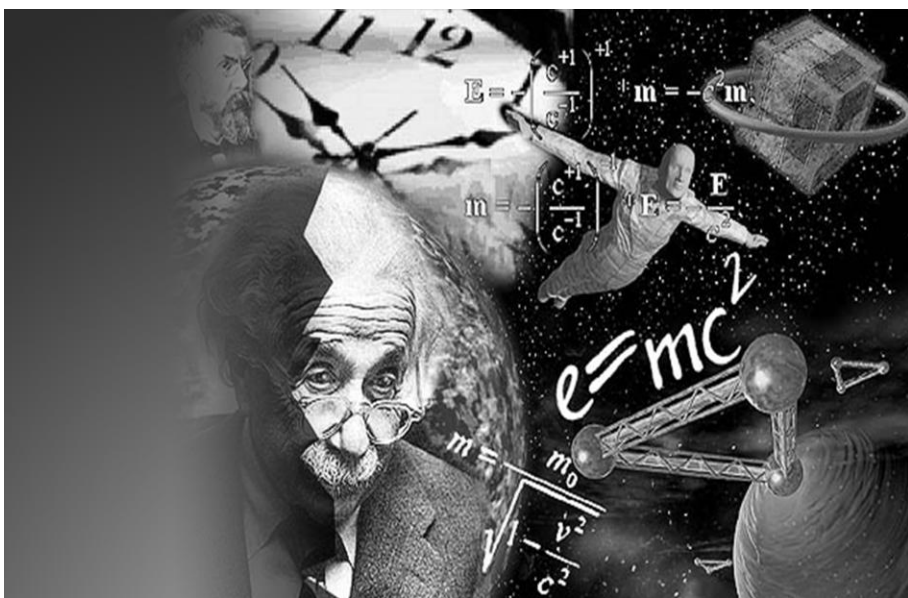
Major structural IMS subsystem, where metrological characteristics are normalized, is measurement channel.

Main stages of IMS life cycle include: design; manufacturing and testing of prototypes, modules and subsystems; creating a production model, certification and transfer into operation; operation; final stage.

Projected development of IMS as a major hardware and software toolkit of fundamental, theoretical and applied metrology, is tightly linked with development of technical systems in various branches of science and technics.

*Ключевые слова*

метрология	metrology
измерение	measurement
процесс измерений	measurement process
средство измерений	measurement tool
информационно-измерительная система	information-measurement system
аппаратно-программное средство измерений	hardware-software measurement tool
неопределенность измерений	measurement uncertainty
результат измерений	measurement result
погрешность измерений	measurement error



## КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

# 2

- 2.1. Измерительная информация, ее функции и свойства
- 2.2. Количественные характеристики информации
- 2.3. Меры информации
- 2.4. Энтропия и ее свойства
- 2.5. Производительность и избыточность источника информации
- 2.6. Связь информации с характеристиками сигналов

## 2.1. Измерительная информация, ее функции и свойства

Термин *информация* происходит от латинского *informatio*, что означает разъяснение, информирование, изложение. В широком значении информация - это общенаучное понятие, которое охватывает обмен сведениями между людьми, обмен сигналами между живой и неживой природой, людьми и устройствами. В этом смысле информация является отражением реального мира с помощью сведений (данных, сообщений).

Понятие «измерительная информация» имеет несколько определений, зависимых от взглядов на нее. Мы будем придерживаться толкования, согласно которому понятие «измерительная информация» объединяет характеристики объектов живой и неживой природы, являющихся потенциальным источником сведений разного рода для людей, а также и сами сведения, которые получают люди.

Как рабочее предложение предлагаем менее короткое определение: *измерительная информация - это совокупность сведений об окружающем мире, объектах и явлениях окружающей среды, а также процессы, которые происходят в них, сведения об их параметрах, свойствах и состоянии, которые уменьшают степень неопределенности, неполноты знаний о них.*

Методы анализа измерительной информации иллюстрирует рис. 2.1.

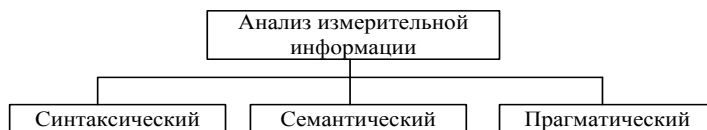


Рис. 2.1. Методы анализа измерительной информации

Согласно *синтаксическому подходу* осуществляется структурный анализ измерительной информации (количество сообщений, форма их представления, статистические характеристики появления и т.д.).

*Семантический подход* заключается в анализе содержательности измерительной информации и влияния ее на человека.

*Прагматический подход* связан с оцениванием полезности, ценности полученной измерительной информации.

Важно отметить *динамические свойства измерительной информации*. Объекты измерительной информации окружающего мира постоянно изменяются с разной скоростью. Изменения эти имеют случайный характер относительно моментов проявления, параметров, диапазона изменения параметров и законов изменения. Измерительная информация как отображение этих процессов также имеет динамический, случайный характер. Всегда необходима обновленная измерительная информация, призванная устранять неопределенность ситуации в данный момент.

*Обобщенной функцией информации* есть обеспечение выживания, развития человека и общества в сложном и непостоянном окружающем мире. Она

состоит из ряда частичных функций, которые имеют разную степень выявления в зависимости от внешних условий и характера деятельности человека. Чаще всего мы сталкиваемся с проявлениями таких *функций информации*:

*управленческой*, присутствует во всех сферах повседневной жизни и призвана помочь человеку в выборе варианта собственного поведения или целенаправленного влияния на объекты и процессы реального мира;

*коммуникационной*, присутствует во время обмена информацией между людьми и направлена на организацию взаимодействия между ними;

*познавательной*, предопределяется потребностью в информации ради общего развития, получения специальности и, в общем, для удовлетворения влечения к новому безотносительно к его прагматическому значению;

*психологической*, сказывается при формировании определенного эмоционального расположения духа с помощью некоторых видов информации, способов ее представления человеку.

*Обобщенным свойством информационных функций* является их направленность на устранение неопределенности нашего представления о состоянии объектов и процессов реального мира, которые нас интересуют, или на данный момент, или после некоторых влияний на них внутренних или внешних сил. Именно на устранение неопределенности сориентированы процессы сбора, передачи и обработки информации. Степень изменения неопределенности ситуации положена в основу *количественной меры информации*.

*Адекватность информации* - это определенный уровень соответствия образа, который создается с помощью полученной информации, реальному объекту, процессу, явлению и др. На практике вряд ли можно достичь полной адекватности информации. Всегда существует некоторая степень неопределенности. От степени адекватности информации реальному состоянию объекта зависит правильность принимаемых человеком решений.

*Адекватность информации* может выражаться в трех формах: синтаксической, семантической, прагматической.

*Синтаксическая адекватность* отражает формально-структурные характеристики информации без ее содержательного наполнения. На синтаксическом уровне учитываются тип носителя и способ представления информации, скорость передачи и обработки, размеры кодов представления информации, надежность и точность преобразования этих кодов и т.п. Формализованную информацию, которая рассматривается только из синтаксических позиций, обычно называют данными, поскольку при этом абстрагируются от содержательного аспекта. Эта форма адекватности содействует восприятию внешних структурных, т.е. синтаксических, характеристик информации.

*Семантическая (содержательная) адекватность* определяет другую степень соответствия образа исследуемого объекта самому объекту. Семантический аспект предусматривает учет содержательного наполнения информации. На этом уровне анализируются те сведения, которые отображает информация, и рассматриваются содержательные связи между ними.



Эта форма адекватности дает возможность формировать понятие и представление, обнаруживать значение, содержание информации и обобщать ее.

*Прагматическая (потребительская) адекватность* отображает соотношение между информацией и ее потребителем, степень соответствия информации той цели управления, которая на ее основе реализуется. Обнаруживаются прагматические свойства информации только при наличии единства информации (объекта), пользователя и цели управления. Прагматический аспект рассмотрения связан с ценностью, полезностью информации при подготовке потребителем решения для достижения поставленной цели. В соответствии с этим анализируются потребительские свойства информации.

Эта форма адекватности связана с практическим использованием информации и ее соответствии целевой функции работы системы.

Измерительная информация характеризует соотношение между *источником измерительной информации* (объектом исследования), сообщением и его потребителем.

Если речь идет об автоматизированной работе с измерительной информацией с помощью некоторых технических устройств, прежде всего интересуются не содержанием, а *источником сообщения* и количеством символов, которое содержит это сообщение.

*Информационные объекты* - это предметы, процессы, явления материальной или нематериальной природы, которые рассматриваются с точки зрения их информационных свойств.

*Источник измерительной информации или сообщение* - это физический объект (система или явление), что формирует переданное сообщение. Само сообщение - это значение или изменение некоторой физической величины, которая отображает состояние объекта (системы или явления).

При работе с информацией всегда существуют ее источник и потребитель (получатель). Пути и процессы, которые обеспечивают передачу сообщений от источника информации к ее потребителю, называются *информационно-коммуникационными системами (ИКС)*. Этот термин был введен в более широком понимании - как комплекс организационно-технических мероприятий, информационных технологий и информационных ресурсов, предназначенных для обеспечения информационных процессов, в частности создания, распространения, использования, хранения и уничтожения информации.

Относительно компьютерной обработки данных под информацией понимают некоторую последовательность символических обозначений (букв, цифр, закодированных графических образов и звуков и т.п.), которая несет содержательную нагрузку и подается в понятном для компьютера виде. Каждый новый символ в такой последовательности увеличивает информационный объем сообщения.

Данные содержат *информацию* о событиях, которые состоялись в материальном мире. Для того чтобы из данных можно было получить информацию, необходимо наличие *метода ее обработки*.

## 2.2. Количественные характеристики информации

В теории информации под *количеством информации* понимают меру уменьшения неопределенности знания. Нахождение такой меры нуждается в оценивании и учете количества переданной информации.

В этом смысле *количество информации* - это числовая характеристика сигнала, которая не зависит от его формы и содержания и характеризует неопределенность, которая исчезает после получения сообщения в виде данного сигнала. В таком случае количество информации зависит от вероятности получения сообщения о том или другом событии.

*Информационный объем (информационная вместительность) сообщения* - количество информации в сообщении, измерена в битах, байтах или производных единицах.

Для абсолютно достоверного события (т.е. такого, что непременно состоится, а потому его вероятность равняется единице) количество информации в сообщении о ней равняется нулю. Чем невероятнее событие, тем большую информацию о ней несет сообщение. Только если ответы равновероятностные, то ответ «да» или «нет» несет один бит информации.

Г. Хартли предложил формулу для вычисления количества  $I$  информации об объекте, который может находиться в одном из равновероятностных  $N$  состояний:

$$I = \log_2 N. \quad (2.1)$$

Формулу для вычисления количества информации для событий с разной вероятностью предложил К. Шеннон в 1948 г. В этом случае количество  $I$  информации определяется по формуле:

$$I = -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i, \quad (2.2)$$

где  $N$  - количество возможных событий;  $p_i$  - вероятность отдельных событий.

**Количественная мера информации.** При введении количественной меры информации (Г. Хартли и К. Шеннон) было принято содержательное наполнение сообщений (семантику) не учитывать, а ограничиться только формальными признаками, важными с точки зрения передачи сообщений по каналам связи. В результате учитываются только количество  $N$  сообщений, которые подлежат передаче, и вероятности  $p(x_i)$  поступления их на вход канала. Всю совокупность сообщений подают в виде некоторой системы  $X$  с состояниями  $x_i$ :

$$X = x_1 x_2 \dots x_n / p(x_1) p(x_2) \dots p(x_n), \quad \sum_{i=1}^N p(x_i) = 1, \quad (2.3)$$

где  $x_i$  - отдельные сообщения (или их типы, классы);  $p(x_i)$  - априорная вероятность появления сообщений  $x_i$ .

В результате передачи сообщения  $x_i$  будет получено сообщение  $y_j$ . Оно с некоторой вероятностью может быть похожим на любое из сообщений ( $x_1, x_2, \dots, x_N$ ), в частности на переданное сообщение  $x_i$ . Апостериорная вероятность присутствия  $x_i$  в  $y_j$  равняется  $p(x_i/y_j)$ .



**Джозеф Леонард Уолш**  
(Joseph Leonard Walsch,  
1895 - 1973),

американский математик. Работал в Гарвардском и Чикагском университетах. Основные работы касаются теории функций и топологии. Всего он опубликовал свыше 300 работ. На русский язык переведена его книга "Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области", а также "Теория сплайнов и ее применение" (вместе из Дж. Албергом и Е. Нильсоном).

В основу меры количества информации, положены обусловленные искажениям информации в канале связи изменения вероятности появления сообщений - от априорной  $p(x_i)$  на входе канала к апостериорной  $p(x_i/y_j)$  на выходе канала.

Сравнивая вероятности  $p(x_i)$  и  $p(x_i/y_j)$ , можно установить меру количества информации, переданной к потребителю. Удобной мерой оказался логарифм отношения апостериорной вероятности к априорной.

*Количество информации, которое содержится в событии  $y_j$  относительно события  $x_i$ , определяется по формуле*

$$I(x_i; y_j) = \log \left[ \frac{p(x_i / y_j)}{p(x_i)} \right]. \quad (2.4)$$

В качестве основания логарифма чаще всего берут 2,  $e \approx 2,72$ , или 10 (может быть 8, 16 и т.п.). В зависимости от основания изменяются единицы измерения количества информации (бит - двоичные единицы; нит - натуральные единицы; хартли (дит) - десятичные единицы).

Рассмотрим свойства количества информации.

1. *Свойство симметрии.* Информация, содержащаяся в  $y_j$  относительно  $x_i$ , равняется информации, содержащейся в  $x_i$  относительно  $y_j$ . Это становится очевидным, если числитель и знаменатель в (2.4) умножить на  $p(y_j)$  и выполнить преобразование:

$$\begin{aligned} I(x_i; y_j) &= \log \frac{p(x_i / y_j) p(y_j)}{p(x_i) p(y_j)} = \\ &= \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i) p(y_j)} = I(y_j; x_i) \end{aligned} \quad (2.5)$$

поскольку  $p(x_i, y_j) = p(y_j, x_i)$ ,  $p(x_i / y_j) = p(x_i)$ ,  $p(y_j / x_i) = p(y_j)$  - вероятность одновременного появления  $y_j$  и  $x_i$ .

Учитывая (2.5), величину  $I(x_i, y_j)$  называют *количеством взаимной информации между  $x_i$  и  $y_j$ .*

2. *Свойство аддитивности.* Информация, которая содержится в паре символов  $y_j, z_k$  относительно  $x_i$ , равняется сумме информации, содержащейся в  $y_j$  относительно  $x_i$ , и информации, содержащейся в  $z_k$  относительно  $x_i$ , при условии, что значение  $y_j$  известно

$$I(x_i; y_j z_k) = I(x_i; y_j) + I(x_i; z_k / y_j). \quad (2.6)$$

Количество собственной информации в  $x_i$  определяется из (2.2) при  $p(x_i; y_j) = 1$

$$I(x_i; y_j) = -\log p(x_i). \quad (2.7)$$

Эта величина определяет количество информации, необходимое для однозначного определения  $x_i$  на выходе канала.

С учетом формулы (2.6) можно преобразовать выражение (2.4) к виду

$$I(x_i; y_j) = I(x_i) - I(x_i / y_j), \quad (2.8)$$

где  $I(x_i / y_j) = -\log p(x_i / y_j)$  - условная собственная информация.

Среднее количество взаимной информации образовывается усреднением

$$(2.4) \text{ по всем } i \text{ и } j: \quad I(x_i; y_j) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i, y_j) = \log \left[ p(x_i / y_j) / p(x_i) \right]. \quad (2.9)$$

### 2.3. Меры информации

Для количественной оценки информации применяют синтаксическую, семантическую и прагматическую меры информации (рис. 2.2).

*Синтаксическая мера информации* - оперирует с обезличенной информацией, которая не выражает содержательной связи с объектом.

На синтаксическом уровне учитываются тип носителя и способ представления информации, скорость ее передачи и обработки, размеры кодов представления информации.

Для определения такой количественной меры информации вводятся два параметра: *объем данных*  $V_d$  и *количество информации*  $I$ .

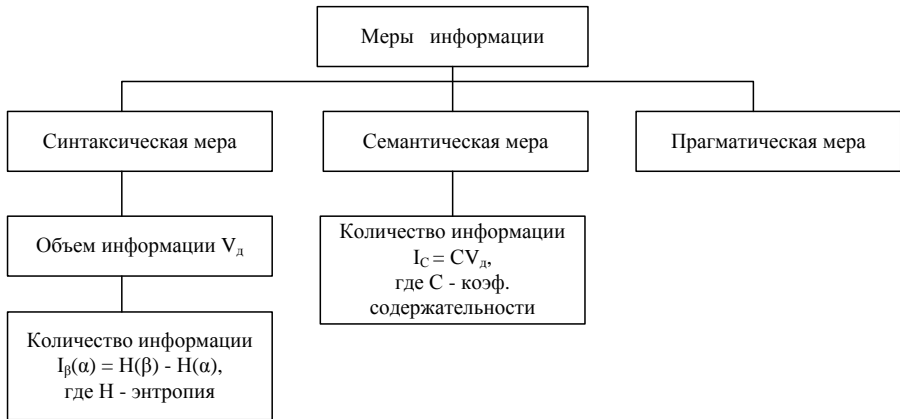


Рис. 2.2. Классификация мер информации

*Объем данных*  $V_d$  - информационный объем сообщения или объем памяти, необходимый для хранения сообщения без изменений.

Объем данных  $V_d$  в сообщении измеряется количеством символов (рядов). Единица измерения зависит от системы исчисления. *Количество информации* в сообщении об объекте, который может находиться в одном из



**Клод Элвуд Шеннон**  
(**Claude Elwood Shannon**,  
**1916 - 2001**),

американский математик и электротехник, один из создателей математической теории информации, в значительной мере определил своим результатами развитие общей теории дискретных автоматов, которые являются важными составляющими кибернетики. В 1948 г. опубликовал фундаментальную работу "Математическая теория связи", в которой сформулированы основы теории информации. Большую ценность представляет и другая работа "Теория связи в секретных системах" (1949), в которой изложены математические основы криптографии.

равновероятностных  $N$  состояний, определяют согласно приведенной ранее формуле Р. Хартли (2.1).

Из этой формулы следует, что чем неопределеннее была ситуация к получению сообщения, т.е. чем большего количества состояний мог приобрести объект, тем большее количество информации несет данное сообщение. Единицы измерения информации зависят от применяемой системы исчисления: в двоичной системе единица измерения - бит (bit - binary digit - двоичный разряд), в десятичной - дит. *Бит* - количество информации, нужной для различения двух равновероятностных сообщений. Бит - очень малая единица измерения. На практике чаще применяется единица *байт*, который равняется *восемью битам*. Именно восемь бит нужно для того, чтобы закодировать любой из 256 символов алфавита клавиатуры компьютера ( $256 = 2^8$ ).

Широко используются также еще большие производные единицы измерения информации:

1 килобайт (кбайт) = 1024 байт =  $2^{10}$  байт; 1 мегабайт (Мбайт) = 1024 кбайт =  $2^{20}$  байт;

1 гигабайт (Гбайт) = 1024 Мбайт =  $2^{30}$  байт;

1 терабайт (Тбайт) = 1024 Гбайт =  $2^{40}$  байт;

1 петабайт (Пбайт) = 1024 Тбайт =  $2^{50}$  байт.

В качестве единицы информации можно было бы взять количество информации, необходимой для различения, например, десяти равновероятностных сообщений. Это будет не двоичная (бит), а десятичная (дит) единица информации. В компьютерной практике слово «бит» используется также как единица измерения объема памяти. Элемент памяти размером в 1 бит может находиться в одном из двух состояний («включено» и «выключено») и в него можно записать одну цифру (0 или 1).

*Количество I информации* на синтаксическом уровне определяется через *энтропию системы*. Пусть до получения информации потребитель имеет некоторые предыдущие (априорные) сведения о системе  $y$ . Мерой его неосведомленности о системе есть функция  $H(y)$ , которая вместе с тем есть и мерой неопределенности состояния системы. После получения некоторого сообщения  $x$  получатель приобрел некоторую дополнительную информацию  $I(x)$ , которая уменьши-

ла его априорную неосведомленность так, что неопределенность состояния системы после получения сообщения  $x$  стала равняться  $H(x)$ . Тогда *количество информации* о системе, полученной в сообщении  $x$ , определится как

$$I(x) = H(y) - H(x). \quad (2.10)$$

т.е. *количество информации* измеряется величиной изменения (уменьшения) неопределенности состояния системы.

Если конечная неопределенность  $H(y)$  стремится к нулю, то первичное неполное знание заменится полным знанием, и количество информации  $I(x) = H(x)$ . Другими словами, *энтропия системы*  $H(y)$  может рассматриваться как мера информации, которой не хватает.

Энтропия системы  $H(y)$ , которая имеет  $N$  возможных состояний, согласно формуле К. Шеннона определяется как

$$H(y) = -\sum_{i=1}^N P_i \log P_i, \quad (2.11)$$

где  $P_i$  - вероятность того, что система находится в  $i$ -м состоянии. Для случая, когда все состояния системы равновероятны, т.е. их вероятность равняется

$$P_i = 1/N, \quad (2.12)$$

ее энтропия определяется соотношением, которое называется формулой Р. Хартли

$$H(y) = -\sum_{i=1}^N (1/N) \log (1/N) = \log N \quad (2.13)$$

**Пример.** Часто информация кодируется числовыми кодами в той или другой системе исчисления, особенно это актуально в случае представления информации в компьютере. Естественно, что одно и то же количество разрядов в разных системах исчисления может передавать разное количество состояний отображаемого объекта, который можно подать в виде соотношения:

$$N = m^n, \quad (2.14)$$

где  $N$  - количество отображаемых состояний;  $m$  - основа системы исчисления (количество символов в алфавите);  $n$  - количество разрядов (символов) в сообщении.

Предположим, что по каналу связи передается  $n$ -разрядное сообщение, которое использует  $m$  разных символов. Принимая во внимание, что количество кодовых комбинаций будет  $N = m^n$ , приходим к выводу: при равновероятном появлении любой из комбинаций количество информации, приобретенной абонентом в результате



**Ральф Винтон Лион Хартли (Ralph Vinton Lyon Hartley, 1888 - 1970),**

исследователь в области электроники. Изобрел гетеродин и преобразование, названные в его честь. Сделал вклад в основы теории информации. Родился в штате Невада. Получил степень бакалавра наук в Оксфордском университете (1913). В 1915 г. был ответственным за разработку радиопередатчика для трансатлантического радиотелефонного теста системы Белл. Для этого разработал гетеродин Хартли, а также схему нейтрализации для устранения паразитного самовозбуждения триода, который возникает в результате внутреннего соединения.

получения сообщения

$$I = \log N = n \log m. \quad (2.15)$$

Если за основу логарифма взять  $m$ , то  $I = n$ . В этом случае количество информации (при условии полного априорного незнания абонентом содержания сообщения) будет равно объему данных  $I = V_d$ , полученных по каналу связи.

*Коэффициент (степень) информативности (лаконичность) сообщения* определяется отношением количества информации к объему данных

$$Y = I / V_d. \quad (2.16)$$

С увеличением  $Y$  уменьшаются объемы работы по преобразованию информации (данных) в системе. Поэтому стараются повышать информативность, для этого разрабатываются специальные методы оптимального кодирования информации.

*Семантическая мера информации* применяется для измерения содержания информации. Для этого используется *тезаурусная мера*, которая учитывает способность получателя сообщения его воспринять.

*Тезаурусом* называют совокупность сведений, которые имеет в своем распоряжении пользователь или система.

Максимальное количество семантической информации  $I_c$  пользователь получает, если ее содержание  $S$  будет согласованно с его тезаурусом  $S_p$ , т.е. когда информация, которая поступает, понятна пользователю и несет ему не известные раньше (отсутствуют в его тезаурусе) сведения. В зависимости от соотношений между содержательным наполнением информации  $S$  и тезаурусом пользователя  $S_p$  изменяется количество семантической информации  $I_c$ , которую воспринимает пользователь и включает в дальнейшем в свой тезаурус. Характер такой зависимости делает наглядным рис. 2.3.

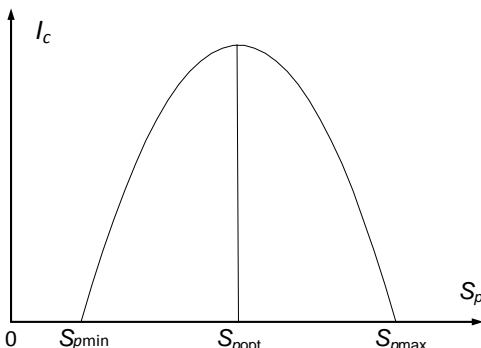


Рис. 2.3. Зависимость количества семантической информации, воспринимаемой потребителем, от его тезауруса

Рассмотрим два предельных случая, когда количество семантической информации  $I_c$  равняется нулю:

при  $0 \leq S_p \leq S_{pmin}$  пользователь не воспринимает, не понимает информацию, которая поступает;

при  $S_p > S_{pmin}$  пользователь знает все, а поэтому информация, которая

поступает, ему не нужна.

Максимальное количество семантической информации  $I_c$  потребитель получит, как уже отмечалось, согласовав ее содержательное наполнение  $S$  со своим тезаурусом  $S_p = S_{порт}$ .

Относительной мерой количества семантической информации может быть *коэффициент содержательности*  $C$ , определяемый как отношение количества семантической информации к ее объему:

$$C = I_c / V_d. \quad (2.17)$$

*Прагматическая мера информации* определяет полезность информации для достижения пользователем поставленных целей. В частности, полезность экономической информации можно определить по росту экономических показателей организации, обусловленных использованием указанной информации. Это может быть сокращение товарных запасов, увеличение скорости оборота средств, повышение качества принятия решений и т.д.

*Ценность информации* измеряется в тех самых (или близких к ним) единицах, в которых измеряется целевая функция.

#### 2.4. Энтропия и ее свойства

*Энтропия* определяет меру неопределенности всего множества сообщений на входе системы и вычисляется как среднее количество собственной информации во всех сообщениях

$$I(X) = -\sum p(x_i) \log p(x_i) = H(X). \quad (2.18)$$

*Свойства энтропии:*

1. Энтропия  $H(X)$  положительная:  $H(X) > 0$ .
2. Энтропия  $H(X) < \log N$ .
3. Величина  $\log N = D$  называется *информационной пропускной способностью* алфавита (информационной вместительностью алфавита).
4. Если  $N = 2$ , то  $p(x_1) = p$ ,  $p(x_2) = 1-p$ ,  $H(X) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$ .
5. Максимум  $H(X) = -\log_2 0,5 = \log_2 2 = 1$  - вместительность двоичного алфавита равняется 1 бит.

Зависимость  $H(X)$  от значения  $p$  иллюстрирует рис. 2.4.

Рассмотренные характеристики источника информации - количество информации и энтропия - касались одного источника, который вырабатывает поток независимых или простых сообщений, т.е. *источника без памяти*.

Тем не менее в реальных условиях независимость элементарных сообщений, которые вырабатываются источником, - явление довольно редкое. Чаще бывает именно наоборот: существует сильная детерминированная или статистическая связь между элементами сообщения с одного или нескольких источников. При передаче и хранении данных часто имеют дело с несколькими источниками, которые формируют статистически связанные одно за другим сообщения. Сообщения, которые вырабатываются такими



источниками, называются *сложными сообщениями*, а непосредственно эти источники - *источниками с памятью*.

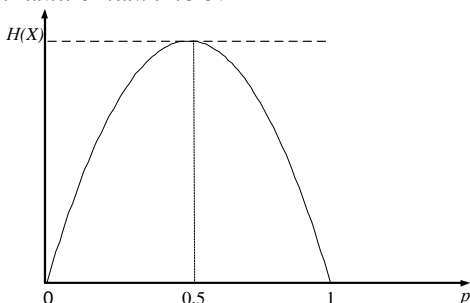


Рис. 2.4. Зависимость энтропии от величины  $p$

Очевидно, что при определении энтропии и количества информации в сообщениях, элементы которых статистически взаимосвязанные, нельзя ограничиваться только безусловными вероятностями - необходимо учитывать также условные вероятности появления отдельных сообщений.

Определим *энтропию сложного сообщения*, которое вырабатывается двумя зависимыми источниками (так же определяется энтропия сложного сообщения, которое вырабатывается одним источником с памятью)

Пусть сообщение первого источника приобретают значения  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$  с вероятностями соответственно  $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_k)$ , а сообщение второго - значения  $y_1, y_2, \dots, y_m$  с вероятностями  $P(y_1), P(y_2), \dots, P(y_m)$ . Общую энтропию двух источников  $X$  и  $Y$  можно определить как

$$H(X, Y) = -\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log P(x_i, y_j), \quad (2.19)$$

где  $P(x_i, y_j)$  - вероятность общего появления сообщений  $x_i$  и  $y_j$ . Поскольку общая вероятность  $P(x_i, y_j)$  за формулой Байеса определяется как

$$P(x_i, y_j) = P(x_i)P(y_j/x_i) = P(y_j)P(x_i/y_j), \quad (2.20)$$

эту формулу для общей энтропии можно записать в виде

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= I - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m P(x_i)P(y_j/x_i) \log \{P(x_i)P(y_j/x_i)\} = \\ &= -\sum_{i=1}^k P(x_i) \log P(x_i) \sum_{j=1}^m P(y_j/x_i) - \sum_{i=1}^k P(x_i) \sum_{j=1}^m P(y_j/x_i) \log P(y_j/x_i). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Поскольку передача сообщения  $x_i$  непременно отвечает передаче одного из сообщений (каждого) из ансамбля  $Y$ , то

$$\sum_{j=1}^m P(y_j/x_i) = 1, \quad (2.22)$$

причем *общая энтропия источников сообщений*  $H(X, Y)$  определяется по формуле (2.23), где  $H(Y/x_i)$  - *частичная условная энтропия*, которая отбывает энтропию сообщения  $Y$  при условии, что сообщение  $x_i$  поступило. Второе слагаемое представляет собой усреднение  $H(Y/x_i)$  по всем сообщениям  $x_i$  и назы-

вается *средней условной энтропией источника  $Y$  при условии передачи сообщения  $X$* .

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= -\sum_{i=1}^k P(x_i) \log P(x_i) - \sum_{i=1}^k P(x_i) \sum_{j=1}^m P(y_j / x_i) \log P(y_j / x_i) = \\ &= H(X) + \sum_{i=1}^k P(x_i) H(Y / x_i), \end{aligned} \quad (2.23)$$

И окончательно  $H(X, Y) = H(X) + H(Y / X)$ . (2.24)

*Общая энтропия двух сообщений* равняется сумме безусловной энтропии одного из них и условной энтропии второго.

Основные свойства энтропии сложных сообщений.

1. В случае *статистически независимых сообщений  $X$  и  $Y$*  общая энтропия равняется сумме энтропии каждого из источников

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y), \quad (2.25)$$

при этом учтено, что  $H(Y / X) = H(Y)$ .

2. В случае *полной статистической зависимости сообщений  $X$  и  $Y$*  общая энтропия равняется безусловной энтропии одного из сообщений. Второе сообщение при этом информации не прибавляет.

В самом деле, при полной статистической зависимости сообщений условные вероятности  $P(y_j / x_i)$  и  $P(x_i / y_j)$  равняются или нулю, или единице, тогда

$$P(x_i / y_j) \log P(x_i / y_j) = P(y_j / x_i) \log P(y_j / x_i) = 0 \quad (2.26)$$

и

$$H(X, Y) = H(X) = H(Y).$$

3. Условная энтропия изменяется в пределах  $0 < H(Y / X) < H(Y)$ .

4. Для общей энтропии двух источников всегда осуществляется соотношение  $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$ , при этом равенство выполняется только для независимых источников сообщений.

Итак, *при наличии связи между элементарными сообщениями энтропия источника снижается*, причем тем больше, чем сильнее связь между элементами сообщения.

*Энтропия систем с непрерывным множеством состояний* вычисляется по правилам анализа дискретных систем с предыдущим квантованием плотности вероятности  $w(x)$  с шагом  $\Delta x$ .

Тогда количество состояний в системе будет  $N = (x_{\max} - x_{\min}) / \Delta x$ , а вероятность состояний  $p(x_i) = w(x_i) \Delta x$ .

Воспользовавшись известными формулами данного раздела, можно найти энтропию суммы дискретных сообщений:

$$H_{\Delta x}(x) = \sum_{i=1}^N w(x_i) \Delta x \log \{w(x_i) \Delta x\}.$$

После преобразований при условии  $\Delta x > 0$ , имеем  $H_{\Delta x}(x) = H^*(X) - \log \Delta x$ .

Величина  $H^*(X)$  называется *сведенной энтропией*:

$$H^*(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \log w(x) dx. \quad (2.27)$$

Итак, приходим к таким выводам относительно степени информативности источников сообщений:

1. Энтропия источника и количество информации тем больше, чем больше размер алфавита источника.
2. Энтропия источника зависит от статистических свойств сообщения.
3. Энтропия максимальная, если сообщение источника равновероятностное и статистически независимое.
4. Энтропия источника, который вырабатывает неравновероятностные сообщения, всегда меньшая, чем максимально достижимая.
5. При наличии статистических связей между элементарными сообщениями (памяти источника) его энтропия уменьшается.

**Пример.** Рассмотрим источник с алфавитом, который состоит из букв  $a, \bar{b}, \bar{v}, \dots, \bar{ю}$ ,  $\bar{я}$ . Будем считать для упрощения, что размер алфавита источника  $K = 2^5 = 32$ .

Если бы все буквы алфавита имели одинаковую вероятность и были статистически независимыми, то средняя энтропия, которая приходится на один символ, представляла бы  $H(\lambda)_{\max} = \log_2 32 = 5$  бит/букву.

Если теперь взять во внимание лишь разную вероятность букв в тексте (а трудно проверить, что так оно и есть), расчетная энтропия будет представлять  $H(\lambda) = 4,39$  бит/букву. С учетом корреляции (статистической связи) между двумя и тремя соседними буквами (после буквы «п» чаще случается «а» и почти никогда - «ю» и «ц») энтропия уменьшится соответственно  $H(\lambda) = 3,52$  бит/букву и  $H(\lambda) = 3,05$  бит/букву. Если учесть корреляцию между восьмью и больше символами, энтропия уменьшится к  $H(\lambda) = 2,0$  бит/букву и дальше будет оставаться без перемен.

Поскольку реальные источники с тем самым размером алфавита могут иметь совсем разную энтропию (а это не только тексты, но и язык, музыка, изображения и т.п.), вводят такую характеристику источника, как *чрезмерность*

$$\rho_u = 1 - H(\lambda) / H(\lambda)_{\max} = 1 - H(\lambda) / \log K,$$

где  $H(\lambda)$  - энтропия реального источника;  $\log K$  - максимально достижимая энтропия для источника с объемом алфавита из  $K$  символов.

Тогда чрезмерность, например, литературного текста представляет

$$\rho_u = 1 - (2 \text{ бит / букву}) / (5 \text{ бит / букву}) = 0,6.$$

Иначе говоря, при передаче текста по каналу связи каждые шесть букв из десяти переданных не несут никакой информации и могут без потерь просто не передаваться. Такую же, если не большую ( $\rho_u = 0,9 \dots 0,95$ ), чрезмерность имеют и другие источники информации - язык и особенно музыка, телевизионные изображения и т.п.

Возникает правомерный вопрос: есть ли смысл занимать носитель информации или канал связи передачей символов, которые практически не несут информации, т.е. возможно ли такое преобразование исходного сообщения, в результате которого информация «втискивалась» бы в минимально необходимое для этого количество символов?

## 2.5. Производительность и избыточность источника информации

Рассмотрим источник двух событий  $s_1$  и  $s_2$ . Если событие  $s_1$  случается редко, а событие  $s_2$  - часто, то количество информации  $I(s)$  о реализации со-

бытия  $s_1$  будет значительно больше, чем о реализации события  $s_2$ :  $I(s_1) \gg I(s_2)$ . Очевидно, что количество информации источника двух событий значительно меньше, чем источника 10 или 20 событий, т.е. чем больше разных событий характеризует то или другое явление, тем больше необходимо информации для его описания. Таким образом, информация есть характеристикой такого общего свойства материального мира, как его разнообразие.

Измерительная информация всегда подается в виде сигналов, физическая природа которых зависит от типа источника сообщений. Сигналы как носители информации представляют собой механические колебания в твердых материалах, жидкостях, газах (инфразвук, звук, ультразвук), электрические и электромагнитные колебания или волны (радио, оптические). Сигналы воспринимаются приемочными устройствами, в частности органами чувства живых организмов и человека. Из сигналов добывается информация, которая дальше превращается и запоминается или передается по линиям связи, превращаясь и отображаясь в виде, удобном для восприятия, осмысления и использования человеком при принятии решений.

В *источниках информации* формируются сообщения. *Сообщение* - это последовательность знаков (символов) или непрерывные сигналы, которые содержат те или другие сведения, данные, результаты измерений. Множество разных знаков для формирования сообщений называют *алфавитом источника сообщений*, а количество знаков - *объемом алфавита*. В частности, знаками могут быть буквы естественного языка, цифры, иероглифы.

Непрерывные сообщения не делятся на элементы, являются функциями времени. Типичными примерами могут быть языковые сигналы из выхода микрофона, непрерывно измеренные данные о температуре, давлении, направлении и скорости ветра и т.п. В последнее время они, как правило, превращаются в цифровые с целью повышения качества передачи, хранения и защиты информации.

**Производительность источников информации.** По обыкновению источники передают сообщения с некоторой скоростью, затрачивая в среднем время  $T$  на передачу одного сообщения.

*Производительностью источника*  $H(X)$  называется суммарная энтропия сообщений, переданных в единицу времени:  $H'(X) = H(X)/T$ .

Производительность измеряется в битах в секунду.

Представим величину  $1/T$  как скорость  $v_c = 1/T$  (элементов в секунду), получим  $H'(X) = v_c \cdot H(X)/T$ .

Аналогично поделив значение энтропии и количества информации на  $T$  и представив  $H'(X/Y) = H(X/Y)/T$ ,  $I'(X/Y) = I(X/Y)/T$ , получим соответствующее равенство для условных энтропий и количества информации, рассчитанных на одно сообщение в единицу времени.

*Скоростью передачи информации* называется количество информации  $I'(X, Y)$  алфавитного ансамбля сигналов на входе системы, отнесенное к единице времени. Если, например,  $X$  - ансамбль сигналов на входе дискрет-

ного канала, а  $Y$  - ансамбль сигналов на его выходе, то скорость передачи информации по каналу

$$I'(X, Y) = H'(X) - H'(X/Y) = H'(Y) - H'(Y/X). \quad (2.28)$$

где  $H'(X/Y)$  - производительность источника переданного сигнала  $X$ , а  $H'(Y)$  - «производительность» канала, т.е. полная собственная информация в принятом сигнале за единицу времени.

Это соотношение делает наглядным рис. 2.5.

Величина  $H'(X/Y)$  является потерей информации, или ненадежностью канала за единицу времени, а  $H'(X)$  - скорость создания ошибочной, посторонней информации в канале, которая не касается  $X$  и обусловлена присутствующими в канале помехами. По определению К. Шеннона, ненадежность канала является энтропией входа, когда выход известный, т.е. ее можно считать мерой средней неопределенности принятого сигнала. Что касается величины  $H'(X/Y)$ , то она представляет собой энтропию выхода, когда вход известный, т.е. является мерой средней неопределенности переданного сигнала.

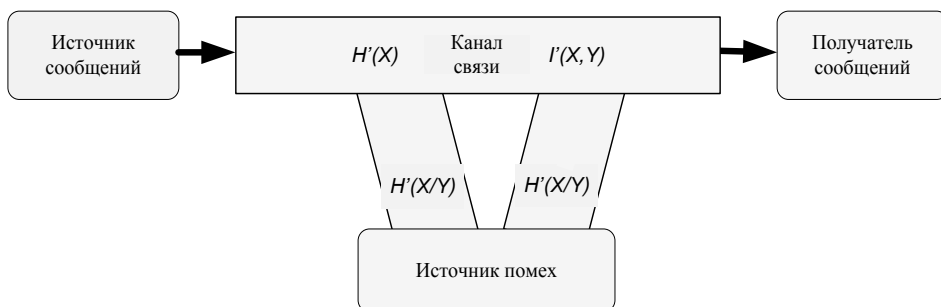


Рис. 2.5. Соотношение между характеристиками канала и скоростью передачи информации

Соотношение между  $H'(X/Y)$  и  $H'(X)$  зависит от свойств канала. Например, при передаче звукового сигнала по каналу с узкой полосой пропускания, недостаточной для высококачественного воспроизведения сигнала, и с низким уровнем помех теряется часть полезной информации, но почти не получается лишняя информация, т.е. в этом случае  $H'(X/Y) \gg H'(X)$ . Если же сигнал воссоздается на высоком уровне, качественно, но при этом прослушиваются наводки от соседнего радиоканала, то это означает, что почти без потерь полезной информации мы получили много лишней, т.е. избыточной, информации, которая мешает обработке. В этом случае выполняется соотношение  $H'(X/Y) \gg H'(X)$ .

**Эффективность и избыточность источников информации.** При передаче непрерывных сообщений переданные сигналы являются непрерывными функциями времени  $A(t)$ , что принадлежат некоторому множеству, а принятые сигналы  $X(t)$  будут их обезображенными вариантами. Все реальные сигналы имеют спектры с ограниченной полосой  $F$ . В соответствии с теоремой

В. А. Котельникова такие сигналы определяются их значениями в точках отсчета, которые содержатся одна от другой на расстоянии  $\Delta t = 1/2F$ .

В реальных условиях на сигнал накладываются помехи, вследствие чего количество значений уровней сигнала в точках отсчета будет конечным.

Итак, совокупность значений, которые определяют непрерывный сигнал, эквивалентна некоторой дискретной конечной совокупности. Это дает возможность определить количество информации и пропускную способность канала при передаче непрерывных сообщений на основании результатов, полученных для дискретных сообщений.

Если переданный сигнал  $A(t)$  содержит  $n$  точек отсчета  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , а принятый  $X(f)$  - такое же количество точек отсчета  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то соответственно количество информации, которая содержится в принятом сигнале  $X$  относительно переданного  $A$ , определится выражением:

$$I(X, A) = \log \left[ p(a_1, a_2, \dots, a_n / x_1, x_2, \dots, x_n) / p(a_1, a_2, \dots, a_n) \right],$$

где  $p(a_1, a_2, \dots, a_n) = P(A)$  - распределение вероятностей переданного сигнала (априорное распределение);  $p(a_1, a_2, \dots, a_n / x_1, x_2, \dots, x_n) = P(A / X)$  - распределение условных вероятностей, что характеризует статистические свойства принятых сигналов (апостериорное распределение). После усреднения формулы (2.29) по всем значениям  $A$  и  $X$  получаем выражение для определения среднего количества информации

$$I(X, A) = \iint P(A, X) \log [P(A / X) / P(A)], \quad (2.30)$$

или, после преобразования

$$I(X, A) = H(A) - H(A / X) = H(X) - H(X / A). \quad (2.31)$$

При этом скорость передачи информации

$$R = |H(A) - H(A / X)| / T = |H(X) - H(X / A)| / T, \quad (2.32)$$

где

$$H(A) = - \int \dots \int p(a_1, a_2, \dots, a_n) \times \log p(a_1, a_2, \dots, a_n) da_1 da_2 \dots da_n \quad (2.33)$$

- энтропия переданного сигнала;

$$H(A / X) = - \int \dots \int p(a_1, a_2, \dots, a_n; x_1, x_2, \dots, x_n) \times \\ \times \log p(a_1, a_2, \dots, a_n / x_1, x_2, \dots, x_n) \times da_1 \dots da_n dx_1 \dots dx_n$$

- условная энтропия сигнала.

Поскольку отсчеты  $a_1, a_2, \dots, a_n$  - независимые случайные величины, то  $p(a_1, a_2, \dots, a_n) = p(a_1) p(a_2), \dots, p(a_n)$ , и согласно выражению (2.33) после интегрирования находим

$$H(A) = \sum_{i=1}^n H(a_i), \quad (2.34)$$

где  $H(a_i) = - \int p(a_i) \log p(a_i) da_i$  - энтропия  $i$ -го отсчета.

Аналогичными соотношениями определяются  $H(X)$  и  $H(X/A)$ .



**Владимир Александрович Котельников (1908 - 2005)**, выдающийся советский и русский ученый в области радиотехники, радиосвязи и радиоастрономии. Основные работы посвящены проблемам усовершенствования методов радиоприема, изучению радиопомех и разработке методов борьбы с ними. К его наибольшему научному достижению следует отнести открытие теоремы отсчетов, которая носит его имя, создание теории потенциальной помехоустойчивости, а также разработку планетарных радиолокаторов и проведение с их помощью фундаментальных астрономических исследований.

Пропускная способность канала  $C$  определяется как максимум за всеми возможными ансамблями переданных сигналов

$$C = \max_{P(A)} \frac{1}{T} \left| H(A) - H\left(\frac{A}{X}\right) \right| = \quad (2.35)$$

$$= \max \frac{1}{T} \left| H(X) - H\left(\frac{X}{A}\right) \right|$$

Если сигнал и помехи, которые влияют на него, независимые, то  $p(X/A)$  есть функция только разности  $X-A=N$  и  $p(X/A) = p(N)$ . В этом случае  $H(X/A) = H(N)$  и

$$R = |H(X) - H(N)|/T, \quad (2.36)$$

$$C = \max \left[ |H(X) - H(N)|/T \right]. \quad (2.37)$$

Шум (помехи) в полосе  $F$ , равно как и сигнал, может быть представленный по теореме Котельникова  $n$  отсчетами  $n_1, \dots, n_2, \dots, n_n$ , где  $n$ , как и раньше, равняется  $2TF$ . Величины  $n_i$  распределены по нормальному закону, независимые и имеют одинаковую дисперсию  $\sigma^2$ . Общее распределение вероятностей этих отсчетов определяется  $n$ -мерным нормальным распределением. В этом случае энтропия шума

$$H(N) = - \int \dots \int p(n_1, n_2, \dots, n_n) \times \quad (2.38)$$

$$\times \log p(n_1, n_2, \dots, n_n) dn_1, \dots, dn_n = nH(n),$$

где  $H(n) = - \int p(n) \log p(n) dn$  — энтропия одного отсчета. С учетом изложенного имеем:

$$H(N) = TF \log(2\pi eN), \quad (2.39)$$

где  $N = \sigma_{ш}^2$  - средняя мощность шума.

Можно показать, что это наиболее возможная энтропия любого колебания при заданных значениях  $F$ ,  $T$  и  $N$ . Легко убедиться, что с увеличением ширины полосы пропуска  $F$  пропускная способность  $C$  возрастает, и при  $F \rightarrow \infty$  имеем

$$C_{\infty} = 1,443 P/N_0. \quad (2.40)$$

В реальных каналах связи скорость передачи информации  $R$  намного меньше пропускной способности  $C$ . Чем большую скорость передачи

предполагает данная система, тем эффективнее используется канал.

Наиболее общей оценкой эффективности системы передачи информации является *коэффициент использования канала*, который равняется отношению скорости передачи к пропускной способности

$$\eta = R / C . \quad (2.41)$$

Этот коэффициент называют также эффективностью канала.

Для идеальной системы  $\eta = 1$ , для реальных систем  $\eta < 1$ . При передаче непрерывных сообщений соответственно имеем:

$$\eta = F_m \log (P_\infty / N_\infty + 1) / F \log (P / N + 1). \quad (2.42)$$

В общем случае выражение для  $\eta$  - эффективности можно записать как

$$\eta = \eta_1 \eta_2, \quad (2.43)$$

где  $\eta_1$  - эффективность системы кодирования, которое равняется коэффициенту сжатия сообщения

$$\eta_1 = 1 - r, \quad (2.44)$$

а  $\eta_2$  - эффективность системы модуляции.

$$\text{Введя величину избыточности, представим: } \eta_1 = 1 - r_1; \eta_2 = 1 - r_2, \quad (2.45)$$

где  $r_1$  - избыточность сообщения;  $r_2$  - чрезмерность сигнала.

После подстановки выражения (2.45) в (2.43) имеем

$$\eta = \eta_1 \eta_2 = (1 - r_1) (1 - r_2) = 1 - r, \text{ где } r = r_1 + r_2 - r_1 r_2 \quad (2.46)$$

- полная чрезмерность системы.

Таким образом,  *$\eta$ -эффективность системы передачи информации полностью определяется значением ее избыточности*. Отсюда задачи повышения эффективности передачи сводятся к задаче уменьшения избыточности сообщения и сигнала, точнее, к рациональному ее использованию.

Избыточность сообщения обусловлена тем, что элементы сообщения не являются равновероятными, и между ними существует статистическая связь. При кодировании можно перераспределить вероятности исходного сообщения так, чтобы распределение вероятностей символов приближалось к оптимальному. Такое перераспределение дает возможность устранить чрезмерность, которая зависит от распределения вероятностей элементов сообщения. Примером такого кодирования является код Шеннона - Фано.

Процесс модуляции сопровождается расширением полосы частот сигнала сравнительно с полосой частот переданного сообщения. Это расширение полосы является избыточным. Частотная избыточность также увеличивается при переходе от синусоидального носителя к импульсному или шумоподобному. С точки зрения повышения эффективности передачи следовало бы выбирать способы модуляции, имеющие малую избыточность. К таким способам принадлежит, в частности, однополосная передача, когда переданные сигналы не содержат частотной избыточности, - они являются просто копиями переданных сообщений.





**Роберт Марио Фано (Robert Mario Fano, 1917),**

заслуженный профессор в отставке по электротехнике и компьютерным наукам в Массачусетском технологическом институте. Фано известен благодаря его работе в области теории информации, изобретению (вместе с Клодом Шенноном) кодирования Шеннона - Фано. В 1947 г. получил степень доктора наук в Массачусетском технологическом институте за диссертацию "Теоретические ограничения широкополосного согласования импеданса". Получил награду имени Клода Елвуда Шеннона 1976 г. за свою работу в области теории информации.

Однако, говоря об эффективности системы связи, нельзя забывать о ее помехоустойчивости. Устранение избыточности повышает эффективность передачи, но снижает при этом ее вероятность (помехоустойчивость), и наоборот, сохранение или введение избыточности обеспечивает высокую вероятность передачи. Итак, эффективность и помехоустойчивость систем передачи информации нельзя рассматривать отдельно друг от друга. Вопрос повышения эффективности и помехоустойчивости систем передачи информации представляют единую проблему. Задача состоит в том, чтобы отыскать умный компромисс при ее решении.

**Измерение информации источников двусимвольных сообщений.** Исследуем источник сообщений, состоящий из последовательности двух случайных независимых событий. Обозначим их символами  $s_1$  и  $s_2$ . Рассмотрим длинное сообщение вида  $s_1 s_2 s_2 s_1 s_1 s_2 \dots s_1$ , в котором  $n_1$  событий  $s_1$  и  $n_2$  событий  $s_2$ , так что размер сообщения  $n = n_1 + n_2$ . Очевидно, что сообщение этого источника такого размера будут отличаться одно от другого, так как количество событий  $n_1$  и  $n_2$  являются случайными величинами. Количество вариантов равняется количеству комбинаций из  $n$  по  $n_1$

$$C_n^{n_1} = \binom{n}{n_1}. \quad (2.47)$$

Рассмотрим такой же источник сообщений, который состоит из последовательности событий  $D_1, D_2, D_3, \dots, D_m$ , в которой количество символов  $D_1$  и  $D_2$  равняется  $m_1$  и  $m_2$ , получим  $m = m_1 + m_2$ . Тогда для второго источника

$$C_m^{m_1} = \binom{m}{m_1}. \quad (2.48)$$

Количество информации каждого из источников зависит от значений  $C_n^{n_1}$  и  $C_m^{m_1}$ . Обозначим количество информации первого источника  $I(s)$  и второго  $I(D)$ . Объединим эти два независимых источника в одно (третье) с символами-событиями  $Y$ . Очевидно, что количество информации третьего источника  $I(Y)$  должно равняться сумме  $I(s) + I(D)$ .

Поскольку логарифм произведения равняется сумме логарифмов, то

$$I(Y) = \ln(C_n^{m_1} C_m^{m_2}) = \ln(C_n^{m_1}) + \ln(C_m^{m_2}) = I(s) + I(D). \quad (2.49)$$

Возьмем за меру количества информации источников двусимвольных сообщений число, пропорциональное логарифму ожидаемого количества вариантов сообщений

$$I = k \ln(C_n^{n_1}) = k \ln(n!/n_1!n_2!), \quad (2.50)$$

где  $k$  - постоянная, зависящая от выбора единицы измерения информации.

Рассмотрим достаточно длинное сообщение, в котором  $n \rightarrow \infty$ , и представим его в виде

$$I = k \ln(n!) - k \ln(n_1!) - k \ln(n_2!). \quad (2.51)$$

Из теории факториалов известно, что когда  $m$  - большое число, то справедлива формула Стирлинга:  $\ln(m!) \approx m \ln m - m$ .

Преобразуем (2.51), воспользовавшись формулой Стирлинга:

$$I = k(n \ln n - n - n_1 \ln n_1 + n_1 - n_2 \ln n_2 + n_2) = -kn \left( \frac{n_1}{n} \ln \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} \ln \frac{n_2}{n} - \ln n \right).$$

Выражение в скобках преобразуем так:

$$\frac{n_1}{n} \left( \ln \frac{n_1}{n} + \ln n \right) + \frac{n_2}{n} \left( \ln \frac{n_2}{n} + \ln n \right) - \ln n = \frac{n_1}{n} \ln \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} \ln \frac{n_2}{n} + \frac{n_1 + n_2}{n} \ln n - \ln n.$$

В результате получим

$$I = -kn \left( \frac{n_1}{n} \ln \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} \ln \frac{n_2}{n} \right). \quad (2.52)$$

Формула (2.52) дает возможность оценить количество информации источника двусимвольных сообщений по экспериментальным данным: по количеству символов  $n_1$  и  $n_2$  в соответствующем сообщении. Если события  $s_1$  и  $s_2$  являются случайными, то при  $n \rightarrow \infty$  отношение  $n_1/n$  и  $n_2/n$  равняются вероятностям появления событий  $P(s_1)$  и  $P(s_2)$ . Тогда формула (2.52) превращается в такой вид

$$I = -nk [P(s_1) \ln P(s_1) + P(s_2) \ln P(s_2)]. \quad (2.53)$$

*Количество информации источника*, который приходится на один символ (событие), равняется его производительности

$$i = I/n = -k [p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2], \quad (2.54)$$

где  $p_1 = P(s_1)$ ;  $p_2 = P(s_2)$ .

Выражение (2.54) для вычисления информации двусимвольного источника случайных событий называется *формулой К. Шеннона*.

Рассмотрим ее подробнее. Поскольку  $p_1 + p_2 = 1$ , то, обозначив  $p = p_1$  и  $p_2 = 1 - p$ , получим:  $i = -k [p \ln p + (1 - p) \ln (1 - p)] = i(p)$ .

Информация, приходящаяся на символ, зависит от вероятности одной из событий, и при  $p = 0$ , а также при  $p = 1$  равняется нулю, т.е.  $i(0) = i(1) = 0$ .



**Джеймс Стирлинг**  
(James Stirling,  
1692 - 1770),

выдающийся шотландский математик, член Лондонского королевского общества (1729). Образование получил в Баллиол - колледже в Оксфорде. Важнейшая работа - "Разностный метод" (1730), в которой он впервые дал асимптотическое разложение логарифма гамма-функции (так называется ряд Стирлинга), рассмотрел бесконечные произведения. Некоторые из его открытий сделал Л. Эйлер в своих более общих исследованиях. Так называемая формула Стирлинга легко выводится из ряда Стирлинга, но у него самого в явном виде не встречается.

Определим условия максимума функции  $i(p)$ :

$$\frac{di}{dp} = -k[1 + \ln p - \ln(1-p) - 1] = \ln p - \ln(1-p) = 0.$$

Итак:  $\ln p / (1-p) = 0$ ,  $p / (1-p) = 1$ ,  $p_{\max} = 0,5$ .

Максимальное количество информации, которую выдает источник, достигается с вероятностью появления событий  $p_1 = p_2 = 0,5$ , т.е.  $i_{\max} = k \ln 2$ . Возьмем такой источник, как эталон, предположив, что его информация на один символ равна единице ( $i_{\max} = 1$ ). Тогда  $k = (\ln 2)^{-1}$  и формула К. Шеннона запишется в виде

$$i = -(p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2) / \ln 2. \quad (2.55)$$

Запись формулы К. Шеннона можно упростить, изменив основу логарифма. Обозначим  $x = \ln p / \ln 2$ . Тогда  $x \ln 2 = \ln p$ ,  $\ln 2^x = \ln p$ ,  $2^x = p$ .

Итак:  $x = \log_2 p = \ln p / \ln 2$ .

Для формулы К. Шеннона получаем новую запись:

$$i = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2,$$

где  $\log_2 p$  - двоичный логарифм числа 2.

**Пример.** Если  $p_1 = 0,125 = 2^{-3}$  и  $p_2 = 0,875$ , то  $i = 0,54356$ , что значительно меньше единицы. Это означает, что когда два источника выдали одинаковое количество информации  $I_1 = i_1 N_1$ ,  $I_2 = i_2 N_2$  и  $I_1 = I_2$ , то отношение размеров сообщений обратно пропорционально их производительности. Т.е. одну и ту же информацию можно передавать за меньшее время или занимать меньшую память при ее хранении, если преобразовать сообщение так, чтобы производительность источника была максимальной (или близкой к ней). Тогда формулу К. Шеннона, можно записать в виде

$$i = -[P(s_1) \log_2 P(s_1) + P(s_2) \log_2 P(s_2)] \\ = [P(s_1) i(s_1) + P(s_2) i(s_2)]. \quad (2.56)$$

Здесь  $i(s_1)$  и  $i(s_2)$  - количество информации при реализации случайных событий  $s_1$  и  $s_2$ , а  $P(s_1)$  и  $P(s_2)$  - закон распределения их вероятностей.

*Вероятностно-статистическое описание источника двусимвольных сообщений*  $i$  - это математическое ожидание количества информации источника на один символ (одно событие), а  $i(s_1)$  и  $i(s_2)$  - количество информации при реализации соответственно случайных событий  $s_1$  и  $s_2$ :

$$i(s_1) = -\log_2 P(s_1), \quad i(s_2) = -\log_2 P(s_2).$$

Формула (2.56) служит вероятностно-статистическим описанием источника двусимвольных сообщений при реализации случайных событий  $s_1$  и  $s_2$ .

**Измерение информации источников многосимвольных сообщений.** Рассмотрим источник информации, сообщения которого состоят из  $m$  разных символов  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_m \dots$ . Допустим известно, что они могут появляться в сообщении независимо одно от другого с вероятностями  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m \dots$ . Общее количество возможных сообщений длиной  $n$  с количеством символов  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$  можно вычислить по формуле

$$N = n! / \prod_{i=1}^m (n_i)!, \quad \text{где } n = \sum_{i=1}^m n_i. \quad (2.57)$$

Определим количество информации в этом сообщении:

$$I = K \ln N = K \left( \ln(n!) - \sum_{i=1}^m \ln(n_i!) \right). \quad (2.58)$$

В частном случае при  $m = 2$  получаем формулу (2.56). Воспользовавшись формулой Стирлинга, преобразуем формулу (2.58). В результате получим

$$I \approx -Kn \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{n} \ln \left( \frac{n_i}{n} \right).$$

Формула К. Шеннона для вычисления информации источников многосимвольных сообщений при  $n \rightarrow \infty$  приобретает вид

$$i = -(\ln 2)^{-1} \sum_{j=1}^m P_j \ln P_j. \quad (2.59)$$

**Пример.** Рассмотрим сообщения на украинском языке при использовании 32 символов (букв). Вероятности их появления в текстах приведено в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Буква	$P$	Буква	$P$	Буква	$P$	Буква	$P$
А	0,062	И	0,016	Р	0,040	Щ	0,003
Б	0,014	І, І́	0,062	С	0,045	Ь	0,014
В	0,038	Ї	0,010	Т	0,053	Ю	0,006
Г	0,013	К	0,028	У	0,021	Я	0,018
Д	0,025	Л	0,035	Ф	0,002		
Е	0,072	М	0,026	Х	0,009		
Є	0,003	Н	0,053	Ц	0,004		
Ж	0,007	О	0,090	Ч	0,012		
З	0,016	П	0,023	Ш	0,006		

Допустим, что вероятности появления букв в тексте отвечают независимым случайным событиям, и получаем по формуле (2.59) количество информации на одну букву текста:  $u = 4,42$  бит.

Покажем, что производительность источника многосимвольных сообщений будет максимальной, если  $p_j = 1/m, j = 1, 2, \dots, m$ , т.е. когда появление символов равновероятностное. Поскольку  $p_m = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} p_j$ , то функция (2.59) зависит от  $(m - 1)$  пере-

менной:  $i(p_1, p_2, \dots, p_{m-1}) = -\sum_{j=1}^{m-1} p_j \ln p_j / \ln 2 - p_m \ln p_m / \ln 2$ .

**Необходимое условие** существования внутреннего максимума многомерных функций формируется таким образом: все частичные производные в точке максимума должны превращаться в ноль:

$$\partial i / \partial p_1 = 0; \quad \partial i / \partial p_2 = 0, \dots, \quad \partial i / \partial p_{m-1} = 0.$$

В рассмотренном случае частичные производные

$$\partial i / \partial p_j = -\left( \ln p_j + 1 + \left( \partial p_m / \partial p_j \right) \ln p_m + \partial p_m / \partial p_j \right) / \ln 2.$$

В свою очередь:  $\partial p_m / \partial p_j = -\partial \left( \sum_{j=1}^{m-1} p_j - 1 \right) / \partial p_j = -1$ .

В результате получаем

$$\partial i / \partial p_j = -\ln \left( p_j / p_m \right) / \ln 2 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1 \dots \quad (2.60)$$

Итак,  $p_j = p_m$  для всех  $j = 1, 2, \dots, m-1 \dots$  Но это возможно только в том случае, когда  $p_j = 1 / m, j = 1, 2, \dots, m \dots$  Таким образом, *необходимым условием максимума производительности источника сообщений есть равновероятность появления символов.*

Достаточным условием максимума многомерных функций есть выполнения неравенства

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m-1} \left( \partial^2 i / \partial p_i \partial p_j \right) < 0 \quad (2.61)$$

в точке  $p_j = 1/m, j = 1, 2, \dots, m-1 \dots$

Вторые производные определим из формулы (2.60):

$$\partial^2 i / \partial p_j^2 = -1 / \ln 2 \left( 1 / p_j + 1 / p_m \right), \quad \partial^2 i / \partial p_i \partial p_j = -1 / p_m \ln 2.$$

В точке экстремума имеем  $\partial^2 i / \partial p_j^2 = -2m / \ln 2, \quad \partial^2 i / \partial p_i \partial p_j = -1 / m \ln 2$ .

Итак, условия достаточности выполняются, поскольку все производные меньше нуля. Если бы буквы украинского языка были равновероятностными, то производительность источника сообщения была бы  $i_{\max} = -\sum_{i=1}^{32} \log_2 (1/32) / 32 = \log_2 2^5 = 5$ .

Поскольку появление букв не равновероятностное, то информация уменьшается и исчисляется по формуле (2.58).

Заметим, что на самом деле между парами букв существует статистическая связь (корреляция), т.е. если некоторая буква в сообщении есть, то вероятности появления других букв после нее сильно отличаются.

**Измерение информации источника двух зависимых случайных событий.** Как математическую модель двусимвольной коррелируемой последовательности используем цепь Маркова.

Если предыдущее событие было  $s_2$ , то условные вероятности записываются в виде  $P(s_1/s_2), P(s_2/s_2)$ .

Обозначим вероятности появления событий  $s_1$  и  $s_2$  на  $k$ -м шаге  $P_1(k)$  и  $P_2(k)$ . Предположим, что заданы начальные вероятности  $P_1(0)$  и  $P_2(0)$ , причем

$$P_1(0) + P_2(0) = 1, P_1(k) + P_2(k) = 1,$$

а также известные условные вероятности перехода:

$$P(s_1/s_1), P(s_2/s_1), P(s_1/s_2), P(s_2/s_2).$$

Тогда выполняются рекуррентные соотношения как формулы полной вероятности

$$\begin{aligned} P_1(k) &= P_1(k-1)P(s_1/s_1) + P_2(k-1)P(s_1/s_2), \\ P_2(k) &= P_1(k-1)P(s_2/s_1) + P_2(k-1)P(s_2/s_2). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Для марковских дискретных случайных последовательностей характерным есть то, что после нескольких переходов вероятности появления событий практически становятся независимыми от начальных условий и, соответственно, от номера шага.

Покажем это на простых **примерах**. Предположим, что  $P_1(0) = 1; P_2(0) = 0; P(s_1/s_1) = 0,5; P(s_2/s_1) = 0,5; P(s_1/s_2) = 0,6; P(s_2/s_2) = 0,4$ . Результаты расчетов по формуле (2.62) приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

$K$	0	1	2	3	4	5
$P_1(k)$	1	0,5	0,55	0,545	0,5454	0,54545
$P_2(k)$	0	0,5	0,455	0,455	0,4545	0,45455

При измененных начальных условиях ( $P_1(0) = 0, P_2(0) = 1$ ) результаты приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

$K$	0	1	2	3	4	5
$P_1(k)$	0	0,6	0,54	0,546	0,5454	0,54546
$P_2(k)$	1	0,4	0,46	0,454	0,4546	0,45454

Из анализа данных табл. 2.2 и 2.3 следует, что независимо от начальных условий уже на  $s$ -м шаге устанавливаются значения  $P_1 = 0,5454$  и  $P_2 = 0,4546$ .

Поскольку при больших  $k$  вероятности не зависят от  $k$ , считая  $P(k) = P(k - 1)$ , из выражения (2.62) получаем формулы для оценки предельных значений вероятностей  $P_1$  и  $P_2$ :

$$P_1 = \frac{P(s_1/s_2)}{P(s_1/s_2) + P(s_2/s_1)} = P(s_1), \quad P_2 = \frac{P(s_2/s_1)}{P(s_1/s_2) + P(s_2/s_1)} = P(s_2). \quad (2.63)$$

Используя переходные вероятности, можно формировать модели двумерных сообщений с разными статистическими свойствами и исследовать влияние корреляции на количество информации источников сообщений.

Коэффициент корреляции между случайными событиями  $A$  и  $B$  определяется как соотношение

$$r = (P(AB) - P(A)P(B)) / \sqrt{P(A)[1 - P(A)]P(B)[1 - P(B)]} \quad (2.64)$$

Для марковских последовательностей  $P(s_1s_2) = P(s_1)P(s_2/s_1) = P(s_2)P(s_1/s_2)$ ,  $1 - P(s_1) = P(s_2)$ ,  $1 - P(s_2) = P(s_1)$ , а соответственно, для коэффициента корреляции получаем формулу

$$r = (P(s_1/s_2) - P(s_1))/P(s_1) = (P(s_2/s_1) - P(s_2))/P(s_2). \quad (2.65)$$

Выведем формулы для определения количества информации источника марковских сообщений. Если состоялось событие  $s_1$  или  $s_2$ , то условные математические ожидания  $i(s_1)$  и  $i(s_2)$  определим по формулам

$$\begin{aligned} i(s_1) &= P(s_1/s_1) i(s_1/s_1) + P(s_2/s_1) i(s_2/s_1), \\ i(s_2) &= P(s_1/s_2) i(s_1/s_2) + P(s_2/s_2) i(s_2/s_2). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Ожидаемое количество информации источника на один символ

$$i = P(s_1) i(s_1) + P(s_2) i(s_2). \quad (2.67)$$

Подставив формулу (2.66) в (2.67), получим

$$\begin{aligned} i &= P(s_1)P(s_1/s_1) i(s_1/s_1) + P(s_1)P(s_2/s_1) i(s_2/s_1) + \\ &+ P(s_2)P(s_1/s_2) i(s_1/s_2) + P(s_2)P(s_2/s_2) i(s_2/s_2). \end{aligned}$$

Учитывая то, что  $i(s_1/s_1) = -\log_2 P(s_1/s_1)$ ,  $i(s_2/s_1) = -\log_2 P(s_2/s_1)$ ,  $i(s_2/s_2) = -\log_2 P(s_2/s_2)$ , имеем

$$i = -\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 P(s_i s_j) \log_2 P(s_i/s_j). \quad (2.68)$$

Для марковских сигналов вероятность произведения двух событий определяется как

$$\begin{aligned} P(s_1 s_1) &= P(s_1)P(s_1/s_1) = P(s_1/s_1)P(s_1/s_2)/[P(s_1/s_2) + P(s_2/s_1)], \\ P(s_1 s_2) &= P(s_2 s_1) = P(s_1/s_2)P(s_2/s_1)/[P(s_1/s_2) + P(s_2/s_1)], \\ P(s_2 s_2) &= P(s_2)P(s_2/s_2) = P(s_2/s_2)P(s_2/s_1)/[P(s_1/s_2) + P(s_2/s_1)]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

**Пример.** Рассмотрим марковское сообщение. Предположим, что  $P(s_1/s_1) = 3/4$ ;  $P(s_2/s_1) = 1/4$ ;  $P(s_1/s_2) = 1/8$ ;  $P(s_2/s_2) = 7/8$ .

В таком сообщении  $P(s_1) = 1/3$ ;  $P(s_2) = 2/3$ . Если бы символы были независимые, то  $i = (1 \log_2 3)/3 + (2/3) \log_2 (3/2) = 0,91183$ .

Условная информация на символы  $s_1$  и  $s_2$ :

$$\begin{aligned} i(s_1) &= (3/4) \log_2 (3/4) + (1/4) \log_2 4 = 0,8113, \\ i(s_2) &= (1/8) \log_2 8 + (7/8) \log_2 (8/7) = 0,5428. \end{aligned}$$

Ожидаемая информация источника на один символ равна их среднему значению

$$i = i(s_1)/3 + 2i(s_2)/3 = 0,6323.$$

Как и ожидалось, полученная информация является меньшей, чем у источника сообщений с независимыми символами.

**Измерение информации при объединении нескольких источников сообщений.** Рассмотрим два источника сообщений с алфавитом символов  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , и  $u_1, u_2, \dots, u_m$  и объединенный источник с парами символов  $v_j u_j, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ . Известен многомерный закон распределения вероятностей  $P(v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_m) = P(|v|, |u|)$ , где  $|v| = |v_1, v_2, \dots, v_n|^T$  - вектор символов первого источника;  $|u| = |u_1, u_2, \dots, u_m|^T$  - вектор символов второго источника;  $T$  - знак транспонирования.

Законы распределения  $P(|v|) = P(v_1, v_2, \dots, v_n)$  и  $P(|u|) = P(u_1, u_2, \dots, u_m)$  получаем с объединенного многомерного закона распределения:

$$P(|v|) = \sum_{j=1}^m P(v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_m), \quad (2.70)$$

$$P(|u|) = \sum_{i=1}^n P(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_m).$$

Количество информации каждого из источников и объединенного источника определяем как:

$$i(|v|) = -\sum_{i=1}^n P(v_i) \log_2 P(v_i), \quad (2.71a)$$

$$i(|u|) = -\sum_{j=1}^m P(u_j) \log_2 P(u_j), \quad (2.71б)$$

$$i(|v|, |u|) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(v_i, u_j) \log_2 P(v_i, u_j) \quad (2.71в)$$

Если источники статистически независимы, то  $P(v_i, u_j) = P(v_i)P(u_j)$  и

$$\begin{aligned} i(|v|, |u|) &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(v_i)P(u_j) \log_2 [P(v_i)P(u_j)] = \\ &= -\sum_{i=1}^n P(v_i) \log_2 P(v_i) \sum_{j=1}^m P(u_j) - \sum_{j=1}^m P(u_j) \log_2 P(u_j) \sum_{i=1}^n P(v_i) \end{aligned}$$

Учитывая то, что  $\sum_{i=1}^n P(v_i) = 1$  и  $\sum_{j=1}^m P(u_j) = 1$ , получаем

$$i(|v|, |u|) = i(|v|) + i(|u|), \quad (2.72)$$

т.е. информация объединенного источника при независимых символах равняется сумме информации ис-



**Андрей Андреевич Марков (1856 - 1922),**

русский математик, представитель петербургской математической школы. Родился в Рязани. В 1884 г. защитил докторскую диссертацию, посвященную непрерывным дробям, в которой доказал и обобщил некоторые неравенства Чебышева, опубликованные раньше без доказательств. Маркову принадлежат также многочисленные работы из разнообразных разделов математического анализа. С конца 1890-х годов главным предметом исследований ученого стала теория вероятностей, ввел новый объект исследования - последовательности зависимых случайных величин, которые со временем получили название марковских цепей.



точников, которые входят в объединение.

Если источники сообщений статистически зависимые, то двумерный закон распределения записывается в виде

$$P(v_i, u_j) = P(v_i)P(u_j/v_i) = P(u_j)P(v_i/u_j).$$

Тогда формулу для вычисления количества информации объединенного источника (2.71в) можно преобразовать как

$$i(|v|, |u|) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(v_i)P(u_j/v_i) [\log_2 P(v_i) + \log_2 P(u_j/v_i)].$$

Учитывая, что  $\sum_{j=1}^m P(u_j/v_i) = 1$ , имеем

$$i(|v|, |u|) = -\sum_{i=1}^n P(v_i) \log_2 P(v_i) + \sum_{i=1}^n P(v_i) i(|u|/v_i),$$

где  $i(|u|, v_i) = -\sum_{j=1}^m P(u_j/v_i) \log_2 P(u_j/v_i)$  - условное количество информации второго источника, если имел место символ  $v_i$  первого источника. Очевидно, что  $\sum_{i=1}^n P(v_i) i(|u|/v_i) = i(|u|/|v|)$  - условное количество информации второго источника относительно первого. Итак,

$$i(|v||u|) = i(v) + i(|u|/|v|). \quad (2.73)$$

Можно показать также, что выполняется соотношение

$$i(|v||u|) = i(|v|) + i(|v|/|u|). \quad (2.74)$$

Поскольку  $P(v_i) < 1$ , это выполняется неравенство  $\sum_{i=1}^n P(v_i) i(|u|/v_i) < i(|u|)$ .

Итак, всегда имеем:  $i(|v|, |u|) < i(|v|) + i(u)$ , т.е. *количество информации объединенного источника меньше суммы информации исходных статистически зависимых источников сообщений.*

**Измерение информации источников непрерывных сообщений.** Интуитивно понятно, что многозначность непрерывных сигналов, которые используются для передачи информации, очень большая. Достаточно изменить значение сигнала в пределах одной точки, чтобы это был уже другой сигнал. Поделим диапазон изменения случайного сигнала  $X$  как непрерывной, случайной величины на конечное количество  $n$  малых интервалов  $\Delta X$  так, чтобы  $X_{i+1} = X_i + \Delta X$ . Считаем, что реализованы значения  $X_i$ , если  $X$  удовлетворяет неравенство

$$X_i - \Delta X/2 \leq X \leq X_i + \Delta X/2.$$

Вероятность, что это будет  $X_i$ : 
$$P(X_i) = \int_{X_i - 0,5\Delta X}^{X_i + 0,5\Delta X} W(X) dX \approx W(X_i) \Delta X,$$

где  $W(X)$  - закон распределения случайного сигнала.

Количество информации, которая содержится в выборке случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  с вероятностями появления  $P(X_1), P(X_2), \dots, P(X_n)$ , согласно формуле К. Шеннона имеет вид

$$I_1 = -n \sum_{i=1}^n P(X_i) \log_2 P(X_i) = -n \sum_{i=1}^n W(X_i) \Delta X \log_2 [W(X_i) \Delta X].$$

Считаем, что реализованы  $X_i$ , если  $X$  удовлетворяет неравенству  $X_i - \Delta X/2 \leq X \leq X_i + \Delta X/2$ .

Вероятность того, что это будет  $X_i$ , равна

$$P(X_i) = \int_{U_i - 0.5\Delta U}^{U_i + 0.5\Delta U} W(X) dX \approx W(X_i) \Delta X, \quad (2.75)$$

где  $W(X)$  - закон распределения случайного сигнала.

Количество информации, которая содержится в выборке случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  с вероятностями появления  $P(X_1), P(X_2), \dots, P(X_n)$ , согласно формуле К. Шеннона имеет вид

$I_1 = -n \sum_{i=1}^n P(X_i) \log_2 P(X_i) = -n \sum_{i=1}^n W(X_i) \Delta X \log_2 [W(X_i) \Delta X]$ . Количество информации, которое приходится в среднем на один символ, запишем в виде

$$i_1 = -\sum_{i=1}^n W(X_i) \log_2 [W(X_i) \Delta X] - \log_2 (\Delta X),$$

причем  $\sum_{i=1}^n W(X_i) \Delta X = 1$ .

Заменяв сумму интегралом, получим:

$$i_1 = -\int_{-\infty}^{\infty} W(X) \log_2 W(X) dX - \log_2 (\Delta X). \quad (2.76)$$

Первый член в этом выражении имеет конечное значение и зависит только от закона распределения сигнала, который несет информацию, второй зависит от выбора интервала квантования  $\Delta X$ . Если считать, что при сравнении количества информации различных сигналов интервал квантования для всех будет тот же, то для измерения информации можно воспользоваться формулой

$$i = -\int_{-\infty}^{\infty} W(X) \log_2 (W(X)) dX. \quad (2.77)$$

*Среднее количество информации на один отсчет равняется математическому ожиданию двоичного логарифма закона распределения для непрерывных сигналов.*

**Пример.** В каком источнике непрерывных сообщений содержится максимальное количество информации?

Рассмотрим два вида ограничений на сигналы:

- 1) сигналы имеют конечную мощность (дисперсию);
- 2) сигналы имеют ограниченную амплитуду ( $\pm A$ ).



**Жозеф Луи Лагранж (Joseph Louis Lagrange, 1736 - 1813),**

французский математик и механик. Автор классического трактата "Аналитическая механика", расширил основы статики и механики, установив общую формулу, известную также как принцип возможных перемещений. Формула конечных приростов и несколько других теорем названы его именем. Лагранж сделал важный вклад во много областей математики, включая вариационное исчисление, теорию дифференциальных уравнений, решение задач на отыскание максимумов и минимумов, теорию чисел (теорема Лагранжа), алгебру и теорию вероятностей.

Предположим, что случайный сигнал с нулевым математическим ожиданием (постоянная не несет информации) имеет конечную дисперсию. Тогда имеем

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} W(x) dx = 1. \quad (2.78)$$

Это означает, что на вид неизвестной функции  $W(x)$  накладываются ограничения вида (2.78). Необходимо определить, которая из функций  $W(x)$  максимизирует функционал

$$i = - \int_{-\infty}^{\infty} \ln[W(x)] W(x) dx. \quad (2.79)$$

Это задача вариационного исчисления с ограничениями (2.78). Методика ее решения известна. Необходимо сформировать функционал Лагранжа путем присоединения к функционалу (2.79) ограничений (2.78) с помощью множителей  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

$$L = - \int_{-\infty}^{\infty} \ln[W(x)] W(x) dx + \lambda_1 \left( D - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W(x) dx \right) + \lambda_2 \left( 1 - \int_{-\infty}^{\infty} W(x) dx \right).$$

Функционал Лагранжа в рассмотренном случае сводится к виду

$$L = (\lambda_2 + \lambda_1 D) - \int_{-\infty}^{\infty} [\lambda_2 + \lambda_1 x^2 + \ln W(x)] W(x) dx. \quad (2.80)$$

Условие максимума - равенство нулю первой вариации функционала (2.80):

$$\delta L = \int_{-\infty}^{\infty} [(\lambda_2 + \lambda_1 x^2 + \ln W(x)) \delta W(x) - W(x) \delta(\ln W(x))] dx = 0.$$

Поскольку вариацию  $\delta W(x)$  можно подать как  $W(x) \delta[\ln W(x)] = \delta W(x)$ , то условие экстремума запишется как уравнение относительно неизвестной функции  $W(x)$

$$\ln W(x) + \lambda_2 + \lambda_1 x^2 - 1 = 0. \quad (2.81)$$

Решив это уравнение, получим:

$$W(x) = \exp(-\lambda_1 x^2 - \lambda_2 + 1). \quad (2.82)$$

Для определения множителей Лагранжа используем ограничения (2.78). Первое ограничение дает возможность

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) dx = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda_2-1)} e^{-\lambda_1 x^2} dx.$$

Поскольку  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_1 x^2} dx = \sqrt{\pi/\lambda_1}$ , то связь между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$

имеет вид  $e^{-(\lambda_2-1)} = \sqrt{\lambda_1/\pi}$ . Второе ограничение запишется как интеграл

$$D = \sqrt{\lambda_1/\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\lambda_1 x^2} dx = 1/2\lambda_1.$$

Подставив в (2.80) значение для  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , получим:  $W(x) = e^{-x^2/2D} / \sqrt{2\pi D}$ , т.е. максимальное количество информации содержат непрерывные сигналы с нормальным (гауссовским) законом распределения вероятностей.

Вторая задача решается при одном ограничении

$$\int_{-a}^a W(x) dx = 1.$$

Функционал Лагранжа

$$L = - \int_{-a}^a [\ln W(x)] W(x) dx + \lambda_1 \left[ 1 - \int_{-a}^a W(x) dx \right],$$

а его первая вариация

$$\delta L = - \int_{-a}^a [\ln W(x) + \lambda_1 - 1] \delta W dx = 0.$$

Из уравнения  $\ln W(x) + \lambda_1 - 1 = 0$  с учетом ограничения получаем  $W(x) = e^{-(\lambda_1 - 1)} = 1/2a$ , т.е. среди ограниченных амплитудой сигналов максимальное количество информации содержат сигналы с равномерным законом распределения вероятностей.

## 2.6. Связь информации с характеристиками сигналов

*Источники информации* имеют физическую природу и различаются видом формируемых сообщений, энергетической активностью, вероятностными характеристиками и т.п.

Для анализа интересными являются не только характеристики определенных сообщений, а и потоки сообщений как специфический случайный процесс. В информационных системах информация с носителей разной физической природы (голос, изображение, символы на бумаге, ленте, вибрации и т.п.) преобразуется к универсальному виду и фиксируется на универсальных носителях.

В качестве универсального носителя информации используется электрический сигнал (или материалы, которые имеют электромагнитные свойства, дающие возможность просто снимать с них информацию в виде электрических сигналов).

*Электрические сигналы являются носителями информации*, а материалы - носители информации - выполняют функции ее хранения.

Как правило, первичные информационные сообщения - язык, музыка, изображение, значение параметров окружающей среды и т.д. - представляют собой функции времени  $X(t)$  или других аргументов  $X(x, y, z)$  неэлектрической природы (акустическое давление, температура, распределение яркости на некоторой плоскости и т.п.). С целью передачи информации к потребителю эти сообщения обычно превращаются в электрический сигнал, изменения которого во времени  $X(t)$  отображают переданную информацию. Такие сообщения называются *непрерывными*, или *аналоговыми*, сообщениями.



**Фридрих Вильгельм Бессель**  
(Friedrich Wilhelm Bessel,  
1784 - 1846),

немецкий астроном, геодезист, математик, иностранный почетный член Петербургской академии наук (1814). Создал теорию и методы учета инструментальных и личных ошибок в астрономических наблюдениях. Одним из первых он измерил звездный параллакс (1838). В геодезии известные его работы по определению длины секундного маятника. В математике исследовал функции, которые нашли широкое применение в физике, астрономии, технике. Позднее их стали называть его именем - функциями Бесселя.

Звуковая энергия человека, который говорит, в виде переменного давления согласно информационному сообщению  $c(t)$  влияет на микрофон, который содержит внутри угольный порошок. Из-за этого изменяется электрическое сопротивление микрофона, вследствие чего ток  $I(t)$  повторяет звуковые колебания функции времени  $c(t)$ . Такие преобразования могут осуществляться с использованием цепи переменного тока путем влияния на индуктивность, или емкость, колебательного контура, в результате чего параметры колебательного процесса превратят закономерности информационного процесса в электрический ток.

Если информационное сообщение является некоторой функцией  $c(t)$ , то электрический сигнал будет иметь вид  $X(t) = \mathcal{F}[c(t)]$  где  $\mathcal{F}[c(t)]$  - оператор преобразования, который должен повторять закон изменения информационного сообщения  $c(t)$  в изменении своих параметров, которыми на этом этапе преобразования являются мгновенное значение электрического тока или напряжения, фазы и т.п.

На практике добиваются практически абсолютного сходства функций информационного сообщения  $c(t)$  и функции электрического сигнала  $X(t)$  при любой сложности их отображения (или с точностью до масштабного множителя). Поэтому их математические модели должны быть одинаковыми.

С целью упрощения анализа сигналов, которые отображают информационное сообщение  $c(t)$  произвольной сложности, подают в виде суммы элементарных колебаний  $\eta(t)$ , которые называются *базисными функциями*:

$$c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \eta_k(t), \quad (2.83)$$

где  $C_k$  - коэффициенты.

Как базисные могут использоваться известные системы функций Фурье, Бесселя, Лежандра, Чебышева, Уолша и др.

Классической суммой в этом понимании есть ряд Фурье, в котором базисными есть гармонические колебания, а также базисные функции, имеющие вид  $\sin x/x$ , расписанные В. А. Котельниковым.

*Преобразование Фурье дает возможность перевести информационное сообщение произвольной формы во времени в совокупность элементарных гармонических колебаний*

*Анализ преобразований сигнала сводится к анализу изменений параметров гармонических колебаний амплитуды, фазы и частоты (элементарных «кирпичиков» сложного информационного объекта) как базисных функций и их весовых коэффициентов.*

Преобразование Фурье переводит анализ сообщений и сигналов в частотную область. Для исследования сигналов во временной области применяется теорема В. А. Котельникова (теорема отсчетов).

*Если функция  $X(t)$  не содержит частот выше  $F_m$ , то она полностью определяется последовательностью своих значений в моменты времени, которые отличаются друг от друга на  $\Delta t = 1/(2F_m)$ .*

Согласно теореме В. А. Котельникова можно подавать сигналы как функции от любого параметра, не только от времени.

*Таким образом, математические модели сообщений и видеосигналов имеют одинаковую функциональную структуру и параметры и пригодны для анализа информационных сообщений.*

Рассмотренные видеосигналы  $X(t)$  не являются основными носителями информации, поскольку они переносят ее по внутренним цепям.

Носителями информации на далекие расстояния есть совокупность электрических или электромагнитных гармонических колебаний (в том числе оптического диапазона, где генераторами являются лазеры). Частоту основного из таких колебаний называют несущей, а само колебание - несущим (таким, что несет информацию).

Чтобы данное колебание было несущим, необходимо выполнить два основных условия относительно функций параметров такого сигнала:

1) среда распространения сигналов должна хорошо пропускать колебания с несущей частотой  $\omega_n$ ;

2) частота несущего колебания должна быть намного большей, чем верхняя частота  $\Omega_m$  в спектре переданного сообщения:  $\omega_n \gg \Omega_m, \Omega_m = 2\pi F_m -$



**Жан Батист Жозеф Фурье**  
(Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768 - 1830),

французский математик и физик. Основная та Фурье - "Аналитическая теория теплоты" (1822), где изложена математическая теория теплопроводности. Эта теория стала основанием современных методов математической физики, которые касаются интегрирования уравнений в частных производных при заданных предельных условиях. Метод Фурье, который заключается в представлении функций в виде тригонометрических рядов (рядов Фурье), нашел широкое применение в разных разделах физики и математики. Кроме этого, Фурье построил первую математическую теорию теплового излучения.



**Адриан Мари Лежандр (Adrien-Marie Legendre, 1752 - 1833),**

французский математик член Парижской академии наук (1783). Лежандр обосновал и развил теорию геодезических измерений и первым открыл и применил в вычислениях метод наименьших квадратов. В области математического анализа ввел так называемые многочлены Лежандра, преобразование Лежандра, а также исследовал интегралы Эйлера I и II рода. Лежандр доказал сведение эллиптических интегралов к каноническим формам, нашел соответствующие разложения в ряды, составил таблицы их значений.

верхняя частота в спектре сообщения.

Второе условие вытекает из требования, чтобы за один период несущего колебания информационный параметр почти не изменился, иначе возникнут искажения.

Несущий сигнал можно представить в виде колебания

$$S(t) = A(t) \cos[\omega_c t + \theta(t)] = A(t) \cos \psi(t), \quad (2.84)$$

где амплитуда  $A(t)$  или фаза  $\theta(t)$  изменяется по закону переданного информационного сообщения.

Тем не менее в рассмотренных только что случаях не учитываются корреляционные связи между сообщениями, которые существуют в языках общения людей. Корреляция (взаимосвязь) существует не только между соседними сообщениями, она охватывает параметры этих сообщений, которые приводят к информационной чрезмерности, оцениваемой коэффициентом  $R$ .

Исследования показали, что в украинском языке при учете взаимосвязи только между соседними сообщениями (буквами алфавита)  $H_1(x) = 4,05$  бит/сообщение. При  $v = 2$  значение  $H_2(x) = 3,52$  бит/сообщение. При  $v = 3$  значение  $H_3(x) = 2,97$  бит/сообщение. А при независимых сообщениях  $H_0(x) = 5$  бит/сообщение. Поэтому  $R_1(x) \approx 19\%$ ;  $R_2(x) \approx 30\%$ ;  $R_3(x) \approx 41\%$ . Наличие естественной чрезмерности языка повышает помехоустойчивость сообщений при их передаче, но неэкономно тратит каналные ресурсы, объемы машинной памяти, время на анализ при обработке и т.п.

Исследование источников информации с корреляционными сообщениями удобно проводить с использованием аппарата цепей Маркова.

Марковские источники характеризуются состоянием и правилами перехода из одного состояния в другое. Для них характерно, что вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от ее состояния в данный момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние, т.е. не зависит от предыстории.

### *Основные выводы*

---

Существуют три подхода к анализу информации: синтаксический, семантический и прагматический.

На синтаксическом уровне учитываются тип носителя и способ представления информации, скорость передачи и обработки, размеры кодов представленной информации, надежность и точность преобразования этих кодов.

Семантический аспект допускает учет содержания информации.

Для информационного взаимодействия чаще всего используется часть информации, которая содержит определенный (из тех или других соображений допустимый) объем данных. Такие части данных называют информационными объектами или сообщениями.

Передаваемая информация является характеристикой не сообщения, а соотношением между источником информации (объектом исследования), сообщением и его потребителем.

Информационные объекты - предметы, процессы, явления материальной или нематериальной природы, которые рассматриваются с точки зрения их информационных свойств.

Источник информации или сообщение - это физический объект, система или явление, которое формирует переданное сообщение. Само сообщение - это значение или изменение некоторой физической величины, которая отражает состояние информационного объекта (системы или явления).

Пути и процессы, которые обеспечивают передачу сообщений от источника информации к ее потребителю, называются информационно-коммуникационными системами.

Степень изменения неопределенности ситуации положено в основу количественной меры информации. При введении количественной меры информации принято не учитывать содержание сообщений (семантику), а ограничиваться только формальными признаками, важными с точки зрения передачи сообщений по каналам связи.

Часто используют простой способ определения количества информации, который можно назвать объемным. Он базируется на подсчете количества символов в сообщении, т.е. связан с его длиной и не учитывает содержание.

В теории информации под количеством информации понимают меру уменьшения неопределенности знания. Нахождение такой меры требует оценивания и учета количества переданной информации. В теории информации количеством информации называют числовую характеристику сигнала, которая не зависит от его формы и содержания и характеризует неопределенность, которая исчезает после получения сообщения в виде данного сигнала.

Для количественного оценивания информации довольно часто применяют синтаксическую, семантическую и прагматическую меры информации.

Количество информации на синтаксическом уровне определяется через понятие энтропии системы.



Энтропия определяет меру неопределенности всего множества сообщений на входе системы и вычисляется как среднее количество собственной информации во всех сообщениях.

Энтропия источника и количество информации тем больше, чем больше размер алфавита источника.

Энтропия источника зависит от статистических свойств сообщений. Энтропия максимальная, если сообщения источника равновероятные и статистически независимые.

Энтропия источника, который вырабатывает равновероятные сообщения, всегда меньше максимально допустимой.

При определении энтропии и количества информации в сообщениях, элементы которых статистически связаны, нельзя ограничиваться только безусловными вероятностями - необходимо учитывать также условные вероятности появления отдельных сообщений.

Общая энтропия двух сообщений равняется сумме безусловной энтропии одного из сообщений и условной энтропии второго.

При наличии связи между элементарными сообщениями энтропия источника снижается.

Универсальный носитель информации - электрический сигнал (или материалы, которые имеют электромагнитные свойства и дают возможность просто снимать с них информацию в виде электрических сигналов).

С целью упрощения анализа информации, заложенной в параметрах сообщений, сигналы, которые отображают информационное сообщение произвольной сложности, подают в виде суммы элементарных колебаний (базисных функций). Как базисные функции можно использовать известные системные функции Фурье, Бесселя, Лежандра, Чебышева, Уолша и др.

Преобразование Фурье переводит анализ сообщений и сигналов в частотную область. Для исследования сигналов в часовой области применяется теорема В. А. Котельникова (теорема отсчетов).

---

### ***Вопросы для самоконтроля***

---

- 1. С какими функциями информации чаще всего мы сталкиваемся?*
- 2. Насколько актуальны в исследовании информации ее динамические свойства?*
- 3. В чем заключается отличие в понятиях «данные» и «информация»?*
- 4. Приведите примеры сложных информационных объектов.*
- 5. Запишите формулы для вычисления количества информации, которое содержит сообщение.*
- 6. Раскройте свойство симметрии для количества информации.*
- 7. Раскройте свойство аддитивности для количества информации.*
- 8. Запишите формулу среднего количества информации в сообщении.*

9. *Какие меры информации используют для ее количественной оценки?*
10. *Назовите единицы измерения информации.*
11. *Приведите классификацию мер информации и их свойств.*
12. *Дайте определение энтропии.*
13. *Выведите формулу для определения общей энтропии двух источников  $X$  и  $Y$ .*
14. *Назовите основные свойства энтропии сложных сообщений.*
15. *Как изменяется энтропия при наличии статистических связей между элементарными сообщениями?*
16. *Какие параметры сигнала могут быть функционально зависимыми от информационного сообщения?*

---

### ***Conclusions***

---

There are three approaches to information analysis: syntactic, semantic and pragmatic. At the syntactic level carrier type and presentation medium, transmission and processing speed, code sizes of provided information, reliability and accuracy of conversion of these codes, etc are taken into account. Semantic aspect allows information content accounting.

To ensure information interaction, the part of information that contains specific (or permissible) data volume is most commonly used. Such data parts are called information objects or messages.

Information is not a message characteristic, but a ratio between information source (object of study), message and its user.

Information objects - subjects, processes, phenomena of material or immaterial nature that are viewed in terms of their information properties.

The source of information or message - is a physical object, a system or phenomenon that generates transmitted message. Message is a value or change of a physical quantity that reflects state of information object (system or phenomenon).

Ways and processes that ensure messages transmission from source to user are called information- communication systems.

The degree of situation uncertainty changes forms the basis of quantitative measure of information. When introducing a quantitative measure of information only formal attributes that are important in terms of messages transmission via communication channels should be taken into account, not message content (semantics).

Simple method to determine quantity of information is often used that could be called volumetric. It is based on counting the number of characters in the message, i.e. associated with its length and does not consider content.

In information theory quantity of information means a measure of reducing knowledge uncertainty. Finding such a measure requires estimating and calculating the quantity of information transmitted.

In information theory, the quantity of information is a numerical characteristic of signal that does not depend on its form and content and characterizes uncertainty that disappears after receiving a message in form of a given signal.

Syntactic, semantic and pragmatic information measures are often used for quantitative evaluation of information.

The quantity of information on the syntactical level is defined by the concept of system entropy.

Entropy defines a measure of uncertainty of all the multiple messages at system input and is calculated as an average number of its own information in all messages.

The larger the size of the source alphabet, the greater the source entropy and quantity of information.

Source entropy depends on statistical properties of messages. Entropy is maximal, if source messages are equally probable and statistically independent.

Source entropy that generates equally probable messages is always less than the maximum allowable.

When determining entropy and information quantity in messages, which elements are statistically related, we should not be limited by unconditional probabilities – we should also consider conditional probabilities of separate messages emerging.

The total entropy of two messages is the sum of unconditional entropy of one message and conditional entropy of the second.

When there is a link between elementary messages, source entropy decreases.

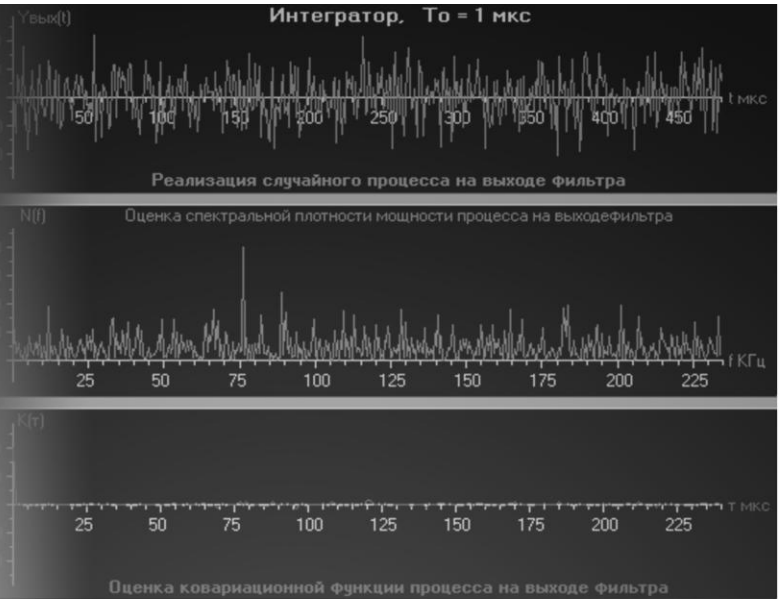
Universal information medium is electrical signal (or materials that have electromagnetic properties and allow withdrawing of information in form of electric signals).

In order to simplify analysis of information embedded in the message parameters, the signals that represent information message of arbitrary complexity are presented as the sum of elementary fluctuations (basic functions). Well known system functions such as Fourier, Bessel, Legendre, Chebyshev, Walsh etc could be used as basic functions.

Fourier transformation carries analysis of messages and signals in frequency domain. To study signals in frequency domain Kotelnikov theorem (sampling theorem) is used.

*Ключевые слова*

информационное сообщение	information message
источник информации	information source
количество информации	amount of information
мера информации	measure information



## СИГНАЛЫ, ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

3

- 3.1. Виды сигналов и их математические модели
- 3.2. Случайные сигналы и помехи
- 3.3. Числовые характеристики сигналов и помех
- 3.4. Математические модели сигналов с ограниченным спектром
- 3.5. Дискретные сигналы

### 3.1. Виды сигналов и их математические модели

Согласно с общепринятой терминологией *информационным сигналом (или сигналом)* называют процесс, который характеризует изменение во времени и пространстве физического состояния объекта и используется для отображения, регистрации, передачи, приема и обработки сообщений.

Информационные сигналы могут иметь разную физическую природу. Широко известны электрические сигналы (ток или напряжение), конкретную реализацию которых можно наблюдать на экране осциллографа или на других устройствах отображения сигналов; акустические сигналы, воспринимаемые органами слуха, и т.п.

Знание математических моделей сигналов дает возможность сравнивать их между собой, устанавливать тождественность и разногласия, а в конечном итоге - классифицировать.

Рассмотрим ряд критериев (признаков) классификации сигналов:

**Критерий пространственно-временного представления сигналов.** Любые сигналы существуют в пространстве и во времени. При этом как в пространстве (по величине), так и во времени сигналы могут иметь или непрерывные, или дискретные значения.

Если в качестве классификационного признака взять *характер изменения сигнала по величине и во времени*, то возможны такие четыре класса сигналов:

- сигналы произвольные по величине и непрерывные во времени;
- сигналы произвольные по величине и дискретные во времени;
- сигналы квантованные по величине и непрерывные во времени;
- сигналы квантованные по величине и дискретные во времени.

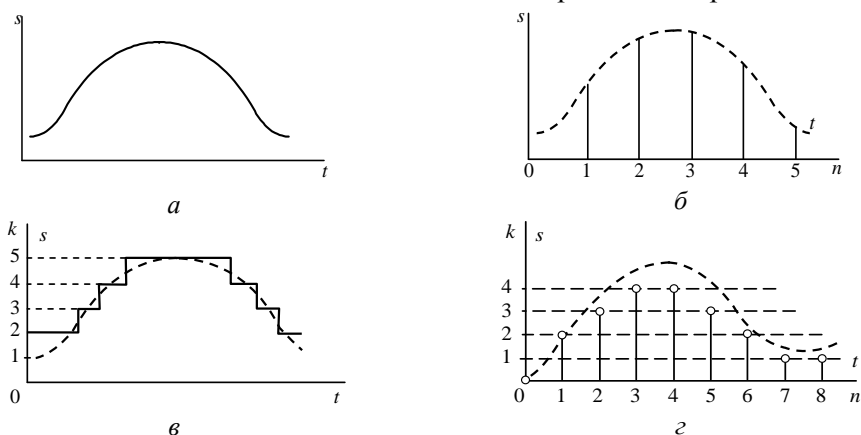


Рис. 3.1. Основные пространственно-временные модели сигналов

Сигналы первого класса (рис. 3.1, а) называют *аналоговыми*, или *непрерывными*. Общепринятыми являются такие обозначения математиче-

ских моделей этих сигналов:  $s(t), x(t), u(t), \dots$ .

Сигналы второго класса (рис. 3.1, б) называют *дискретными*, или *дискретизированными*. Термин «дискретный» в этом случае характеризует не сам сигнал, а способ представления его во временной области. Математическую модель дискретного сигнала в общем случае обозначают как

$$s(t_n), x(t_n), u(t_n), n = 0, 1, \dots$$

Временной интервал  $T_n = t_{n+1} - t_n, n = 0, 1, \dots$  называют  $n$ -м шагом временной дискретизации. Если шаг временной дискретизации  $T_n$  не зависит от  $n$ , т. е.  $T_n = T, n = 0, 1, \dots$ , то это значит, что речь идет об эквидистантной во времени дискретизации сигнала. Интервал  $T$  называют *периодом дискретизации*. Обозначим *математическую модель дискретного сигнала* как

$$s(nT), x(nT), u(nT), n = 0, 1, \dots,$$

или, отбрасывая для упрощения  $T$ , в виде  $s(n), x(n), u(n), n = 0, 1, \dots$ .

Если нет предостережений относительно другого способа часовой дискретизации, то под дискретными сигналами понимают последнюю форму их математических моделей.

Сигналы третьего класса (рис. 3.1, в) называют *квантованными*. Для этого класса сигналов осуществляется дискретизация по уровню, т. е. *квантованный сигнал может приобретать только дискретные значения*. Математическую модель квантованного сигнала можно обозначить как  $\hat{s}(t)$ , при этом время  $t$  непрерывно (в общем случае в интервале от минус бесконечности к плюс бесконечности), а величина  $\hat{s}$  может приобретать одно из множества значений  $s_k$ , т. е.  $\hat{s} \in [s_0, s_1, \dots, s_{m-1}]$ . Шаг квантования сигнала по уровню, как правило, выбирается постоянным.

Сигналы четвертого класса (рис. 3.1, г) называют *цифровыми*. Такие сигналы образуются из аналоговых сигналов в результате их дискретизации во времени и квантования по величине.

**Критерий предвиденья сигналов.** Если в качестве классификационного признака взять *предвиденье мгновенного значения сигнала в любой момент времени*, то всю совокупность сигналов можно разделить на такие два класса: *детерминированные сигналы и случайные сигналы*.

*Детерминированными называются сигналы, значения которых могут быть вычислены в любой момент времени, т. е. они предвидятся с вероятностью, которая равняется единице*. Простым примером математической модели детерминированного сигнала может быть гармоническое колебание

$$u(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3.1)$$

где амплитуда  $A$ , угловая частота  $\omega_0$  и начальная фаза  $\varphi_0$  колебаний заданы.

*Случайными называются сигналы, значение которых в любой момент времени непредсказуемы, т. е. в заданный момент времени  $t$  их невозможно*

определить с вероятностью, которая равняется единице.

Примерами случайных сигналов могут быть акустические колебания, воспроизводимые акустической аппаратурой; электромагнитные помехи, создаваемые атмосферными явлениями, и т.п.

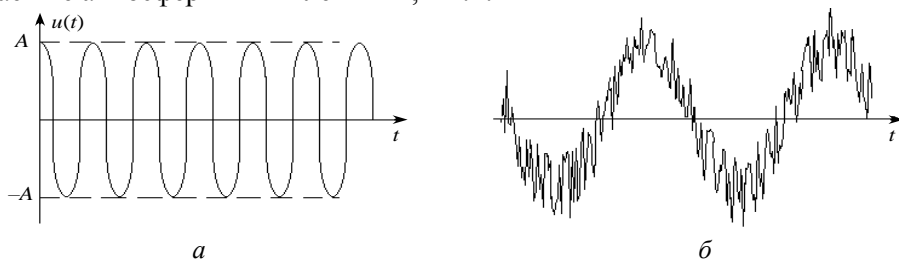


Рис. 3.2. Осциллограммы типичных сигналов:  
 а - детерминированный; б - случайный

Все сигналы, несущие информацию, являются случайными, поскольку детерминированный (полностью известный) сигнал информации не содержит. Он может быть полностью воспроизведен в месте принятия без передачи по каналу связи.

Между детерминированными и случайными сигналами нет непреодолимой границы. В условиях, когда уровень помех значительно меньше уровня полезного сигнала с известной формой, более простая детерминированная модель оказывается вполне адекватной поставленному заданию.

**Критерий области существования сигналов.** Если за классификационный признак взять *длину часового интервала*, в пределах которого существует сигнал, то можно выделить такие классы сигналов: *бесконечные во времени сигналы* и *импульсные сигналы*, т.е. сигналы, которые существуют в пределах конечного интервала времени.

Общая форма записи бесконечных во времени сигналов  $s(t)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ , а импульсных сигналов  $s(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , где  $a$  и  $b$  границы временного интервала, в котором существует сигнал.

В электро- и радиотехнике широко используется понятие видеоимпульсов (рис. 3.3, а) и радиоимпульсов (рис. 3.3, б). Их характерные особенности легко установить по временным диаграммам. Отличие между этими двумя основными импульсными сигналами заключается в следующем. Если  $A(t)$  видеоимпульс, то соответствующий ему радиоимпульс

$$u_p(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3.2)$$

причем сигнал  $A(t)$  называется *огibaющей* радиоимпульса  $u_p(t)$ , а функция  $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  его *высокочастотным заполнением*. Из выражений (3.1) и (3.2) видно, что математическую модель радиоимпульса  $u_p(t)$  можно получить из модели гармонического колебания  $u_p(t)$ , заданного формулой (3.1),

если выполнить замену амплитуды  $A$  (постоянной величины) на функцию времени  $A(t)$ , которую описывает видеоимпульс.

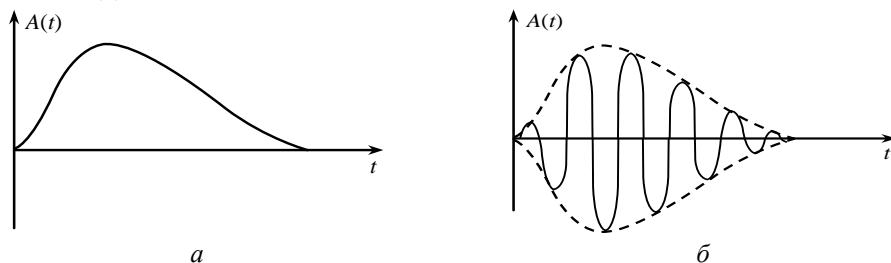


Рис. 3.3. Импульсные сигналы

**Критерий размерности сигналов.** Допустим, что наблюдается сигнал в виде напряжения  $u_p(t)$  на зажимах любого элемента электрической цепи или тока  $i(t)$ , протекающего в заданной ветке цепи. Такой сигнал  $u_p(t)$  или  $i(t)$ , описываемый одной функцией времени, называют *одномерным сигналом*. *Многомерные сигналы* вида  $\vec{V}(t) = \{v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)\}$  состоят из некоторого множества одномерных сигналов.

Целое число  $N$  называют *размерностью* сигнала. Примером многомерного сигнала является система напряжений на зажимах многополюсника.

**Критерий динамики сигналов.** По характеру изменения во времени различают *статические* и *динамические сигналы*. В *статической модели сигнала* нет временного параметра. Такие сигналы используются прежде всего для хранения информации в виде цифровых кодов, например в ячейках памяти цифровых вычислительных машин, в программируемых логических матрицах и т.п. *Динамические сигналы* зависят от времени. Их математические модели содержат временной аргумент.

**Критерий вещественности сигналов.** Временные функции, с помощью которых задаются модели сигналов, могут приобретать как вещественные, так и комплексные значения. Выбор той или другой модели сигнала предопределяется лишь простотой математического анализа. За так называемым *критерием вещественности* все сигналы можно разделить на два класса: *вещественные* и *комплексные сигналы*.

Все рассмотренные ранее модели сигналов принадлежат к классу вещественных. Математическую модель комплексных сигналов можно подать в общем виде

$$\dot{z}(t) = x(t) + jy(t), \quad (3.3)$$

где  $x(t)$  и  $y(t)$  - действительные сигналы;  $j = \sqrt{-1}$  - мнимая единица.

Частным случаем модели (3.3) является так называемый комплексно-экспоненциальный сигнал  $\dot{x}(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ , применение которого продуктивно при решении задач спектрального анализа.



Вся совокупность рассмотренных видов сигналов и их классификационных признаков (критериев) сведена в таблицу

Классификационные признаки сигналов	Типы сигналов
Характер изменения по величине и во времени	Аналоговые
	Дискретные
	Квантованные
	Цифровые
Предвидение мгновенных значений	Детерминированные
	Случайные
Длина интервала существования	Импульсные
	Бесконечные
Размерность	Одномерные
	Многомерные
Динамичность	Статические
	Динамические
Действительность	Действительные
	Комплексные
Повторяемость	Периодические
	Одиночные

**Критерий повторяемости сигналов.** *Периодичность* также может быть классификационным признаком сигналов. По этому критерию различают два основных класса сигналов: *периодические* и *апериодические (одиночные)*.

Общая форма математической модели периодического сигнала имеет вид  $x(t) = x(t + nT)$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ , где  $T$  - период сигнала. Некоторые периодические сигналы изображены на рис. 3.4.



Рис. 3.4. Примеры периодических сигналов: *a* - прямоугольные; *б* - срезанные косинусные

Апериодический (импульсный, или одиночный) сигнал  $x(t)$  является частным случаем периодического сигнала и получается из него, когда период следования импульсов  $T$  устремляется к бесконечности:  $x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t + nT)$

Рассмотрим математические модели простейших типовых сигналов.

**Гармонические сигналы.** Гармонические сигналы называют еще тригонометрическими сигналами. Математическая модель таких сигналов определяется формулой (3.1), а типичная осциллограмма изображена на рис. 3.2, *a*.

**Комплексно-экспоненциальные сигналы.** Математическая модель комплексно-экспоненциальных сигналов имеет вид

$$\dot{z}(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \varphi_0)}. \quad (3.4)$$

Воспользовавшись формулой Эйлера, представим модель (3.4) следующим образом

$$\dot{z}(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + jA \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (3.5)$$

Слагаемые в правой части уравнения (3.5) - соответственно вещественная и мнимая составляющие комплексно-экспоненциального сигнала (2.4).

Представим выражение (3.5) в несколько иной форме:  $\dot{z}(t) = x(t) + jy(t)$ , где  $x(t)$  и  $y(t)$  - действительные сигналы.

На рис. 3.5 изображена структурная схема устройства физического моделирования пары действительных сигналов  $x(t)$  и  $y(t)$ , которые еще называются *квадратурными сигналами*.

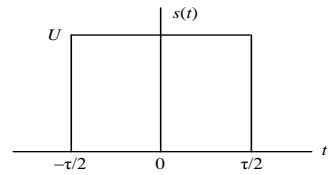
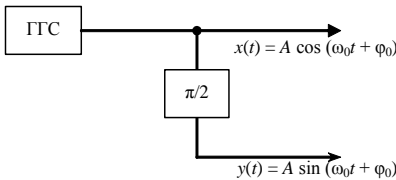


Рис. 3.5. Схема формирования квадратурных сигналов: ГГС - генератор гармонических сигналов;  $\pi/2$  - фазовращатель  
Рис. 3.6. Прямоугольный видеоимпульс

Комплексность сигнала  $\dot{z}(t)$ , составленного из вещественных сигналов  $x(t)$  и  $y(t)$ , можно осуществить при программной или аппаратурной реализации соответствующих алгоритмов преобразования сигнала  $\dot{z}(t)$ .

**Прямоугольные видеоимпульсы.** Математическая модель одиночного прямоугольного видеоимпульса, симметрично расположенного относительно начала отсчета времени (рис. 3.6), задается соотношением

$$s(t) = \begin{cases} U, & t \in [-\tau/2, \tau/2], \\ 0, & t \notin [-\tau/2, \tau/2], \end{cases}$$

где  $U$  - амплитуда;  $\tau$  - длительность прямоугольного видеоимпульса.

Математические модели смещенных во времени прямоугольных видеоимпульсов можно записать в виде систем уравнений:

$$s(t) = \begin{cases} U, & t \in [t_0 - \tau/2, t_0 + \tau/2] \\ 0, & t \notin [\cdot] \end{cases} \quad \text{- для задержанного сигнала;}$$

$$s(t) = \begin{cases} U, & t \in [-t_0 - \tau/2, -t_0 + \tau/2] \\ 0, & t \notin [\cdot] \end{cases} \quad \text{- для опережающего сигнала.}$$

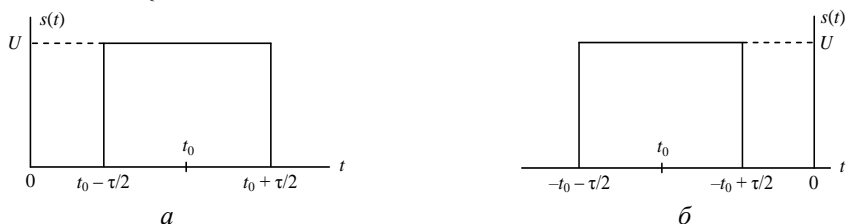


Рис. 3.7. Смещенные по времени прямоугольные видеоимпульсы

В общем виде запись  $s(t - t_0)$  относится к модели задержанного сигнала, а  $s(t + t_0)$  - к модели опережающего сигнала, причем  $t_0$  означает интервал временного смещения сигнала.

**Треугольные видеоимпульсы.** Математическая модель одиночного треугольного видеоимпульса, симметрично расположенного относительно начала отсчета времени (рис. 3.8), задается системой равенств:

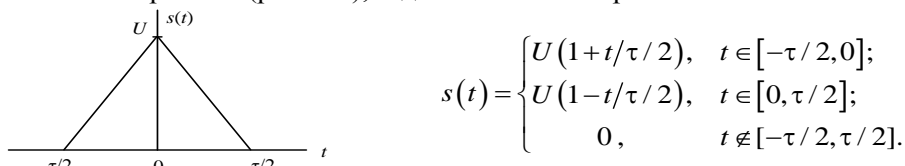


Рис. 3.8. Треугольный видеоимпульс

Треугольный видеоимпульс в общем случае также может быть смещенным относительно начала отсчета времени (рис. 3.9).

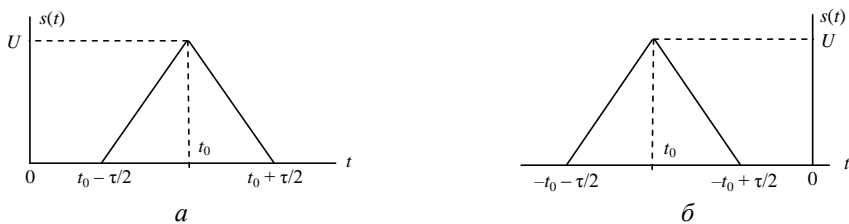


Рис. 3.9. Смещенные во времени треугольные видеоимпульсы

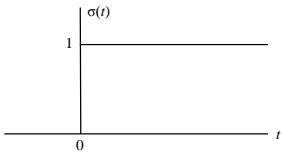
Математическая модель треугольного сигнала, задержанного на промежуток времени  $t_0$  (рис. 3.9, а), имеет вид

$$s(t - t_0) = \begin{cases} U(1+(t-t_0)/\tau/2), & t \in [t_0 - \tau/2, t_0]; \\ U(1-(t-t_0)/\tau/2), & t \in [t_0, t_0 + \tau/2]; \\ 0, & t \notin [t_0 - \tau/2, t_0 + \tau/2]. \end{cases}$$

Для опережающего треугольного видеоимпульса (рис. 3.9, б)

$$s(t+t_0) = \begin{cases} U(1+(t+t_0)/\tau/2), & t \in [-t_0 - \tau/2, -t_0]; \\ U(1-(t+t_0)/\tau/2), & t \in [-t_0, -t_0 + \tau/2]; \\ 0, & t \notin [-t_0 - \tau/2, -t_0 + \tau/2]. \end{cases}$$

**Ступенчатые сигналы.** Ступенчатые сигналы (рис. 3.10) еще называют функциями включения, сигма-функциями или функциями Хевисайда.



Математическая модель ступенчатого сигнала аналитически описывается системой равенств

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Рис. 3.10. Ступенчатый сигнал

В общем случае ступенчатая функция может быть смещена относительно начала отсчета времени (рис. 3.11) на величину  $t_0$  (задержки или опережения).

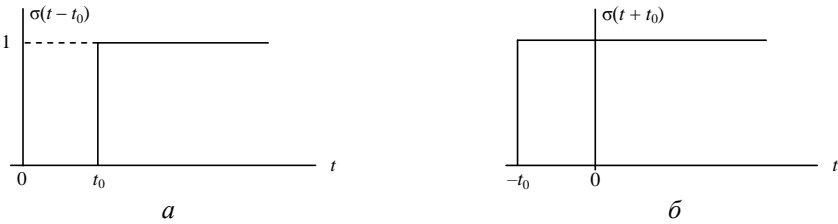


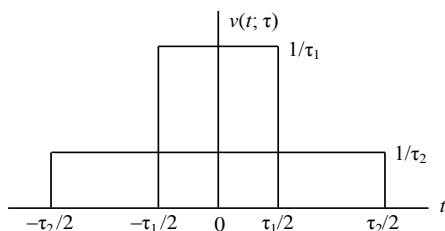
Рис. 3.11. Смещенные ступенчатые сигналы: а – задержанный; б – опережающий

Математическая модель ступенчатого сигнала, задержанного на промежуток времени  $t_0$ , имеет вид  $\sigma(t-t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq t_0; \\ 0, & t < t_0. \end{cases}$

Математическая модель опережающей на промежуток времени  $t_0$  ступенчатой функции определяется системой  $\sigma(t+t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq -t_0; \\ 0, & t < -t_0. \end{cases}$

Графики, приведенные на рис. 3.11, отображают характер сдвига задержанного и опережающего сигналов относительно начала отсчета времени.

**Дельта-функция.** Рассмотрим импульсный сигнал  $v(t;\tau)$  прямоугольной формы, основа которого равняется  $\tau$ , а высота  $h$  - величина, обратная  $\tau$ :  $h=1/\tau$ . Очевидно, что при любом  $\tau$  площадь  $\Pi_v$ , ограниченная сигналом  $v(t;\tau)$ , равняется единице:  $\Pi_v = \tau h = 1$ . Графики сигналов  $v(t;\tau)$ , симметрично размещенных относительно начала отсчета времени, для двух значений  $\tau$  изображены на рис. 3.12.


 Рис. 3.12. Изображение функций  $v(t; \tau)$ 

Этот импульс характерен тем, что при любом выборе параметра  $\tau$  его площадь равняется единице

$$\Pi_v = \int_{-\infty}^{\infty} v dt \equiv 1. \quad (3.7)$$

Пусть теперь величина  $\tau$  стремится к нулю. Импульс, сокращаясь по длительности, сохраняет свою площадь, поэтому его высота должна неограниченно возрастать. Предел такой функции при  $\tau \rightarrow 0$  называется *дельта-функцией*, или *функцией Дирака*:

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} v(t; \tau). \quad (3.8)$$

Дельта-функция равняется нулю везде, за исключением точки  $t=0$ , в которой она приобретает бесконечное значение, т.е.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Относительно дельта-функции, заданной выражением (3.9), говорят, что она сосредоточена в точке  $t=0$ . Однако, как следует из соотношений (3.7) и

$$(3.8), \text{ площадь, ограниченная дельта-функцией, конечна: } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3.10)$$

Выражение (3.10) определяет *условие нормирования дельта-функции*. Для сокращения вместо дельта-функции записывают иногда  $\delta$ -функция. Также как и ступенчатая, дельта-функция может быть смещена на некоторый промежуток времени  $t_0$  (рис. 3.13).

*Смещенную справа относительно начала отсчета времени дельта-функцию* называют *задержанной дельта-функцией*. Ее модель записывают системой равенств

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0; \\ 0, & t \neq t_0. \end{cases}$$

*Смещенную дельта-функцию влево относительно начала отсчета времени* называют *опережающей дельта-функцией*. Ее модель такова:

$$\delta(t + t_0) = \begin{cases} \infty, & t = -t_0; \\ 0, & t \neq -t_0. \end{cases}$$

Между дельта-функцией и ступенчатой функцией существует взаимно однозначное соответствие.

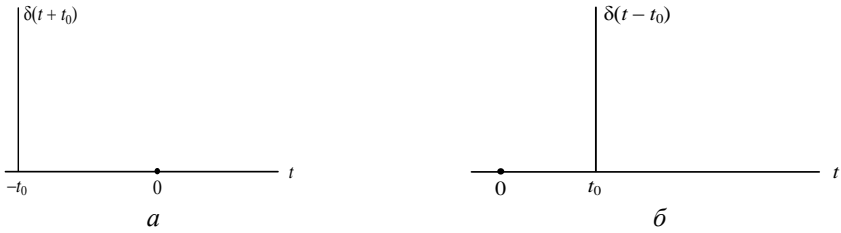


Рис. 3.13. Изображения дельта-функций:  
*a* - задержанная; *б* - опережающая

Это соответствие можно легко установить с помощью вспомогательной функции, *математическая* модель которой задается системой равенств

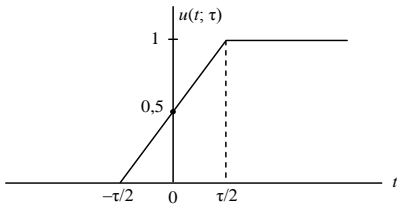


Рис. 3.14. Функция  $u(t; \tau)$

$$u(t; \tau) = \begin{cases} 0, & t < -\tau/2; \\ t/\tau + 1/2, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2; \\ 1, & t > \tau/2. \end{cases} \quad (3.11)$$

График этой функции достаточно простой (рис. 3.14). Из (3.11) и рис. 3.14 непосредственно вытекает, что, во-первых, при  $\tau \rightarrow 0$  функция  $u(t; \tau)$  переходит в ступенчатую

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} u(t; \tau) = \sigma(t), \quad (3.12)$$

и, во-вторых, производная по времени от функции  $u(t; \tau)$  совпадает с функцией  $v(t; \tau)$ , заданной формулой (3.11), т.е.  $u'(t; \tau) = v(t; \tau)$ , а при  $\tau \rightarrow 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} u'(t; \tau) = \delta(t). \quad (3.13)$$

Из предельных соотношений (3.12) и (3.13) непосредственно следует, что дельта-функция есть производная от ступенчатой функции  $\delta(t) = \sigma'(t)$ .

В равной степени правильно и обратное соотношение: *ступенчатая функция* есть *интеграл от дельта-функции*  $\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$ .

Если некоторую непрерывную функцию  $x(t)$  умножить на дельта-функцию  $\delta(t - t_0)$  и произведение проинтегрировать по времени  $t$ , то результат будет равняться значению непрерывной функции в той точке  $t_0$ , где сосредоточен  $\delta$ -импульс. Действительно, в соотношении  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt$  подинтегральное выражение отличается от нуля лишь для  $t = t_0$ . В этой точке функция  $x(t)$  приобретает конкретное значение  $x(t_0)$ , которое можно вынести из-под знака интеграла. Часть интеграла, которая осталась, согласно условию нормировки дельта-функции (3.10), равна единице. Таким образом, получаем выражение  $x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt$ .

В этом проявляется *фильтрующее свойство дельта-функции*, которое можно использовать в устройствах измерения мгновенных значений некоторого сигнала  $x(t)$ . Структурная схема измерителя (рис. 3.15) состоит из двух звеньев: умножителя и интегратора.

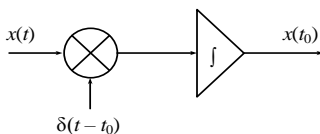
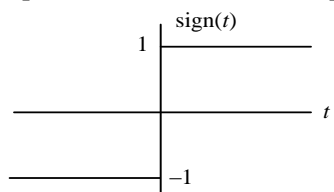


Рис. 3.15. Измеритель мгновенных значений сигнала

Значение  $x(t_0)$  будет измерено тем точнее, чем короче реальный сигнал, который приближенно подает дельта-функция.

**Сигнум-функция.** Функция  $\text{sign}(t)$ , математическая модель которой представляется системой равенств:



$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t = 0; \\ -1, & t < 0, \end{cases}$$

называется *сигнум-функцией* (рис. 3.16).

Рис. 3.16. Сигнум-функция  $\text{sign}(t)$  связана такими очевидными соотношениями:  $\sigma(t) = [1 + \text{sign}(t)]/2$ ;  $\text{sign}(t) = 2\sigma(t) - 1$ .

**Энергетические характеристики сигнала.** Известные из физики понятия

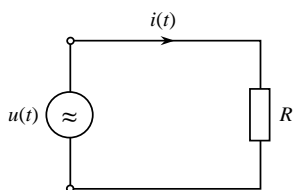


Рис. 3.17. К определению мощности сигнала

мощности и энергии электрических сигналов можно легко обобщить и перенести на соответствующие понятия мощности и энергии произвольных сигналов. Рассмотрим простую электрическую цепь (рис. 3.17), которая состоит из генератора напряжения  $u(t)$ , к клеммам которого подключен резистор с сопротивлением  $R$ . В цепи протекает ток  $i(t)$ , значения которого определяется по закону Ома:  $i(t) = u(t)/R$ . Мгновенное значение мощности генератора  $p(t)$  равняется произведению напряжения  $u(t)$  и тока  $i(t)$ :  $p(t) = u(t) i(t)$ . Энергия  $E$ , отдаваемая генератором в сеть (выделяемая на резисторе  $R$ ), в интервале времени  $[a, b]$  определяется соотношением

$$E = \int_a^b p(t) dt = \int_a^b u(t) i(t) dt. \quad (3.14)$$

В частном случае, когда  $R = 1$ , ток  $i(t)$  в цепи равен напряжению гене-

ратора  $u(t)$  а значение энергии  $E_u$  вычисляется как:  $E_u = \int_a^b u^2(t) dt$ .

Обобщим понятие мощности и энергии в электрической цепи, в которой протекает ток  $i(t)$ , под воздействием напряжения  $u(t)$  и перенесем их на соответствующие понятия мощности и энергии произвольных сигналов  $u(t)$  и  $v(t)$ .

Итак, пусть  $u(t)$  и  $v(t)$  - некоторые сигналы (точнее, математические модели сигналов). По аналогии с формулой (3.14) произведение  $p_{u,v}(t) = u(t)v(t)/2$  будем называть *взаимной мощностью сигналов*, а интеграл

$$E_{u,v} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt \quad (3.15)$$

- *взаимной энергией* этих сигналов.

Тогда полная энергия сигнала при  $v(t)$ , тождественно равная  $u(t)$ :

$$E_u = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt. \quad (3.16)$$

В математике величина  $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt$  называется *скалярным произведением функций  $u(t)$  и  $v(t)$*  и обозначается как

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt. \quad (3.17)$$

Из сравнения выражений (3.17) и (3.15) вытекает, что *скалярное произведение двух сигналов (функций) это не что иное, как взаимная энергия этих сигналов*

$$(u, v) = E_{u,v}. \quad (3.18)$$

Как частный случай из формулы (3.18) получаем  $(u, u) = E_u$ . Т.е. *полная энергия сигнала определяется как скалярное произведение сигнала с самим собой*.

Перенесем понятие взаимной и полной энергии на комплексные сигналы. Если попробуем непосредственно по формуле (3.16) вычислить полную энергию комплексного сигнала  $E_u = E_u = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}^2(t) dt$ , то придем к тому, что энергия такого сигнала также окажется комплексной (поскольку квадрат комплексной функции есть функция комплексная), а это недопустимо. Поэтому взаимную энергию двух комплексных сигналов  $\dot{u}(t)$  и  $\dot{v}(t)$  зададим соотношением

$$E_{\dot{u}, \dot{v}} = (\dot{u}, \dot{v}^*) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(t) \dot{v}^*(t) dt, \quad (3.19)$$

где  $\dot{v}^*(t)$  - сигнал, комплексно-сопряженный с сигналом  $\dot{v}(t)$ .





**Леонард Эйлер**  
(Leonhard Euler,  
1707 - 1783),

выдающийся математик, который сделал огромный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук. Эйлер - автор свыше 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенных вычислений, небесной механики, математической физики, оптики, баллистики, кораблестроения, теории музыки и многих других, которые имели значительное влияние на развитие науки. В течение 1731 – 1741 гг. и начиная с 1766 г. работал в Петербургской академии наук.

Из (3.19) как частный случай получим полную энергию комплексного сигнала  $\dot{i}(t)$ :

$$E_{\dot{i}} = (\dot{i}, \dot{i}^*) \tag{3.20}$$

Произведение комплексной и комплексно-сопряженной с ней величины (функции) равняется квадрату модуля этой величины:  $\dot{i}\dot{i}^* = |\dot{i}|^2$ . Поскольку квадрат модуля комплексной функции - функция вещественная, полная энергия комплексного сигнала становится вещественной

величиной, т.е.  $E_{\dot{i}} = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{i}(t)|^2 dt$ . *Корень квадратный*

*из полной энергии сигнала (функции) называют нормой сигнала (функции):*  $\|\dot{i}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{i}(t)|^2 dt}$ .

Функцию  $u(t)$ , для которой выполняется условие  $\|u\|^2 = 1$ , называют *нормированной*.

Таким образом, *нормированными называются функции, полная энергия которых равняется единице.*

**Ортогональные сигналы и ортогональные базисы.** Два сигнала  $u(t)$  и  $v(t)$  называются *ортогональными*, если их скалярное произведение, а следовательно, и взаимная энергия, равняются нулю

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt = 0 \tag{3.21}$$

Бесконечная система действительных функций (сигналов)  $\{\varphi_k(t)\} = \{\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \dots\}$  называется *ортогональной*, если скалярное произведение двух разных сигналов, а, следовательно, и их взаимная энергия, равняется нулю:

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\varphi_m(t)dt = 0 \text{ при } n \neq m \tag{3.22}$$

Предполагается, что энергия каждого сигнала из системы не равна нулю:  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t) dt \neq 0$ .

Это, в частности, значит, что ни одна из функций системы не равняется тождественно нулю.

Бесконечную систему функций  $\{\varphi_k(t)\}$ , попарно ортогональных друг другу и имеющих единичные

нормы

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \quad (3.23)$$

называют *системой ортонормированных функций*, или *ортонормированным базисом*.

Совсем не обязательно, чтобы ортонормированность базисных функций обеспечивалась лишь на бесконечном интервале времени. Существуют многочисленные базисы, в которых системы функций  $\{\varphi_k(t)\}$  ортонормированы на конечном интервале времени. Рассмотренный базис гармонических функций является одной из многих систем ортонормированных функций.

*Выбор той или другой системы ортонормированных функций (базиса) зависит от свойств сигнала и от конкретных условий применения базиса.*

Общие рекомендации относительно выбора базиса можно сформулировать следующим образом:

1. *Базисные функции должны быть по мере сил максимально согласованными по форме с фильтруемым сигналом.*

Например, если априори известно, что некоторый сложный сигнал содержит гармоническую составляющую, информацию о параметрах которой получаем на основании разложения сигнала в обобщенный ряд Фурье, то как базисные функции целесообразно использовать именно систему ортонормированных гармонических функций, согласованных по форме с формой фильтруемого сигнала.

2. *Нужно стремиться к выбору максимально простого с точки зрения аппаратной или программной реализации базиса.*

Эти рекомендации не всегда удается выполнить в полном объеме, поскольку их реализация может приводить к конфликтным ситуациям. В связи с этим иногда возникает необходимость поиска разумного компромисса между согласованностью формы базисных функций с формой фильтруемого сигнала и простотой программной или аппаратной реализации базиса.



**Оливер Хевисайд**  
(**Oliver Heaviside,**  
**1850-1925**),

английский ученый самоучка, инженер, математик и физик. Создал теорию передачи сигналов на далекие расстояния. Впервые применил комплексные числа для изучения электрических цепей, разработал технику применения преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений, сформулировал уравнение Максвелла в терминах электрической и магнитной сил и потока, а также независимо от других математиков создал векторный анализ. Впервые разработал операционное исчисление, которое широко применяется в физике и других науках.

**Обобщенные ряды Фурье.** Из математики известно, что любой сигнал  $s(t)$  с конечной энергией, т.е. такой, для которого выполняется условие  $\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt < \infty$ , можно подать в виде ряда

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(t), \quad (3.24)$$

где  $c_k$  - коэффициенты разложения, называемые *спектром сигнала*;  $\varphi_k$  - система ортонормированных вещественных функций (*базис*).

*Представление (3.24) называется обобщенным рядом Фурье сигнала  $s(t)$  в выбранном базисе  $\{\varphi_k\}$ .*

К разложению (3.24) некоторого сигнала  $s(t)$  следует относиться как к такому, который вводится аксиоматически, т.е. можно пытаться аппроксимировать сигнал  $s(t)$  бесконечной суммой произведений предварительно выбранных действительных функций  $\varphi_k(t)$  (которые совсем не обязательно должны быть ортонормированными) и пока не известных коэффициентов разложения  $c_k$ .

*Задача заключается в том, чтобы выбрать такую систему функций  $\{\varphi_k\}$ , которая бы, во-первых, обеспечивала простоту вычисления коэффициентов разложения  $\{c_k\}$  и, во-вторых, минимизировала погрешность аппроксимации сигнала  $s(t)$  конечномерным рядом Фурье.*

В дальнейшем будет показано, что если в качестве системы  $\{\varphi_k\}$  взять совокупность ортонормированных функций, то обозначенная задача может быть успешно решена.

Следовательно, пусть в формуле (3.24)  $\{\varphi_k\}$  - бесконечная система вещественных функций, ортонормированных на интервале времени  $[-\infty, \infty]$ , удовлетворяющих условию (3.21), т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) \varphi_n(t) dt = \begin{cases} 1, & n = k; \\ 0, & n \neq k. \end{cases} \quad (3.25)$$

Умножим обе части разложения (3.24) на  $\varphi_n(t)$  и проинтегрируем в области ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi_n(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) \varphi_n(t) dt. \quad (3.26)$$

Согласно ограничению (3.25) интеграл в правой части выражения (3.26) отличен от нуля и равен единице только при  $k = n$ . Следовательно,

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi_n(t) dt = (s, \varphi_n). \quad (3.27)$$

Соотношение (3.27) является фундаментальным в теории рядов Фурье и определяет алгоритм вычисления коэффициентов разложения сигнала  $s(t)$  для заданного ортонормированного базиса, а именно: *коэффициенты разложения обобщенного ряда Фурье (спектр) временной функции (сигнала)  $s(t)$  определяются скалярным произведением этого сигнала с соответствующими базисными функциями изменяется и спектр, хотя сигнал*

$$c_k = (s(t), \varphi_k(t)), k = 0, 1, \dots \quad (3.28)$$

Возможность представления сигналов посредством обобщенных рядов Фурье является фактом принципиального значения. Их достоинство и удобство применения таких рядов при анализе сигналов состоит в том, что вместо того, чтобы изучать функциональную зависимость в континуальном (несчетном) множестве точек, достаточно характеризовать эти сигналы счетной (бесконечной) системой коэффициентов обобщенного ряда Фурье  $c_k$ .

Отметим еще раз, что *спектр сигнала всегда определяется относительно конкретного базиса. С изменением базиса остается неизменным.*

Для комплексного сигнала  $s(t)$  его разложение в ряд Фурье записывается в виде

$$\dot{s}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_k \varphi_k(t), \quad (3.29)$$

т.е. поскольку система базисных функций  $\{\varphi_k\}$  есть система вещественных функций, то для комплексного сигнала  $s(t)$  его спектр  $\{\dot{c}_k\}$  также оказывается комплексным и определяется соотношением:

$$\dot{c}_k = (\dot{s}(t), \varphi_k(t)). \quad (3.30)$$

Вычислим энергию в общем случае комплексного сигнала, представленного в форме обобщенного ряда Фурье (3.29). Воспользовавшись соотношениями (3.29) и (3.30), на основании выражения (3.20) получим

$$E_s = (\dot{s}(t), \dot{s}^*(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{s}(t) \dot{s}^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\dot{c}_k \dot{c}_n^*) \varphi_k(t) \varphi_n(t) dt.$$



**Поль Адриен Морис Дирак (Paul Adrien Maurice Dirac, 1902 - 1984),**

английский физик, один из творцов квантовой механики, лауреат Нобелевской премии по физике 1933 г. (вместе с Эрвином Шредингером). Работы Дирака посвящены квантовой механике, квантовой электродинамике, теории поля, теории элементарных частиц, статистической физике. В 1926 - 1927 гг. разработал математический аппарат квантовой механики - теорию преобразований, ввел так называемую дельта-функцию. В 1927 г. применил принципы квантовой механики к электромагнитному полю и построил модель квантовой электродинамики.

Поменяв местами операции суммирования и интегрирования (в силу их линейности), получим

$$E_s = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (c_k c_n^*) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) \varphi_n(t) dt.$$

Поскольку базисные функции ортонормированные, то в сумме правой части последнего выражения будет отличаться от нуля только слагаемое при  $n = k$ . В итоге приходим к очень важному результату  $E_s = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_k \dot{c}_k^* = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$ , где  $c_k = |\dot{c}_k|$  - модуль  $k$ -го коэффициента разложения обобщенного ряда Фурье.

Смысл полученного выражения состоит в том, что энергия сигнала равна сумме энергий всех компонентов (гармоник), из которых состоит обобщенный ряд Фурье.

Другими словами, энергия сигнала равна сумме энергий спектральных составляющих сигнала, а квадрат модуля коэффициентов обобщенного ряда Фурье численно равен той доле энергии сигнала, которая содержится в соответствующей спектральной составляющей сигнала.

Докажем оптимальность разложения сигнала по ортонормированному базису. Для вещественного сигнала  $s(t)$  введем конечномерную аппроксимацию  $\tilde{s}(t) = \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n(t)$  с неизвестными коэффициентами  $c_n$  и потребуем, чтобы эти коэффициенты были выбраны из условия минимальности энергии ошибки аппроксимации, которое иначе называется условием минимальности квадратичной ошибки аппроксимации

$$\mu = \|s - \tilde{s}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ s(t) - \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n(t) \right]^2 dt = \min.$$

Необходимое условие минимума заключается в том, что коэффициенты  $c_k$  должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\partial \mu / \partial c_k = 0, \quad k = \overline{0, N}. \tag{3.31}$$

В развернутом виде погрешность аппроксимации

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \left( s^2 - 2s \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k + \sum_{k=0}^N \sum_{n=0}^N c_k c_n \varphi_k \varphi_n \right) dt. \tag{3.32}$$

Для простоты записи аргумент  $t$  базисных функций  $\varphi$  в выражении (3.32) опущен. Рассмотрим последнее слагаемое в выражении (3.32)

$$A_{kn} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^N \sum_{n=0}^N c_k c_n \varphi_k \varphi_n \right) dt.$$

Согласно свойству линейности операции интегрирования и суммирования можно поменять местами, а слагаемое  $A_{kn}$  записать в виде

$$A_{kn} = \sum_{k=0}^N \sum_{n=0}^N c_k c_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k \varphi_n dt.$$

Поскольку базис  $\{\varphi_k\}$  ортонормирован, то, воспользовавшись системой (3.25), получим  $A_{kn} = \sum_{k=0}^N c_k^2$ . Тогда (3.32) можно представить в виде

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \left( s^2 - 2s \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k \right) dt + \sum_{k=0}^N c_k^2. \quad (3.33)$$

Принимая во внимание, что в формуле (3.33) интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$  не зависит от коэффициента  $c_k$ , после дифференцирования правой части выражения (3.33) по  $c_k$  получим:  $-2 \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi_k(t) dt + 2c_k = 0$ , а это непосредственно приводит к выводу о том, что равенства (3.31) будут выполняться при следующем выборе коэффициентов разложения:

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi_k(t) dt = (s, \varphi_k). \quad (3.34)$$

Это полностью совпадает с выражением (3.27) для коэффициентов обобщенного ряда Фурье.

Более тщательный анализ, когда рассматривается не только первая, но и вторая производная энергии ошибки, показывает, что *ряд Фурье обеспечивает не просто экстремум, а именно минимум ошибки аппроксимации. Эта ошибка тем меньше, чем больше  $N$ . В пределе, когда  $N$  стремится к бесконечности, ошибка становится равной нулю и разложение типа (3.24) точно описывает сигнал  $s(t)$ .*

Рассмотрим структурную схему устройства (рис. 3.18) для экспериментального определения коэффициентов разложения произвольного сигнала  $s(t)$  в обобщенный ряд Фурье (3.24) по заданной системе ортонормированных функций  $\varphi_k(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Основные элементы устройства это генераторы базисных функций (ГФ) ( $\varphi_k(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ), по которым проводится разложение сигнала  $s(t)$  в обобщенный ряд Фурье (осуществляется вычисление коэффициентов разложения, совокупность которых образует спектр  $c_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ). Анализируемый сигнал  $s(t)$  одновременно подается на первые входы всех множительных звеньев, на вторые входы которых подводятся базисные функции  $\varphi_k(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . С выхода умножителей сигналы поступают на интеграторы, откликом которых являются коэффициенты  $c_k$ .

При таком методе обработки сигнала в конце промежутка времени интегрирования  $(t_1, t_2)$  на выходе каждого интегратора возникает неизменный во времени сигнал, значение которого согласно с формулой (3.33) в точности равно тому или иному коэффициенту разложения обобщенного ряда Фурье.

Следовательно, работоспособность системы в целом будет зависеть от того, насколько точно удается воссоздать базисные функции, а также от совершенства функционирования умножителей и интеграторов.

Совсем не обязательно вычислять спектр сигнала аппаратным способом. Алгоритм определения коэффициентов разложения обобщенного ряда Фурье можно реализовать и на программном уровне.

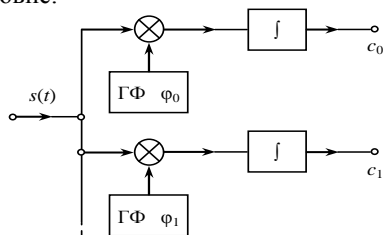


Рис. 3.18. Структурная схема устройства спектрального анализа сигналов

Анализируя устройство (рис. 3.18), убеждаемся в том, что *вся информация, заключенная в сигнале  $s(t)$ , может быть представлена в виде хотя и бесконечной, но все же счетной совокупности чисел  $c_k, k = 0, 1, \dots$ , образующих спектр сигнала.*

Этот вывод вполне очевиден, поскольку является следствием представления сигнала в виде обобщенного ряда Фурье (см. формулу (3.24)).

Итак, любая функция, аналитически описанная во временном пространстве (ее называют оригиналом), может быть представлена счетной совокупностью комплексных амплитуд  $\dot{c}_k, k = 0, 1, \dots$ , образующих спектр в частотном пространстве (совокупность  $\dot{c}_k$  называют изображением). Между оригиналом и его изображением существует взаимно однозначное соответствие, т.е., зная оригинал, можно найти изображение и наоборот. Это указывает на дуальность процесса в смысле равнозначности его представления или в виде функции времени (в пространстве оригиналов), или в виде совокупности элементарных частотных гармоник (в пространстве изображений).

### 3.2. Случайные сигналы и помехи

Главное отличие между случайными и детерминированными сигналами заключается в том, что после наблюдения их на конечном отрезке времени  $T_{\text{сп}}$  невозможно предусмотреть их будущее. Все случайные сигналы и помехи являются непредсказуемыми. Таким образом, для случайных сигналов невозможно найти математическую формулу, по которой можно было бы рассчитать их мгновенные значения. Случайные сигналы и помехи принадлежат к тем явлениям природы, изучением основных закономерностей которых занимается теория вероятностей.

Одна из задач, которая решается в теории вероятностей, - нахождение таких характеристик случайных явлений, которые были бы неслучайными и давали возможность проводить математические вычисления характеристик случайных явлений. Исследования выполняются статистическими методами, для которых характерным является принципиальный отказ от определения

результатов каждой отдельной попытки и переход к рассмотрению массовых попыток, т.е. попыток, которые осуществляются многократно в таких же условиях. Определяемые при этом характеристики называются статистическими. Все случайные явления, которые изучаются в теории вероятностей, можно разделить на три типа: случайные события; случайные величины; случайные процессы. Каждый из этих типов случайных явлений имеет свои особенности и характеристики. Реальные случайные сигналы и помехи, как и детерминированные, могут быть простыми и сложными, аналоговыми, дискретными и цифровыми. Вообще же все они - дискретные или непрерывные функции времени, причем в зависимости от конкретных условий их можно рассматривать и как случайные величины, и как случайные события. Для их математического описания, т.е. выбора математической модели сигнала, нужно решить две задачи: установить, к какому типу случайных явлений отнести случайный сигнал (помеху) в конкретной ситуации, и определить необходимые статистические характеристики.

Напомним важнейшие понятия теории вероятностей, необходимые для выбора математической модели случайных сигналов и помех.

**Случайные события.** Случайным называют событие, которое в результате попытки может наступить или не наступить. Это и передача текста без ошибок, и работа канала связи без повреждений не менее чем  $T_{\text{сп}}$  часов, и превышение помехой данного значения и т.п.. Обозначаются случайные события начальными большими буквами латинской азбуки  $A, B, C$ .

Числовыми характеристиками возможности наступления какого-то события  $A$  в тех или других условиях попытки есть частота появления события и ее вероятность. Частота наступления события  $A$  в данной серии попыток - это отношение количества попыток  $m$ , в которых наступило событие  $A$ , к общему количеству попыток  $n$ :  $v = m/n$ .

Вероятность события

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} v = \lim_{n \rightarrow \infty} m/n, \quad (3.35)$$

т.е. вероятностью случайного события  $P(A)$  является



**Якоб Бернулли (Jakob I (James) Bernoulli, 1655-1705),**

Швейцарский математик, брат Йогана Бернулли, старший из знаменитой династии ученых. Якобу Бернулли принадлежат значительные достижения в теории рядов, дифференциальном исчислении, вариационном исчислении, теории вероятностей и теории чисел, где его именем названы числа с некоторыми важными свойствами. Якобу Бернулли принадлежат также работы по физике, арифметике, алгебре и геометрии.



частота его наступления при неограниченном увеличении количества независимых однородных попыток. Это доказал швейцарский математик Я. Бернулли.

С достаточной для практических расчетов точностью можно считать: если количество попыток, в которых наступило событие  $A$ , большее 20, то частота случайного события совпадает с его вероятностью  $P(A)$ . Так, если из 50 принятых знаков два ошибочных, то частота ошибок  $\nu = 2/50 = 4 \cdot 10^{-2}$ , если зафиксировано 40 ошибочных знаков на 1 тыс. принятых, то можно считать, что вероятность ошибки  $P(A) = 40/1000 = 4 \cdot 10^{-2}$ .

Для характеристики зависимых случайных событий  $A$  и  $B$  вводится условная вероятность  $P(A/B)$ , что обозначает вероятность события  $A$  при условии, что событие  $B$  уже наступило.

**Случайные величины.** Величина, значение которой изменяется от попытки к попытке случайным образом, называется случайной. Для такой величины невозможно вероятно предусмотреть, какое значение она приобретет в конкретных условиях попытки.

Количество ошибок в тексте, количество занятых каналов многоканальной связи, мощность сигнала на выходе линии связи, значения помехи в канале - это все примеры случайных величин. Можно даже сказать так: реалии мира таковы, что любая физическая величина является случайной. Обозначаются случайные величины большими буквами латинской азбуки  $X, Y, Z$ , а значения, которые они приобретают, - соответствующими малыми буквами  $x, y, z$ .

Случайные величины разделяются на дискретные и непрерывные.

*Дискретная* случайная величина  $X$  может приобретать только конечное множество значений  $x_1, x_2, \dots, x$ . *Непрерывная* случайная величина  $X$  может приобретать любые значения из некоторого интервала, даже бесконечного.

Случайная величина как математическая модель является функцией с соответствующими областями определения и значения, а характеристики этой функции определяются с использованием нормированной вероятностной меры, задаваемой функцией распределения вероятностей.

$$\text{Функция распределения вероятности } F(x) = P(X \leq x) \quad (3.36)$$

определяет вероятность того, что случайная величина  $X$  не превышает конкретного значения  $x$ . Если случайная величина  $X$  является дискретной, то  $F(x)$  - дискретная функция. Если  $X$  - непрерывная случайная величина, то  $F(x)$  - монотонно возрастающая функция, значение которой изменяется в интервале  $0 \leq F(x) \leq 1$ , при этом  $F(-\infty) = 0$  и  $F(\infty) = 1$ . Функция распределения  $F(x)$  - величина безразмерная.

*Плотность распределения вероятности*  $p(x)$ , или плотность вероятности, рассчитывается как производная от функции деления  $p(x) = dF(x)/dx$ .

Физически  $p(x)$  является вероятностью того, что случайная величина попадает в малый интервал  $dx$  в окрестности точки  $x$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx. \quad (3.37)$$

Единица измерения  $p(x)$  - обратная к единице измерения случайной величины.

*Математическое ожидание*

$$\mathbf{M}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \text{ и } \mathbf{M}(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i), \quad (3.38)$$

где  $p(x)$  - плотность вероятности непрерывной случайной величины;  $P(x)$  - вероятность значения  $x_i$  дискретной случайной величины. По своей сути *математическое ожидание является средним значением случайной величины*. Если  $X$  - случайное напряжение или ток, то  $\mathbf{M}(X)$  - *постоянная составляющая* напряжения или тока. В выражении (3.38) интегрирование используется при вычислении математического ожидания непрерывной случайной величины, суммирование - при вычислении математического ожидания дискретной случайной величины. Единица измерения  $\mathbf{M}(X)$  совпадает с единицей измерения случайной величины.

*Дисперсия  $\mathbf{D}(X)$  количественно характеризует меру разброса результатов отдельных попыток относительно среднего значения*. Дисперсия рассчитывается как математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от его математического ожидания:

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}[X - \mathbf{M}(X)]^2 = \mathbf{M}(X^2) - \mathbf{M}^2(X). \quad (3.39)$$

Единица измерения  $\mathbf{D}(X)$  является квадратом единицы измерения случайной величины.

*Величина  $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}(X)}$ , т.е. квадратный корень из дисперсии, называется средним квадратичным отклонением*. По физической сути это то, что в электротехнике называют *эффективным значением*.

*Случайные процессы*. Случайным процессом  $X(t)$  называется функция, значение которой при



**Александр  
Яковлевич Хинчин  
(1894 - 1959),**

русский математик, член-корреспондент АН СССР (1939). Закончил Московский университет (1916), с 1922 г. - профессор этого же университета. Первые работы касаются теории функций действительной переменной. Перенес методы метрической теории функций в теорию чисел и теорию вероятностей. Является одним из творцов советской школы теории вероятностей (получил важные результаты в области предельных теорем, открыл закон повторного логарифма, дал определение случайного стационарного процесса и заложил основы теории таких процессов).

любом значении аргумента  $t$  является случайной величиной. Из этого определения вытекает, что когда осуществлять наблюдение изменения во времени любой случайной величины  $X$ , то результатом наблюдения и будет случайный процесс  $X(t)$ . Напряжение шума на выходе линии связи, температура воздуха и т. п., если наблюдать за изменениями мгновенных значений перечисленных физических величин во времени, являются примерами случайных процессов.

Результаты отдельных наблюдений, которые проходят в одних и тех же условиях, дают каждый раз разные функции  $x_k(t)$  - разные экземпляры, или реализации, случайного процесса. Совокупность  $\{x_k(t)\}$  всех возможных реализаций данного случайного процесса называется ансамблем. Таким ансамблем может быть набор сигналов  $x_1(t), \dots, x_k(t)$ , которые наблюдаются в то же время на выходах разных каналов системы многоканальной связи (рис. 3.19).

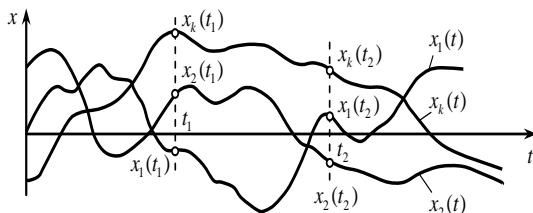


Рис. 3.19. Реализация случайного процесса

Вовсе не обязательно, чтобы реализации случайного процесса были сложными функциями, как это приведено на рис. 3.19. Гармонический сигнал, у которого хотя бы один из параметров  $U_m$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  - случайная величина, является также случайным процессом.

Случайные процессы бывают разных типов: *нестационарные*, *стационарные*, *квазистационарные*, *эргодические*. Но в технике большинство случайных сигналов и помех принадлежат к стационарным эргодическим случайным процессам. Случайный процесс является *стационарным*, если такие его характеристики, как функция распределения  $F(x)$ , плотность вероятности  $p(x)$ , математическое ожидание  $\mathbf{M}(X)$ , дисперсия  $\mathbf{D}(X)$ , не зависят от времени. Определяются они так же, как и для случайной величины.

Стационарный случайный процесс называется *эргодическим*, если для него усреднение по времени одной реализации дает те же результаты, что и статистическое усреднение по всем реализациям. Физически это значит, что все реализации похожи одна на другую, поэтому измерение и расчеты характеристик такого случайного процесса можно проводить по одной (любой) реализации, что значительно проще.

*Нестационарными* являются случайные процессы, для которых не выполняются приведенные только что условия стационарности. Случайные процессы, характеристики которых приближаются к стационарным, получили название *квазистационарных*.

Кроме четырех отмеченных характеристик - функции распределения  $F(x)$ , плотности вероятности  $p(x)$ , математического ожидания  $M(X)$ , дисперсии  $D(X)$  - для описания стационарного случайного процесса используются еще две: *функция корреляции*  $R_X(\tau)$  и *спектральная плотность мощности*  $G_X(f)$  или  $G_X(\omega)$ .

*Функция корреляции*  $R_X(\tau)$  характеризует меру взаимосвязи между значениями случайного процесса в разные моменты времени  $t$  и  $t+\tau$ . Для эргодических случайных процессов  $R_X(\tau)$  вычисляется усреднением по времени произведения  $x_k(t)$  и  $x_k(t+\tau)$ :

$$R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) x_k(t+\tau) dt, \quad (3.40)$$

где  $T$  - время наблюдения реализации эргодического процесса  $X(t)$ . Единица измерения  $R_X(\tau)$  совпадает с единицей измерения дисперсии.

*Спектральная плотность мощности*  $G_X(f)$  или  $G_X(\omega)$  представляет распределение мощности случайного процесса за частотами и на любой частоте определяется как отношения

$$G_X(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \Delta P / \Delta f; \quad (3.41)$$

$$G_X(\omega) = 2\pi \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \Delta P / \Delta\omega, \quad (3.42)$$

где  $\Delta P$  - мощность случайного процесса, которая попадает в полосу частот  $\Delta f$  или  $\Delta\omega$ .  $G_X(f)$  измеряется в Вт/Гц, а  $G_X(\omega)$  - в Вт·с/рад.

Для стационарного случайного процесса функция корреляции  $R_X(\tau)$  и спектральная плотность мощности  $G_X(\omega)$  связаны между собой согласно теоремы Хинчина - Винера интегральными преобразованиями Фурье. Поскольку по физической сущности и функция корреляции, и спектральная плотность мощности - всегда вещественные парные функции, интегральные преобразование Фурье для них можно записать в виде



**Карл Фридрих Гаусс (Carl Friedrich Gauss) (1777 - 1855),**

немецкий математик, астроном и физик. Учился (1795 - 1798) в Геттингенском университете, с 1807 г. - профессор этого университета и директор астрономической обсерватории. Характерными особенностями исследований Гаусса являются чрезвычайная разносторонность и органическая связь в них между теоретической и прикладной математикой. Работы Гаусса имели большое влияние на все дальнейшее развитие высшей алгебры теории чисел и многих других наук.

$$R_x(\tau) = \int_0^{\infty} G_x(f) \cos 2\pi f \tau df, \quad (3.43)$$

$$G_x(f) = 4 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau. \quad (3.44)$$

Эти соотношения широко используются в расчетах характеристик случайных процессов.

**Флуктуационный шум** наиболее характерен для большинства телекоммуникационных каналов. Для количественных расчетов воздействия флуктуационного шума на сигнал необходимо знать его основные статистические характеристики. Поскольку флуктуационный шум создается как сумма большого количества независимых колебаний, то согласно центральной предельной теореме, доказанной в 1901 г. академиком А. И. Ляпуновым, является *стационарным эргодическим* случайным процессом с *гауссовым* (нормальным) распределением вероятности.

*Плотность вероятности* стационарного гауссовского процесса описывается формулой

$$p(x) = \left(1/\sqrt{2\pi\sigma^2}\right) \exp\left[-(x-m)^2/2\sigma^2\right], \quad (3.45)$$

в которую входят два числовых параметра математического ожидания и дисперсии:  $m = \mathbf{M}(X)$ ;  $\sigma^2 = \mathbf{D}(x)$ . График плотности вероятности  $p(x)$  является колоколоподобной кривой с единственным максимумом в точке  $x = m$  (рис. 3.20, а). На графике привлекает внимание то, что с уменьшением  $\sigma$  кривая все более локализуется вокруг точки  $x = m$ . Для флуктуационного шума  $\mathbf{M}(X) = 0$ .

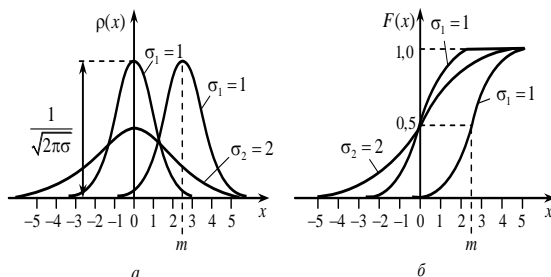


Рис. 3.20. Распределение вероятности Гаусса:  
а – плотность вероятности; б - функция распределения

*Функция распределения вероятности* гауссовского случайного процесса согласно формуле (3.37)

$$F(x) = \left(1/\sqrt{2\pi\sigma^2}\right) \int_{-\infty}^x \exp\left[-(x-m)^2/2\sigma^2\right] dx, \quad (3.46)$$

и после введения новой переменной  $y = (x-m)/\sigma$  сводится к виду:

$$F(x) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{(x-m)/\sigma} \exp(-y^2/2) dy = 0,5 + \Phi_0\left[(x-m)/\sigma\right], \quad (3.47)$$

где  $\Phi_0(z) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_0^z \exp(-y^2/2) dy$ . График функции  $F(x)$  (рис. 3.20, б) имеет вид монотонной растущей кривой от нуля до единицы. Функция  $\Phi_0(z)$ , которая входит в выражение (3.47), называется *интегралом вероятности*, и она табулирована в математических справочниках.

Спектральная плотность мощности флуктуационного шума зависит от физической природы его образования, а также от точки, где он наблюдается. Как правило, спектральная плотность мощности  $G_X(f)$  флуктуационного шума равномерна от нуля до  $10^{12} - 10^{13}$  Гц, т.е. можно считать, что  $G_X(f) = N_0$ , для  $0 \leq f \leq \infty$ . В этом случае шум называют *белым*. Это название присвоено по аналогии с белым светом, который имеет все частотные компоненты. Если спектральная плотность мощности шума равномерна только в ограниченной полосе частот, например сигнала, то шум называют *квазибелым*.

### 3.3. Числовые характеристики сигналов и помех

**Энергетические характеристики.** Основными энергетическими характеристиками действительного сигнала  $s(t)$  является его мощность и энергия. Если  $s(t)$  - напряжение  $u(t)$  или ток  $i(t)$ , то *мгновенная мощность*, которая выделяется на сопротивлении  $R$ , определяется через квадрат мгновенного значения

$$p(t) = u^2(t)/R = i^2(t)R. \quad (3.48)$$

Измеряется мгновенная мощность в Вт. В теории сигналов, как правило, принимают для расчетов  $R = 1$  Ом (кроме некоторых случаев), и тогда в общем виде

$$p(t) = s^2(t). \quad (3.49)$$

Принятие такого условия связано с тем, что во многих задачах теории сигналов используют в расчетах не конкретные значения мощности, а отношение мощности сигнала к мощности помехи. При расчетах отношения сопротивление  $R$  сокращается, и



**Норберт Винер**  
(Norbert Wiener,  
1894-1964),

американский ученый - выдающийся математик и философ, основатель кибернетики и теории искусственного интеллекта. Заинтересовавшись автоматическими расчетами и теорией обратной связи, сформулировал в своей фундаментальной работе "Кибернетика" (1948) положение этой науки, предметом которой стали управление, связь и обработка информации в технике, живых организмах и человеческом обществе. Автор работ по математическому анализу, теории вероятностей, электрических сетей и вычислительной техники.

для упрощения расчетов его считают единичным. Чтобы отличить расчеты мощности при таких условиях ( $R=1$  Ом) от мощности на каком-то сопротивлении  $R \neq 1$  Ом, в формуле (3.41) и других, куда входит мощность, за единицу мощности берут  $\text{В}^2$ , а не Вт.

Энергия сигнала на интервале  $(t_1, t_2)$  определяется как интеграл его мгновенной мощности

$$E_c = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt. \quad (3.50)$$

Спектральная плотность мощности стационарного процесса  $S_x(f)$  определена для положительных и отрицательных частот  $-\infty < f < \infty$ , а спектральная плотность мощности  $G_x(f)$  - для положительных частот  $f > 0$ . Поэтому

$$S_x(f) = 2G_x(f), \quad (3.51)$$

поскольку  $S(\omega)$  - двухсторонняя ( $-\infty < \omega < \infty$ ), а  $S(f)$  - односторонняя ( $0 \leq f \leq \infty$ ) спектральная плотность мощности.

Отношение

$$E_c / (t_2 - t_1) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt \quad (3.52)$$

определяет среднюю мощность  $P_c = \overline{s^2(t)}$  на интервале  $(t_1, t_2)$ .

**Расчеты средней мощности по спектру.** Средняя мощность периодического сигнала, которая рассчитывается на всей оси времени ( $-\infty < t < \infty$ ), совпадает со средней мощностью за период. Для гармонического сигнала  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_0)$  согласно с соотношением (3.50) средняя мощность (на  $R = 1$  Ом) подается в виде

$$\overline{u^2(t)} = P_u = \left( U_m^2 / T \right) \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi_0) dt = U_m^2 / 2 \quad (3.53)$$

и не зависит ни от частоты, ни от начальной фазы.

Поскольку периодический сигнал  $S(t)$  можно представить в виде тригонометрического ряда Фурье, а интеграл суммы равняется сумме интегралов, то полная средняя мощность периодического сигнала равняется сумме средних мощностей, которые выделяются отдельно постоянной составляющей  $a_0/2$  и гармониками с амплитудами  $A_{m1}, A_{m2}, \dots$  при этом она не зависит от частот и фаз отдельных гармоник.

Для случайных сигналов (помех) среднюю мощность можно вычислить по спектральной плотности мощности  $G_x(f)$  или  $G_x(\omega)$ . Поскольку функции  $G_x(f)$  и  $G_x(\omega)$  показывают деление мощности за частотами (см. формулу

(3.52)), то средняя мощность определяется интегралом

$$P_x = \int_0^{\infty} G_x(f) df = 2 \int_0^{\infty} G_x(\omega) d\omega. \quad (3.54)$$

Заметим, что в выражении (3.54), как и в формуле (3.50),  $G_x(f) = 2G_x(\omega)$ . Это условие взято из тех соображений, что  $G_x(\omega)$  - двусторонняя  $-\infty < \omega < \infty$ , а  $G_x(f)$  - односторонняя  $0 \leq f \leq \infty$  спектральная плотность мощности.

Чтобы найти, например, мощность случайного сигнала (помехи) в некоторой полосе частот от  $f_1$  до  $f_2$ , необходимо осуществить интегрирование согласно выражению (3.54) в этой полосе  $P_{x1,2} = \int_{f_1}^{f_2} G_x(f) df$ .

**Пример.** Найти среднюю мощность  $P_{ш}$  белого шума со спектральной плотностью мощности  $G_x(f) = N_0 = 10^{-6}$  Вт/Гц в полосе  $\Delta f = 3100$  Гц.

Среднюю мощность шума в полосе  $\Delta f$  находим согласно выражению (3.54), если границы интеграции берем от  $f_1$  до  $f_1 + \Delta f$ :

$$P_0 = \int_{f_1}^{f_1 + \Delta f} N_0 df = N_0 \Delta f = 10^{-6} \cdot 3100 = 3,1 \cdot 10^{-3} \text{ (Вт)}.$$

**Уровни сигналов (помех).** Под *уровнем* понимают отношение значения мощности  $P_x$  или напряжения  $U_x$  в некоторой точке  $x$  электрической цепи к выбранному для сравнения значению мощности  $P_0$  или напряжения  $U_0$ . Поскольку значения мощности и напряжения могут изменяться в достаточно больших (сотни и тысячи раз) границах, то для измерения уровней введена логарифмическая единица уровня *децибел* (дБ), который равняется  $10 \lg(P_x / P_0)$  по мощности и  $20 \lg(U_x / U_0)$  по напряжению.

**Например,** в технике связи за абсолютный нулевой уровень взята мощность  $P_0 = 1$  мВт на сопротивлении  $R = 600$  Ом. Тогда:  $U_0 = \sqrt{P_0 R} = 0,7748 \approx 0,775$  (В).

Децибелы, определенные относительно мощности  $P_0 = 1$  мВт, называются *децибелами относительно 1 мВт* и сокращенно обозначаются дБп или дБ (мВт).

В случае использования логарифмической единицы измерения уровней такая характеристика качества, как отношение сигнал/помеха, будет равняться разнице уровней сигнала  $L_c$  и помехи  $L_3$ , поскольку

$$\rho = 10 \lg(P_c / P_3) = -10 \lg(P_3 / P_0) = L_0 - L_3 = 10 \lg(P_c / P_0).$$

**Динамический диапазон и коэффициент амплитуды.** *Динамический диапазон*  $D_c$ , дБ, сигнала  $s(t)$  характеризует границы изменения мгновенной мощности и определяется выражением

$$D_c = 10 \lg(p_{\max} / p_{\min}), \quad (3.55)$$

где  $p_{\max}$ ,  $p_{\min}$  - соответственно максимальное и минимальное значения мгновенной



венной мощности, определенные любым способом.

**Например**, минимальную мощность, если ее тяжело найти, считают такой, которая равняется мощности помехи или средней квадратичной погрешности.

*Коэффициентом амплитуды сигнала*  $K_A$  называется отношение его максимальной мощности к средней. В логарифмических единицах дБ имеем

$$K_A^2 = 10 \lg(p_{\max} / P_x). \quad (3.56)$$

В некоторых случаях динамический диапазон и коэффициент амплитуды определяются не в логарифмических, а в абсолютных единицах.

**Длительность и ширина спектра сигнала (помехи).** Под *длительностью сигнала* понимают интервал времени его существования. Вычисляется длительность сигнала как разница между временем окончания сигнала  $t_k$  и временем его начала  $t_n$ :  $T_s = t_k - t_n$ .

*Ширина спектра* - это интервал частот, который занимает спектр. Вычисляется ширина спектра как разница между максимальной  $f_{\max}$  и минимальной  $f_{\min}$  частотой спектра  $F_s = f_{\max} - f_{\min}$ .

Расчеты длительности сигнала (помехи) и ширины спектра не вызывают осложнений, если этот сигнал (помеха) имеет четко определенное начало или конец, а его спектр - граничные частоты. Но с преобразования Фурье вытекает, что когда сигнал имеет конечную длительность, то спектр его нескончаемый, и наоборот. Поэтому практически необходимо договориться об определении длительности и ширины сигнала (помехи).

На практике используются разные методы нахождения  $T_c$  и  $F_c$ , выбор которых зависит от назначения сигнала, его формы и структуры. Наиболее применяемые следующие методы определения  $T_c$  и  $F_c$ :

1. *Отсчет на заданном уровне от максимального.* Обычно длительность

импульсного сигнала  $s(t)$  и ширину его спектра  $S(f)$  определяют на уровне  $1/\sqrt{2}$  от максимального значения из этих величин. Но для расчетов можно выбрать и любое другое значение, например 5% от максимального, как это показано на рис. 3.21. В этом неопределенность метода.

2. *Энергетический метод.* Как длительность сигнала (ширина спектра) берут такой интервал времени (частот), в который попадает заданная часть энергии сигнала.

3. *Замена реального сигнала (спектра) равновеликим прямоугольным.* Такую процедуру, применяемую для вычис-

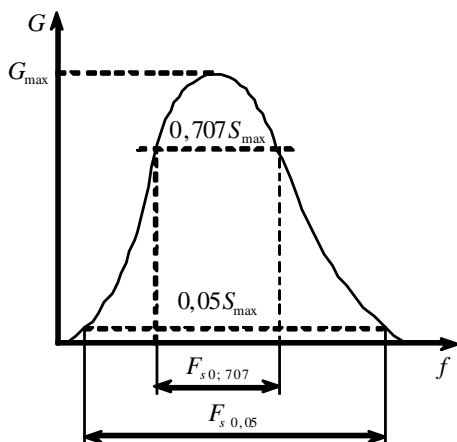


Рис. 3.21. Определение ширины спектра на заданном уровне

ления спектральной плотности мощности сигнала или помехи, показывает наглядно рис. 3.22, где изображена спектральная плотность мощности помехи  $G_{\text{п}}(f)$ . Площади прямоугольника и фигуры, ограниченной кривой  $G_{\text{п}}(f)$  и осями координат, одинаковые.

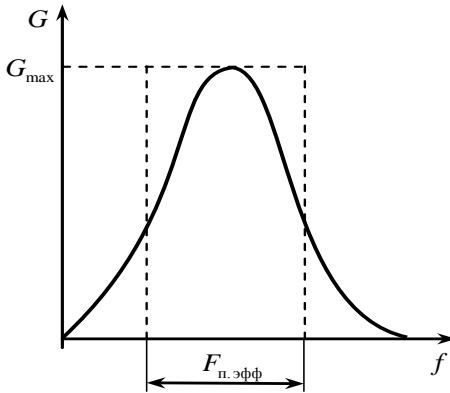


Рис. 3.22. Определение эффективной ширины спектра

Из рис. 3.22 вытекает, что ширина спектра, называемая *эффективной*, определяется как

$$F_{\text{п.эфф}} = \frac{1}{G_{\text{max}}} \int_0^{\infty} G_{\text{п}}(f) df .$$

Числовые характеристики сигналов и помех широко используются в телекоммуникационных системах. По энергетическим характеристикам определяется необходимое отношение сигнал/помеха, по ширине спектра сигнала устанавливается полоса пропускания канала связи, необходимая для неискаженной передачи. Для непрерывных первичных сигналов ширина спектра определяется, как правило, экспериментально.

При определении ширины спектра импульсных сигналов можно воспользоваться одним из важнейших положений теории сигналов и спектров: если  $F_c$  означает ширину спектра некоторого сигнала длительностью  $T_c$ , то всегда выполняется соотношение

$$T_c F_c \approx \mu , \quad (3.57)$$



**Александр Михайлович  
Ляпунов  
(1857—1918),**

русский математик и механик, академик Петербургской академии наук. Ученик П. Л. Чебышева. Основные работы посвящены теории устойчивости равновесия и движения механических систем, теории фигур равновесия жидкости, которая равномерно оборачивается, и математической физике. Важнейшим достижением являются создание современной теории устойчивости равновесия и движения механических систем, определенных конечным количеством параметров. Получил ряд весомых результатов в теории линейных и нелинейных дифференциальных уравнений.



**Александр Грехем Белл**  
(Alexander Graham Bell, 1847-1922),

американский физик шотландского происхождения, творец телефонного аппарата с металлической мембраной, один из изобретателей телефона. В 1865 г. задумал передать язык электрическими волнами. Воплощение идеи заняло следующие 10 лет. В 1876 г. первое сообщение было успешно передано по проводам. В 1877 г. была образована телефонная компания Bell. Выполнял работы по использованию в телекоммуникациях светового луча - направление, которое со временем привело к созданию волоконно-оптических технологий.

где  $\mu$  - постоянная величина,  $\mu \approx 1$  для видеоимпульсов и  $\mu \approx 2$  для радиоимпульсов. Суть этого соотношения в том, что *ширина спектра сигнала обратно пропорциональна его длительности.*

### 3.4. Математические модели сигналов с ограниченным спектром

Все рассмотренные ранее сигналы принадлежат к таким, которые теоретически имеют бесконечно широкий спектр. Это значит, что при попытке восстановления исходного сигнала методом суммирования его гармоник необходимо учитывать бесконечное множество спектральных компонентов. Потеря каждого из них, а тем более некоторого их подмножества, сопровождается искажением формы сигнала. Искажение будет тем большим, чем большее количество гармоник утрачено при восстановлении сигнала по его спектральным составляющим.

С физической точки зрения процедура восстановления сигнала, которая основывается на учете всех спектральных составляющих из бесконечно широкого спектра, неисполнимая. Не следует забывать также о том, что вклад спектральных компонент при  $\omega \rightarrow \infty$  становится ничтожно малым в сравнении с сигналами, энергия которых конечна. Кроме того, любое реальное устройство, предназначенное для передачи и обработки сигналов, имеет конечную ширину полосы пропускания. Наиболее характерно это для устройств типа частотных фильтров.

**Идеальный низкочастотный сигнал.** Рассмотрим *особенный класс сигналов, спектральная плотность которых отличается от нуля лишь в пределах некоторого интервала частот конечной длины.*

Пример таких сигналов - радиоимпульс с линейной частотной модуляцией при значении базы  $B$ , которая стремится к бесконечности и имеет конечную ширину спектра.

Пусть  $D$  - частотный интервал, в пределах которого спектральная плотность  $\dot{U}(\omega)$  некоторого сигнала

$u(t)$  не равняется нулю, т.е.  $\dot{U}(\omega) \neq 0$ , если  $\omega \in D$ . В общем виде математическая модель сигнала с ограниченным спектром определяется формулой обратного преобразования Фурье

$$u(t) = \int_D \dot{U}(\omega) e^{j\omega t} d\omega / 2\pi.$$

В зависимости от выбора интервала  $D$  и функции  $\dot{U}(\omega)$  можно получить самые разнообразные сигналы с ограниченным спектром.

Рассмотрим колебание, спектральная плотность которого постоянная и приобретает действительное значение в пределах частотного интервала, ограниченного некоторой верхней частотой  $\omega_b$ . Вне этого интервала спектральная плотность превращается в ноль:

$$\dot{U}(\omega) = \begin{cases} U_0, & \omega \in [-\omega_b, \omega_b]; \\ 0, & \omega \notin [-\omega_b, \omega_b]. \end{cases} \quad (3.58)$$

График спектральной плотности (3.58) приведен на рис. 3.23. Мгновенное значение сигнала находим по формуле обратного преобразования Фурье.

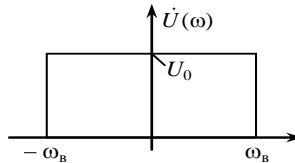


Рис. 3.23. Спектральная плотность идеального низкочастотного сигнала

После интегрирования и элементарных преобразований получим:

$$u(t) = \frac{U_0 \omega_b}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_b t}{\omega_b t}. \quad (3.59)$$

Это колебание называется *идеальным низкочастотным сигналом* (ИНС), график которого, построенный по формуле (3.59), имеет вид осциллирующей кривой, парной относительно начала отсчета времени (рис. 3.24). С увеличением верхней предельной частоты  $\omega_b$  растут как значение центрального максимума, так и частота осцилляций. В пределе, при  $\omega_b \rightarrow \infty$ , сигнал  $u(t)$  переходит в дельта-функцию, т.е.  $\lim_{\omega_b \rightarrow \infty} u(t) = \delta(t)$ .

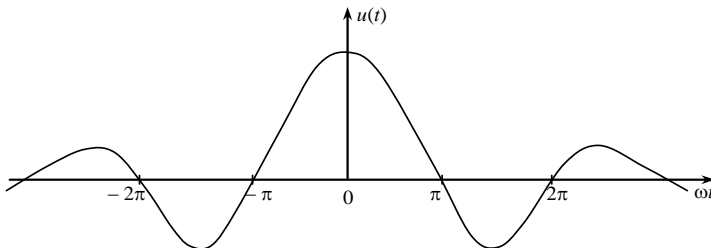


Рис. 3.24. Идеальный низкочастотный сигнал

ИНС можно получить, подав на вход идеального фильтра нижних частот (ФНЧ) сигнал  $s(t)$  с равномерной на всей оси частот спектральной плотностью (рис. 3.25).

Как известно, равномерную в бесконечном интервале частот спектральную плотность имеет сигнал  $s(t)$  типа дельта-функции  $\delta(t)$  (рис. 3.26).

Для того чтобы обеспечить на выходе фильтра (рис. 3.25) формирование сигнала  $\tilde{u}(t)$  с равномерной в интервале частот  $\omega \in [0, \omega_b]$  (для физически реализуемого фильтра), частотная передаточная функция фильтра  $K(\omega)$  должна быть такой, как на рис. 3.28.

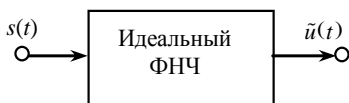


Рис. 3.25. Схема моделирования ИНС

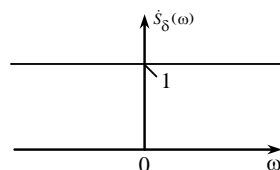


Рис. 3.26. Спектральная плотность дельта-функции

Очевидно, что идеальный ФНЧ (см. рис. 3.25) в случае подачи на его вход дельта-функции вырезает из ее спектра (см. рис. 3.26) участок частот от 0 до  $\omega_b$ . Сигналу  $\tilde{u}(t)$  на выходе фильтра будет соответствовать спектральная

плотность

$$\tilde{U}(\omega) = \begin{cases} U_0, & \omega \in [0, \omega_b]; \\ 0, & \omega \notin [0, \omega_b]; \end{cases}$$

которая отличается от плотности (3.58) отсутствием компонент на отрицательных частотах.

Заметим, что физически реализуемый ФНЧ формирует отклик (исходный сигнал) не раньше, чем с момента появления входного сигнала. Если короткий входной сигнал прямоугольной формы (аналог дельта-импульса) появляется в момент времени  $t=0$ , то реакция ФНЧ на такой сигнал будет иметь вид функции  $\tilde{U}(t)$ , изображенной на рис. 3.28.

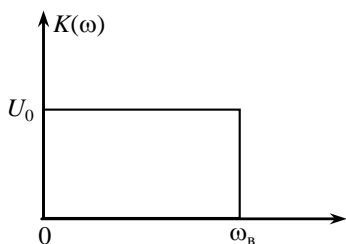


Рис. 3.27. Частотная передаточная функция идеального ФНЧ

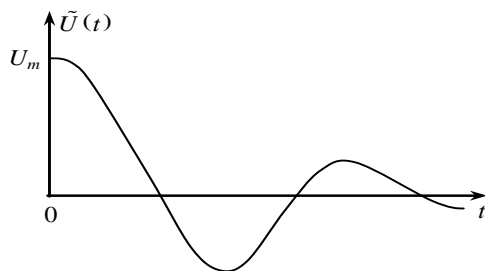


Рис. 3.28. Отклик идеального ФНЧ на входящий сигнал типа дельта-функции

Максимальное значение отклика  $U_m$  в момент времени  $t=0$  определяется соотношением  $U_m = U_0 \omega_b / \pi$ .

**Идеальный полосовой сигнал.** Построение математической модели полосового сигнала опирается на предположение, что его спектр ограничен полосой частот шириной  $\Pi = 2 \Delta \omega$  с центром на частотах  $\pm \omega_0$ . Если в пределах этой полосы спектральная плотность сигнала постоянная (рис. 3.29)

$$\dot{U}(\omega) = \begin{cases} U_0, & \begin{bmatrix} -\omega_0 - \Delta\omega < \omega < -\omega_0 + \Delta\omega \\ \omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega \end{bmatrix}; \\ 0 & \text{вне полосы пропускания,} \end{cases}$$

то по аналогии из ИНС его называют *идеальным полосовым сигналом* (ИПС).

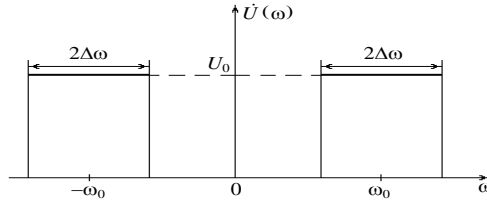


Рис. 3.29. Спектральная плотность ИПС

Мгновенные значения ИПС можно найти по формуле обратного преобразования Фурье. Как следует из рис. 3.29, спектральная плотность ИПС является парной функцией относительно начала оси частот и в общем случае

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(\omega) \cos \omega t d\omega.$$

Поскольку  $\dot{U}(\omega)$  задано как действительную функцию, которая равняется  $U_0$  в пределах полосы частот  $\omega \in (\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega)$ , то последний интеграл можно записать в виде

$$u(t) = \frac{U_0}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \cos \omega t d\omega.$$

После интегрирования и элементарного превращения получим

$$u(t) = (2U_0\Delta\omega/\pi) \cdot (\sin \Delta\omega t / \Delta\omega t) \cos \omega_0 t.$$

График на рис. 3.30 показывает наглядно структуру ИПС. Функция  $\sin(\Delta\omega t)/(\Delta\omega t)$  с точностью до масштабного коэффициента  $2U_0\Delta\omega/\pi$  описывает закон изменения огибающей ИПС.

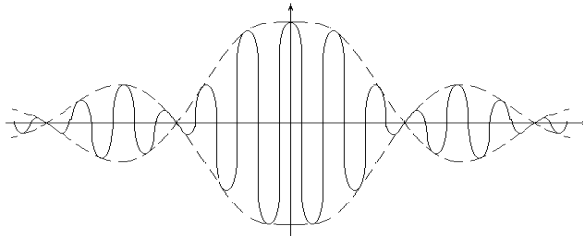


Рис. 3.30. Реализация идеального полосового сигнала

Способ образования ИПС вполне очевиден: на вход идеального полосового фильтра (рис. 3.31), пропускающего колебание с частотами в пределах полосы  $(\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega)$ , нужно подать широкополосное влияние типа дельта-импульс.

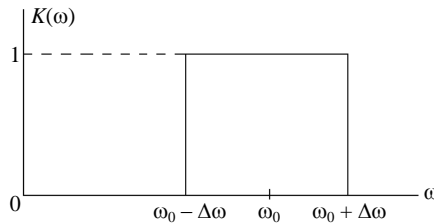


Рис. 3.31. Частотная характеристика идеального полосового фильтра

На выходе идеального полосового фильтра будет наблюдаться сигнал, осциллограмма которого соответствует правой половине графика, приведенного на рис. 3.30. Это вытекает из условия физической реализуемости сигнала: отклик цепи (системы и тому подобное) начинает формироваться не раньше за появление влияния на входе.

**Базис Котельникова.** Как известно, базис в общем случае образует бесконечную совокупность ортогональных функций, норма каждой из которых равняется единице.

Напомним, что *ортогональными* называются такие сигналы  $u(t)$  и  $v(t)$ , скалярное произведение которых равно нулю:  $(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt = 0$ .

Если к тому же энергия каждого сигнала равна единице, то сигналы  $u(t)$  и  $v(t)$  называются *ортонормированными*. Для сигнала  $u(t)$  его энергия  $E_u$  определяется соотношением  $E_u = (u, u) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt$ .

В соответствии с обобщенной формулой Релея сигналы  $u(t)$  и  $v(t)$  будут ортогональными, если выполняется условие

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(\omega) \dot{V}^*(\omega) d\omega = 0. \tag{3.60}$$

Ограничения, которые накладываются на полосу частот сигнала, дают возможность находить интересные и важные классы ортогональных сигналов. В качестве самого простого примера ортогональных сигналов можно привести такую пару полосовых сигналов, спектры которых не пересекаются. Равенство нулю скалярного произведения этих сигналов непосредственно вытекает из формулы (3.60).

Менее очевидный способ ортогонализации сигналов с ограниченным спектром заключается в их сдвиге во времени.

Рассмотрим два ИНС  $u(t)$  и  $v(t)$ . Оба они имеют одинаковые параметры

$U_0$  и  $\omega_B$ , но отличаются тем, что сигнал  $v(t)$  запаздывает относительно сигнала  $u(t)$  на время  $t_0$ , т.е.

$$v(t) = u(t - t_0). \quad (3.61)$$

Спектральная плотность сигнала  $v(t)$  определяется соотношением

$$\dot{V}(\omega) = \dot{U}(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

или согласно выражению (3.58)

$$\dot{V}(\omega) = U_0 e^{-j\omega t_0}, \quad \omega \in [-\omega_B, \omega_B]. \quad (3.62)$$

Допустим, что спектральная плотность сигнала  $u(t)$  задана соотношением (3.58). Подставив выражения (3.58) и (3.62) в (3.60), получим формулу для скалярного произведения этих сигналов

$$(u, v) = \frac{U_0^2}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{j\omega t_0} d\omega. \quad (3.63)$$

В результате интегрирования в формуле (3.63) получим

$$(u, v) = \frac{U_0^2 \omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B t_0}{\omega_B t_0}. \quad (3.64)$$

Из соотношения (3.64) вытекает, что два одинаковых по форме ИНС оказываются ортогональными, если сдвиг между ними во времени удовлетворяет условию

$$\omega_B t_0 = k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.65)$$

Минимально возможен сдвиг  $\Delta t$  (назовем его *шагом временного сдвига*), который приводит к ортогонализации, имеем при  $k = \pm 1$ , т. е.

$$\Delta t = \pm \pi / \omega_B = \pm 1 / 2F_B, \quad (3.66)$$

где  $F_B$  - верхняя предельная частота среза (в герцах) идеального ФНЧ, что отвечает верхней гармонике колебаний в ИНС.

В соотношении (2.66) взято во внимание, что  $\omega_B = 2\pi F_B$ .

Принципиально важно, что условием (3.65) удастся не только добиться ортогонализации двух ИНС, но и построить ортогональный базис для сигналов, в спектре которых отсутствуют частоты, выше чем  $\omega_B$ .

Покажем это на примере ИНС. Воспользовавшись соотношениями (3.61), (3.65) и (3.66), образуем совокупность сигналов

$$v_k(t) = u(t - k\Delta t) = u(t - k\pi / \omega_B). \quad (3.67)$$

Сигналам  $v_k(t)$  отвечает спектральная плотность

$$\dot{V}_k(\omega) = U_0 e^{-j\omega k \frac{\pi}{\omega_B}}, \quad \omega \in [-\omega_B, \omega_B]. \quad (3.68)$$

При  $k = 0$  спектральная плотность  $\dot{V}_0(\omega)$  сигнала  $v_0(t)$  совпадает со спектральной плотностью (3.58) ИНС  $u(t)$ , временная функция которого за-



дана соотношением (3.59). Покажем, что совокупность  $v_k(t)$  сигналов (3.68) образует исчислимое множество ортогональных функций. С этой целью нам достаточно убедиться в том, что взаимная энергия  $E_l$  сигналов  $v_k(t)$  и  $v_{k+l}(t)$ , разнесенных на  $l$  интервалов времени  $\Delta t$ , равняется нулю. Действительно, взаимная энергия  $E_l$  двух сигналов численно равняется скалярному произведению этих сигналов  $E_l = (v_k, v_{k+l})$ .

В свою очередь скалярное произведение можно определить обобщенной формулой Релея  $E_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{V}_k(\omega) \dot{V}_{k+l}^*(\omega) d\omega$ .

Это равенство с учетом выражения (3.68) сводится к виду

$$E_l = \frac{U_0^2}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{j\omega l \frac{\pi}{\omega_B}} d\omega = \frac{U_0^2}{\pi} \int_0^{\omega_B} \cos\left(\omega l \frac{\pi}{\omega_B}\right) d\omega. \quad (3.69)$$

Вычисляя интеграл (3.69), получим

$$E_l = \frac{U_0^2 \omega_B}{\pi} \frac{\sin(l\pi)}{l\pi}, \quad l = 0, 1, \dots \quad (3.70)$$

Следовательно

$$E_l = \begin{cases} U_0^2 \omega_B / \pi, & l = 0; \\ 0, & l \neq 0. \end{cases} \quad (3.71)$$

Из системы (3.71) вытекает, что взаимная энергия  $E_l$  сигналов  $v_k(t)$ , заданных соотношением (3.67) и разнесенных на  $l$  интервалов  $\Delta t$ , определяющихся по формуле (3.66), равняется нулю, т.е. функции  $v_k(t)$  образуют ансамбль ортогональных функций.

К аналитической форме ансамбля ортогональных функций  $v_k(t)$  перейдем, воспользовавшись выражениями (3.58) и (3.67). Получим

$$v_k(t) = (U_0 \omega_B / \pi) (\sin \omega_B (t - k\pi / \omega_B) / \omega_B (t - k\pi / \omega_B)), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.72)$$

Таким образом, ансамбль ортогональных функций  $v_k(t)$  образован за счет часового сдвига идеального низкочастотного сигнала (3.59) на  $k$  интервалов  $\Delta t = \pi / \omega_B$ . Графики сигналов (3.72) для  $k = 0$  и  $k = 2$  приведены на рис. 3.32.

Построим на основании функций  $v_k(t)$ , заданных соотношениями (3.72), систему ортонормированных функций (базис), которые обозначим как  $\varphi_k(t)$ . Для этого необходимо требовать, чтобы энергия каждой функции  $v_k(t)$  равнялась единице. Согласно соотношению (3.71) энергия  $E$  каждого сигнала составляет

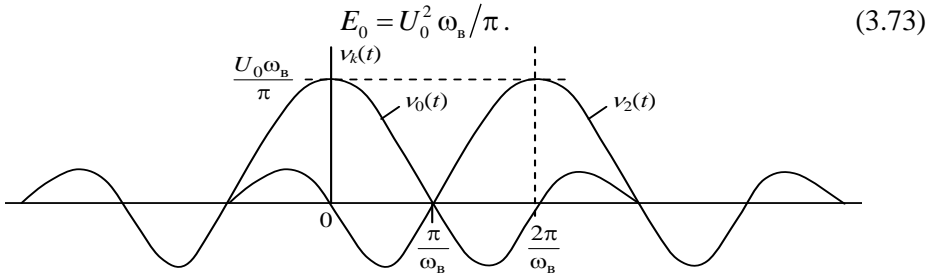


Рис. 3.32. Графики ортогональных ИНС

Приравняв правую часть формулы (3.73) к единице, получим, что система ортогональных функций  $v_k(t)$  становится нормируемой при условии

$$U_0 = \sqrt{\pi/\omega_b}. \quad (3.74)$$

Подставив значение (3.74) в формулу (3.72), приходим к системе ортонормированных функций

$$\varphi_k(t) = \sqrt{\omega_b/\pi} \cdot \sin \omega_b(t - k\pi/\omega_b) / \omega_b(t - k\pi/\omega_b), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.75)$$

которая образует так называемый *базис Котельникова* в пространстве ИНС с частотами, ограниченными сверху величиной  $\omega_b$ . Отдельная функция  $\varphi_k(t)$  называется *k-й отсчетной функцией*.

Таким образом, *базис Котельникова* является совокупностью ортонормированных функций  $\varphi_k(t)$ , образованных из идеального низкочастотного сигнала (с верхней предельной частотой  $\omega_b$  и спектральной плотностью в полосе частот  $[-\omega_b, \omega_b]$ , что равняется  $\sqrt{\pi/\omega_b}$ ) за счет его временного сдвига на промежуток времени  $t_k = k\Delta t = k\pi/\omega_b$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

**Теорема Котельникова (теорема отсчетов).** Теорема, которую доказал В. О. Котельников в 1933 г., является одним из фундаментальных положений теоретической радиотехники. *Теорема устанавливает возможность как угодно точного восстановления сигнала с ограниченным спектром по его дискретным значениям, взятым через равные промежутки времени.*

Пусть  $s(t)$  - произвольный сигнал, спектральная плотность которого отличается от нуля лишь в интервале частот  $-\omega_b < \omega < \omega_b$ . Его можно разложить в обобщенный ряд Фурье по базису Котельникова, т.е. подать в виде

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(t). \quad (3.76)$$

Коэффициенты  $c_k$  ряда (3.76) являются скалярными произведениями сигнала  $s(t)$  и  $k$ -й отсчетной функции  $c_k = (s, \varphi_k)$ . Удобный способ вычисления этих коэффициентов заключается в применении формулы Релея вида

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \dot{\Phi}_k^*(\omega) d\omega. \quad (3.77)$$

Здесь  $\dot{S}(\omega)$  - спектральная плотность сигнала  $s(t)$ ,  $\dot{\Phi}_k(t)$  - спектральная плотность  $k$ -й отсчетной функции базиса Котельникова  $\varphi_k(t)$ , т.е.  $\dot{\Phi}_k(\omega) = F\{\varphi_k(t)\}$ , где  $F$  - оператор прямого преобразования Фурье.

Приступим к вычислению спектральной плотности  $\dot{\Phi}_k(\omega)$ . Заметим, что из сравнения выражений (2.74) и (2.77) вытекает

$$\varphi_k(t) = \sqrt{\pi/\omega_b} v_k(t) \Big|_{U_0=1}. \quad (3.78)$$

Таким образом, согласно равенству (2.78) базисная функция Котельникова  $\varphi_k(t)$  с точностью до коэффициента  $\sqrt{\pi/\omega_b}$  совпадает с выражением (2.75) для функции  $v_k(t)$ , спектральная плотность которой задана соотношением (3.67). Следовательно

$$\dot{\Phi}_k(\omega) = \sqrt{\pi/\omega_b} e^{-j\omega k \frac{\pi}{\omega_b}}, \quad (3.79)$$

причем в формуле (3.79) учтено условие выражения (3.78), в соответствии с которым  $U_0 \equiv 1$ . Подставив значение (3.79) в (3.77), получим

$$c_k = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_b}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} \dot{S}(\omega) e^{j\omega \frac{k\pi}{\omega_b}} d\omega \right\}. \quad (3.80)$$

Выражение в фигурных скобках правой части формулы (3.80) есть не что иное, как мгновенное значение сигнала  $s(t_k) = s_k$  в  $k$ -й отсчетной точке:  $t_k = k\pi/\omega_b = k/2F_b$ . Таким образом,  $c_k = \sqrt{\pi/\omega_b} s_k$ , откуда вытекает окончательная форма ряда Котельникова

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \sin \omega_b (t - k\pi/\omega_b) / \omega_b (t - k\pi/\omega_b). \quad (3.81)$$

Формула (3.81) является содержанием теоремы Котельникова (теоремы отсчетов): *произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот, выше  $F_b$ , можно представить последовательностью дискретных отсчетов этого сигнала, взятых через одинаковые промежутки времени  $1/(2F_b)$ .*

Обозначив рассмотренный промежуток времени отбора дискретных отсчетов сигнала (назовем его периодом дискретизации)  $T$ , т.е. взяв

$$T = F_b / 2 \quad (3.82)$$

и введя понятие частоты дискретизации  $F = 1/T$ , можно сформулировать теорему Котельникова таким образом: *для неискаженного представления сигнала с ограниченным спектром последовательностью его дискретных отсчетов частота дискретизации  $F$  должна равняться удвоенной верхней частоте спектра сигнала  $F_b$ , т.е.  $F = 2F_b$ .*

Особенность теоремы Котельникова заключается в ее конструктивном

характере. Эта теорема не только указывает на возможность разложения сигнала в соответствующий ряд, но и определяет способ восстановления непрерывного сигнала, заданного своими отсчетными значениями (рис. 3.33).

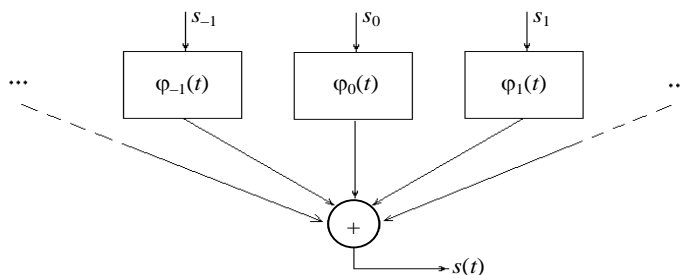


Рис. 3.33. Алгоритм синтеза сигнала

Пусть имеем совокупность генераторов, которые создают на своих выходных зажимах отсчетные функции

$$\varphi_k(t) = \sin \omega_b(t - k\pi/\omega_b) / \omega_b(t - k\pi/\omega_b). \quad (3.83)$$

Генераторы являются управляемыми - амплитуда их сигналов пропорциональна отсчетным значениям  $s_k$ . Если теперь объединить колебания на выходах, подав их на сумматор, то на выходе сумматора согласно формуле (3.81) появится мгновенное значение синтезированного сигнала

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \varphi_k(t). \quad (3.84)$$

Физически восстановление сигнала с ограниченным спектром из последовательности его дискретных отсчетов реализуется с помощью идеального ФНЧ, частота среза которого равна верхней частоте спектра сигнала.

Допустим, что дискретные отсчеты сигнала формируются, как изображено на рис. 3.35. Последовательность  $s_k$  образуется как результат умножения сигнала  $s(t)$  и задержанной на  $k$  периодов дискретизации дельта-функции, т.е.  $s_k = s(t) \delta(t - kT)$ , причем  $T$  выбирается из условия (3.82).

Реакцией идеального ФНЧ на входное воздействие типа дельта-импульс  $\delta(t - kT)$  является функция вида (3.83), или отсчетная функция ряда Котельникова. С учетом того, что ФНЧ является интегрирующим звеном (сумматором), нетрудно понять, что этот ФНЧ именно и реализует формулу (3.84), т.е. восстанавливает сигнал  $s(t)$ .

Таким образом, для восстановления сигнала  $s(t)$ , имеющего ограниченный спектр  $F_b$ , по заданной последовательности его дискретных отсчетов  $s_k$ , взятых с частотой дискретизации  $F = 2F_b$ , необходимо пропустить эту последовательность через идеальный ФНЧ, частота среза которого выбирается такой, которая равняется верхней частоте спектра сигнала  $F_b$ .

**Аппроксимация прямоугольного сигнала рядом Котельникова.** Ряд

Котельникова часто используют для приближенного описания сигналов с неограниченным спектром, значительная часть энергии которого сосредоточена в низкочастотной области.

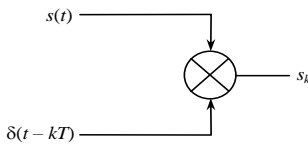


Рис. 3.34. Формирование дискретных отсчетов сигнала

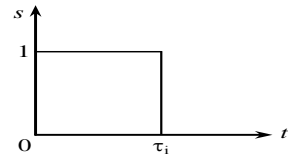


Рис. 3.35. Прямоугольный видеоимпульс

**Пример.** Рассмотрим прямоугольный видеоимпульс. Прямоугольный видеоимпульс не принадлежит к сигналам с ограниченным спектром, но модуль его спектральной плотности быстро (по закону  $1/\omega$ ) уменьшается с ростом частоты.

Чтобы упростить представления прямоугольного видеоимпульсу рядом Котельникова, разместим импульс на оси времени так, как это показано на рис. 3.35. Математическая модель  $s(t)$  такого сигнала достаточно простая

$$s(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau_s]; \\ 0, & t \notin [0, \tau_s]. \end{cases} \quad (3.85)$$

Поскольку согласно равенству (3.85) в области отрицательных значений времени сигнал отсутствует, представим ряд Котельникова такого сигнала (см. (3.81)) выражением

$$\tilde{s}_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} s_k \sin \omega_b (t - k\pi/\omega_b) / \omega_b (t - k\pi/\omega_b), \quad (3.86)$$

в котором  $n$  - количество отсчетов  $s_k$  прямоугольного видеоимпульса, которое эквидистантно подбирается на всем интервале его существования от нуля до  $\tau_u$ . Поскольку по условию (3.85) все отсчеты  $s_k$  импульса в пределах его длительности  $\tau_u$  равны единице, ряду (3.86) можно придать вид

$$\tilde{s}_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin \omega_b (t - k\pi/\omega_b) / \omega_b (t - k\pi/\omega_b), \quad (3.87)$$

где осталось еще неопределенным значение верхней частоты  $\omega_a$  сигнала  $\tilde{s}(t)$ , что аппроксимирует функцию  $s(t)$ .

Пусть задано количество  $n$  отсчетов прямоугольного видеоимпульса, которые эквидистантно подбираются по всей области существования  $t \in (0, \tau_s)$ . Очевидно, что период дискретизации

$$T = \tau_i / (n - 1). \quad (3.88)$$

Это значит, что когда  $n = 2$ , период дискретизации равняется длительности импульса  $\tau_u$ , а два отсчета сигнала  $s_0$  и  $s_1$  берутся соответственно в начале и в конце импульса. При  $n = 3$  отсчеты  $s_0$ ,  $s_1$  и  $s_2$  берутся с интервалом  $T = \tau_u / 2$  соответственно в начале, середине и конце импульса. И, наконец, при  $n = 5$

отсчет  $s_0$  берется в самом начале импульса, а все следующие - через четверть длительности импульса, т.е.  $T = \tau_u / 4$  и т.д.

В соответствии с (3.66) ИНС ортогонализуется при сдвиге на  $\Delta t = T$ , если его верхняя частота  $\omega_b$  удовлетворяет условию

$$\omega_b = \pi / T. \quad (3.89)$$

Подставив выражение (3.88) в формулу (3.89), получим значение верхней частоты  $\omega_b$  спектра сигнала  $\tilde{s}(t)$  при условии, что прямоугольный видеоимпульс подается последовательностью  $n$  эквидистантно размещенных по всей длительности  $\tau_u$  отсчетов импульса  $s(t)$ , т.е.

$$\omega_b = \pi(n-1) / \tau_i. \quad (3.90)$$

Из соотношений (3.87) и (3.90) можно прийти к окончательной формуле ряда Котельникова при аппроксимации прямоугольного видеоимпульса

$$\tilde{s}_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\pi(n-1)/\tau_i\right)\left(t - k\tau_i/(n-1)\right) / \left(\pi(n-1)/\tau_i\right)\left(t - k\tau_i/(n-1)\right). \quad (3.91)$$

Т.е. если представить прямоугольный видеоимпульс всего двумя его отсчетами, взятыми в начале и в конце импульса, то это значит, что в спектре этого импульса будут учтены составляющие, ограниченные частотой  $\omega_b = \pi / \tau_i$ . По формуле (3.91) находим приближенное выражение математической модели сигнала аппроксимации:

$$\tilde{s}_2(t) = \sin(\pi t / \tau_i) / (\pi t / \tau_i) + \sin[\pi / \tau_i (t - \tau_i)] / [\pi / \tau_i (t - \tau_i)].$$

А если представить этот импульс тремя равноудаленными отсчетами (то есть взять  $n=3$ ), то, как следует из соотношения (3.90), в спектре сигнала будут учтены все частоты, вплоть до  $\omega_b = 2\pi / \tau_i$ , и поэтому

$$\tilde{s}_3(t) = \sin \frac{2\pi t}{\tau_i} / \frac{2\pi t}{\tau_i} + \sin \frac{2\pi}{\tau_i} \left(t - \frac{\tau_i}{2}\right) / \frac{2\pi}{\tau_i} \left(t - \frac{\tau_i}{2}\right) + \sin \frac{2\pi}{\tau_i} (t - \tau_i) / \frac{2\pi}{\tau_i} (t - \tau_i).$$

Соответствующие графики изображены на рис. 3.36.

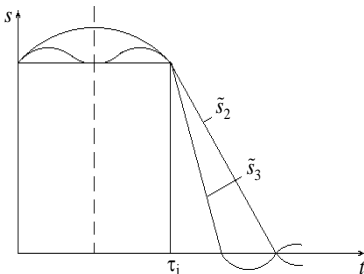


Рис. 3.36. Аппроксимация прямоугольного видеоимпульса рядом Котельникова

Естественно, что с ростом числа  $n$ , т.е. с уменьшением временного интервала  $T$  между отсчетами, точность аппроксимации будет повышаться.

### Дискретизация полосовых сигналов.

Предыдущий анализ по умалчиванию базировался на том предположении, что аналоговые сигналы (импульсы) с неограниченным спектром принадлежат к классу так называемых *низкочастотных сигналов, для которых большая часть энергии сигнала сосредоточивается в низкочастотной области.*

Существует и другой класс сигналов, энергия которых сосредоточивает-

ся в высокочастотной области и практически не существует в области низких частот. Назовем такой класс сигналов *высокочастотным*. Из этого класса сигналов широкого применения приобрели так называемые *полосовые сигналы*, примером которых являются *модулируемые сигналы*.

Дадим некоторые рекомендации относительно алгоритмов дискретизации аналоговых полосовых сигналов и их восстановления из последовательности дискретных отсчетов.

Пусть имеем некоторый сигнал  $s(t)$ , спектр которого содержится в интервале  $(\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega)$ , в котором  $\omega_0$  - центральная несущая частота, а  $\Delta\omega$  - девиация частоты. Будем считать, что вне отмеченного интервала гармоник спектра полосового сигнала нет. Для случая амплитудной модуляции  $\Delta\omega$  является верхней гармоникой  $\omega_a$  спектра модулированного сигнала. В случае угловой модуляции  $\Delta\omega$  - это непосредственно девиация частоты фазомодулированных (ФМ) или частотномодулированных (ЧМ) сигналов.

Теорема Котельникова и для таких сигналов дает возможность выбрать значение частоты дискретизации  $F$  полосового сигнала  $s(t)$ . Верхней угловой частоте  $\omega_b = \omega_0 + \Delta\omega$  сигнала  $s(t)$  соответствует верхняя циклическая частота  $F_b$ , связанная с  $\omega_a$  выражением  $\omega_b = 2\pi F_b$ . Частота дискретизации согласно теореме Котельникова должна удовлетворять условию  $F \geq 2F_b$ .

Для восстановления аналогового полосового сигнала  $s(t)$  последовательность дискретных отсчетов  $\{s_k\}$  следует подать на вход идеального полосового фильтра с такими частотами среза: верхней  $\omega_b$ , определенной ранее, и нижней  $\omega_n = \omega_0 - \Delta\omega$ . Отклик такого фильтра и будет достаточно приемлемой аппроксимацией исходного полосового сигнала.

### 3.5. Дискретные сигналы

Напомним основные свойства дискретных сигналов. Значение дискретных сигналов определено не для всех моментов времени, а лишь в исчисляемом множестве точек  $(\dots, t_0, t_1, t_2, \dots)$ . Поэтому если математическая модель аналогового сигнала  $x(t)$  имеет обычные свойства гладкой функции, то дискретный сигнал  $x_d(t)$  описывается последовательностью  $\dots, x_0, x_1, x_2, \dots$  своих отсчетных значений в моменты времени соответственно  $\dots, t_0, t_1, t_2, \dots$ .

Дискретные сигналы приобретают особое значение в последние десятилетия в связи с развитием цифровой техники связи и способов обработки информации на быстродействующих ЭВМ. Намечилась тенденция создания специализированных вычислительных устройств - *цифровых фильтров*, которые используются для обработки дискретных сигналов.

Дискретные сигналы  $x(nT)$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$  образуются в результате дискретизации (отбора мгновенных значений) непрерывных (аналоговых) сигналов  $x(t)$  в моменты времени  $t_n$ , что образуют исчисляемую последовательность  $t=nT$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ , где  $T$  - шаг дискретизации по времени (рис. 3.37).

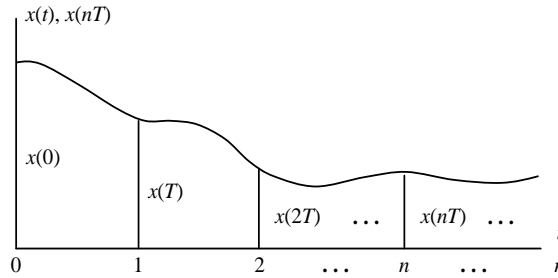


Рис. 3.37. Формирование дискретных сигналов

Дискретные сигналы  $x(nT)$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$  обретают значения из континуального множества во всем интервале значений  $(x_{\min}, x_{\max})$  непрерывной функции  $x(t)$ . При спектральном анализе дискретных сигналов удобно применять *Z-преобразование*, которое для дискретных сигналов играет такую же роль, как и интегральное преобразование Фурье для непрерывных сигналов. Основу *Z-преобразования* составляет интегральное преобразование Лапласа.

**Интегральное преобразование Лапласа.** Наряду с преобразованием Фурье для решения самых разнообразных задач, связанных с изучением сигналов, широко используется еще один вид интегральных преобразований - *преобразование Лапласа*. Различают *одностороннее* и *двустороннее* преобразование Лапласа.

*Одностороннее преобразование Лапласа* вводится для сигналов  $x(t)$ , заданных (существующих) лишь на положительной полуоси времени. Пусть  $x(t)$  - некоторый сигнал, действительный или комплексный, определенный при  $t > 0$  и тождественно равный нулю при отрицательном значении времени. Преобразование Лапласа  $X(p)$  сигнала задается интегралом

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt, \quad (3.92)$$

где  $p$  - параметр преобразования, в общем случае - комплексное число  $p = \sigma + j\omega$ , получившее название *комплексной частоты*.

Для сигналов, определенных на всей оси времени от минус бесконечности до плюс бесконечности, вводят *двустороннее преобразование Лапласа*

$$X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt. \quad (3.93)$$

Сигнал  $x(t)$  называется *оригиналом*, а функция  $X(p)$  - его изображени-



ем по Лапласу (для краткости - изображением).

Если в формуле (3.92) или (3.93) положим  $p = j\omega$ , то приходим к преобразованию Фурье. Следовательно, если для сигнала  $x(t)$  известно его преобразование Лапласа  $X(p)$ , то спектральная плотность  $\dot{X}(\omega)$  сигнала  $x(t)$  определится заменой в изображении  $X(p)$  параметра  $p$  на  $j\omega$ ,

$$\dot{X}(\omega) = X(p) \Big|_{p=j\omega}. \quad (3.94)$$

Рассмотрим **примеры** определения спектральной плотности простейших сигналов по их изображению по Лапласу.

1. Сигнал типа односторонней экспоненты  $x(t) = U e^{-\alpha t}$ ,  $t \geq 0$ .

Воспользовавшись соотношениям (3.92), получим

$$X(p) = = U \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = U \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+p)t} dt.$$

Вычисляя интеграл, получаем  $X(p) = U/(\alpha + p)$ .

В соответствии с формулой (3.94) спектральная плотность  $\dot{X}(\omega)$  этого сигнала  $\dot{X}(\omega) = U/(\alpha + j\omega)$  совпадает с ранее вычисленной путем интегрального преобразования Фурье спектральной плотностью.

2. Сигнал типа двусторонней экспоненты  $x(t) = U e^{-\alpha|t|}$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ .

В соответствии с формулой (3.93) имеем  $X(p) = U \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-pt} dt = X_1(p) + X_2(p)$ ,

где 
$$X_1(p) = U \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+p)t} dt = U/(\alpha + p),$$

а 
$$X_2(p) = U \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-p)t} dt = U e^{(\alpha-p)t} / (\alpha - p) \Big|_{-\infty}^0 = U/(\alpha - p).$$

Таким образом, изображение по Лапласу двусторонней экспоненты определяется выражением  $X(p) = 2\alpha U/(\alpha^2 - p^2)$ , а на основании соотношения (3.94) ее спектральная плотность  $\dot{X}(\omega) = 2\alpha U/(\alpha^2 + \omega^2)$ .

*Преобразование Лапласа имеет свойства, аналогичные свойствам преобразования Фурье.* Приводим важнейшие из них:

$$\sum_k \alpha_k x_k(t) \leftrightarrow \sum_k \alpha_k X(p); \quad x(t \pm t_0) \leftrightarrow X(p) e^{\pm pt_0}; \quad (3.95)$$

$$x(\gamma t) \leftrightarrow X(p/\gamma)/\gamma; \quad dx/dt \leftrightarrow pX(p); \quad (3.96)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow X(p)/p; \quad x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(p)X_2(p). \quad (3.97)$$

где \* - знак оператора свертки. Множитель  $p$  в выражении (3.96) можно назвать *оператором дифференцирования*, а множитель  $1/p$  в формуле (3.97) - *оператором интегрирования* в пространстве изображений по Лапласу.

**Элементы теории Z-преобразования.** Проще всего к Z-преобразованию

можно прийти в результате дискретизации всех функций времени в преобразовании Лапласа. Напомним, что преобразованием Лапласа аналоговой функции  $x(t)$  является функция

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt. \quad (3.98)$$

Вычислим преобразование Лапласа для дискретизированной функции  $x(nT)$ , воспользовавшись соотношением (3.97). В результате временной дискретизации непрерывных функций  $x(t)$  и  $e^{-pt}$ , сводящейся к замене непрерывного времени  $t$  на дискретное  $nT$ , приходим соответственно к дискретным функциям  $x(nT)$  и  $e^{-pnT}$ . Следовательно, подынтегральная функция отличается от нуля лишь в дискретные моменты времени  $nT$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ , образующие счетное множество. Такая операция дискретизации дает возможность перейти от интеграла к сумме произведений дискретных функций. Обозначив бесконечную сумму таких произведений  $\hat{X}(p)$ , получим

$$\hat{X}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-pnT}. \quad (3.99)$$

Воспользовавшись заменой  $z = e^{pT}$  обозначив левую часть формулы (3.99) как  $X(z)$ , получим окончательно

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}. \quad (3.100)$$

В выражении (3.100) аргумент  $T$  для упрощения последующих преобразований опущен. Соотношение (3.100) называется *Z-преобразованием последовательности дискретных сигналов*  $x(n)$  и обозначается как  $Z\{x(n)\}$ . Отметим некоторые свойства *Z-преобразования*, которые во многом аналогичны свойствам преобразований Фурье и Лапласа.

1. *Линейность*. Если  $\{x_k\}$  и  $\{y_k\}$  - две числовые последовательности, отображающие некоторые дискретные сигналы, причем известны соответствующие *Z-преобразования*  $X(z)$  и  $Y(z)$ , то сигналу

$$u(n) = \alpha x(n) + \beta y(n) \quad (3.101)$$

отвечает преобразование

$$U(z) = \alpha X(z) + \beta Y(z) \quad (3.102)$$

при любых постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ .

Доказательство равенства (3.102) проводится подстановкой суммы из (3.101) в выражение (3.100).

2. *Z-преобразование смещенного сигнала*. Рассмотрим дискретный сигнал  $\{y_n\}$ , получающийся из дискретного сигнала  $\{x_n\}$  сдвигом последнего на одну позицию в сторону запаздывания, т.е.  $y(n) = x(n-1)$ .

Непосредственное вычисление *Z-преобразования* приводит к такому ре-



**Пьер Симон Лаплас**  
(**Pierre-Simon Laplace,**  
**1749 - 1827**)

Основные астрономические работы Лапласа посвящены небесной механике. Этот термин впервые употребил сам Лаплас в названии пятитомной фундаментальной работы "Трактат о небесной механике" (1798 - 1825). Решил сложные задачи по движению планет и их спутников, в частности Луны. Разработал теорию возмущений траекторий планет, Солнца и Луны, предложил новый способ вычисления орбит, доказал устойчивость Солнечной системы, открыл причины ускорения в движении Луны.

результату  $Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-1) z^{-n}$ . Преобразуем правую часть последнего выражения к виду  $z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x(n-1) z^{-(n-1)}$ . После замены  $k = n-1$ , имеем

$$z^{-1} \sum_{k=-1}^{\infty} x(k) z^{-k} = x(-1) + z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}.$$

Полагая, для физически реализуемых сигналов  $x(-1) = 0$ , получим окончательно:

$$Z\{x(n-1)\} = z^{-1} X(z). \tag{3.103}$$

Выражение (3.103) можно обобщить для любого значения задержки  $k$  последовательности  $x(n)$ , а именно

$$Z\{x(n-k)\} = z^{-k} X(z) z^{-k}. \tag{3.104}$$

Таким образом, Z-преобразование последовательности, задержанной на  $k$  периодов дискретизации, равно произведению Z-преобразования исходной (не задержанной) последовательности на  $z^{-k}$ .

Символ  $z^{-1}$  в соотношении (3.103) играет роль *оператора единичной задержки сигнала* на один период дискретизации в Z-области. Формуле (3.103) можно дать графическую интерпретацию (рис. 3.38).

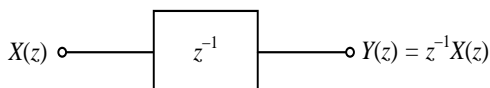


Рис. 3.38. Схема линии задержки дискретного сигнала на один период дискретизации в Z-области

На рис. 3.39 показана интерпретация соотношения (3.104).

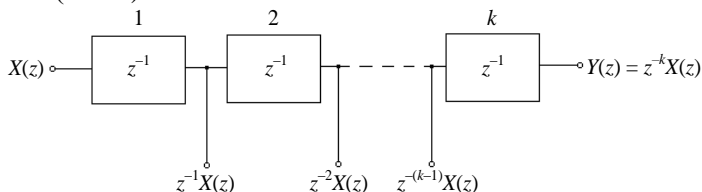


Рис. 3.39. Схема линии задержки дискретных сигналов на  $k$  периодов дискретизации

На рис. 3.38 и 3.39 обозначено:  $X(z)$ - входное

влияние, а  $Y(z)$  - отклик цепи, который состоит из последовательно соединенных единичных линий задержки (на один период дискретизации) для  $Z$ -области.

Следовательно, если исходная последовательность  $y(n)$  образована из задержанной на  $k$  периодов дискретизации входной последовательности  $x(n)$ , т.е.  $y(n) = x(n-k)$ , то  $Z$ -изображение отклика цепи  $Y(z)$  связано с  $Z$ -изображением входного сигнала  $X(z)$  соотношением  $Y(z) = z^{-k} X(z)$ , что соответствует выражению (3.104).

3.  $Z$ -преобразование свертки. Дискретным сигналам  $x(n)$  и  $y(n)$  можно поставить в соответствие дискретную свертку  $f(k) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)y(k-n) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)x(k-n)$ , которой, как и свертке аналоговых сигналов, соответствует произведение их  $Z$ -изображений (преобразований), т.е.

$$Z\{x(n)*y(n)\} = X(z)Y(z),$$

где  $*$  - знак оператора свертки.

Другими словами,  $Z$ -изображение свертки двух дискретных сигналов равно произведению  $Z$ -изображений этих сигналов.

**Спектр дискретных сигналов.** Как известно, спектральная плотность  $\dot{X}(\omega)$  аналоговых сигналов  $x(t)$  определяется на основании прямого преобразования Фурье

$$\dot{X}_F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.105)$$

Здесь (и дальше) нижний индекс при  $\dot{X}$  соответствует типу изображения (в частности,  $F$  указывает на Фурье-изображение).

Спектральную плотность аналогового сигнала  $x(t)$  можно получить также на основании преобразования Лапласа этого сигнала. Действительно, если известно преобразование Лапласа  $X(p)$  сигнала

$$x(t) X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt, \quad (3.106)$$

то, как это выплывает из сравнения формул (3.105) и (3.106), спектральную плотность  $\dot{X}(\omega)$  сигнала  $x(t)$  можно определить на основании преобразования Лапласа  $X(p)$  заменой параметра  $p$  на  $j\omega$ :  $\dot{X}_F(\omega) = X(p)|_{p=j\omega}$ .

Временная дискретизация функций, входящих в правую часть изображения Лапласа, приводит к  $Z$ -изображению дискретных сигналов  $x(nT)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}, \quad (3.107)$$

где  $z$  задано соотношение (3.99).

Полагая, как и при определении спектра сигнала  $x(t)$  по его преобразованию Лапласа  $X(p)$ , что параметр  $p$  равен  $j\omega$ , приходим к следующему способу вычисления спектральной плотности дискретных сигналов по их  $Z$ -изображениям

$$\dot{X}_z(\omega) = X(z)|_{z=e^{j\omega T}}. \quad (3.108)$$

Объединяя формулы (3.107) и (3.108), получим выражение для спектральной плотности последовательности дискретных сигналов

$$\dot{X}_z(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n T}. \quad (3.109)$$

Как видно из соотношений (3.108) и (3.109), спектральная плотность дискретного сигнала является функцией комплексной экспоненты, и согласно формуле Эйлера  $e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$ , является периодической функцией. Поэтому спектр дискретного сигнала также становится периодическим.

**Пример.** Рассмотрим аналоговый сигнал  $x(t)$  типа односторонней экспоненты

$$x(t) = e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (3.110)$$

Подвергнув его временной дискретизации с периодом  $T$ , получим последовательность дискретных сигналов

$$x(nT) = e^{-\alpha n T} = a^n, \quad (3.111)$$

где  $a = e^{-\alpha T} < 1$ . Напомним, что спектральная плотность сигнала (3.110) имеет вид  $\dot{X}_F(\omega) = 1/(\alpha + j\omega)$ . Его спектр амплитуд  $A(\omega)$  является аperiodической функцией

$A_F(\omega) = 1/\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$ . Вычислим  $Z$ -изображение сигнала (3.111) по формуле

$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a/z)^n$ . Поскольку  $a < 1$ , а  $|z|=1$ , то ряд в правой части последней формулы сворачивается, приобретая вид

$$X(z) = 1/(1 - a/z) = z/(z - a). \quad (3.112)$$

Воспользовавшись (3.108) и (3.112), приходим к следующему выражению для спектральной плотности дискретной экспоненты

$$\dot{X}_z(\omega) = e^{j\omega T} / (e^{j\omega T} - a). \quad (3.113)$$

Согласно формуле (3.113) амплитудный спектр  $A_z(\omega)$  равен отношению модуля числителя этого выражения к модулю знаменателя. Модуль числителя равняется единице. При определении модуля знаменателя воспользуемся формулой Эйлера для комплексной экспоненты:  $|e^{j\omega T} - a| = |(\cos \omega T - a) + j \sin \omega T| = \sqrt{(\cos \omega T - a)^2 + \sin^2 \omega T}$ .

После элементарных преобразований получим:  $A_z(\omega) = 1/\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega T}$ . Графики спектров амплитуд аналоговой  $A_F(\omega)$  и дискретной  $A_z(\omega)$  экспонент изображены соответственно на рис. 3.40. Из сопоставления графиков видно, что даже в том случае, когда спектр аналогового сигнала аperiodический, спектр дискретного сигнала становится периодическим, что является следствием дискретизации аналогового сигнала.

Таким образом, можно сформулировать важный вывод: *спектр дискретных сигналов является периодической функцией частоты даже в том случае, когда спектр его аналогового прототипа - аperiodическая функция.*

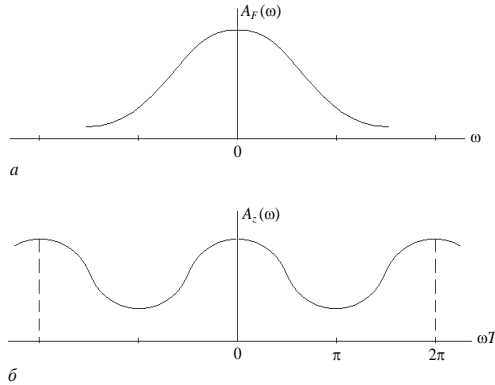


Рис. 3.40. Спектры амплитуд односторонней экспоненты для сигналов: *a* - аналогового; *b* – дискретного

**Эффект наложения спектров при дискретизации сигналов.** Рассмотрим некоторый гипотетический сигнал, амплитудный спектр которого имеет вид равно- стороннего треугольника с основой  $\pm \omega_b$  (рис. 3.41).

Как известно, при дискретизации любого аналогового сигнала  $x(t)$  спектр дискретных сигналов  $x(n)$  становится периодическим, причем интервал периодичности  $\omega T = 2\pi$ , т.е. модуль и фаза спектральных составляющих сигнала на частотах

$$\omega_k = \omega \pm k 2\pi/T, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.114)$$

совпадают по модулю и фазе с гармоникой сигнала на частоте  $\omega$ . Действительно, спектральная составляющая дискретного сигнала  $x(n)$  на некоторой частоте  $\omega$  определяется общим соотношением (3.108) и является функцией комплексного аргумента

$$e^{j\omega T}. \quad (3.115)$$

Заменив угловую частоту  $\omega$  в экспоненте (3.115) значением  $\omega_k$ , заданным правой частью равенства (3.114), получим  $e^{j\omega_k T} = e^{j(\omega \pm 2\pi k/T)T} = e^{j\omega T} e^{\pm j2k\pi}$ , т.е.  $e^{j\omega_k T} = e^{j\omega T}$ , чем и подтверждается периодичность значений спектральных составляющих дискретного спектра с периодом по частоте

$$\Delta_\omega = 2\pi / T. \quad (3.116)$$

От интервала  $\Delta_\omega$  периодичности спектра дискретных сигналов по угловой частоте (3.116) можно перейти к интервалу  $\Delta_f$  периодичности спектра

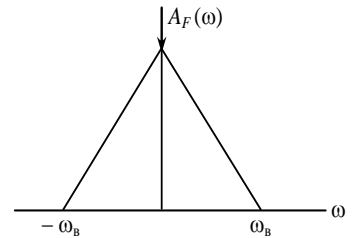


Рис. 3.41. Спектр амплитуд гипотетического сигнала

по циклической частоте  $\Delta_{\omega} = 2\pi\Delta_f$ . Воспользовавшись значениям (3.116), получим

$$\Delta_f = 1/T = F, \tag{3.117}$$

где  $F$  - частота часовой дискретизации сигнала.

Таким образом, согласно формуле (3.117): *спектр дискретного сигнала периодический, причем интервал периодичности  $\Delta_f$  совпадает с частотой дискретизации  $F = 1/T$ .*

Допустим, что форма спектра амплитуд дискретного сигнала отвечает форме спектра аналогового сигнала и с учетом периодичности имеет такой вид, как изображено на рис. 3.42.

Графики на рис. 3.42 отражают случай, когда  $\omega_a T_1 < \pi$ , где  $\omega_a$  - максимальная (верхняя) гармоника аналогового сигнала, а  $T_1$  - период часовой дискретизации аналогового сигнала.

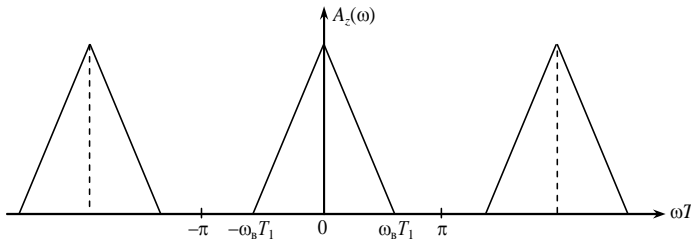


Рис. 3.42. Спектр амплитуд дискретного сигнала

Увеличим период временной дискретизации аналогового сигнала и возьмем его равным значению  $T$ , при котором

$$\omega_b T = \pi, \tag{3.118}$$

в соответствии с которым основы «треугольников» амплитудных спектров будут примыкать друг к другу (рис. 3.43).

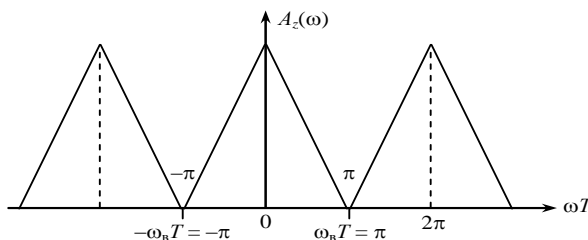


Рис. 3.43. Спектр амплитуд дискретного сигнала, для которого выполняется условие (3.118)

По мере дальнейшего увеличения периода дискретизации  $T_2 > T$  треугольники амплитудного спектра начинают накладываться друг на друга (рис. 3.44). В результате наложения высокочастотных гармоник спектра на низкочастотный амплитудный спектр дискретного сигнала (верхние ломаные пря-

мые) оказывается существенно отличным от спектра аналогового сигнала (см. рис. 3.42).

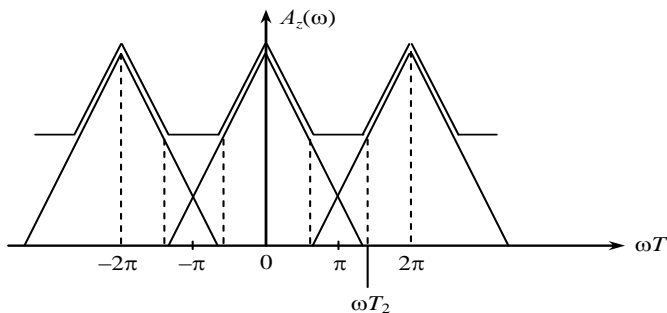


Рис. 3.44. Эффект наложения спектров дискретного сигнала

Причина искажения амплитудного спектра дискретного сигнала (см. рис. 3.44) заключается в том, что частота дискретизации  $F_2 = 1/T_2$  взята недостаточно большой, в результате чего высокочастотные составляющие периодического спектра попадают в область низших частот. Такой сдвиг спектральных составляющих из одного диапазона частот в другой называют *наложением спектров*.

*Эффект наложения спектров дискретных сигналов можно устранить за счет выбора частоты дискретизации аналоговых сигналов.*

Выясним условия, при которых наложение спектров в дискретных сигналах отсутствует.

Пусть спектр аналогового сигнала ограничен верхней граничной частотой  $\omega_b$ , как это показано на рис. 3.41. Очевидно, что искажение спектра при дискретизации сигнала не возникает (см. рис. 3.43), если выполняется условие (3.118).

Переходя в соотношении (3.118) от угловой частоты  $\omega_b$  к циклической  $\omega_b = 2\pi F_b$  ( $F_b$  - верхняя циклическая гармоника аналогового сигнала) и заменяя период временной дискретизации  $T$  частотой дискретизации сигнала, т.е.  $F = 1/T$ , получаем соотношение  $F = 2F_b$ .

Это известное положение теоремы Котельникова (теоремы Найквиста или теоремы отсчетов): *если наивысшая частота в спектре сигнала  $x(t)$  не превышает  $F_b$ , то функция  $x(t)$  полностью определяется последовательностью своих значений в моменты времени, отдаленные один от другого не более чем на  $1/2F_b$  секунд.*

Или другими словами: *любой аналоговый сигнал без искажения можно представить последовательностью его дискретных отсчетов  $x(nT)$  при условии, что частота дискретизации не менее чем вдвое превышает наивысшую гармонику спектра аналогового сигнала.*

На практике данное условие выполнить затруднительно из-за широкого



спектра аналоговых сигналов. Поэтому при конечной частоте дискретизации спектр дискретного сигнала отличается от спектра аналогового сигнала.

**Дискретное преобразование Фурье.** Как было установлено (см. формулу (3.109)), спектральная плотность  $\dot{X}_z(\omega)$  дискретного сигнала  $x(nT)$  определяется выражением

$$\dot{X}_z(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT}, \quad (3.119)$$

где  $n$  - номер дискретного отсчета непрерывной функции;  $T$  - период дискретизации непрерывной функции  $x(t)$ .

Согласно формуле (3.119) спектр дискретного сигнала сплошной. Но таким он бывает лишь при условии, что объем выборки дискретного сигнала бесконечен. На практике выборка отсчетов сигнала всегда конечномерна. Кроме того, по многим причинам желательно вычислять преобразование Фурье на ЭВМ. Это значит, что конечномерной является не только выборка дискретных отсчетов сигнала, но и соответствующее этой выборке количество гармоник спектра дискретного сигнала.

Допустим, что некоторая непрерывная функция (аналоговый сигнал)  $x(t)$  представлена последовательностью  $N$  отсчетов этой функции

$$x(n) = x(nT), \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (3.120)$$

где  $T$  - период временной дискретизации аналогового сигнала.

Приведем в соответствие конечновыборочным отсчетам сигнала (3.120) конечновыборочную последовательность спектральных составляющих  $\dot{X}(k)$ , взяв  $k = \overline{0, N-1}$ . Для вычисления  $N$  спектральных составляющих (гармоник спектра) будем действовать таким способом. Сначала заменим в формуле (3.119) угловую частоту  $\omega$  циклической  $f$

$$\omega = 2\pi f, \quad (3.121)$$

а затем перейдем от непрерывных частот к дискретным:

$$\begin{cases} \omega \rightarrow \omega_k, \\ f \rightarrow f_k, \end{cases} \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (3.122)$$

Расставим  $N$  спектральных составляющих дискретного сигнала эквидистантно на всем частотном интервале периодичности спектра, который, как показано в предыдущем подразделе, равняется  $F$  (рис. 3.45).

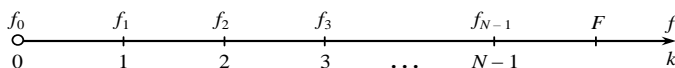


Рис. 3.45. Распределение гармоник спектра по оси частот

Обозначим

$$f_k = k f_1, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (3.123)$$

где

$$f_1 = F/N \quad (3.124)$$

интервал частотной дискретизации спектра.

На основании (3.121) - (3.124) преобразуем бесконечный ряд (3.119) к конечному, записав его в виде  $\dot{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}knT}$ . Поскольку  $TF = 1$ , то имеем  $\dot{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ . Обозначив

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}, \quad (3.125)$$

получим окончательное выражение

$$\dot{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{kn}, \quad k, n = 0, N-1. \quad (3.126)$$

Соотношение (3.126) имеет название *дискретного преобразования Фурье* (ДПФ), а комплексный множитель  $W$ , заданный формулой (3.125), называется *фазовым* (или *поворотным*) *множителем* (ФМ).

Фазовый множитель  $W$  является периодической функцией своего аргумента (показателя степени), т.е.

$$W^{mN+k} \equiv W^k. \quad (3.127)$$

В самом деле, подставив значение множителя (3.125) в выражение (3.127), имеем  $W^{mN+k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(mN+k)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}mN} e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$ .

Поскольку для любого целого  $n$ :  $e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \equiv 1$ , то из равенства (3.128) вытекает, что

$$W^{mN+k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = W^k \quad (3.128)$$

и, следовательно, тождество (2.127) становится доказанным.

Периодичность ФМ можно достаточно просто проиллюстрировать графически (рис. 3.46) на примере восьмиточечного ( $N = 8$ ) ДПФ.

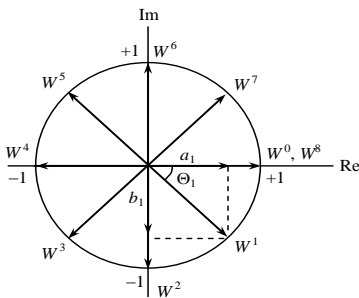


Рис. 3.46. Степени фазового множителя для восьмиточечного ДПФ

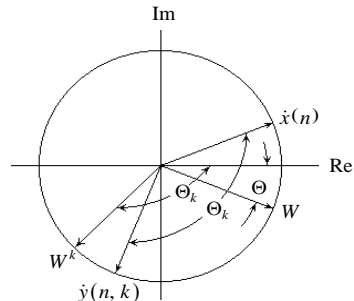


Рис. 3.47. Формирование вектора  $\dot{y}(n, k)$

Из периодичности ФМ вытекает периодичность спектра  $\dot{X}(k)$  дис-

кретных сигналов  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$ , т.е. если

$$k = mN + k_0, \tag{3.129}$$

где  $m \geq 1$ , а  $k_0 < N$ , то

$$\dot{X}(k) \equiv \dot{X}(k_0). \tag{3.130}$$

Действительно, подставив значение  $k$ , заданное выражением (3.129), в формулу (3.126), получим  $\dot{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}n(mN+k_0)}$ . (3.131)

Произведя элементарные преобразования в показателе степени экспоненты, имеем  $e^{-j\frac{2\pi}{N}n(mN+k_0)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk_0} e^{-j2\pi nm}$ . Поскольку для любого целого  $m$  вторая экспонента в правой части равна единице, формула (3.131) приводит к соотношению  $\dot{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk_0}$ , т.е.  $\dot{X}(k) = \dot{X}(k_0)$ , что и требовалось доказать.

*N-выборочной совокупности дискретных отсчетов сигнала, эквидистантно расположенных на оси времени, соответствует N-выборочная совокупность гармоник сигнала, эквидистантно размещенных на оси частот.*

Интервал между соседними гармониками (в герцах) равен  $f_1 = F / N$ , где  $F = 1/T$  - частота дискретизации, а  $N$  - объем выборки сигнала.

При умножении вектора (в общем случае комплексного) сигнала  $\dot{x}(n)$  на  $k$ -ю степень множителя  $W$  в соотношении (3.126) образуется вектор  $\dot{y}(n, k) = \dot{x}(n)W^k$ , повернутый относительно вектора  $\dot{x}(n)$  по часовой стрелке на угол  $\theta_k = k\theta$  (рис. 3.47). Этим объясняется название комплексного множителя  $W$  как «фазового», или «поворачивающего».

*Устройство (аппаратное или программное), реализующее алгоритм ДПФ, называется процессором ДПФ (рис. 3.48).*

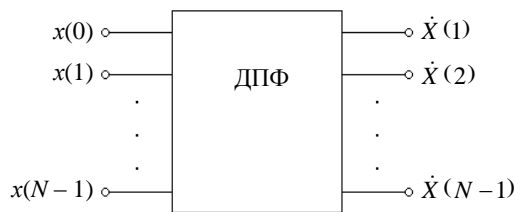


Рис. 3.48. Условное обозначение процессора ДПФ

Если на вход процессора ДПФ подавать отсчеты сигнала  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$ , то на его выходе формируются гармоники  $\dot{X}(k)$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ , которые отвечают  $N$ -выборочной совокупности входных сигналов.

Развернем формулу (3.119), например, для четырехточечного ДПФ. Имеем

$$\dot{X}(0) = x(0)W^0 + x(1)W^0 + x(2)W^0 + x(3)W^0; \quad \dot{X}(1) = x(0)W^0 + x(1)W^1 + x(2)W^2 + x(3)W^3;$$

$$\dot{X}(2) = x(0)W^0 + x(1)W^2 + x(2)W^4 + x(3)W^6; \quad \dot{X}(3) = x(0)W^0 + x(1)W^3 + x(2)W^6 + x(3)W^9.$$

Система линейных уравнений (3.132) дает возможность записать соотношение (3.123) в матричной форме  $W_N \bar{x}_N = \bar{\dot{X}}_N$ , в которой  $W_N$  - квадратная матрица размерности  $N \times N$  весовых коэффициентов преобразования вектора-столбца входных отсчетов сигнала

$$\bar{x}_N = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \dots \\ x(N-1) \end{pmatrix} \text{ в вектор-столбец} \quad \bar{\dot{X}}_N = \begin{pmatrix} \dot{X}(0) \\ \dot{X}(1) \\ \dots \\ \dot{X}(N-1) \end{pmatrix}$$

частотных гармоник дискретного спектра. Гармоники  $\dot{X}(k)$ ,  $k = \overline{0, N-1}$  являются компонентами исходного сигнала процессора ДПФ. Матрицу  $W_N$  называют *матрицей преобразования*. Для  $N=4$ , т.е. четырехточечного ДПФ, матрица  $W_4$  имеет вид

$$W_4 = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{pmatrix},$$

а с учетом значений фазовых множителей –

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (3.132)$$

Из соотношений (3.126) и (3.131) следует, что при вычислении гармоник спектра  $\dot{X}(k)$ ,  $k = \overline{0, 3}$ , над входными отсчетами выполняются элементарные операции умножения на величины  $\pm 1$  (что тривиально) или на величины  $\pm j$  с последующим суммированием результатов перемножения. Отметим, что умножение комплексной величины  $\dot{x}(n)$  на  $j$  означает поворот вектора  $x(n)$  против часовой стрелки на угол, равный  $\pi/2$ , тогда как умножение на  $-j$  означает поворот вектора  $x(n)$  по часовой стрелке на угол  $\pi/2$ . Матрицу (3.132) называют *матрицей преобразования с минимальными фазами*.

**Обратное дискретное преобразование Фурье.** Обратимся к выражению для ДПФ

$$\dot{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}(n)W^{nk}. \quad (3.133)$$

Умножим обе части соотношения (3.133) на  $W^{-mk}$  и просуммируем по  $k$  от 0 до  $N-1$ :  $\sum_{k=0}^{N-1} \dot{X}(k)W^{-mk} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}(n)W^{nk}W^{-mk} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}(n)W^{(n-m)k}$ .

Изменив порядок суммирования в правой части последнего выражения, получим  $\sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}(n) \sum_{k=0}^{N-1} W^{(n-m)k}$ . Внутренняя сумма здесь отлична от нуля и равна  $N$  лишь при  $n = m$ :  $N \dot{x}(m) = \sum_{k=0}^{N-1} \dot{X}(k)W^{-mk}$ .

Заменяем  $m$  на  $n$ . В результате такой замены получим окончательно

$$\dot{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{X}(k)W^{-nk}, \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (3.134)$$

Выражение (3.134) называется *обратным дискретным преобразованием Фурье*. Его можно представить также в виде  $\dot{x}(n) = \frac{1}{N} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \dot{X}^*(k)W^{nk} \right)^*$ , т.е. с точностью до коэффициента  $1/N$  обратное ДПФ совпадает с комплексно-сопряженным ДПФ последовательности комплексно-сопряженных гармоник сигнала. Соотношения (3.133) и (3.134) образуют пару ДПФ (соответственно прямого и обратного).

**Дискретизация периодических сигналов.** При исследовании с помощью ЭВМ непрерывный сигнал  $\dot{x}(t)$  на интервале времени  $(0, T)$  заменяется своими отсчетными значениями  $(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{N-1})$ , взятыми соответственно в моменты времени  $(0, \Delta, 2\Delta, \dots, (N-1)\Delta)$ . Полное количество отсчетов

$$N = T / \Delta, \quad (3.135)$$

где  $\Delta$  - шаг (период) временной дискретизации непрерывного (аналогового) сигнала. Массив чисел  $\{x_n\}$ , действительных или комплексных, является той единственной информацией, из которой можно судить о спектральных свойствах сигнала  $\dot{x}(t)$ . Исследование таких дискретных сигналов можно упростить, если полученную выборку отсчетных значений сигнала повторить бесконечное количество раз влево и вправо по оси абсцисс (рис. 3.49). В результате такой операции приходим к периодическому дискретному сигналу.

На рис. 3.49 черными кружочками обозначена исходная  $N$ -мерная последовательность дискретных сигналов, а незатемненными кружочками периодическое продолжение последовательности.

Подобрав для сигнала некоторую математическую модель, можно воспользоваться разложением в ряд Фурье и найти соответствующие амплитудные коэффициенты.

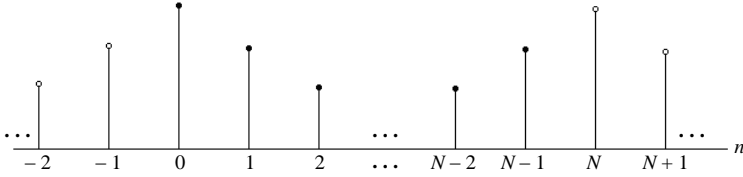


Рис. 3.49. Дискретное представление периодического сигнала

Совокупность этих коэффициентов образует спектр дискретного периодического сигнала. Воспользуемся моделью в виде последовательности дельта-импульсов и поставим в соответствие исходному колебанию  $\dot{x}(t)$  его дискретное представление  $\dot{x}_d(t)$  на интервале  $(0, T)$ :

$$\dot{x}_d(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}_n \delta(t - n\Delta), \quad (3.136)$$

где  $\dot{x}_n = \dot{x}(n\Delta)$  - отсчетные значения  $\dot{x}(t)$  в  $n$ -й точке.

Представим дискретную модель (3.136) комплексным рядом Фурье

$$\dot{x}_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{j2\pi kt/T}$$

с коэффициентами

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}_d(t) e^{-j2\pi kt/T} dt. \quad (3.137)$$

Подставляя соотношение (3.136) в (3.137), с учетом формулы (3.135) получим

$$\dot{C}_k = \frac{1}{N\Delta} \int_0^{N\Delta} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}_n \delta(t - n\Delta) e^{-j2\pi kt/T} dt. \quad (3.138)$$

Введем безразмерную переменную  $\xi = t / \Delta$ ,  $dt = \Delta d\xi$ .

Это означает, что необходимо поделить на период дискретизации  $\Delta$  все переменные, имеющие размерность времени в секундах, а именно: аргумент  $\delta$ -функции  $t - k\Delta$ , переменные  $t$  и  $T$  в показателе экспоненты, а также верхнюю границу интегрирования (3.138). В результате такой замены переменных выражение (3.138) приобретет вид:  $\dot{C}_k = \frac{1}{N} \int_0^N \sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}_n \delta(\xi - n) e^{-j2\pi k\xi/N} d\xi$ , а после перестановки местами операций интегрирования и суммирования –

$$\dot{C}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}_n \int_0^N \delta(\xi - n) e^{-j2\pi k\xi/N} d\xi.$$

Наконец, используя фильтрующие свойства дельта-функции, имеем

$$\dot{C}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (3.139)$$

Формула (3.139) определяет последовательность коэффициентов, которые образуют ДПФ рассматриваемого сигнала. С точностью до коэффициен-

та  $1/N$  она совпадает с ранее полученной формулой (3.123), но в отличие от нее - математически достаточно корректная. Из соотношения (3.139) четко вытекает, что  $N$ -выборочной совокупности отсчетов сигнала  $\dot{x}_n$ , взятых с интервалом временной дискретизации  $\Delta$ , соответствует  $N$ -выборочная совокупность коэффициентов разложения  $\dot{C}_k$ , образующая дискретный спектр этого дискретного сигнала.

Если, как и ранее, обозначим через  $W = e^{-j2\pi/N}$  фазовый множитель, то выражение (3.139) приобретет более привычный вид

$$\dot{C}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}_n W^{nk}, \quad k = \overline{0, N-1} \quad (3.140)$$

прямого ДПФ, которому соответствует обратное ДПФ:

$$\dot{x}_n = \sum_{k=0}^{N-1} \dot{C}_k W^{-nk}, \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (3.141)$$

Взаимно дополняющие друг друга формулы (3.141) и (3.142) являются дискретными аналогами обычной пары преобразований Фурье для дискретных сигналов.

### Свойства дискретного преобразования Фурье:

1. ДПФ является линейным преобразованием, т.е. сумме взвешенных сигналов отвечает взвешенная сумма их ДПФ

$$\sum_{m=1}^M \alpha_m \left\{ \dot{x}_N^{(m)} \right\} \leftrightarrow \sum_{m=1}^M \alpha_m \left\{ \dot{C}_N^{(m)} \right\},$$

где  $\alpha_m$  - весовые коэффициенты  $N$ -мерной  $m$ -й последовательности дискретных сигналов

$$\dot{x}_N^{(m)} = \dot{x}_0^{(m)}, \dot{x}_1^{(m)}, \dots, \dot{x}_{N-1}^{(m)}, \quad m = \overline{1, M},$$

а

$$\dot{C}_N^{(m)} = \dot{C}_0^{(m)}, \dot{C}_1^{(m)}, \dots, \dot{C}_{N-1}^{(m)}, \quad m = \overline{1, M}$$

коэффициент разложения  $m$ -й последовательности сигналов.

2. Число различных коэффициентов  $\dot{C}_0, \dot{C}_1, \dots, \dot{C}_{N-1}$ , вычисляемых по формуле прямого ДПФ (3.141), равняется числу  $N$  отсчетов в выборке.

3. Коэффициент  $\dot{C}_0$  (постоянная составляющая) является средним значением всех отсчетов:  $C_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}_n$ .

4. Если  $N$  – четное число, то

$$C_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}_n (-1)^n. \quad (3.142)$$

Действительно, согласно формуле (3.140)  $W^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$ , т.е. при  $k = N/2$ :  $e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1$ , что и подтверждает соотношение (3.142).

5. Пусть отсчетные значения  $x_n$  - вещественные числа. Тогда коэффициен-

ты ДПФ, номера которых располагаются симметрично относительно  $N/2$ , образуют комплексно-сопряженные пары, т.е.

$$\dot{C}_{N-k} = \dot{C}_k^* \quad (3.143)$$

$$\text{Из (3.139) имеем } C_{N-k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi}{N}(N-k)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{+\frac{2\pi}{N}kn} = \dot{C}_k^*, \quad \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{+\frac{2\pi}{N}kn} = \dot{C}_k^*,$$

поскольку  $e^{-j2\pi n} \equiv 1$  для каждого  $n = 0, N-1$ , что и доказывает (3.143).

Поэтому можно считать, что коэффициенты  $\dot{C}_{N/2+1}, \dots, \dot{C}_{N-1}$  соответствуют отрицательным частотам. При изучении амплитудного спектра сигнала они не применяются, и их можно не вычислять.

**Пример** расчета коэффициентов ДПФ.

Пусть дискретный сигнал (рис. 3.50) на интервале своей периодичности задан восьмью равноотдаленными отсчетами

$$\{x_n\} = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0). \quad (3.144)$$

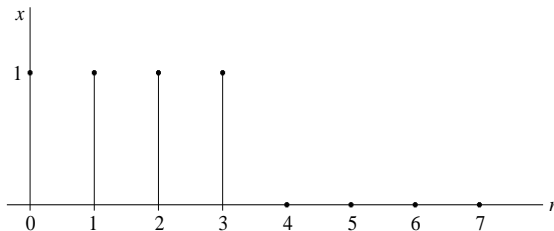


Рис. 3.50. Последовательность дискретных сигналов

Найдем коэффициенты ДПФ (спектр) этого сигнала. Используя основную формулу (3.139), находим непосредственно  $C_0 = 1/2$ . Коэффициенты  $\dot{C}_k$  удобно вычислять графически, используя векторное изображение дискретных отсчетов сигнала на комплексной плоскости. Так, для коэффициента

$$\dot{C}_1 = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{\pi}{4}n} / 8 \quad (3.145)$$

векторная диаграмма компонентов ряда (3.145) изображена на рис. 3.51. Сумму векторов, обозначенных цифрами 0, 1, 2, 3 запишем в виде комплексного числа  $\dot{C}_1 = (a, b)$ , где  $a$  - действительная, а  $b$  - мнимая части коэффициента  $\dot{C}_1$ . Рассматривая выражение (3.145) и рис. 3.51, получаем

$$\dot{C}_1 = (1, -(1 + \sqrt{2})) / 8. \quad (3.146)$$

Для коэффициента  $\dot{C}_2$  имеем:  $\dot{C}_2 = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{\pi}{2}n} / 8$ . В соответствии с диаграммой (рис. 3.52) получаем  $\dot{C}_2 = 0$ . Выполняя аналогичные расчеты для других коэффициентов, находим

$$\dot{C}_3 = (1, -(\sqrt{2} - 1)) / 8, \quad \dot{C}_4 = 0. \quad (3.147)$$

Следующие коэффициенты определяем на основании их сопряженности с ранее



вычисленными, а именно:  $\dot{C}_5 = \dot{C}_3^* = (1, \sqrt{2} - 1)/8$ ;  $\dot{C}_6 = \dot{C}_2^* = 0$ ;  $\dot{C}_7 = \dot{C}_1^* = (1, 1 + \sqrt{2})/8$ .

Т.е. по заданным системой (3.144) значениям дискретного сигнала  $\dot{x}(n)$ ,  $n = \overline{0, N - 1}$ , можно найти постоянную составляющую  $C_0 = 1/2$ , а также первую и третью гармоники с амплитудами  $A_1 = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}/8$ ;  $A_3 = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}/8$ .

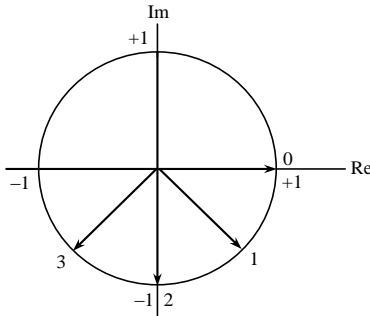


Рис. 3.51. К вычислению коэффициента  $\dot{C}_1$

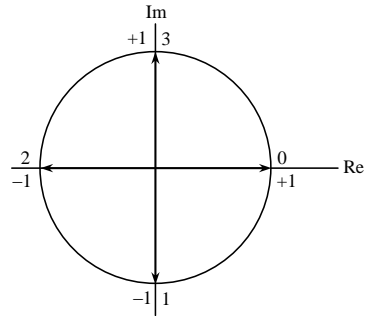


Рис. 3.52. К вычислению коэффициента  $\dot{C}_2$

Коэффициентам  $\dot{C}_7$  и  $\dot{C}_5$  соответствуют комплексно-сопряженные амплитуды первой и третьей гармоник входного сигнала, которые дают возможность записать тригонометрическую форму ряда Фурье для сигнала

$$\dot{x}(t) = 1/2 + 2(A_1 \cos(2\pi t/T + \varphi_1) + A_3 \cos(6\pi t/T + \varphi_3)), \quad (3.148)$$

в котором начальные фазы, согласно соотношению  $\varphi = \arctg b/a$ , на основании выражений (3.146) и (3.147) равны:  $\varphi_1 = -\arctg(1 + \sqrt{2})$ ,  $\varphi_3 = -\arctg(\sqrt{2} - 1)$ .

На рис. 3.53 изображен сигнал  $\dot{x}(t)$ , восстановленный согласно (3.148). Ряд (3.144) образован в результате дискретизации периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов с амплитудой, равной единице, и относительной длительностью импульса  $q$ , равной  $q = T/\tau = 2$  (рис. 3.54).

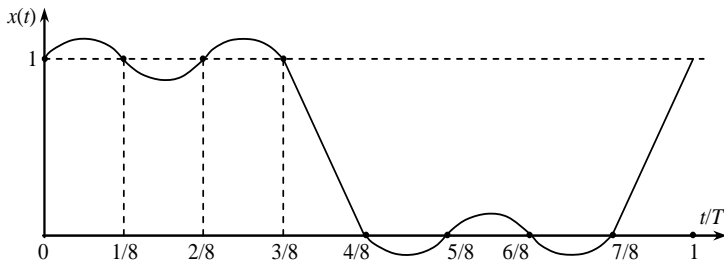


Рис. 3.53. Сигнал, восстановленный по коэффициентам ДПФ

Если вдвое уменьшить период дискретизации  $\Delta$ , т.е. вдвое увеличить объем выборки  $N$ , то качество восстановления прямоугольного импульса тригонометрическим рядом Фурье с коэффициентами ДПФ  $\dot{C}_0, \dot{C}_1, \dots, \dot{C}_{15}$  возрастает,

что вытекает из сравнения графиков рис. 3.53 и 3.55. Следует особо отметить, что восстановление непрерывного сигнала по формуле (3.148) является не приближенной, а точной операцией, вполне эквивалентной нахождению текущих значений сигнала с ограниченным спектром по его выборкам, которые образуют ряд Котельникова.

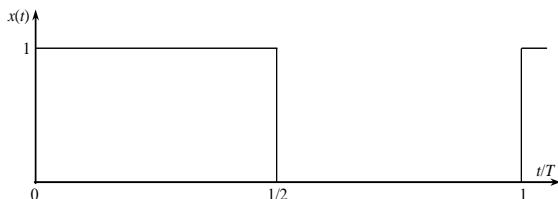


Рис. 3.54. Периодическая последовательность прямоугольных видеоимпульсов

Однако процедура, использующая ДПФ, в ряде случаев оказывается предпочтительней, поскольку приводит к конечным суммам гармоник, в то время как ряд Котельникова для периодического сигнала принципиально должен содержать бесконечное число членов.

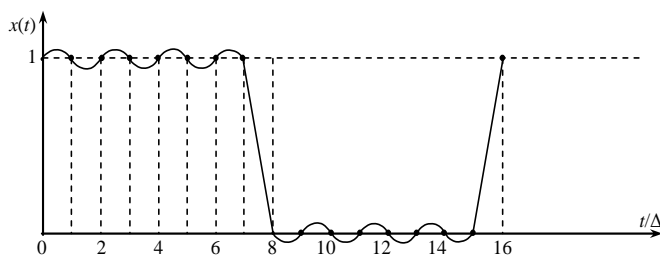


Рис. 3.55. Иллюстрация эффекта удвоения частоты дискретизации аналогового сигнала

Действительно, пусть наблюдается некоторая периодическая функция  $x(t) = x(t \pm mT)$ , где  $T$  - ее период, а  $m = 1, 2, \dots$ . Ранее было показано, что располагая парным числом  $N$  отсчетов этой функции на всем ее периоде, можно вычислить ее постоянную составляющую и первые  $N/2$  гармоники сигнала. Остальные гармоники содержатся в зеркальной отрицательной области частот (с соответствующими комплексно-сопряженными коэффициентами ДПФ) и не оказывают влияния на амплитудный спектр сигнала. Таким образом, при любом четном  $N$  число необходимых гармоник ДПФ составляет половину количества отсчетов. Это положение непосредственно вытекает из теоремы Котельникова. Действительно, верхнюю граничную частоту в спектре дискретного сигнала следует (в соответствии с теоремой Котельникова) находить из соотношения  $f_b = 1/2\Delta$ , где  $\Delta$  - период дискретизации периодического сигнала. И поскольку  $1/\Delta = F$  - частота дискретизации, которая, в свою очередь, связанная с частотой первой гармоники  $f_1$  соотношением  $F = Nf_1$ , то непосредственно получим  $f_b = (N/2)f_1$ , причем  $f_1 = 1/T$ , где  $T$  - период повторения периодического сигнала.

Таким образом, *подтверждена целесообразность применения ДПФ при аппроксимации периодических сигналов и его преимущества сравнительно с приближением периодических функций рядами Котельникова.*

---

### **Основные выводы**

---

Для теоретического исследования сигналов необходимо построить их математические модели.

Математическая модель сигнала являет собой функциональную зависимость, которая адекватно описывает изменение во времени физического состояния некоторого объекта.

Классификация сигналов выполняется на основании существенных признаков соответствующих математических моделей.

Различают детерминированные и случайные, действительные и комплексные, одномерные и многомерные, статические и динамические, бесконечные во времени и импульсные, периодические и одиночные, аналоговые и дискретные сигналы. Разновидностью последних являются цифровые сигналы, т.е. сигналы, дискретные не только во времени, но и в пространстве (по величине).

К самым простым типичным элементарным сигналам принадлежат гармонические и комплексно-экспоненциальные сигналы, прямоугольные и треугольные видеоимпульсы, ступенчатые, сигнум- и дельта-функции и др.

Известное в математике понятие скалярного произведения двух функций широко используется в теории спектрального анализа. Скалярным произведением двух функций называется интеграл от произведения этих функций. Границы интеграции определяются областью существования функций.

Скалярное произведение двух сигналов называется взаимной энергией этих сигналов. Полная энергия сигнала определяется скалярным произведением сигнала самого на себя. Другими словами, полная энергия сигнала равняется интегралу от квадрата функции, которая описывает математическую модель сигнала. Корень квадратный из энергии сигнала называется нормой сигнала. Нормируемыми сигналами (функциями) называются сигналы (функции), полная энергия которых равняется единице.

Два сигнала называются ортогональным, если их скалярное произведение равняется нулю. Бесконечная система действительных функций (сигналов) называется ортогональной, если скалярное произведение двух разных функций (сигналов) равняется нулю. При этом предусматривается, что энергия каждого сигнала из системы не равняется нулю. Это значит, что ни одна из функций, которые рассматриваются, не равняется нулю.

Бесконечную систему функций, попарно ортогональных друг другу и таких, которые имеют единичные нормы, называют системой ортонормированных функций или ортонормированным базисом.

Любой сигнал с конечной энергией можно подать в виде обобщенного

ряда Фурье. Обобщенным рядом Фурье называется бесконечная сумма произведений базисных функций и соответствующих им коэффициентов. Совокупность коэффициентов разложения образует спектр сигнала.

Коэффициенты разложения обобщенного ряда Фурье (спектр) часовой функции (сигнала) определяются скалярным произведением этого сигнала с соответствующими базисными функциями. Такой способ определения коэффициентов разложения обеспечивает минимум квадратичной ошибки аппроксимации сигнала конечномерным рядом Фурье.

Энергия сигнала равняется сумме энергий всех компонентов (гармоник), из которых состоит обобщенный ряд Фурье. Это значит, что энергия сигнала равняется сумме энергий спектральных составляющих, а квадрат модуля коэффициентов обобщенного ряда Фурье численно равняется той частице энергии сигнала, которая содержится в соответствующей составляющей (гармонике) сигнала.

Процесс получения полезной информации, содержащейся в сигнале, можно представить как аппаратное (или программное) определение числовых значений коэффициентов обобщенного ряда Фурье этого сигнала.

Все случайные сигналы и помехи являются непредсказуемыми. Таким образом, для случайных сигналов невозможно найти математическую формулу для расчета их мгновенных значений.

Все случайные явления, которые изучаются в теории вероятностей, можно разделить на три типа: случайные события; случайные величины; случайные процессы. Каждый из этих типов случайных явлений имеет свои особенности и характеристики. Случайным называют такое событие, которое в результате попытки может наступить или не наступить.

Величина, значение которой изменяется от попытки к попытке случайным образом, называется случайной. Для такой величины невозможно предусмотреть, какое значение она приобретет при конкретных условиях попытки.

Функция распределения вероятности показывает вероятность того, что случайная величина не превышает конкретного значения. Математическое ожидание является средним значением случайной величины. Дисперсия количественно характеризует меру разброса результатов отдельных попыток относительно среднего значения.

Случайные процессы бывают разных видов: нестационарные, стационарные, эргодические, гауссовские, марковские и др. Но в технике большинство случайных сигналов и помех принадлежат к стационарным эргодическим случайным процессам.

Флуктуационный шум наиболее характерен для большинства телекоммуникационных каналов и является стационарным эргодическим случайным процессом с гауссовым (нормальным) распределением вероятности.

Спектральная плотность мощности флуктуационного шума зависит от физической природы его образования, а также от точки, где он наблюдается.

Основными энергетическими характеристиками действительного сиг-

нала является его мощность и энергия.

Для случайных сигналов (помех) среднюю мощность можно рассчитать по спектральной плотности мощности.

Динамический диапазон сигнала характеризует границы изменения мгновенной мощности.

Коэффициентом амплитуды сигнала называется отношение его максимальной мощности к средней.

Под длительностью сигнала понимают интервал времени его существования. Вычисляется длительность как разница между временем окончания сигнала и временем его начала.

По энергетическим характеристикам определяется отношение сигнал/помеха, по ширине спектра сигнала устанавливается полоса пропускания канала связи как необходимая для неискаженной передачи информации.

Теоретически любые сигналы конечной протяженности во времени имеют бесконечно широкий спектр. Реальные технические устройства имеют конечную ширину полосы пропускания. При прохождении сигналов с бесконечно широким спектром через технические устройства происходит искажение спектра, который приводит к искажению формы входного сигнала.

Для неискаженного представления сигнала с ограниченным спектром последовательностью его дискретных отсчетов частота дискретизации  $F$  должна равняться удвоенной верхней частоте спектра сигнала.

Дискретные сигналы образуются в результате временной дискретизации непрерывных (аналоговых) сигналов. Шаг временной дискретизации выбирается постоянным.

Основным математическим аппаратом, который используется при спектральном анализе дискретных сигналов, является аппарат *Z-преобразований*, который играет относительно дискретных сигналов такую же роль, как и интегральное преобразование Фурье для непрерывных сигналов.

Основу *Z-преобразования* составляет интегральное преобразование Лапласа. К *Z-преобразованию* приходят в результате дискретизации всех функций времени в преобразовании Лапласа.

Спектр дискретных сигналов является периодической функцией частоты с интервалом периодичности  $\omega T = 2\pi$  даже в том случае, когда спектр его аналогового прототипа аperiodическая функция.

Любой сигнал с ограниченным спектром без искажений можно представить последовательностью его дискретных отсчетов при условии, что частота дискретизации не менее чем вдвое превышает наивысшую гармонику спектра аналогового сигнала.

Дискретное преобразование Фурье ставит в соответствие конечномерной выборке дискретных сигналов конечномерный спектр той же размерности, что и объем выборки входных сигналов. Гармоники дискретного спектра эквидистантно размещены на интервале от нуля до частоты дискретизации.

**Вопросы для самоконтроля**

---

1. Изобразите основные пространственно-временные модели сигнала.
2. Какие из двух типов сигналов (детерминированные или случайные) являются носителями сообщений?
3. Каким способом гармоническое колебание можно превратить в пару квадратурных сигналов?
4. Докажите взаимосвязь ступенчатой функции и дельта-функции.
5. В чем заключается условие нормирования и фильтровальное свойство дельта-функции?
6. Запишите общую формулу для скалярного произведения двух сигналов.
7. Запишите выражение для коэффициентов разложения обобщенного ряда Фурье.
8. Чему равняется сумма энергий всех гармоник сигнала?
9. Докажите оптимальность по минимуму квадратичной погрешности аппроксимации сигнала конечномерным рядом Фурье.
10. В чем заключается отличие между случайными и детерминированными сигналами?
11. Каким образом формируются математические модели случайных сигналов и помех?
12. Дайте определение случайных событий и их числовых характеристик.
13. Что такое случайные величины и их характеристики?
14. Дайте определение стационарным эргодическим процессам.
15. Запишите основные соотношения для нахождения корреляционной функции и спектральной плотности мощности.
16. Что такое белый шум?
17. Назовите основные числовые характеристики сигналов и помех.
18. Дайте определение мгновенной мощности.
19. Как найти энергетический спектр сигнала?
20. Рассчитайте среднюю мощность по спектру сигнала.
21. Как определяются уровни сигналов и помех?
22. Какие трудности возникают при определении длительности и ширины спектра сигнала или помехи?
23. Что является причиной искажения формы сигнала при его прохождении через реальные технические устройства?
24. Приведите математические модели идеальных низкочастотных и полосовых сигналов.
25. Назовите способы ортогонализации сигналов во временной и частотной области.
26. Как выбирается частота дискретизации сигнала с ограниченным спектром для его неискаженного представления последовательностью дискретных отсчетов?

27. *Запишите формулу ряда Котельникова и дайте обозначение его компонентов.*
28. *Каким способом генерируются отсчетные функции базиса Котельникова?*
29. *От каких факторов зависит ошибка аппроксимации сигналов ряда Котельникова?*
30. *Дайте определение интегрального преобразования Лапласа.*
31. *Назовите основные свойства преобразования Лапласа.*
32. *Назовите основные свойства Z-преобразования.*
33. *По каким причинам спектр дискретных сигналов становится периодическим даже в том случае, когда спектр аналогового прототипа апериодический?*
34. *В чем заключается «эффект наложения» спектров при дискретизации и какие способы его устранения?*

---

### ***Conclusions***

---

For theoretical study of signals it is necessary to build their mathematical models. Mathematical model of signal is a functional relationship that adequately describes temporal variation of the physical state of an object.

Signals classification is performed on the basis of essential attributes of appropriate mathematical models.

Distinction is made between deterministic and random, valid and complex, multivariate and univariate, static and dynamic, infinite in time and impulse, periodic and solitary, analog and discrete signals. A variation of the latter is digital signals, discrete not only in time but also in space.

The most typical elementary signals are harmonic and complex exponential signals, rectangular and triangular video impulses, stepped, signum- and delta- functions etc.

Well known mathematical definition of scalar product of two functions is widely used in the theory of spectral analysis. Scalar product of two functions is the integral of the product of these functions. Integration borders are defined by functions existence domain.

Scalar product of two signals is called mutual energy of these signals. Total energy of the signal is determined by scalar product of signal with itself. In other words, total energy of signal is equal to integral of the square of function that describes mathematical model of signal. Square root of signal energy is called the norm of signal. Normalized signals (functions) are signals (functions), which total energy equal to one.

Two signals are called orthogonal if their scalar product is equal to zero. Infinite system of valid functions (signals) is called orthogonal if scalar product of two different functions (signals) is equal to zero. It is envisaged that energy of each signal from system is not equal to zero. This means that none of the features that are

considered is equal to zero.

Infinite system of functions, pairwise orthogonal to each other, and functions that have single norm is called a system of orthonormal functions or an orthonormal basis.

Any signal with finite energy could be presented in the form of generalized Fourier series. Generalized Fourier series is an infinite sum of products of basic functions and corresponding coefficients. Set of expansion coefficients forms signal spectrum.

Expansion coefficients of generalized Fourier series (spectrum) time function (signal) are defined by scalar product of signal with corresponding basic functions. Such method of expansion coefficients determination provides minimum square error of signal approximation by finite Fourier series.

Signal energy is the sum of energies of all components (harmonics) that form generalized Fourier series. It means that signal energy is the sum of spectral components energies, and squared modulus of generalized Fourier series coefficients is numerically equal to signal energy particle that is contained in corresponding component (harmonic) of a signal.

Process of obtaining useful information, contained in signal, could be represented as hardware (or software) defining the numerical values of generalized Fourier series coefficients of signal.

All random signals and noises are unpredictable. Thus, for random signals it is impossible to find a mathematical formula to calculate their instantaneous values.

All random phenomena studied in theory of probability could be divided into three types: random events; random values; random processes. Each of these types of random phenomena has its own characteristics and features. An event is called random when it may or may not occur as a result of any attempt.

Quantity which value changes from an attempt to attempt randomly is called random. For this quantity it is impossible to predict what value it will obtain under specific conditions of attempt.

Probability distribution function shows probability that random quantity does not exceed a specific value. Mathematical expectation is the average value of a random quantity. Dispersion qualitatively characterizes a measure of results variability of individual attempts relative to the average value.

Random processes are of various kinds: non-stationary, stationary, ergodic, Gaussian, Markov etc. But in technics most of random signals and noises belong to stationary ergodic random processes.

Fluctuation noise is the most typical for the majority of telecommunication channels and it is a stationary ergodic random process with Gaussian (normal) probability distribution.

Spectral power density of fluctuation noise depends on physical nature of its formation, and also from the point where it is observed.

The main energy characteristics of a valid signal are its power and energy.

For random signals (noises), the average power can be calculated from spectral



power density.

Dynamic signal range characterizes the limits of instantaneous power variation.

Crest factor of signal is the ratio of its power peak to average.

Signal duration is a time interval of its existence. Duration is calculated as a difference between end time and start time of signal.

Necessary signal-to-noise ratio is determined by energy characteristics, based on communication channel bandwidth the signal spectrum width is set as a must for undistorted information transmission.

Theoretically, any signals with finite time length have infinitely wide spectrum. Real technical devices have a finite bandwidth. When signals with infinitely wide spectrum are passing through technical devices, spectrum distortion occurs, that inevitably leads to the distortion of input signal form.

For undistorted representation of signal with bounded spectrum as a sequence of its discrete samples, sampling frequency  $F$  should be equal to doubled upper frequency of signal spectrum.

Discrete signals are formed by temporal sampling of continuous (analog) signals. Temporal sampling step is selected as a constant.

The main mathematical apparatus that is used by spectral analysis of discrete signals is the apparatus of Z-transformation, which plays on relation to discrete signals, the same role as an integral Fourier transformation for continuous signals.

The basis of Z-transformation is integral Laplace transformation. Z-transformation is a result of all time functions in Laplace transformation.

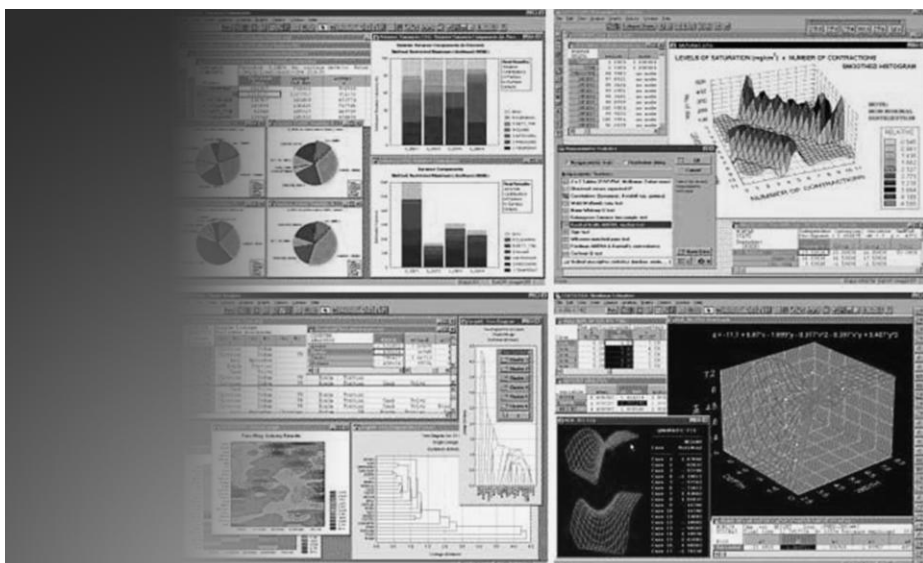
Discrete signal spectrum is a periodic function of frequency with periodicity interval  $\omega T = 2\pi$  even when spectrum of its analog prototype is an aperiodic function.

Any signal with a limited spectrum without distortions could be represented by sequence of its discrete samples on condition that sampling frequency at least twice bigger than the highest harmonic spectrum of analog signal.

Discrete Fourier transformation associates a finite sampling of discrete signals to a finite spectrum of the same dimension as the sampling size of the input signals. Harmonics of discrete spectrum are equidistantly allocated on a range from zero to the sampling frequency.

*Ключевые слова*

модель сигнала	model of signal
случайный сигнал	casual signal
помехи	hindrances
мощность	power
энергия	energy
спектральная плотность	spectral closeness
дискретизация	diskretisation



## МЕТОДЫ АНАЛИЗА ДАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

# 4

- 4.1. Применение математических методов в задачах измерений
- 4.2. Методы линейной вычислительной алгебры
- 4.3. Методы представления функций
- 4.4. Элементы теории дифференциальных и разностных уравнений

#### 4.1. Применение математических методов в задачах измерений

Современная математика стала языком науки и техники, с помощью которого формулируются законы природы, а также математические модели машин и процессов. С помощью «алфавита» этого языка (множества, векторные и функциональные пространства и т.п.) и грамматики (геометрических, алгебраических и аналитических преобразований) составляются соответствующие уравнения (математические модели). Это первый шаг в изучении всевозможных процессов и систем. Второй шаг заключается в решении этих уравнений. Такая методология является универсальной и применима к ИИС и информационно-измерительным процессам.

Интересно отметить следующее: если обоснование, новая символика, теория числовых множеств (натуральных, целых, рациональных, действительных, комплексных чисел), векторных и функциональных пространств, необходимых для построения математических моделей разрабатывались профессиональными математиками, то принципы, методы решения уравнений в большинстве случаев предлагались инженерами. И это не случайно: именно они, занимаясь конкретными задачами, первыми сталкиваются с новыми уравнениями, требующими решения и получения числового результата.

Математикам чаще всего остается именно теоретическое обоснование, обобщение и совершенствование инженерных методов, выявление границ их применимости и сокращение объема вычислений. В результате такого сотрудничества формулируются новые задачи для математиков и даются оценки возможностей применения разработанных инженерами методов расчета. Примером такого сотрудничества инженеров и математиков является изобретение волнового преобразования сигналов, амплитуда и частота которых зависят от времени. Инженерам пришлось дополнить классическое преобразование Фурье введением волновых функций, отличных от нуля на конечных отрезках времени. Значительно позже математики доказали, что эти функции образуют базис (систему координат в функциональном пространстве), и тем самым подтвердили законность разложения функций по таким базисам.

В практике инженера-метролога возникает необходимость обрабатывать данные измерений и оценивать их погрешности, разрабатывать новые процессы измерения и алгоритмы обработки экспериментальных данных. Для этого он должен владеть методами математического моделирования, т.е. уметь выбирать и строить соответствующие модели (алгебраические, геометрические, статистические), применять численные методы для нахождения качественных и количественных характеристик исследуемых объектов.

*Математическое моделирование* состоит из построения модели, т.е. вывода уравнений, связывающих параметры и переменные исследуемого объекта или процесса с параметрами и характеристиками информационных сигналов и решения этих уравнений. Такими уравнениями могут быть алгебраические, разностные и дифференциальные, а также системы линейных и нели-

нейных уравнений.

Если выбор множества числовых, векторных или функциональных величин полностью зависит от особенностей самого объекта или процесса, то выбор метода исследования модели зависит от знаний и мастерства инженера-исследователя.

Важной проблемой при создании математической модели является выбор базиса, в котором соответствующие уравнения имеют наиболее простой вид. Эта проблема занимает центральное место в линейной алгебре и теории функций. Решается она при помощи линейных преобразований (матричных или интегральных). Например, в собственном базисе матрица коэффициентов линейных уравнений имеет диагональную форму, что приводит к полному разделению переменных и решению задачи. Поэтому в инженерной практике широкое распространение получили матричные методы. Другой пример – преобразование Фурье переводит исходные данные из временной в частотную область и позволяет применить спектральные методы анализа. Переход на комплексную плоскость с помощью преобразования Лапласа позволяет решать линейные интегральные и дифференциальные уравнения алгебраическими методами.

Современные ИИС характеризуются многими переменными, поэтому допускают описание многомерными векторами или функциями. Уравнения, описывающие эти системы, часто оказываются нелинейными и не имеющими явного решения. Для многих систем вариации переменных ограничены небольшими интервалами, что допускает применение метода линеаризации модели или численные методы. Таким образом, для получения численных результатов необходимо, во-первых, решить задачу численного представления векторов и функций в определенном *базисе* – системе координат. Во-вторых, с помощью законов естественных и технических наук (физики, химии, электро- и радиотехники, метрологии и др.) построить уравнение (математическую модель задачи) и, в-третьих, найти его решение.

Проиллюстрируем возможности использования математического моделирования в задаче анализа электрических цепей.

**Пример.** Рассмотрим процесс построения математической модели для задачи нахождения электрического тока в последовательном *RLC*-контуре.

В соответствии со вторым законом Кирхгофа сумма падений напряжения на каждом из элементов цепи равна напряжению источника питания. Для данного контура эта сумма дается интегро-дифференциальным уравнением

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C_0} \int_0^t i(\tau) d\tau = e(t), \quad (4.1)$$

где  $i(t)$  – ток в цепи (искомая скалярная функция действительного аргумента  $t$ );  $L$ ,  $R$ ,  $C$ ,  $e(t)$  – соответственно параметры элементов цепи (индуктивность, активное сопротивление и емкость) и напряжение источника питания.

Продифференцируем обе части уравнения (4.1). Получим математическую модель *RLC*-контура в виде линейного дифференциального уравнения второго по-



**Густав Роберт Кирхгоф (Gustav Robert Kirchhoff)** – (1824–1887) –

выдающийся немецкий физик и математик. Внес значительный вклад в теорию упругости, термодинамику, теорию электрических цепей. Разработал приближенные методы решения задач математической физики. Открыл цезий (1860) и рубидий (1861). Ввел понятие абсолютно черного тела, открыл закон излучения, названный его именем. Труды по механике, математике, физике.

рядка:

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L} \frac{de(t)}{dt}. \quad (4.2)$$

Решение (4.2), т.е. нахождение тока, как функции времени  $i(t)$ , можно получить тремя методами: операционным (методом Хевисайда), матричным и числовым.

При фиксированной правой части уравнения, например,  $(1/L)de(t)/dt = \cos(t) [A/c^2]$ , начальных условиях  $i(0) = 1,0 [A]$ ,  $di(0)/dt = 1,0 [A/c]$ , и значениях коэффициентов  $R/L = 3, [Ом/Гн]$ ,  $1/LC = 2, [1/c^2]$ , решение операционным методом имеет следующий вид:

$$i(t) = 2,5e^{-t} - 1,6e^{-2t} + 0,1(\cos(t) + 3\sin(t)).$$

Если для описания изучаемого контура выбрать множество двумерных вектор-функций с искомым вектором  $y(t) = \begin{pmatrix} i(t) \\ di(t)/dt \end{pmatrix}$ , то уравнение (4.1) можно ставить в векторно-матричной форме (так называемой форме Коши)

$$dy(t)/dt = Ay(t) + f(t). \quad (4.3)$$

где  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{pmatrix}$ ,  $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ de(t)/Ldt \end{pmatrix}$ .

Уравнение (4.3) решается с помощью известной в теории дифференциальных уравнений формулы

$$y(t) = e^{At} \left[ y(0) + \int_0^t e^{-A\tau} f(\tau) d\tau \right],$$

где  $e^{At}$  - матричная экспонента;  $y(0) = \begin{pmatrix} i(0) \\ di(0)/dt \end{pmatrix}$  -

начальное значение вектора  $y(t)$ .

После соответствующих вычислений получаем

$$y(t) = \begin{pmatrix} 2,5e^{-t} - 1,6e^{-2t} + 0,1(\cos(t) + 3\sin(t)) \\ -2,5e^{-t} + 3,2e^{-2t} + 0,1(-\sin(t) + 3\cos(t)) \end{pmatrix},$$

где первая составляющая вектора  $y(t)$  равна току  $i(t)$ , а вторая –  $di(t)/dt$ . Результаты расчетов приведены на рис. 4.1. График показывает поведение тока в  $RLC$ -цепи при заданных параметрах элементов контура и начальных условиях: после окончания переходного процесса начина-

ется установившийся режим, обусловленный правой частью уравнения (4.2) – величиной  $\cos(t) / L$ .

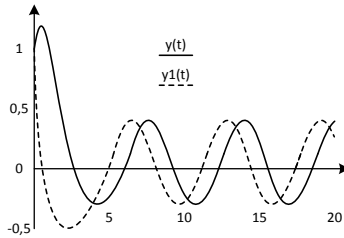


Рис. 4.1. График функций  $i(t)$  и  $di(t)/dt$

Уравнение (4.2) можно решить и численными методами (например, методом Рунге-Кутты). В этом случае решение представляется числовой таблицей, в которой каждому значению времени  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) соответствует значение тока  $i(t_k)$ .

**О точных и приближенных методах.** После того как математическая модель найдена, а это могут быть алгебраические уравнения или система линейных алгебраических уравнений, дифференциальные или разностные уравнения, возникает проблема построения решения этих уравнений, т.е. нахождения неявно заданных чисел, векторов или функций.

За последние 300 лет разработано много методов вычисления корней алгебраических уравнений, обращения матриц, дифференциальных и разностных операторов. Но упорядочение и создание общей теории вычислительных методов началось только в XIX в. Эта теория, как отдельный раздел математики возникла в начале XX в. В 1906 г. известный кораблестроитель, математик и механик, академик А. Н. Крылов прочитал впервые курс лекций о приближенных вычислениях, а в 1911 г. был издан первый учебник. Представленные в нем методы составляют основу современной вычислительной математики.

В зависимости от количества действий все методы решения уравнений делятся на два класса: точные и приближенные (итерационные).

*Точным* называют метод, который позволяет получить результат с помощью точной формулы или конечного числа действий (операций).

*Приближенные* методы используют приближенные формулы и процессы нахождения решения с бес-



**Алексей  
Николаевич  
Крылов  
(1863 - 1945),**

русский кораблестроитель, механик, математик. Один из создателей современной теории корабля, теории гироскопических приборов. Основатель общей теории приближенных методов вычислений. Автор многих методов вычислительной алгебры, теории приближения функций, теории дифференциальных уравнений и математической физики. Изобретатель интегратора, а также корабельных и артиллерийских приборов.

конечным числом операций.

Опыт показывает, что точные методы составляют исключения. Даже для линейных алгебраических уравнений точное решение существует в редких случаях, когда можно точно разделить два числа.

Например, неявная связь корней алгебраического уравнения с его коэффициентами дается формулами Виета, а явные выражения для корней через коэффициенты существуют только для уравнений первых четырех степеней. Для уравнений третьей и четвертой степени эти формулы настолько сложны, что их упрощают для конкретных случаев, или пользуются приближенными методами. В XIX в. было доказано, что алгебраические уравнения степени выше четвертой неразрешимы в радикалах, поэтому для нахождения корней разработаны приближенные методы. В зависимости от уровня вычислительной техники получали распространение все более совершенные численные методы. С появлением ЭВМ стали широко применяться графические методы, которые ранее имели вспомогательный характер.

Отсутствие точных вычислительных методов привело к тому, что в каждом разделе математики сложились свои подходы к решению различных задач, основанные, на методах последовательных приближений, разделении переменных, преобразованиях, рядах и методах возмущений. Рассмотрим два приближенных метода решения нелинейных уравнений.

**Пример.** Рассмотрим приближенный метод решения нелинейного уравнения

$$f(x) = 0, \quad (4.4)$$

для чего воспользуемся методом касательных, который состоит в линеаризации уравнения (4.4) и приведении его к виду  $x = \varphi(x)$ ,

а затем в построении итерационного процесса  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Пусть  $x_0$  – приближенное значения искомого корня  $x = a$ . Обозначим погрешность приближения через  $\varepsilon = a - x_0$ . Линейная часть разложения функции  $f(x)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0$  равна  $f(x_0) - \varepsilon f'(x_0) \approx 0$ . Из этого соотношения находим главную часть погрешности  $\varepsilon_0 = -f(x_0)/f'(x_0)$ , и первое улучшенное приближение будет иметь вид  $x_1 = x_0 + \varepsilon_0$ , а схема итерационного процесса примет форму  $x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Геометрическая интерпретация этого процесса представлен на рис. 4.2.

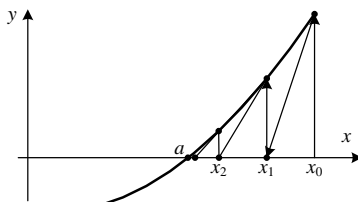


Рис. 4.2. Иллюстрация процесса вычисления корня  $a$

**О правилах приближенных числовых операций.** При численном решении прикладных задач возможно появление погрешностей трех типов.

Погрешность, связанная с приближенным характером исходной математической модели. Эта погрешность обусловлена такими причинами. Во-первых, невозможно учесть все факторы, которые действуют на объект или процесс, поэтому приходится пользоваться моделями идеализированных объектов, в которых взяты во внимание только главные свойства реального объекта. Во-вторых, коэффициенты математической модели рассчитываются по заданным экспериментальным параметрам физической модели, изготовленной с соответствующими допусками, т.е. всегда имеют определенную погрешность, которую практически невозможно устранить.

Погрешность метода связана со способом решения поставленной математической задачи и появляется в результате замены исходной математической модели другой или последовательностью других моделей. Эта погрешность может быть устранена благодаря выбору более удачной приближенной модели и соответствующего численного метода решения задачи.

Погрешность округления. Этот тип погрешности обусловлен невозможностью точного представления числа с помощью конечного числа цифр, а также необходимостью выполнять арифметические операции над числами, с количеством разрядов, определяемым используемой вычислительной техникой. В связи с тем, что окончательный результат вычислений не может быть получен совершенно точно, следует избегать бесполезного выписывания в полученном числовом результате лишних цифр, ограничиваясь лишь нужным количеством знаков.

Все три типа ошибок в сумме дают полную погрешность результата решения задачи.

Пусть  $A$  и  $a$  – два "близких" числа; будем считать  $A$  точным числом,  $a$  – его приближением.

Величина  $\Delta = |A - a|$  называется *абсолютной погрешностью приближенного числа  $a$* , а  $\delta = \Delta/|a|$  – его *относительной погрешностью*.

Числа  $\Delta_a$  и  $\delta_a$  такие, что  $\Delta_a \geq \Delta$  и  $\delta_a = \Delta_a/|a| \geq \delta$  называются *оценками* или *границами абсолютной и относительной погрешностей* соответственно.

Для большого количества однотипных вычислений вступают в силу *вероятностные* или *статистические* законы формирования погрешностей результатов вычислений. Например, методами теории вероятностей доказывалось, что математическое ожидание абсолютной погрешности суммы  $n$  слагаемых с одинаковым уровнем абсолютных погрешностей, при достаточно большом  $n$ , уменьшается в  $\sqrt{n}$  раз. В частности, если  $n > 10$  и все слагаемые округлены до  $m$ -го десятичного разряда, то для подсчета абсолютной погрешности суммы  $S$  применяют правило А. С. Чеботарева:

$$\Delta S \approx \sqrt{3n} \cdot 0,5 \cdot 10^{-m}.$$



Отличие в результатах классического и статистического подходов к оценке погрешности суммы рассмотрим на примере оценки погрешности среднего арифметического нескольких приближенных чисел.

Пусть  $\bar{x} = (x_1 + \dots + x_n)/n$  – среднее арифметическое ( $n > 10$ ) приближенных чисел (например, результатов измерений), имеющих одинаковый уровень абсолютных погрешностей:  $\Delta x_i = 0,5 \cdot 10^{-m}$ . Классическая оценка абсолютной погрешности величины  $x$  определяется как  $\Delta_x = (\Delta_{x_1} + \dots + \Delta_{x_n})/n = n \cdot 0,5 \cdot 10^{-m}/n = 0,5 \cdot 10^{-m}$ , то есть такая же, как и у исходных данных. В то же время по формуле (4.7) имеем:

$$\Delta_x \approx \sqrt{3n} \cdot 0,5 \cdot 10^{-m}/n = \sqrt{3/n} \cdot 0,5 \cdot 10^{-m} = \sqrt{3/n} \cdot \Delta_{x_i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Как видим, применение правила А. С. Чеботарева приводит к выводу о том, что при  $n \rightarrow \infty$  арифметическое усреднение результатов измерений или наблюдений увеличивает точность, что нельзя сказать на основе использования классической теории погрешностей.

Прямое применение вероятностно-статистических оценок погрешностей является достаточно сложным вопросом и не может быть рекомендовано для рядовых массовых вычислений. Однако именно такие оценки подкрепляют практические правила работы с приближенными числами, которые составляют основу так называемого технического подхода. Этот подход связан с именем академика А. Н. Крылова и формулируется следующим образом: *приближенное число должно записываться так, чтобы в нем все значащие цифры, кроме последней, были верными и только последняя была бы сомнительна, и при этом в среднем не более чем на одну единицу.*

*Значащими цифрами* числа в его позиционной записи, называются все цифры, начиная с первой ненулевой слева. Значащую цифру приближенного числа называют *верной*, если абсолютная погрешность числа не превышает единицы разряда, в котором стоит эта цифра (или половины единицы, в этом случае иногда применяется термин «верная» в узком смысле).

Чтобы результаты арифметических действий, осуществляемых над приближенными числами, записанными по принципу А. М. Крылова, также отвечали этому принципу, нужно придерживаться следующих правил.

1. При добавлении и вычитании приближенных чисел в результате нужно хранить столько десятичных знаков, сколько их в приближенном числе с наименьшим количеством десятичных знаков.

2. При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное число с наименьшим числом значащих цифр.

3. Результаты промежуточных расчетов должны иметь один-два запасных знака, которые затем должны быть отброшены.

**Пример.** Выполнить арифметические вычисления с приближенными числами :  $(36 \times 1,4) / 3,4$ .

Наименьшее число значащих цифр – две. В соответствии с правилом 3 при умножении сохраняем три значащие цифры:  $36 \times 1,4 = 50,4$ .

После деления  $50,4 : 3,4 \approx 14,8$  отбрасываем третью цифру (с округлением) и получаем ответ:  $(36 \times 1,4) / 3,4 \approx 15$ .

## 4.2. Методы линейной вычислительной алгебры

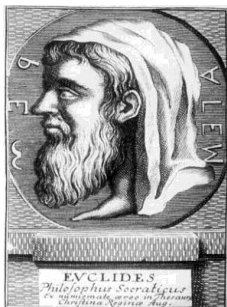
В данном разделе рассматривается обобщение числовых множеств, действий и функционального исчисления, определенных на них, а именно множества векторов и функций, образующих линейные (векторные) пространства. Действия в этих пространствах определяются линейными операторами, которые имеют представление в виде матриц или интегральных преобразований (в бесконечномерных функциональных пространствах).

Среди всех векторных пространств выделяются евклидовы пространства, в которых благодаря операции скалярного произведения можно определять длину (норму) векторов и их взаимное положение. Также благодаря скалярному произведению функций среди линейных функциональных пространств выделяются гильбертовы пространства.

Каждый элемент  $n$ -мерного векторного пространства характеризуется  $n$  числами (координатами), а функции из гильбертового пространства – бесконечным набором чисел. Значения координат вектора, или функции зависят от выбранного базиса (системы координат) и находятся с помощью скалярного произведения. Аналогично находятся параметры матрицы и интегрального преобразования, соответствующие линейным операторам. Эта процедура называется *координатизацией* или проектированием элементов пространства в выбранном базисе. Она пронизывает всю математику, ибо только после нахождения координат векторов, функций и операторов можно применять численные методы. Объем и сложность числовых расчетов зависят от выбранного базиса, поэтому в разделе подробно рассмотрен алгоритм ортонормирования произвольного базиса, а также задача о собственном базисе матрицы, в котором она имеет диагональную форму. Особое значение матричные методы имеют для решения систем линейных алгебраических уравнений, широко применяемых в обработке измерительной информации. При решении прикладных задач методами алгебры, анализа и теории дифференциальных уравнений часто возникает потребность в построении функций от матрицы. Построение таких функций упрощается, если воспользоваться собственным базисом матрицы.

**Евклидово пространство.** Геометрическая терминология доминирует в математике не случайно – почти все математические объекты имеют свой геометрический образ. **Например**, вектору, который можно представить в виде столбца или строки из  $n$  чисел, соответствует «отрезок» конечной длины в  $n$ -мерном пространстве.

Для одномерного пространства (его геометрический образ – прямая) каждый вектор определяется одним числом после введения в этом пространстве



**Евклид (Εὐκλείδης)  
Александрийский  
(325 - 265 до н.э.)**,

древнегреческий математик. В 13 книгах его труда «Начала» собраны и строго упорядочены с помощью аксиоматического метода достижения греческой математики за три века. В работу вошли: планиметрия и стереометрия, теория пропорций геометрических величин, теория чисел и числовых пропорций, теория иррациональных величин, геометрическая алгебра, а также методы исчерпывания и решения квадратичных уравнений. «Начала» определили дальнейшее развитие математики и уже 2300 лет остаются основой школьной математики.

системы координат (фиксируется нулевая точка и единичный вектор). На плоскости ( $n = 2$ ) и в обычном физическом пространстве ( $n = 3$ ) при фиксированной системе координат (базисе) вектор характеризуется соответственно двумя и тремя числами – координатами (проекциями на оси координат). Пространства размерности большей 3-х не имеют физического представления и каждый вектор в нем можно интерпретировать как совокупность параметров, характеризующих некоторый объект или процесс.

Вообще, *вектора*, как упорядоченные совокупности чисел (конечные или бесконечные), фактически представляют собой функции дискретного аргумента – каждому числу натурального ряда (номеру составляющей вектора) соответствует значение проекции вектора.

Рассмотрим основные положения теории линейных пространств.

*Линейность* пространства означает, что результат линейных операций – умножение элемента пространства (вектора или функции) на скаляр и сумма векторов – тоже элементы этого пространства.

Если линейное  $n$ -мерное пространство над множеством вещественных чисел  $\mathbf{R}$  обозначить через  $\mathbf{R}^n$ , векторы через  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ , скаляры –  $\alpha, \beta$ , то линейность пространства  $\mathbf{R}^n$  определяется соотношением  $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ .

Кроме векторных пространств свойством линейности обладает, например, множество матриц  $n \times n$  матриц –  $M_n$  ( $n^2$ -мерное линейное пространство), множество функций  $C[a, b]$  непрерывных на сегменте  $[a, b]$  (бесконечномерное линейное пространство).

*Подпространство  $\mathbf{R}^m$*  линейного пространства  $\mathbf{R}^n$  ( $m < n$ ) – подмножество элементов пространства  $\mathbf{R}^n$ , в котором для произвольных векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  из  $\mathbf{R}^m$  и скаляров  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  сумма  $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$  – элемент  $\mathbf{R}^m$ . Т.е. это множество оказывается линейным пространством.

*Линейная независимость* векторов означает, что среди них нет параллельных. Формальное определение этого свойства формулируется так:  $n$  векто-

ров линейно независимы, если равенство  $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = 0$  выполняется тогда и только тогда, когда все скалярные множители равны нулю, т.е. когда  $\alpha_k = 0$  ( $k=1 \dots n$ ).

**Критерий линейной независимости:**  $n$  векторов линейно независимы, если определитель матрицы  $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ , столбцами которой являются заданные векторы, не равен нулю.

**Пример.** Определить линейную независимость следующих векторов  $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.3 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Строим матрицу  $A$ , столбцами которой являются векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ :  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0.1 & 2 \\ -1 & 2 & 0.3 \\ 0.2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ .

Определитель матрицы  $|A| = 1,806$ , поэтому заданные векторы линейно независимы – среди них нет одинаково направленных векторов.

**Скалярное произведение** векторов  $\mathbf{x} = (x_k)$  и  $\mathbf{y} = (y_k)$  ( $k=1..n$ ) из  $\mathbf{R}^n$  определяется как

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad \text{или} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y},$$

где  $\mathbf{x}^T$  - вектор-строка (транспонированный вектор-столбец  $\mathbf{x}$ ). Скалярное произведение не зависит от порядка множителей  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .

Это позволяет определить норму (длину) вектора:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2. \quad (4.5)$$

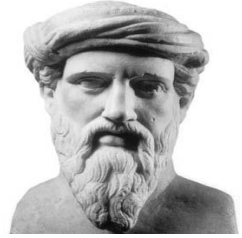
Равенство (4.5) является обобщенной  $n$ -мерной теоремой Пифагора. Угол  $\varphi$  между векторами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  определяется из соотношения

$$\cos(\varphi) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) / \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|. \quad (4.6)$$

Формула (4.6) позволяет находить проекцию одного вектора на другой и получить еще одно представление скалярного произведения

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos(\varphi).$$

Векторы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  **ортогональны** (угол между ними



**Пифагор (Πυθαγόρας Самосский (570 - 475 до н.э.),** древнегреческий философ и математик. Выделил основные направления математики – геометрию и арифметику после 30 лет знакомства с математикой Древнего Египта и Вавилона. Последовательно доказывал все утверждения, в том числе теорему, которая носит его имя.



**Йорген Педерсен  
Грамм  
(Jørgen Pedersen  
Gram)**

(1850 - 1916) – датский математик. Продолжал исследования П. Л. Чебышева по теории приближения функций. Предложил критерий линейной независимости и ортогональности системы векторов - матрицу, элементами которой являются всевозможные попарные скалярные произведения этих векторов (матрица Грама), а также алгоритм ортонормирования этой системы. Развил вычислительные методы математической статистики

равен  $0,5\pi$ ), если их скалярное произведение:  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ .

**Пример.** Найти нормы векторов  $\mathbf{a}^T = (0,1 \ 0 \ 0,8 \ 0,4)$ ,

$\mathbf{b}^T = (0 \ 1 \ -0,25 \ 1)$  и угол между ними. Находим нормы векторов по формуле (4.12)

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{0,1^2 + 0,8^2 + 0,4^2} = \sqrt{0,81} = 0,9$$

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{(\mathbf{b}, \mathbf{b})} = \sqrt{1 + 0,25^2 + 1} = \sqrt{2,25} = 1,5$$

По формуле (4.13) вычисляем косинус угла между заданными векторами:

$$\cos(\phi) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) / \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 0,8 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 1) / 0,9 \cdot 1,5 = 0 / 1,35 = 0.$$

Таким образом, векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  ортогональны.

*Евклидово пространство  $E_n$*  – это линейное пространство  $R^n$ , в котором введено скалярное произведение векторов.

*Координатизация.* Первый шаг для координатизации вектора  $\mathbf{x}$  из  $E_n$  состоит в построении базиса этого пространства.

*Базис* в пространстве  $E_n$  – это набор  $n$  линейно независимых векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ .

Множество всех базисов в  $E_n$  бесконечно: произвольная совокупность из  $n$  линейно независимых векторов образует базис в  $E_n$ . Среди них декартовой системе координат соответствует ортонормированный базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ , все векторы которого попарно ортогональны и нормированы, т.е. удовлетворяют условию

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases}$$

Линейность  $E_n$  и скалярное произведение дают возможность вычислять координаты векторов из  $E_n$  в выбранном базисе. Пользуясь операциями суммирования векторов и умножения их на скаляр, можно представить каждый вектор в виде суммы базисных векторов с соответствующими координатами вектора в этом базисе

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n, \quad (4.7)$$

где числа  $x_1, \dots, x_n$  - проекции вектора  $\mathbf{x}$  на соответствующие элементы базиса  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ . Столбцовая форма записи разложения вектора  $\mathbf{x}$  (4.7) имеет следующий вид:  $\mathbf{x}_a^T = \mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $\mathbf{x}_a$  - обозначение вектора

$\mathbf{x}$ , указывающее, что его координаты найдены в базисе  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ .

Возникает вопрос: в каком базисе процедура нахождения координат вектора наиболее проста? Чтобы ответить на этот вопрос рассмотрим пример.

**Пример.** Пусть в пространстве  $E_3$  задан вектор  $\mathbf{x}^T = (1, 1, 1)$ . Необходимо найти его координаты в базисе

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

В заданном базисе вектор имеет представление в виде разложения  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3$ .

Числа  $x_1, x_2, x_3$  являются координатами вектора  $\mathbf{x}$ .

Последовательно скалярно умножаем базисные векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  на вектор  $\mathbf{x}$

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}) = x_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) + x_2(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + x_3(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3),$$

$$(\mathbf{a}_2, \mathbf{x}) = x_1(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) + x_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) + x_3(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3),$$

$$(\mathbf{a}_3, \mathbf{x}) = x_1(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1) + x_2(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2) + x_3(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3).$$

Полученную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными перепишем в виде

$$\Gamma_a \mathbf{x}_a = \mathbf{b}, \quad (4.8)$$

где  $\Gamma_a = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & (a_1, a_3) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & (a_2, a_3) \\ (a_3, a_1) & (a_3, a_2) & (a_3, a_3) \end{pmatrix}$  -  $3 \times 3$  матрица Грама

векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ . Таким образом, чтобы найти координаты вектора  $\mathbf{x}$  в базисе  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  надо построить матрицу  $\Gamma_a$ , вектор  $\mathbf{b}$  и решить неоднородную систему линейных алгебраических уравнений, приведенную в формуле (4.8).

Обратим внимание на матрицу  $\Gamma_a$ : ее элементы – всевозможные скалярные произведения базисных векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ . Воспользовавшись матрицей  $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ , столбцами которой являются базисные векторы, матрицу Грама можно записать так

$$\Gamma_a = A^T \cdot A = \begin{pmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & a_1^T a_3 \\ a_2^T a_1 & a_2^T a_2 & a_2^T a_3 \\ a_3^T a_1 & a_3^T a_2 & a_3^T a_3 \end{pmatrix},$$

где  $A^T$  - транспонированная матрица  $A$ . По условию задачи



**Эрхард Шмидт**  
(Erhard Schmidt)  
(1876 - 1959) –

немецкий математик. Основные труды по теории приближения функций, функциональному анализу и интегральным уравнениям. В исследованиях использовал усовершенствованный алгоритм Грама, который в дальнейшем получил название алгоритм Грама - Шмидта.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ а матрица Грама } - \Gamma_a = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Определитель матрицы}$$

$|A| = 1$  и  $|\Gamma_a| = |A^T| \cdot |A| = 1$ , т.е. векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  – линейно независимы. Вычисля-

ем вектор  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  и находим решение этой системы:  $x_a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**Ответ:** в базисе  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  заданный вектор  $\mathbf{x}$  имеет координаты:  $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 2$ .

Обратимся еще раз к матрице Грама. Если бы базисные векторы были ортонормированы, то матрица Грама стала бы единичной –  $\Gamma_a = I$ , и координаты вектора  $\mathbf{x}$  находились бы непосредственно как скалярные произведения

$$x_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{x}), \quad x_2 = (\mathbf{e}_2, \mathbf{x}), \quad x_3 = (\mathbf{e}_3, \mathbf{x})$$

без решения системы линейных алгебраических уравнений. Следовательно, наиболее простая процедура нахождения координат вектора имеет место в ортонормированном базисе. Такой базис в  $\mathbf{E}_n$  можно построить с помощью алгоритма Грама - Шмидта.

**Алгоритм ортонормирования Грама - Шмидта** позволяет преобразовать  $n$  произвольных линейно независимых векторов  $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1}^n$  в пространстве  $\mathbf{E}_n$  в ортонормированный базис  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^n$ . Сначала следует убедиться в линейной независимости векторов  $\mathbf{a}_k$ . Для этого строим матрицу Грама  $\Gamma_a = A^T \cdot A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ , где матрица  $A$  образована из заданных вектор-столбцов  $\mathbf{a}_j (j=1, \dots, n)$ . Векторы  $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1}^n$  линейно независимы, если  $|\Gamma_a| = |A|^2 \neq 0$ .

Алгоритм Грама - Шмидта на  $k$ -ом шаге состоит в последовательном проектировании вектора  $\mathbf{a}_k$  на  $(k-1)$  уже ортонормированного вектора  $\mathbf{e}_j (j=1 \dots k-1)$  и в повороте  $\mathbf{a}_k$  таким образом, чтобы он стал ортогональным ко всем этим векторам. На первом шаге алгоритма выбирается произвольный вектор (например, вектор с наибольшим числом нулевых координат).

Выберем первый вектор  $\mathbf{a}_1$  и обозначим его  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{a}_1$ , тогда первый искомый вектор  $\mathbf{e}_1$  нового базиса получим, нормируя  $\mathbf{q}_1$ :  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{q}_1 / r_{11}$ , где  $r_{11} = \|\mathbf{q}_1\| = \sqrt{(\mathbf{q}_1, (\mathbf{q}_1))}$  – норма вектора  $\mathbf{q}_1$ . На втором шаге принимаем  $\mathbf{q}_2 = \mathbf{a}_2 - r_{21}\mathbf{e}_1$ , где  $r_{21} = (\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1)$ , и вектор  $\mathbf{q}_2$  ортогонален вектору  $\mathbf{e}_1$ , так как

$$(\mathbf{q}_2, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1) - r_{21}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 0 \Leftarrow (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1, r_{21} = (\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1).$$

Это преобразование вектора  $\mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{e}_2$  проиллюстрировано на рис. 4.3.

Завершается второй шаг нормированием вектора  $\mathbf{q}_2$ :  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{q}_2 / r_{22}$ , где  $r_{22} = \|\mathbf{q}_2\|$ . Третий шаг осуществляется аналогично второму: строится вектор

$q_3$  ортогональный уже найденным  $e_1$  и  $e_2$ :  $q_3 = a_3 - r_{31}e_1 - r_{32}e_2$ ,  $r_{31} = (a_3, e_1)$ ,  $r_{32} = (a_3, e_2)$ .

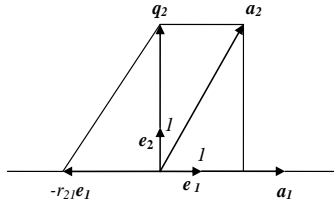


Рис. 4.3. Преобразование вектора  $a_2 \rightarrow e_2$

Далее вектор  $q_3$  нормируется и получают третий вектор искомого базиса  $e_3 = q_3 / r_{33}$ . На  $k$ -ом шаге имеем:  $q_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} (a_k, e_j) e_j$ ,  $e_k = q_k / r_{kk}$ . Наконец, на последнем  $n$ -м шаге находим  $q_n = a_n - \sum_{j=1}^{n-1} (a_n, e_j) e_j$ ,  $e_n = q_n / r_{nn}$ . Проверка ортогональности построенных векторов проводится с помощью матрицы Грама. Для этого составляем из векторов  $\{e_k\}_{k=1}^n$  матрицу

$$E = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n)$$

и строим матрицу Грама для нового базиса:  $\Gamma_e = E^T \cdot E$ , которая должна равняться единичной матрице  $I$  в случае, если алгоритм применен верно.

**Пример.** Необходимо ортонормировать векторы

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Строим матрицу Грама для заданных векторов:

$$\Gamma_a = A^T \cdot A, \quad \Gamma_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad |\Gamma_a| = |A|^2 = 1,$$

т. е. векторы  $a_1, a_2, a_3$  – линейно независимы, неортогональны и ненормированы.

*I шаг.* Принимаем  $q_1 = a_1$ ;  $e_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

*II шаг.*  $q_2 = a_2 - (a_2, e_1)e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e_2 = q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



$$\begin{aligned} \text{III шаг. } q_3 &= a_3 - (a_3, e_1)e_1 - (a_3, e_2)e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для нового базиса  $e_1, e_2, e_3$  матрица  $E = (e_1, e_2, e_3)$  равна единичной матрице, следовательно  $\Gamma_e = E^T \cdot E = I$ , то есть найденный базис – ортонормированный.

Как сказано выше, выбор базиса и процесс *координатизации* требуют проведения некоторых операций, связанных с преобразованиями векторов. Эти преобразования приводят к понятию *линейного оператора*.

**Линейные операторы и матрицы.** Соотношение (4.8) между векторами  $b$  и  $x_a$  можно интерпретировать как поворот вектора  $x_a$  или как представление этого вектора в новом базисе. В первом случае речь идет о линейном преобразовании одного вектора в другой, во втором – новое координатное представление исходного вектора. Обе интерпретации эквивалентны и объединяются понятием линейного оператора.

*Оператором*  $A$ , действующим в линейном пространстве  $E_n$  (или преобразованием линейного пространства  $E_n$ ), называется функция, которая каждому вектору  $x$  из  $E_n$  ставит в соответствие некоторый вектор  $y$  из  $E_n$ .

Вектор  $y$  называется образом вектора  $x$  при действии оператора  $A$ , а сам вектор  $x$  – прообразом вектора  $y$ :

$$y = A \cdot x. \tag{4.9}$$

Оператор  $A$  называется *линейным*, если для произвольных элементов  $x_1$  и  $x_2$  из  $E_n$  и чисел  $\alpha, \beta$  выполняется равенство

$$y = A \cdot (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) = \alpha \cdot A \cdot x_1 + \beta \cdot A \cdot x_2.$$

**Действия над линейными операторами.** *Суммой*  $A + B$  линейных операторов  $A$  и  $B$  в линейном пространстве  $E_n$ , называется оператор  $C$ , действие которого на произвольный вектор  $x$  из  $E_n$  задается равенством

$$C \cdot x = (A + B) \cdot x = A \cdot x + B \cdot x.$$

Сумма двух линейных операторов является линейным оператором (матрица суммы линейных операторов равна сумме матриц этих операторов).

*Произведением* линейного оператора  $A$  на число  $\alpha$  является оператор  $B$ , действие которого на любой вектор  $x$  из  $E_n$  задается равенством

$$B \cdot x = (\alpha \cdot A) \cdot x.$$

Произведение линейного оператора  $A$  на число также является линейным оператором. Все линейные операторы, действующие в линейном пространстве  $E_n$ , с введенными операциями сложения операторов и умножения оператора на число образуют *линейное пространство*.

Произведением линейных операторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в пространстве  $E_n$ , является оператор  $\mathbf{C}$ , действие которого заключается в последовательном действии операторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$  на любой элемент  $\mathbf{x}$  из  $E_n$  и задается равенством

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}).$$

Произведение линейных операторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  является линейным оператором (матрица  $\mathbf{C}$  произведения операторов равна произведению матриц этих операторов  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ ).

Операция произведения операторов существенно отличается от умножения чисел тем, что произведение может изменяться при изменении порядка сомножителей, т.е. умножение операторов некоммутативно:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ .

Линейный оператор  $\mathbf{B}$  называется *обратным* линейному оператору  $\mathbf{A}$ , если выполняется равенство  $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  – тождественный оператор. Оператор обратный  $\mathbf{A}$ , обозначается символом  $\mathbf{A}^{-1}$ . Для того чтобы существовал обратный оператор линейному оператору  $\mathbf{A}$ , необходимо и достаточно, чтобы матрица оператора  $\mathbf{A}$ , которая соответствует этому оператору в фиксированном базисе пространства  $E_n$ , была невырожденной.

Ниже представлены примеры линейных операторов.

1) Ноль-оператор  $\mathbf{A}_0$  ставит в соответствие каждому элементу  $x \in E_n$  нулевой элемент  $\mathbf{A}_0 x = 0$ , где  $0$  –  $n$ -вектор, все координаты которого нулевые.

2) Тождественный или единичный оператор  $\mathbf{I}$  каждому элементу  $x \in E_n$  ставит в соответствие тот же элемент:  $\mathbf{I}x = x$

3) Скалярный оператор  $\mathbf{A} = \alpha \mathbf{I}$  с коэффициентом  $\alpha$  задается равенством

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x}.$$

4) Оператор поворота  $\mathbf{A}_\varphi$  на угол  $\varphi$  в пространстве  $E_2$  (на плоскости) при фиксированном базисе представляется матрицей

$$\mathbf{A}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

**Представление линейных операторов матрицами.** Пусть  $\mathbf{A}$  – линейный оператор, действующий в линейном пространстве  $E_n$  и  $\{e_k\}_{k=1}^n$  – базис в этом пространстве. образом вектора  $\mathbf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$  под действием оператора  $\mathbf{A}$  является вектор  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$  (4.18). Подействуем оператором  $\mathbf{A}$  на базисные элементы разложения вектора  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{y} = x_1 \mathbf{A}e_1 + x_2 \mathbf{A}e_2 + \dots + x_n \mathbf{A}e_n \quad (4.10)$$

и разложим образы базисных элементов  $\mathbf{A}e_k$  ( $k = 1 \dots n$ ) в том же базисе:

$$\mathbf{A}e_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n,$$

$$\mathbf{A}e_2 = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n,$$

$$\mathbf{A}e_n = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \dots + \alpha_{nn}e_n.$$

После подстановки выражений для  $\mathbf{A}e_k$  в разложение вектора  $\mathbf{y}$  (4.10)



Систему уравнений (4.12) можно переписать в другой форме

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)C, \quad (4.13)$$

где  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ ,  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  – строки, элементы которых – векторы нового и старого базисов соответственно. Пользуясь этой записью легко найти связь между координатами вектора  $x$  в старом и новом базисах:

$$x = (e_1, e_2, \dots, e_n)x_e = (f_1, f_2, \dots, f_n)x_f = (e_1, e_2, \dots, e_n)Cx_f.$$

Сравнивая первое и последнее равенство, получаем зависимость

$$x_e = Cx_f,$$

где  $x_e, x_f$  – векторы-столбцы с координатами вектора  $x$  в старом и новом базисах соответственно.

Из линейной независимости элементов базиса  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  следует линейная независимость столбцов матрицы, т.е.  $C \neq 0$ . Поэтому существует обратная матрица – матрица преобразования координат при переходе от базиса  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  к базису  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  т.е.

$$x_f = C^{-1} \cdot x_e.$$

Теперь, имея соотношение (4.30), находим координатное представление оператора  $A$  в новом базисе. Для этого сначала представим выражения векторов  $x_e, y_e$  через их координаты в новом базисе по формуле (4.13) в (4.12), а дальше умножаем обе части полученного равенства на  $C^{-1}$  и получаем

$$y_f = C^{-1} \cdot A_e \cdot C \cdot x_f = A_f \cdot x_f.$$

Представления оператора  $A$  в новом и старом базисах связаны следующим образом

$$A_f = C^{-1} \cdot A_e \cdot C.$$

Преобразование (4.34) называется *преобразованием подобия*. Оно играет выдающуюся роль в матричной алгебре и будет рассмотрено подробнее.

**Матричная алгебра  $M_n$ .** Множество всех квадратных матриц образует  $n^2$ -мерное линейное пространство. Кроме того, в этом линейном пространстве определено произведение матриц, поэтому оно еще называется *матричной алгеброй*, и обозначается через  $M_n$ .

Мы уже познакомились с записью матрицы в виде  $A = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ , где  $a_{jk} - n^2$  действительных или комплексных чисел. Первый индекс  $j$  означает номер строки, а второй индекс  $k$  – номер столбца, на пересечении которых стоит  $jk$ -й элемент. Т.е. матрица  $A$  имеет  $n$  строк и  $n$  столбцов.

Две матрицы  $A = (a_{jk})$  и  $B = (b_{jk})$  называются *равными* ( $A = B$ ), если все их элементы с одинаковыми индексами равны:  $a_{jk} = b_{jk}$ .

*Суммой* (разностью)  $n \times n$ -матриц  $A = (a_{jk})$  и  $B = (b_{jk})$  называется мат-

рица  $C = (c_{jk})$ , элементы которой равны суммам (разностям) соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$ :  $c_{jk} = a_{jk} \pm b_{jk}$ ,  $C = A \pm B$ .

Произведением  $n \times n$ -матрицы  $A$  на число  $\lambda$  называется  $n \times n$  матрица  $B = (b_{jk})$ , элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы  $A$  на число  $\lambda$ :  $b_{jk} = \lambda a_{jk}$ ;  $B = \lambda A$ .

Если в матрице  $A = (a_{jk})$  поменять местами строки и столбцы, не меняя их порядка (т.е. первая строка станет первым столбцом и т. д.), тогда получим матрицу, которая называется *транспонированной* по отношению к матрице  $A$ , и обозначается  $A^T$ . Операция транспонирования (т.е. переход от матрицы  $A$  к матрице  $A^T$ ) обладает следующими свойствами:

1.  $(A + B)^T = A^T + B^T$ .
2.  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ .
3.  $(AB)^T = B^T A^T$ .

Нам уже известно, что последовательному применению двух операторов  $B$ ,  $A$  к одному и тому же вектору в фиксированном базисе соответствует произведение матриц  $A$  и  $B$ . Его определение таково: произведением матрицы  $A = (a_{jk})$  на матрицу  $B = (b_{jk})$  называется матрица  $C = A \cdot B = (c_{jk})$ , элементы которой имеют вид  $c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \dots + a_{jn}b_{nk} = \sum_{i=1}^n a_{ji}b_{ik}$ , т.е.  $jk$ -й элемент матрицы-произведения  $C$  равен скалярному произведению  $j$ -й строки матрицы  $A$  на  $k$ -й столбец матрицы  $B$ .

Еще раз отметим, что умножение матриц некоммутативно:  $AB \neq BA$ . Это главное отличие действий с матрицами от действий с числами. Исключением из этого правила являются диагональные матрицы (в частности, скалярные матрицы) и множество матриц, порожденное степенями одной матрицы. Относительно произведения эти множества ведут себя как обычные числа. Например, матрица  $A$  коммутирует со всеми своими степенями  $A^k$  (для положительных и отрицательных  $k$ ), а также с матричными функциями от  $A$ . Отметим, что матрицы  $A$  и  $A^T$  обычно не коммутируют.

**Классификация, преобразования и факторизация матриц.** Рассмотрим какие-либо  $r$  строк и  $r$  ( $r \leq n$ ) столбцов матрицы  $A$ . Находящиеся на их пересечении элементы образуют квадратную  $r \times r$ -матрицу. Ее определитель называется *минором* порядка  $r$  матрицы  $A$ .

Число  $r$  называется *рангом* матрицы  $A$ , если в матрице есть минор порядка  $r$ , отличный от нуля, а все ее миноры более высокого порядка (если таковые имеются) равны нулю. Обозначение —  $\text{rang} A = r$ . Ранг матрицы определяет количество линейно независимых строк (столбцов) матрицы.

Не изменяют ранга матрицы следующие операции над строками (такие операции называются *элементарными*):

- а) перестановка столбцов;
- б) умножение столбца на число не равное нулю;
- в) добавление к столбцу линейной комбинации других столбцов;
- г) вычеркивание нулевого столбца;
- д) вычеркивание столбца, равного линейной комбинации других столбцов.

Аналогичные операции над строками матрицы тоже не меняют ее ранга.

**Типы матриц.** В зависимости от результата применения к матрице операций умножения, транспонирования, обращения, сопряжения (сочетание операций транспонирования и замены комплексных элементов на комплексно сопряженные, если матрица имеет комплексные элементы) выделяются следующие типы матриц:

тождественная (единичная)  $I$ :  $IA = AI = A$ ;

скалярная  $\lambda I$ ;

диагональная:  $D = (d_{11}, \dots, d_{nn})$ ,  $d_{jk} = 0$  при  $j \neq k$ ;

нулевая  $O$  – все ее элементы равны нулю;

обратная  $A^{-1}$ :  $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ ;

симметричная  $A^T = A$ ;

кососимметричная  $A^T = -A$ ;

комплексно сопряженная  $\bar{A} = (\bar{a}_{jk})$ , где  $\bar{a}_{jk}$  - комплексно сопряженное число к  $a_{jk}$ ;

сопряженная  $\bar{A}^T = A^*$ ;

эрмитова  $A^* = A$ ;

косоэрмитова  $A^* = -A$ ;

ортогональная  $Q^T = Q^{-1}$  или  $Q^T Q = I$ , если все элементы матрицы  $Q$  - действительные;

унитарная  $U^* = U^{-1}$  или  $U^* U = I$ , если элементы  $U$  - комплексные;

идемпотентная ( проектор )  $A^2 = A$ ;

инволютивная  $A^2 = I$ .

**Алгебраическая проблема собственных значений (АПСЗ).** Как элемент  $n^2$ -мерного линейного пространства, каждая матрица может быть представлена в виде суммы  $n^2$  матриц:

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \dots + a_{1n}E_{1n} + a_{21}E_{21} + \dots + a_{m-1}E_{m-1} + a_{nn}E_{nn} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} E_{jk} ,$$

где  $E_{jk}$  -  $n \times n$  матрицы ( $j, k = 1 \dots n$ ), все элементы которых нулевые кроме одного: на пересечении  $j$ -й строки и  $k$ -го столбца стоит единица. Эти матрицы образуют базис пространства  $M_n$ .

Для больших значений  $n$  такое представление очень громоздко, и поэтому возникает вопрос: можно ли найти такой базис в  $E_n$ , на векторы которо-

го действует оператор  $\mathbf{A}$ , и в этом базисе оператор представляется матрицей  $A$  с минимальным числом элементов отличных от нуля. Оказывается, что такой базис существует, и почти все линейные операторы в таком базисе имеют представление в виде диагональной матрицы

$$D = \sum_{j=1}^n \lambda_j E_{jj} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где  $D$  – диагональная матрица, отвечающая матрице  $A$  в новом базисе.

Поиски методов построения базиса пространства  $E_n$ , в котором матрица  $A$  оператора  $\mathbf{A}$  имеет простейшую (диагональную) форму, составляют АПСЗ. В векторно-матричном виде она формулируется следующим образом: для заданной матрицы  $A$  найти такой вектор  $\mathbf{x}$ , чтобы выполнялось соотношение

$$A \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}, \tag{4.14}$$

то есть, действие матрицы  $A$  на вектор  $\mathbf{x}$  оставляет неизменным его направление, а изменяет только его длину (норму) с коэффициентом пропорциональности  $\lambda$ , где  $\lambda$  в общем случае – комплексное число.

Обе части равенства (4.14) линейно зависят от вектора  $\mathbf{x}$ , поэтому оно может быть переписано в виде системы линейных однородных уравнений

$$(A - \lambda I) \mathbf{x} = B(\lambda) \mathbf{x} = 0, \tag{4.15}$$

где  $n \times n$  - матрица  $B(\lambda) = A - \lambda I$ ;  $0$  -  $n$ -мерный вектор, все координаты которого равны нулю;  $\lambda$  - пока неопределенный числовой параметр.

Нас интересуют ненулевые решения системы (4.15). Необходимое и достаточное условие их существования – это нулевое значение определителя матрицы  $B(\lambda)$

$$|B(\lambda)| = |A - \lambda I| = 0. \tag{4.16}$$

Условие (4.16) относительно параметра  $\lambda$  представляет собой алгебраическое уравнение степени  $n$ :

$$|A - \lambda I| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \tag{4.17}$$

Согласно основной теореме об алгебраических уравнениях, уравнение (4.17) имеет  $n$  корней, а это означает, что условие (4.16) выполняется при  $n$  значениях  $\lambda$ .

Уравнение (4.17) называется *характеристическим уравнением*, а его корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  - *собственными значениями*, или *спектром* матрицы  $A$ .

Придавая параметру  $\lambda$  в системе (4.15) последовательно значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , получаем  $n$  систем линейных однородных алгебраических уравнений, для которых находим соответствующие  $n$  решений  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ , которые называются *собственными векторами* матрицы  $A$ .

**Матричное уравнение АПСЗ.** Все  $n$  систем (4.15) с фиксированным  $\lambda = \lambda_k$  ( $k = 1..n$ ), каждая из которых состоит из  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными, можно представить одним матричным линейным уравнением

$$A \cdot X = X \cdot D, \quad (4.18)$$

где  $X$  -  $n \times n$  матрица, столбцами которой являются векторы-столбцы  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , называется *собственным базисом* матрицы  $A$ ;  $D$  - диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные значения матрицы  $A$ .

Большинство матриц алгебры  $M_n$  приводится к диагональному виду. Исключение составляют некоторые матрицы с кратными собственными значениями, которые приводятся к двухдиагональному виду. Такие матрицы почти не встречаются в инженерной практике, в частности, в связи с тем, что элементы матриц реальных систем известны приближенно, а совсем небольшое изменение даже одного элемента таких матриц делает ее диагонализируемой.

**Подобные матрицы.** Все собственные векторы матрицы  $A$  (столбцы собственного базиса  $X$ ) линейно независимы, поэтому матрица  $X$  невырожденная и имеет обратную. Умножив обе части равенства (4.18) слева на матрицу  $X^{-1}$ , получим представление матрицы  $D$  через матрицы  $A$  и  $X$ :

$$D = X^{-1} A X.$$

Переход от матрицы  $A$  к  $D$  в соотношении (4.43) называется *преобразованием подобия*, а матрицы  $A$  и  $D$  называются *подобными*. Главная особенность преобразования подобия состоит в том, что оно не изменяет спектр матрицы  $A$ , т.е. спектр матриц  $A$  и  $D$  одинаков. Если умножить обе части равенства (4.18) на матрицу  $X^{-1}$  справа, получим представление матрицы  $A$  в виде произведения трех матриц

$$A = X \cdot D \cdot X^{-1}. \quad (4.19)$$

Все невырожденные матрицы в матричной алгебре  $M_n$  образуют бесконечное множество, поэтому матрицы вида  $B = SDS^{-1}$ , где матрица  $D$  - постоянная, а матрица  $S$  пробегает все невырожденные матрицы из  $M_n$ , подобны матрице  $A$ . Таким образом матрицы, имеющие спектр одинаковый со спектром  $A$ , образуют также бесконечное множество.

Еще одно множество матриц, связанное с матрицей  $A$ , можно получить, если в равенстве (4.19) матрице  $D$  придавать значения всех диагональных матриц из  $M_n$  при постоянной матрице  $X$ . Это множество интересно тем, что ее матрицы имеют собственный базис  $X$  одинаковый с базисом матрицы  $A$ , и поэтому они коммутируют между собой.

### Методы решения АПСЗ.

**Прямой метод.** Классический прямой метод нахождения собственных векторов и собственных значений матрицы (линейного оператора) заключается в решении системы линейных алгебраических уравнений с параметром  $\lambda$  (4.15). Он состоит из последовательного нахождения корней характеристического уравнения (4.17) и решения системы однородных уравнений вида  $(A - \lambda_k I)x_k = 0$  для каждого собственного значения  $\lambda_k$  ( $k = 1..n$ ).



**Пример.** Найти собственные значения и собственный базис матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Строим характеристическое уравнение матрицы

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 \cdot 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

2. Находим собственные значения матрицы  $A$  – корни характеристического уравнения:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ .

3. Решаем две системы однородных линейных алгебраических уравнений, отвечающих собственным значениям матрицы  $\lambda_1, \lambda_2$ .

$$(A - \lambda_1 I)x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}x_1 = 0, \quad (A - \lambda_2 I)x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}x_2 = 0.$$

Решения  $-x_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $x_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , где  $c_1, c_2$  – произвольные постоянные.

Принимая  $c_1 = c_2 = 1$ , получаем собственный базис матрицы  $A$   $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

Выполним проверку с помощью формулы (4.19)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = A$$

**Методы факторизации.** Современные пакеты математических программ используют приближенные итерационные алгоритмы решения АПСЗ, базирующиеся на приведении матрицы к подобной ей треугольной матрице. Особенно распространены алгоритмы, использующие метод факторизации матриц – разложение матрицы на матричные множители.

**LU-алгоритм.** Пусть матрица представлена в виде  $A = A_0 = L_0 U_0$ , где  $L_0$  и  $U_0$  соответственно нижняя и верхняя треугольные матрицы.

Поменяем  $L_0$  и  $U_0$  местами. Обозначим  $A_1 = U_0 L_0$ , тогда  $U_0 = A_1 L_0^{-1}$ . Подставив это выражение матрицы  $U_0$  в равенство  $A_0 = L_0 U_0$ , получим новое представление  $A = L_0 A_1 L_0^{-1}$ , то есть, матрицы  $A$  и  $A_1$  связаны преобразованием подобия и, значит, их собственные значения совпадают.

Если матрица  $A_1$  может быть представлена в виде произведения нижней и верхней треугольных матриц, а именно  $A_1 = L_1 U_1$ , то положив  $A_2 = U_1 L_1$  и найдя отсюда  $U_1 = A_2 L_1^{-1}$ , аналогично предыдущему получим  $A_1 = L_1 A_2 L_1^{-1}$ .

Итак, матрица  $A_2$  подобна  $A_1$  и поэтому подобна матрице  $A$ .

Суперпозиция этих двух преобразований дает выражение  $A$  через  $A_2$ :

$$A = L_0 L_1 A_2 L_1^{-1} L_0^{-1} = L_0 L_1 A_2 (L_0 L_1)^{-1},$$

что непосредственно подтверждает подобие матриц  $A$  и  $A_2$ .

Такой процесс построения теоретически бесконечной последовательности подобных матриц и составляет основу  $LU$ -алгоритма. Он определяется двумя формулами:  $A_k = L_k U_k$ ,  $A_{k+1} = L_k U_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  где  $A_0 = A$ , причем первая формула означает процедуру треугольной факторизации матрицы  $A_k$  на  $k$ -м шаге, а вторая – перемену местами  $L_k$  и  $U_k$ .

Доказано, что при ряде ограничений на исходную матрицу (при выполнении требования, что все собственные числа  $A$  были разными по модулю), итерационная последовательность  $\{A_k\}$  сходится к верхне- или нижнетреугольной матрице (в зависимости от того, где фиксируется единичная диагональ при  $LU$ -факторизации – в матрице  $L$  или в матрице  $U$  соответственно).

**Пример.** Найдем собственные значения матрицы  $A$ , пользуясь  $LU$ -алгоритмом. Осуществим факторизацию, зафиксировав единичную диагональ в верхней треугольной матрице  $A_0 = A = L_0 U_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Перемножая  $L_0$  и  $U_0$  в обратном

порядке, строим матрицу  $A_1 = U_0 L_0 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ . Факторизуя матрицу  $A_1$  аналогично

предыдущему, имеем  $A_1 = L_1 U_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & -0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -0,2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Отсюда  $A_2 = U_1 L_1 = \begin{pmatrix} 3,8 & 0,16 \\ 6 & -0,8 \end{pmatrix}$ .

Следующий шаг дает:  $A_2 = L_2 U_2 = \begin{pmatrix} 3,8 & 0 \\ 6 & -1,0526\dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,0421\dots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$A_3 = U_2 \cdot L_2 = \begin{pmatrix} 4,0526\dots & 0,0443\dots \\ 6 & -1,0526\dots \end{pmatrix}.$$

Как видим, даже первые два приближения – матрицы  $A_2$  и  $A_3$  – последовательно преобразуются в нижнетреугольные, а их диагональные элементы приближают собственные значения матрицы  $A$ :  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = -1$  (для матрицы  $A_3$  ошибка  $\approx 0,05$ ).

**$QR$ -алгоритм.** Этот алгоритм в идейном плане мало чем отличается от схематически описанного выше  $LU$ -алгоритма. При  $k = 1, 2, 3, \dots$ , начиная с  $A_0 = A$ , строится последовательность матриц  $(A_k)$  согласно формул  $A_k = Q_k R_k$ ,  $A_{k+1} = R_k Q_k$ , первая из которых представляет разложение матрицы  $A_k$  в произведение ортогональной матрицы  $Q_k$  и правой (верхней) треугольной  $R_k$  (такое разложение существует для любой квадратной матрицы), а вторая формула – перемножение полученных в результате факторизации  $A_k$  матриц  $Q_k$  и  $R_k$  в обратном порядке.

С учетом ортогональности  $Q_k$  ( $Q_k^T = Q_k^{-1}$ ) представление данной матрицы  $A$  на  $k$ -м шаге можно записать в виде

$$A_k = Q_0 Q_1 \dots Q_{k-1} Q_k A_{k+1} Q_k^T Q_{k-1}^T \dots Q_1^T Q_0^T,$$

или 
$$A_k = (Q_0 Q_1 \dots Q_{k-1} Q_k) A_{k+1} (Q_0 Q_1 \dots Q_{k-1} Q_k)^{-1}.$$

Итак, любая из матриц последовательности  $(A_k)$  ортогонально подобна матрице  $A$ . При определенных ограничениях, одним из которых также является требование, чтобы матрица  $A$  не имела равных по модулю собственных значений, эта последовательность сходится к матрице правой треугольной формы с главной диагональю из собственных чисел.

**Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.** В прикладных исследованиях почти три четверти задач сводятся к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Эти задачи чаще всего связаны с обработкой экспериментальных данных в физике, астрономии, экономике, технике и могут иметь до нескольких тысяч неизвестных.

Поиски методов решений СЛАУ привели в конце XVII в. к созданию теории определителей и метода Крамера, а в середине XIX в. к возникновению теории матриц, в рамках которой задача решения СЛАУ стала задачей обращения матрицы.

Все методы решения СЛАУ (расчет определителей, обращение матриц, расчет собственных значений) можно разбить на два класса: прямые (точные) и итерационные (приближенные). Прямые методы приводят к решению за конечное число операций. Итерационным методом решение получают в результате бесконечного повторения подобных действий.

Эффективность методов решения СЛАУ во многом зависит от структуры и свойств матрицы коэффициентов: размерности, симметричности, заполнения (т.е. соотношения между числом ненулевых и нулевых элементов), специфики размещения ненулевых элементов в матрице и др. Для матрицы небольшой размерности применяются точные методы. Если главные миноры матрицы отличны от нуля, можно использовать метод  $LU$ -факторизации – представление матрицы коэффициентов СЛАУ в виде произведения нижней и верхней треугольных матриц, обращение которых значительно проще обращения исходной матрицы.

Для СЛАУ высоких порядков широко применяются приближенные итерационные методы, среди которых отметим метод Якоби, или метод простых итераций, особенно эффективный для матриц, у которых элементы главной диагонали значительно больше внедиагональных элементов.

Особенное распространение для решения СЛАУ нашел метод исключения, который был сформулирован Гауссом. Рассматривается задача о численном решении систем вида

$$A \cdot x = b \tag{4.20}$$

где  $b^T = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  – известный вектор -столбец;  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – иско-мый вектор;  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  -  $n \times n$  матрица коэффициентов заданной системы .

Решение системы (4.20) эквивалентно обращению матрицы  $A$ , поэтому нач-нем с методов обращения матриц.

Метод присоединенной матрицы базируется на свойствах разложения определителя  $n \times n$  - матрицы  $A$  по элементам  $j$ -й строки (или столбца) самой матрицы (теорема Лапласа):

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} A_{jk} = \begin{cases} |A|, & \text{если } j=i, \\ 0, & \text{если } j \neq i, \end{cases} \quad (4.21)$$

где  $a_{jk}$  -  $jk$ -й элемент матрицы  $A$ ;  $A_{jk}$  - алгебраическое дополнение  $a_{jk}$ :  $A_{jk} = (-1)^{i+k} \cdot M_{jk}$ ;  $M_{jk}$  - минор  $(n-1)$ -го порядка матрицы  $A$ , полученный вычеркиванием  $j$ -й строки  $k$ -го столбца;  $i, j, k = 1 \dots n$ ;  $|A| = \Delta = \det A$ .

Матрица  $Q = (A_{jk})$  называется *присоединенной матрицы*  $A$ . Матрица, обратная матрице  $A$  тогда имеет следующий вид:  $A^{-1} = Q^T / \Delta$ . Элементы произведения матриц  $A^{-1}A$  как раз представляют суммы (4.21), разделенные на  $\Delta$ , и поэтому  $A^{-1}A = I$ . По сравнению с методом Крамера, в котором необходимо вычислять  $n+1$  определитель  $n$ -го порядка, в методе присоединенной матрицы вычисляется только один определитель  $n$ -го порядка и  $n$  определителей  $(n-1)$ -го порядка, что уменьшает объем расчетов при больших  $n$ .

**Пример.** Найти обратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \Delta = 2 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

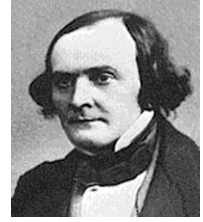
**Обращение матрицы методом подобия.** Этот метод применяется в случае, когда для матрицы известны ее спектр и собственный базис. Тогда из матричного уравнения АПСЗ для функции  $f(A) = A^{-1}$  имеем  $f(A) \cdot X = X \cdot f(D)$ , откуда следует

$$A^{-1} \cdot X = X \cdot D^{-1}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & 0 \\ & 1/\lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$$

и откуда находим  $A^{-1} = X \cdot D^{-1} \cdot X^{-1}$ .

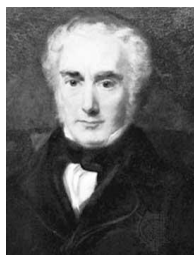
**Пример.** Найти обратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, X^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$



**Артур Кели**  
(**Artur Cayley**)  
(1821 - 1895) –

английский математик. Основатель матричного исчисления, теории алгебраических инвариантов и алгебраической геометрии. Внес значительный вклад в теорию неевклидовых геометрий, теорию дифференциальных уравнений, теорию эллиптических функций, небесную механику, теорию механизмов.



**Уильям Роуан  
Гамильтон  
(William Rowan  
Hamilton)  
(1805 - 1865) –**

ирландский математик и механик. Начал широкое применение комплексных чисел. Обобщение этих чисел дало начало векторному анализу и теории операторов. Принимал участие в разработке теории матриц.

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Метод обращения, основанный на теореме Кели-Гамильтона.** Для этого метода нужно знать только коэффициенты характеристического уравнения матрицы. Теорема Кели-Гамильтона утверждает, что матрица является корнем своего характеристического уравнения.

Подставим в характеристическое уравнение матрицы  $A$

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

вместо скалярного параметра  $\lambda$  саму матрицу  $A$ :

$$\varphi(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n = 0,$$

где  $\varphi(\lambda)$  - характеристический полином матрицы  $A$ .

Из уравнения (4.22) находим представление для единичной матрицы:

$$I = -(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + a_2 A^{n-3} + \dots + a_{n-1} I) A / a_n$$

и, учитывая определение обратной матрицы  $-I = A^{-1} A$ , получаем выражение для  $A^{-1}$ :

$$A^{-1} = -(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + a_2 A^{n-3} + \dots + a_{n-1} I) / a_n.$$

Таким образом, для обращения матрицы нужно найти коэффициенты характеристического уравнения и  $(n-2)$  степени  $A^k$  матрицы  $A$ .

**Пример.** Для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$  характеристическое уравнение имеет вид:  $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ . Подставляем в  $\varphi(\lambda)$  вместо  $\lambda$  матрицу  $A$ . В результате находим

$I = -(A + 3 \cdot I) A / 2$ , откуда получаем ответ

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} (A + 3I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Метод исключения Гаусса.** Наиболее распространенным методом решения линейных систем вида (4.20) является метод Гаусса, заключающийся в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований матрицы  $A$ . Особенно просто метод Гаусса реализуется в матричной форме, когда элементарные преобразования осуществляются одновременно с элементами матрицы  $A$  и координатами вектора  $b$ . Для этого матрица  $A$  дополняется столбцом  $b$  и прямоугольная матрица  $(A|b)$  размера  $n \times (n+1)$  элементарными

преобразованиями приводится к виду  $(U_0 | \mathbf{b}_0)$ , где  $U_0$  - верхняя треугольная матрица,  $\mathbf{b}_0$  - преобразованный столбец  $\mathbf{b}$ .

Далее каждая из  $n$  строк матрицы  $(U_0 | \mathbf{b}_0)$  делится на соответствующий диагональный элемент матрицы  $U_0$ . В новой матрице  $(U_1 | \mathbf{b}_1)$  матрица  $U_1$  - верхняя треугольная матрица с единичной главной диагональю,  $\mathbf{b}_1$  - столбец  $\mathbf{b}_0$ , каждый элемент которого разделен на соответствующий диагональный элемент матрицы  $U_0$ . В случае невырожденной матрицы  $A$  элементарными преобразованиями матрица  $U_1$  приводится к единичной, а столбец  $\mathbf{b}_1$  переходит в столбец  $\mathbf{x}$  - решение исходной системы

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow (A | \mathbf{b}) \Rightarrow (U_0 | \mathbf{b}_0) \Rightarrow (U_1 | \mathbf{b}_1) \Rightarrow (I | \mathbf{x}).$$

**Пример.** Решить СЛАНУ  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Шаг 1.* Образует матрицу  $(A | \mathbf{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right).$

*Шаг 2.* Элементарными преобразованиями приводим

матрицу  $A$  к треугольному виду  $(U_1 | \mathbf{b}_1) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right).$

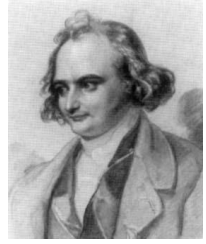
*Шаг 3.* Главную диагональ матрицы  $U_1$  преобразуем в

единичную  $(U_2 | \mathbf{b}_1) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right).$

*Шаг 4.* Элементарными преобразованиями делаем матрицу  $U_2$  единичной

$(I | \mathbf{x}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right),$  решение -  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Этот же алгоритм можно применить для нахождения обратной матрицы  $A^{-1}$ . Для этого сначала строим прямоугольную  $n \times 2 \cdot n$  матрицу  $(A | I)$ . Далее описанным выше алгоритмом сводим матрицу  $A$  к единичной, а



**Карл Густав Якоб Якоби**  
(Karl Gustav Jacob Jacobi)  
(1804 - 1851) –

немецкий математик. Сделал важный вклад в теорию чисел, теорию функций (один из создателей теории эллиптических функций), теорию дифференциальных уравнений, механику. Разработал методы решения задач линейной алгебры.

тогда на месте единичной будет матрица  $A^{-1}$ .

**Пример.** Возьмем из предыдущего примера матрицу  $A$ :

$$(A|I) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) = (I|A^{-1}).$$

Тогда имеем:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Метод факторизации** ( $LU$ -алгоритм) применяется в случае, когда все главные миноры квадратной матрицы отличны от нуля; тогда существуют такие нижняя  $L$  и верхняя  $U$  треугольные матрицы, что  $A = LU$ . Если элементы диагонали одной из матриц  $L$  или  $U$  фиксированные (обычно принимается диагональ из единиц), то такое разложение единственно. Этот метод широко применяют для решения АПСЗ.

**Итерационные методы.** Система  $Ax = b$  может быть преобразована в эквивалентную ей систему вида

$$x = Bx + c, \tag{4.23}$$

где  $x$  – неизвестный вектор, а  $B$  и  $c$  – некоторые новые матрица и вектор соответственно. Рекуррентное равенство, получаемое из формулы (4.23)

$$x_{k+1} = Bx_k + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$x_{k+1} = Bx_k + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

позволяет вычислить последовательность  $(k + 1)$  приближений к решению системы (4.20).

Этот итерационный процесс, начинающийся с некоторого вектора  $x_0$ , называется *методом последовательных приближений*.

При любом начальном векторе необходимым и достаточным условием сходимости метода простых итераций к решению системы является требование, чтобы все собственные числа матрицы  $B$  были по модулю меньше 1. Тогда справедливы соотношения:

1)  $B^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  ( $k \in N$ );

2) матрица  $I - B$  имеет обратную матрицу

$$(I - B)^{-1} = I + B + B^2 + \dots + B^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} B^k.$$

Если  $\|B\| \leq q < 1$ , то матрица  $I - B$  имеет обратную матрицу и при этом  $\|(I - B)^{-1}\| \leq 1/(1 - q)$ .

Одним из вариантов метода простых итераций является *метод Якоби*. Представим матрицу  $A$  системы (4.20) в виде  $A = D + N$ , где  $D$  - диагональная матрица, главная диагональ которой совпадает с главной диагональю матрицы  $A$ ;  $N$  - матрица с нулевой главной диагональю. Тогда эта система может быть записана в виде  $Dx + Nx = b$ , и если матрица  $D$  обратима, то система (4.20) заменяется эквивалентной системой вида (4.23), в которой  $B = -D^{-1}N$ ,  $c = D^{-1}b$ . Таким образом для применения метода Якоби диагональные элементы матрицы  $A$  должны быть ненулевыми и удовлетворять условию  $|a_{ii}| > \sum_{j=1(j \neq i)}^n |a_{ij}|$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , которое обеспечивает сходимость метода.

**Функции от матриц.** Построение матричных функций аналогично построению функций над числовыми (одномерными) множествами с одной существенной разницей – в связи с некоммутативностью произведения матриц необходимо постоянно учитывать порядок умножения.

**Метод матричного ряда Тейлора.** На множестве квадратных матриц  $M_n$  можно ввести матричные функции различными способами.

Напомним, что при построении числовых функций сначала рассматривается некоторая неопределенная переменная величина  $x$ , которая может принимать произвольные значения, например, из  $R$ . С помощью определенных на  $R$  операций можно построить произвольную степень  $x^k$  и сумму степеней с соответствующими коэффициентами из  $R$ , например, ряд Тейлора искомой функции  $f(x)$  на  $R$ .

Если вместо  $R$  имеем матричную алгебру  $M_n$ , то для произвольной матрицы  $A \in M_n$ , используя операции умножения матриц можно создать ее степени  $A^0 = I$ ,  $A^1 = A$ ,  $A^2 = AA$ ,  $A^3 = AAA$ , ...,  $A^k = \underbrace{AA \dots AA}_k$ . Далее, суммируя эти степени с соответствующими числовыми коэффициентами, получаем матричный ряд Тейлора исходной функции.

Среди приближенных методов построения функций от матриц метод ряда Тейлора использует минимум исходной информации, но требует значительного объема вычислений при умножении матриц.

Метод основан на коммутативности степеней матрицы. Действительно, матрица  $A$  имеет представление  $A = XDX^{-1}$ , где  $X$  -  $n \times n$  матрица собственного базиса матрицы,  $D$  -  $n \times n$  диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные значения матрицы  $A$ , тогда

$$A^2 = A \cdot A = X \cdot D \cdot X^{-1} \cdot X \cdot D \cdot X^{-1} = X \cdot D^2 \cdot X^{-1},$$

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_k = X \cdot D \cdot X^{-1} \cdot X \cdot D \cdot X^{-1} \cdot \dots \cdot X \cdot D \cdot X^{-1} = X \cdot D^k \cdot X^{-1}.$$

Все степени матрицы  $A$  имеют одинаковый собственный базис  $X$ , а соб-



ственные значения  $D_k$  – собственные значения  $A$  в соответствующей степени. Поэтому степени матрицы  $A$  образуют множество подобное числовому (т.е. все элементы этого множества коммутируют между собой), и с помощью ряда Тейлора от числового аргумента строится функция от матрицы  $A$ .

**Пример.** Разложение экспоненты в ряд Тейлора в окрестности нуля имеет вид

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{k!}x^k + \dots \quad (k \in N).$$

После подстановки  $A$  вместо  $x$ , получаем представление матричной экспоненты в виде матричного ряда Тейлора

$$e^A = I + A + A^2/2! + \dots + A^k/k! + \dots \quad (4.24)$$

Бесконечный ряд (4.24), применяя теорему Кели - Гамильтона, можно представить конечной суммой, коэффициенты которой будут соответствующими рядами.

**Пример.** Для численно заданной матрицы  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$  ее экспонента имеет следующее значение при  $m = 8$ :

$$T_8(A) = T_4(A) + \frac{1}{5!}A^5 + \frac{1}{6!}A^6 + \frac{1}{7!}A^7 + \frac{1}{8!}A^8 = \begin{pmatrix} 0,599 & 0,231 \\ -0,463 & -0,095 \end{pmatrix}.$$

Далее приведены приближенные формулы матричных функций  $\cos A$ :

$$\cos A \approx T_8^{\cos}(A) = I - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 - \frac{1}{6!}A^6 + \frac{1}{8!}A^8 = \begin{pmatrix} 1,496 & 0,956 \\ -1,912 & -1,372 \end{pmatrix},$$

Из таблицы 4.1 видно, что 8-9 степеней матрицы  $A$  в данном случае достаточно для получения результата с точностью до 2-3 знаков после запятой.

Таблица 4.1

$\lambda$	$e^A$	$T_4(A)$	$T_8(A)$	$\cos A$	$T_8^{\cos}(A)$	$\sin A$	$T_9^{\sin}(A)$
$\lambda_1$	0,368	0,475	0,368	0,54	0,54	-0,841	-0,843
$\lambda_2$	0,135	0,333	0,136	-0,416	-0,416	-0,909	-0,908

**Метод преобразования подобия.** Этот метод применяется в том случае, когда известны спектр (матрица  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda_k$  - собственные значения матрицы  $A$ ) и собственный базис матрицы  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , удовлетворяющих матричное уравнение АПСЗ:  $A \cdot X = X \cdot D$ .

Матричные функции  $f(A)$  коммутируют с матрицей  $A$  и поэтому для этих функций собственный базис совпадает с собственным базисом матрицы  $A$ , т.е. имеет место матричное уравнение

$$f(A) \cdot X = X \cdot f(D),$$

где  $f(A)$  - искомая матрица-функция,  $f(D)$  - диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят ее собственные значения  $f(\lambda_k)$  ( $k = 1 \dots n$ ),.

Отсюда имеем :  $f(A) = Xf(D)X^{-1}$  .

Матрицы  $f(D)$  и  $f(A)$  подобны, поэтому их спектры совпадают.

**Пример.** Задана матрица  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$  и функция  $f(x) = e^x$ . Построить матрицу  $e^A$ . Находим спектр и собственный базис матрицы  $A$ :  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ . Далее строим матрицы  $e^D$  и  $e^A = X \cdot e^D \cdot X^{-1}$ ,  $e^D = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}$ ,  $e^A \approx \begin{pmatrix} 0,6 & 0,233 \\ -0,465 & -0,097 \end{pmatrix}$ .

**Метод интерполяционного полинома Лагранжа.** Если необходимо построить функцию от матрицы, для которой известен только спектр, используют метод интерполяционного полинома Лагранжа.

Пусть задана функция  $f(\lambda)$  и спектр  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  матрицы  $A$ . Находим значение функции  $f(\lambda)$  в точках спектра  $\lambda = \lambda_j$  ( $j = 1 \dots n$ ). Для численно заданной в  $n$  точках функции при условии, что все собственные значения различны, строим полином Лагранжа

$$L(\lambda) = \sum_{j=1}^n a_j(\lambda) \cdot f(\lambda_j) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot \lambda^k, \quad (4.25)$$

где  $a_j(\lambda) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\lambda - \lambda_i) / (\lambda_j - \lambda_i)$ ,  $b_k$  - постоянные коэффициенты, получаемые после приведения подобных степеней в первой сумме.

Подставляем в  $L(\lambda)$  вместо  $\lambda$  матрицу  $A$  и получаем искомую функцию  $f(A)$ :  $f(A) = L(A) = b_0 \cdot I + b_1 \cdot A + b_2 \cdot A^2 + \dots + b_{n-1} \cdot A^{n-1}$  .

Если воспользоваться первой суммой в выражении (4.25), можно получить спектральное разложение матрицы  $f(A)$

$$f(A) = L(A) = \sum_{j=1}^n a_j(A) \cdot f(\lambda_j),$$

где матричные коэффициенты  $a_j(A) = \prod_{i=1(i \neq j)}^n (A - \lambda_i I) / (\lambda_j - \lambda_i)$  называются *проекторами* (идемпотентные матрицы) и имеют следующие свойства:

$a_k(A)^2 = a_k(A)$ ;  $\sum_{k=1}^n a_k(A) = I$ . Значения  $a_k(A)$  зависят только от матрицы  $A$  и ее спектра и остаются общими для всех матричных функций от  $A$ , а также для самой матрицы  $A$ . В последнем случае, который соответствует скалярной функции  $f(\lambda) = \lambda$ ,  $f(A) = A$  имеем спектральное разложение матрицы

$$A = a_1(A) \cdot \lambda_1 + a_2(A) \cdot \lambda_2 + \dots + a_n(A) \cdot \lambda_n .$$

**Пример.** Построить матричную экспоненту для матрицы

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $x_k$ . Находим значения  $e^x$  на спектре  $A$ :

$\lambda$	-1	-2
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135

Строим интерполяционный полином Лагранжа по двум точкам  $\lambda_1 = -1$  и  $\lambda_2 = -2$

$$L(x) = \left[ \frac{(x+2)}{(-1+2)} \right] e^{-1} + \left[ \frac{(x+1)}{(-2+1)} \right] e^{-2} = b_0 + b_1 x,$$

где  $b_1 = (e-1)/e^2 = 0,6$ ;  $b_0 = (2e-1)/e^2 = 0,232$ .

$$e^A = L(A) = b_0 I + b_1 A = \begin{pmatrix} 0,600 & 0,232 \\ -0,465 & -0,097 \end{pmatrix}.$$

Проекторы матрицы  $A$  равны:  $a_1(A) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ,

$$a_2(A) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверка:  $A = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ .

Таким образом, имеем совпадение результатов с точностью 0,001.

### 4.3. Функциональные пространства. Методы представления функций

Потребность исследования явлений и процессов, изменяющихся во времени и пространстве, вызвала появление такого универсального и распространенного математического понятия как функция.

*Функция* – это соответствие между элементами двух множеств. На практике эти множества числовые, что дает возможность производить расчеты с экспериментальными данными. Выше были рассмотрены матричные функции, которые устанавливают соответствие между матрицами, представляющими линейные операторы.

Первые освоенные функции – степенная, тригонометрические, логарифмическая – известны сейчас как элементарные. С появлением интегрального и дифференциального исчисления, а также дифференциальных уравнений элементарные функции дополнились множеством различных сложных функций. Их представление и классификация стали основными задачами теории приближения функций и функционального анализа.

Главным объектом функционального анализа являются не отдельные функции, а их множества – функциональные пространства функций, которые удовлетворяют определенным условиям. Как и в конечномерных векторных пространствах, в бесконечномерных функциональных пространствах наиболее важной остается проблема координатизации функций, т.е. представление

функций в некотором базисе соответствующим набором чисел.

Основным способом численного представления произвольной функции есть разложение ее в ряд по элементарным функциями, аналогично разложению вектора в сумму базисных векторов с соответствующими коэффициентами (координатами вектора) в евклидовом пространстве  $E_n$ .

В функциональных пространствах значительно больший выбор базисов, чем в конечномерных пространствах. Их можно разделить на два типа: дискретные или счетные, непрерывные или несчетные.

Базисы первого типа можно упорядочить и для них сохраняются почти все утверждения и алгоритмы из евклидова пространства. Невозможность реально вычислить бесконечное число координат функции в таком базисе заставляет ограничиться конечным отрезком соответствующего ряда и требует оценки скорости сходимости ряда и погрешности такого приближенного представления функции. Примерами упорядоченных базисов служат степенной (разложение функции в ряд Тейлора), полиномиальный и наиболее распространенный – тригонометрический (разложение функции в ряд Фурье).

В отличие от дискретных базисов, состоящих из упорядоченной последовательности функций одного аргумента, базисы второго типа – несчетные – описываются одной функцией двух непрерывных аргументов. Поэтому в этих базисах функции представляются не в виде суммы, а в виде интеграла, и такое представление обычно называют *интегральным преобразованием* (например, преобразования Фурье, Лапласа).

**Гильбертовы пространства  $l_2$ ,  $L_2[a, b]$ .** Если вектор  $x$   $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  представить как функцию  $x(k)$  натурального аргумента  $k \in N$ ,  $n$  значений которой являются координатами вектора  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то, продолжая эту аналогию и устремляя  $n \rightarrow \infty$ , получаем бесконечномерные векторы или функции натурального аргумента  $k = 1, 2, \dots, \infty$  с бесконечным числом значений. Если эти функции обладают конечной нормой, т.е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 < \infty, \quad (4.26)$$

тогда они образуют бесконечномерное евклидово пространство  $E_{\infty}$ . Это множество бесконечномерных векторов как пространство функций дискретного аргумента обозначается через  $l_2$ .

Существование конечной нормы (4.26) элементов пространства  $l_2$  определяет конечность скалярного произведения в этом пространстве

$$(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k < \infty.$$

Следует отметить, что в отличие от конечномерных пространств  $E_n$ , в которых любой набор  $n$  линейно независимых векторов образуют базис, не всякое бесконечное множество элементов пространства  $l_2$  образует базис. Поэтому вводится понятие полноты, которое в исключительных случаях удается проверить фактически (необходимо вычислить значение определителя



**Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (Karl Theodor Wilhelm Weierstrasse) (1815 - 1897) –**

немецкий математик. Важные результаты по-лучил в математическом анализе, теории функций комплексного переменного, теории приближения функций.

матрицы бесконечной размерности). Для наиболее распространенных базисов – степенного, полиномиальных, тригонометрического - полнота (или базисность) доказаны. Эти базисы и соответствующие им ряды Тейлора, Лежандра, Чебышева и Фурье рассмотрено ниже.

Когда аргумент функции принимает непрерывные значения, например, из интервала  $[a, b] \subset \mathbf{R}$ , функцию действительного аргумента невозможно представить в виде столбика или строки в связи с неупорядоченностью множества действительных чисел. Поэтому в пространстве таких функций скалярное произведение функций  $(f(x), g(x))$  определяется интегралом

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(\tau) \cdot g(\tau) d\tau.$$

Функциональное пространство, элементы которого зависят от действительного аргумента из интервала  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  и удовлетворяют условию  $\int_a^b (f(x))^2 dx < \infty$ , называется *гильбертовым* пространством  $L_2[a, b]$ .

**Представление функций в гильбертовом пространстве.** Принцип представления элементов в пространствах  $l_2, L_2[a, b]$  аналогичный представлению векторов в конечномерном евклидовом пространстве. В случае дискретного пространства  $l_2$ : выбирается соответствующий задаче базис, обычно ортонормированный,  $e_1, e_2, \dots, e_k, \dots$ ; находятся проекции данного элемента  $x$  на элементы базиса  $c_k = (x, e_k), k = 1, 2, \dots$ ; строится разложение  $x$  по элементам базиса  $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot e_k$ .

В пространстве  $L_2[a, b]$  для счетного ортонормированного базиса проекции функции  $f(x)$  находятся также с помощью скалярного произведения, определенного в этом пространстве  $c_k = (f(t), e_k(t)) = \int_a^b f(\tau) \cdot e_k(\tau) \cdot d\tau$ , а соответствующее разложение для функции имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot e_k(t).$$

Этот ряд называется *обобщенным рядом Фурье*, а коэффициенты ряда - *дискретным спектром* функции. Если выбранный базис несчетный, тогда имеет место

интегральное представление.

**Задача приближения функций.** Бесконечномерность гильбертовых пространств не позволяет реально вычислить все координаты (спектр) функции в выбранном базисе, поэтому возникает задача представления функции отрезком (конечным) соответствующего бесконечного ряда. То есть необходимо выбрать такой базис, в котором с заданной точностью можно было бы приблизить заданную функцию элементарными функциями с минимальным объемом и сложностью вычислений.

Обозначим приближающую функцию через  $\varphi(x)$  (отрезок ряда). Тогда для фиксированной метрики  $E(f(x), \varphi(x)) = E(|f(x) - \varphi(x)|)$  (соответствующая норма расстояния между элементами в пространстве  $L_2[a, b]$ ) требование точности приближения имеет вид:

$$E(f(x), \varphi(x)) \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  - количественная оценка точности.

Классическими базисами для приближения функций являются алгебраические (степенные, полиномиальные), тригонометрические функции, а также ортогональные полиномы, сплайны («склеенные» в избранных точках полиномы), экспоненциальные и рациональные функции.

В качестве *меры погрешности* приближения в  $L_2[a, b]$  используются такие метрики:

*равномерная* (норма расстояния между функциями)

$$E_u(f, \varphi) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)|,$$

*метрика в среднем*

$$E_l(f, \varphi) = \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx,$$

*метрика в среднеквадратичном*

$$E_2(f, \varphi) = \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^2 dx.$$

Если требования к точности различны в разных точках, то вводится взвешенная с весом  $\rho(x)$  мера погрешности приближения

$$E_{q, \rho}(f, \varphi) = \int_a^b \rho(x) |f(x) - \varphi(x)|^q dx, \quad q > 0. \quad (4.63)$$

Метод приближения должен обеспечить наиболее



**Брук Тейлор**  
(Brook Taylor)  
(1685 -1731) –

английский математик. Вывел общую теорему о разложении функции в степенной ряд (ряд Тейлора). Получил важные результаты в математическом анализе, теории дифференциальных и разностных уравнений, теории колебаний, баллистике, оптике, астрономии и философии.



**Пафнутий Львович Чебышев (1821 - 1894),**

русский математик. Основатель теории приближения. Ортогональные полиномы Чебышева наиболее распространены в приложениях. Основополагающие результаты им получены в теории чисел, теории вероятностей, теории численных методов, теории машин и механизмов, вариационном исчислении.

высокую точность приближения и более простой алгоритм построения приближения  $\varphi(x)$ .

В равномерной метрике обычно устанавливается требование приближения

$$E(f(x), \varphi(x)) = \min_{\varphi} |f(x) - \varphi(x)|.$$

В этом случае  $\varphi(x)$  называется *функцией наилучшего приближения*.

Наибольшее распространение получили линейные методы построения  $\varphi(x)$ , к которым относятся и методы интерполяции, когда фиксируются узлы  $\{x_k\}^N$ ,  $x_k \in [a, b]$ , а интерполирующая функция

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^N f(x_k) \cdot \varphi_k(x)$$

выбирается из условия интерполяции

$$\varphi_j(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k, \\ 0 & \text{при } j \neq k. \end{cases}$$

Самая важная и наиболее сложная проблема – оценка погрешности приближения - фактически привела к созданию теории приближения функции. В 1854 - 1859 гг. П. Л. Чебышев заложил фундамент этой теории: ввел понятие о наилучшем равномерном приближении и доказал теорему о приближении с заданной точностью непрерывных функций полиномами и рациональными функциями. К. Т. В. Вейерштрасс в 1885г. доказал теорему о приближении непрерывных на промежутке  $[a, b]$  функций с помощью тригонометрических полиномов и обосновал возможность приближения в счетных базисах функций, которые чаще всего встречаются в практических исследованиях.

*Счетные базисы* в  $L_2[a, b]$  – обобщение базисов конечномерных векторных пространств по числу элементов и зависимости от переменной

$$\{e_k(t)\}_{k=0}^{\infty} = \{e(t, k)\}_{k=0}^{\infty}, \quad k \in \mathbf{N}, \quad x \in [a, b] \subset \mathbf{R}.$$

**Например,**  $\{x^k\}_{k=0}^{\infty} = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^k, \dots\}$  – степенной

базис – наиболее простой базис, который использовался для представления функций. Разложение по этому базису – известный в математическом анализе ряд Тейлора. Коэффициенты

разложения в ряд Тейлора элементарных функций приведены в учебниках и справочниках. Его локальный характер (в окрестности одного значения аргумента) позволил получить формулы для общих членов ряда многих функций. К сожалению, степенной базис неортогонален, что видно по матрице Грама для первых четырех степеней  $1, x, x^2, x^3$  на интервале  $[-1, 1]$ :

$$\gamma_{jk} = \int_{-1}^1 x^{j+k} dx = \begin{cases} \frac{2}{j+k+1} & \text{при } (j+k+1) - \text{нечетное,} \\ 0 & \text{при } (j+k+1) - \text{четное,} \end{cases}$$

$$\Gamma_x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \end{pmatrix}.$$

Из приведенного примера видно, что ортогональны только степени разной четности, а степени одинаковой четности – неортогональны.

Алгоритм Грама - Шмидта, рассмотренный выше для конечномерных евклидовых пространств, позволяет ортонормировать базисы и в функциональных пространствах.

Ортогональные полиномиальные базисы можно построить, ортонормируя степенной базис. При этом, изменяя весовой коэффициент скалярного произведения, можно получить ортонормированные полиномиальные базисы, определенные на разных интервалах вещественной оси. Ниже приведены наиболее распространенные системы ортогональных полиномов.

**Ортогональные полиномы Лежандра**  $P_k(x)$  определены на интервале  $[-1, 1]$  и удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_{-1}^1 P_j(x)P_k(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq j, \\ \frac{2}{2k+1} & \text{если } k = j. \end{cases} \quad j, k = 0, 1, \dots$$

Полиномы  $P_k(x)$  можно строить по рекуррентной формуле:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x),$$

где  $P_0=1, P_1(x)=x, n=1, 2, \dots$ . Для  $n=1, 2, 3, 4$  получаем следующие полиномы:



**Эдмунд Николаас Лагерр** (*Edmond Nicolas Laguerre*) (1834 - 1886) –

французский математик. Основные труды по геометрии, теории функций комплексного переменного, теории ортогональных полиномов. Предложил идею проективного измерения углов.





**Шарль Эрмит**  
(Charles Hermite)  
(1822 - 1901) –

французский математик. Внес значительный вклад в теорию эллиптических функций, математический анализ, теорию ортогональных полиномов, теорию чисел, алгебру. Доказал трансцендентность числа  $e$ .

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2,$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2,$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8,$$

$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8.$$

Графики первых пяти полиномов Лежандра приведены на рис. 4.4.

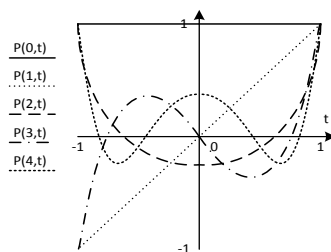


Рис. 4.4. Графики первых пяти полиномов Лежандра

Полиномы Лежандра  $n$ -й степени имеют на отрезке  $[-1, 1]$  ровно  $n$  различных действительных корней.

**Ортогональные полиномы Чебышева** определяются функцией

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \text{ где } n \in \mathbb{N}, x \in [-1, 1].$$

Непосредственно из (4.68) находим полиномы при  $n = 0$  и  $n = 1$ :  $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$ . Полиномы Чебышева  $T_k(x)$  удовлетворяют условию ортогональности с весом  $\rho(x) = (1 - x^2)^{-0,5}$ :

$$\int_{-1}^1 \frac{T_k(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq j, \\ \pi/2, & \text{при } k = j \neq 0, \\ \pi, & \text{при } k = j = 0. \end{cases} \quad j, k = 0, 1, \dots$$

Полиномы  $T_k(x)$  определяют по рекуррентной формуле:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

где  $T_0=1, T_1(x) = x, n=1, 2, \dots$ . Для  $n=1, 2, 3, 4, 5$  полиномы Чебышева имеют вид

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

Графики первых пяти полиномов Чебышева приведены на рис. 4.5. Значения всех полиномов Лежандра и Чебышева лежат в интервале  $[-1, 1]$ , их порядок и четность совпадают с их номером. Корни последовательных полиномов чередуются. Для корней полинома Чебышева  $T_n(x)$  существует явная формула

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

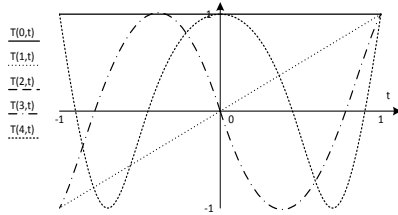


Рис. 4.5. Графики первых пяти полиномов Чебышева

**Ортогональные полиномы Лагерра**  $L_n(x)$  определены на полуоси  $[0, \infty)$  и удовлетворяют следующее условие ортогональности с весом  $\rho(x) = e^{-x}$ :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} L_k(x) L_j(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq j, \\ (k!)^2, & \text{при } k = j. \end{cases} \quad j, k = 0, 1, \dots$$

Для этих полиномов рекуррентным соотношением является

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad L_0 := 1, \quad L_1 := -x + 1.$$

Следующие четыре полиномы имеют вид

$$L_2 = x^2 - 4x + 2,$$

$$L_3 = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6,$$

$$L_4 = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24,$$

$$L_5 = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120.$$

Графики пяти первых полиномов Лагерра представлены на рис. 4.6.

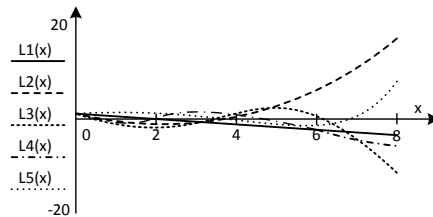


Рис. 4.6. Графики пяти первых полиномов Лагерра

**Ортогональные полиномы Эрмита**  $H_n(x)$  определены на всей числовой оси  $x \in (-\infty, \infty)$  и удовлетворяют следующему условию ортогональности

с весом  $\rho(x) = e^{-x^2}$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_k(x) H_j(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 2^k k! \sqrt{\pi}, & k = j. \end{cases}$$

Для этих полиномов рекуррентным соотношением является

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x),$$

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x.$$

Эти полиномы при  $n = 1, 2, 3, 4$  имеют вид

$$H_2(x) = 4x^2 - 2,$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$$

**Тригонометрический базис** (базис Фурье) завоевал широкое применение в первую очередь в связи с тем, что в отличие от степенного он является ортогональным. Разложение по этому базису называется *гармоническим (спектральным) анализом*. Разложение звуковых колебаний на простые гармоники (гармонический анализ) был известен еще Пифагору.

Математическую форму разложения периодической функции в ряд по гармоникам  $\sin kx$  и  $\cos kx$  (где  $k$  – целое число) создали Л. Эйлер и Ж. Л. Лагранж. Формула Эйлера

$$\cos kx + i \cdot \sin kx = e^{ikx}, \quad i = \sqrt{-1}$$

из которой следует

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2},$$

позволяет представить тригонометрический базис Фурье

$$\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin kx, \cos kx, \dots$$

в экспоненциальной форме (по экспонентами с мнимым показателем):  $1, e^i, e^{i2x}, \dots, e^{ikx}, \dots$ . Спектр периодической функции  $f(x)$  в таком базисе

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cdot e^{-ik\tau} d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

а ряд Фурье для этой функции имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x}.$$

Современный вид гармоническому анализу придал Ж. Фурье. Он доказал, что разложение по тригонометрическому базису возможно не только для непрерывных и периодических функций, но и для функций непериодических, имеющих конечное число разрывов, а также для нормированных на интерва-

ле  $[-\pi, \pi]$ . Фурье первым применил интегральное представление функций, т.е. разложение функций по бесконечному тригонометрическому базису.

*Несчетные базисы в  $L_2[a, b]$ .* Натуральный параметр, позволяющий упорядочить счетный базис, становится вещественным в случае несчетного базиса. Поэтому в несчетном базисе элементы  $L_2[a, b]$  представляются не суммой, а определенным интегралом. Такое представление по традиции называется *интегральным преобразованием*. Наиболее распространенные из них – преобразование Фурье и Лапласа.

В общем случае несчетный базис записывается в виде функции двух действительных аргументов:

$$\{F_\omega(x)\}_{\omega \in \mathbf{R}} = \{F(x, \omega)\}_{\omega \in \mathbf{R}}, \quad x \in [a, b] \subset \mathbf{R}, \quad \omega \in \mathbf{R},$$

т.е., оба аргумента  $x$  и  $\omega$  принимают вещественные значения. Функция двух переменных  $F(x, \omega)$ , определяющая непрерывный базис, называется *ядром интегрального преобразования*. Интегральные представления (преобразования) функций из  $L_2[a, b]$  имеют общий вид

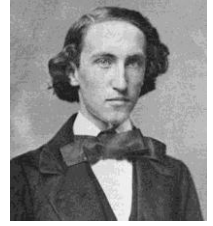
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) F(x, \omega) d\omega, \quad (4.27)$$

где  $f(x)$  - заданная функция вещественного аргумента  $x \in [a, b] \subset \mathbf{R}$ ;  $\hat{f}(\omega)$  - ее изображение или спектральная функция, которая вообще может быть комплексной;  $F(x, \omega)$  - ядро представления, часто с комплексными значениями. Из формулы (4.27) видно, что для фиксированного значения  $\omega$  спектральная функция  $\hat{f}(\omega)$  определяет коэффициент разложения функции  $f(x)$  при элементе базиса  $F(x, \omega)$ . В данном случае спектр функции  $f(x)$  непрерывный.

Обычно в теории интегральных преобразований соотношение (4.27) называют *обратным преобразованием* по отношению к *прямому*:

$$\hat{f}(\omega) = \int_a^b f(x) \cdot F^{-1}(x, \omega) \cdot dx, \quad (4.28)$$

где  $F^{-1}(t, \omega)$  - обратное (сопряженное) ядро преобразования. Например, непрерывное преобразование Фурье имеет ядро  $F(t, \omega) = e^{i\omega t}$ , которое определено при  $t \in [a, b]$ ,  $\omega \in \mathbf{R}$ , и все значения которого лежат на единичной окружности в



*Джозайя Уиллард Гиббс*  
(Josiah Willard Gibbs)  
(1839 - 1903) –

американский физик и механик. Основные труды посвящены термодинамике, применению векторного анализа. Один из основателей статистической механики.

комплексной плоскости. В этом случае (в отличие от дискретного преобразования Фурье, для которого  $\omega$  принимает дискретные значения) значение спектральной функции для каждого фиксированного  $\omega$  определяется соотношением (4.28), которое в фиксированном базисе  $e^{i\omega t}$  является представлением линейного оператора в гильбертовом пространстве  $L_2[a, b]$ , а именно: функция  $f(x)$  имеет представление в непрерывном базисе Фурье:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \cdot e^{i\omega x} d\omega \quad (4.29)$$

с коэффициентами (спектром):

$$\hat{f}(\omega) = \int_a^b f(x) \cdot e^{-i\omega x} dx. \quad (4.30)$$

Интеграл (4.30) называется *прямым преобразованием Фурье*, (4.29) – *обратным преобразованием Фурье*. Эти интегралы существуют для широкого класса непрерывных функций с конечным числом разрывов первого рода. В точках разрыва Д. У. Гиббс обнаружил неустранимую конечную погрешность (эффект Гиббса).

**Базис Лапласа.** Для непрерывного преобразования Лапласа ядро  $F(t, p) = e^{pt}$  определено на положительный полуоси  $[0, \infty)$  относительно  $t$ , а также в окрестности мнимой оси комплексной плоскости  $(-\alpha - i \cdot \infty; -\alpha + i \cdot \infty)$  относительно комплексной переменной  $p$  ( $\alpha \ll 1$ ).

Разложением функции  $f(x)$  в базисе Лапласа будет интеграл

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \hat{f}(p) e^{px} dp,$$

где  $\hat{f}(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx$ .

Из-за наличия двух типов базисов линейные операторы в  $L_2[a, b]$  имеют соответственно дискретное и непрерывное (интегральное) представления.

**Дискретные преобразования.** Использование цифровой вычислительной техники требует дискретизации непрерывных объектов, в том числе непрерывных базисов. В этом случае интегральное представление (4.28) заменяется матричным.

**Пример.** Рассмотрим наиболее часто применяемое на практике дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Выбирая соответствующие шаги дискретизации  $\Delta t$ ,  $\Delta \omega$ , переходим от ядра непрерывного преобразования Фурье  $e^{i\omega t}$  к его дискретному аналогу – бесконечной матрице ДПФ

$$W_{\infty} = \left( e^{-i \cdot j \cdot \Delta t \cdot k \cdot \Delta \omega} \right)_{j, k=0}^{\infty}.$$

Фактически мы можем вычислить матрицу ДПФ только для конечных значений  $N < \infty$  (где  $N$  – натуральное число). Поэтому обычно матрица ДПФ вычисляется для

$$\Delta t = 1, \Delta \omega = 2\pi/N \quad \Delta t = 1, \Delta \omega = 2\pi/N: \quad W_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \left( e^{-i \frac{2\pi}{N} j \cdot k} \right)_{j,k=0}^N.$$

Матрица  $W_N$  – унитарная ( $W_N \cdot W_N^* = I$ ), а ее элементы – степени корней уравнения  $x^N - 1 = 0$ .

Оператор, представленный матрицей  $W_N$ , действует в  $N$ -мерном евклидовом пространстве функций дискретного (натурального) аргумента  $\mathbf{x}$  с результирующей вектор-функцией  $\mathbf{y} = W_N \cdot \mathbf{x}$ , которая представляет собой спектр вектор-функции  $\mathbf{x}$ .

**Алгоритм Грама - Шмидта** ортонормирования в гильбертовом пространстве подобен алгоритму в конечномерном евклидовом пространстве. Благодаря этому алгоритму, изменяя вес скалярного произведения, из последовательности степенных функций строятся ортогональные полиномы.

**Пример.** Ортонормируем первые пять степеней  $x^k$  ( $k = 0..4$ ) из гильбертового пространства  $L_2[-1,1]$  со скалярным произведением

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) \cdot dx \quad (\text{вес } \rho(x) = 1).$$

Сначала построим матрицу Грама для данной системы функций:

$$\Gamma_x = \left( (x^j, x^k) \right)_{j,k=0}^4; \quad (x^j, x^k) = \begin{cases} \frac{2}{j+k+1} & \text{при } (j+k+1) - \text{нечетное,} \\ 0 & \text{при } (j+k+1) - \text{четное.} \end{cases}$$

$$\Gamma_x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 & 0 \\ 2/5 & 0 & 2/7 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/5 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/5 & 0 & 1/7 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/7 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1/7 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

Из структуры матрицы Грама видно, что степени разной четности ортогональные между собой, а одинаковой четности – неортогональные.

*I шаг* алгоритма: выбираем элемент  $h_0(x) = x^0 = 1$  и нормируем его

$$(h_0(x), h_0(x)) = 2, \quad p_0(x) = 1/\sqrt{2}.$$

*II шаг:*  $h_1(x) = x - (x, p_0(x))p_0(x) = x$  так как  $(x, p_0(x)) = 0$ ;

далее выполняем нормировку  $p_1(x) = \sqrt{3/2}x$ .

*III шаг:*  $h_2(x) = x^2 - (x^2, p_0)p_0 - (x^2, p_1)p_1 = (x^2 - 1/3)$ ,

$$p_2(x) = \sqrt{5/2}(3x^2 - 1)/2.$$

*IV шаг:*

$$h_3(x) = x^3 - (x^3, p_0(x))p_0(x) - (x^3, p_1(x))p_1(x) - (x^3, p_2(x))p_2(x) =$$

$$= x^3 - 0 - (2 \cdot 3/5 \cdot 2)x - 0 \cdot p_2(x) = x^3 - 3x/5 \quad p_3(x) = (5x^3 - 3x)\sqrt{7/2}/2.$$

В шаг:

$$h_4(x) = x^4 - (x^4, p_0)p_0 - (x^4, p_1(x))p_1(x) - (x^4, p_2(x))p_2(x) -$$

$$- (x^4, p_3(x))p_3(x) = x^4 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - 0 \cdot p_1(x) - \frac{16}{35} \cdot \frac{5}{8} (3x^2 - 1) - 0 \cdot p_3(x) =$$

$$= x^4 - \frac{5}{28} (3x^2 - 1) - \frac{1}{5} = x^4 - \frac{30}{35} x^2 + \frac{3}{35}. \quad p_4(x) = \sqrt{3/2} (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

Найденные полиномы

$$p_0 = 1/\sqrt{2},$$

$$p_1(x) = \sqrt{3}x/\sqrt{2},$$

$$p_2(x) = (3x^2 - 1)\sqrt{5}/2\sqrt{2},$$

$$p_3(x) = (5x^3 - 3x)\sqrt{7}/2\sqrt{2},$$

$$p_4(x) = 3(35x^4 - 30x^2 + 3)/8\sqrt{2}$$

отличаются от классических ортогональных полиномов Лежандра только нормирующим множителем.

**Задача интерполяции экспериментальных данных.** Все открытия человечества так или иначе связаны с измерениями. Отец отечественной метрологии Д. И. Менделеев по этому поводу писал: «Наука начинается тогда, когда начинают измерять».

Одним из важных этапов обработки экспериментальных данных является их интерполяция. Метод интерполяционных полиномов, который применяется в случаях, когда измерительная информация известна с достаточной точностью, связан с именами И. Ньютона и Ж. Лагранжа.

*Задача интерполяции* формулируется следующим образом. Пусть известны значения функции  $f(x)$  при  $(n + 1)$  значениях ее аргумента, которые называются *узлами интерполяции*:

$x_i$	$x_0$	$x_1$	...	$x_n$
$f(x_i)$	$y_0$	$y_1$	...	$y_n$

Необходимо получить значения функции  $f(x)$  между этими узлами, т.е. разыскивается приближающая функция  $F(x)$ , для которой известно аналитическое выражение, и которая в некотором смысле близка к функции  $f(x)$ . Если приближающая функция принимается в виде полинома, то классический подход к ее построению основан на требовании совпадения значений функций  $f(x)$  и  $F(x)$  в узлах ( $i = 0, 1, \dots, n$ ):

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n.$$

В этом случае процесс нахождения приближающей функции называется *интерполяцией*.

**Интерполяционный полином Лагранжа.** Для функции, заданной таблицей, построим интерполяционный полином  $L_n(x)$  степени  $n$ . Будем искать  $L_n(x)$  в виде  $L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x)$  где  $l_i(x)$  - полином степени  $n$ , причем  $l_i(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$

Полиномы  $l_i(x)$  составим следующим образом:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Подставив выражения для коэффициентов в  $L_n(x)$ , получим

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Найденный полином удовлетворяет поставленному условию  $L_n(x_k) = y_k$ , т.е. график функции  $L_n(x)$  проходит точно через точки  $(x_k, y_k)$  графика функции  $f(x)$ .

**Пример.** Рассмотрим функцию  $f(x) = \cos(x)$  заданную в пяти узлах:

$x_i$	0	0,25	0,50	0,75	1
$f(x_i)$	-0,958	-0,857	-0,702	-0,504	-0,275

Вычисляем коэффициенты полинома Лагранжа  $l_k(x)$  ( $k=0, 1, 2, 3, 4$ ).

$$l_0(x) = \frac{(x-0,25)(x-0,5)(x-0,75)(x-1)}{(-0,25)(-0,5)(-0,75)(-1)} x - 0,75 =$$

$$= 10,67x^4 - 26,67x^3 + 23,33x^2 - 8,33x + 1,$$

$$l_1(x) = \frac{x(x-0,5)(x-0,75)(x-1)}{0,25(0,25-0,5)(0,25-0,75)(0,25-1)} =$$

$$= -42,67x^4 + 96x^3 - 69,33x^2 + 16x,$$

$$l_2(x) = \frac{x(x-0,25)(x-0,75)(x-1)}{0,5(0,5-0,25)(0,5-0,75)(0,5-1)} = 64x^4 - 128x^3 + 76x^2 - 12x,$$

$$l_3(x) = \frac{x(x-0,25)(x-0,5)(x-1)}{0,75(0,75-0,25)(0,75-0,5)(0,75-1)} =$$

$$= -42,67x^4 + 74,67x^3 - 37,33x^2 + 5,33x,$$



$$l_4(x) = \frac{x(x-0,25)(x-0,5)(x-0,75)}{(1-0,25)(1-0,5)(1-0,75)} = 10,67x^4 - 16x^3 + 7,33x^2 - x,$$

Составляем полином четвертой степени:

$$L_4(x) = -0,958l_0(x) - 0,857l_1(x) - 0,702l_2(x) - 0,504l_3(x) - 0,275l_4(x) = -0,958 + 0,282x + 0,513x^2 - 0,101x^3 - 0,011x^4.$$

Графики исходной функции и построенного полинома Лагранжа, а также погрешность приближения  $R(x) = f(x) - L_4(x)$  приведены соответственно на рис. 4.7 а,б.

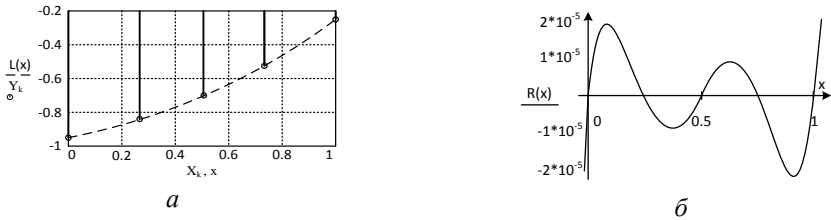


Рис. 4.7. График исходной функции (а) и погрешности приближения интерполяционным полиномом Лагранжа (б)

**Интерполяционный полином Ньютона** строится для численно заданных функций с постоянным шагом аргумента  $h = x_{i+1} - x_i$ ,  $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ . Разность первого порядка между значениями функций в соседних узлах интерполяции определяется формулой:  $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ .

Из разностей первого порядка образуются разности второго порядка:  $y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1 \cdot (x_1 - x_0) = a_0 + a_1 \cdot h$ , откуда  $a_1 = \Delta y_0 / h$ .

Аналогично определяем разности произвольного  $k$ -го порядка

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_i &= \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = \\ &= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i, \end{aligned}$$

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - k \cdot y_{i+k-1} + \frac{k \cdot (k-1)}{2!} y_{i+k-2} + \dots + (-1)^k \cdot y_i$$

Ищем интерполяционный полином в виде

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots \\ &\dots + a_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

Коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  найдем из условия равенства значений исходной функции и полинома в узлах. Положив  $x = x_0$ , находим  $y_0 = P_0(x_0) = a_0$ , откуда последовательно придавая  $x$  значения  $x_1$  и  $x_2$ , получим

$$\begin{aligned} y_2 &= P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = \\ &= a_0 + a_1 2h + a_2 2h^2, \end{aligned}$$

т.е.  $a_2 2h^2 = y_2 - a_1 2h - a_0$ , либо

$$2ha_2 = y_2 - 2(y_1 - y_0) - y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = \Delta^2 y_0,$$

откуда  $a_2 = \Delta^2 y_0 / 2! h^2$

Далее, проведя аналогичные выкладки, получим:

$$a_3 = \Delta^3 y_0 / 3! h^3,$$

и в общем случае –  $a_n = \Delta^n y_0 / n! h^n$ .

Окончательное выражение для полинома Ньютона имеет вид

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

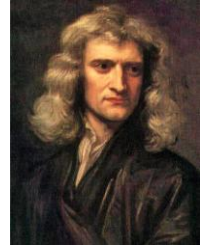
В результате выполнения алгоритма Ньютона получаем по  $x$  тот же полином Лагранжа. Главное преимущество этого алгоритма проявляется в случае, когда изменяется число значений исходной функции. Тогда все коэффициенты полинома Лагранжа надо пересчитывать заново, а все ранее найденные коэффициенты полинома Ньютона остаются теми же.

**Метод наименьших квадратов (МНК).** Интерполяционные полиномы применяются в тех случаях, когда результаты измерения получены с высокой точностью. Если же точность измерительной информации невелика, тогда требование, чтобы график аппроксимирующей функции проходил именно через заданные точки, не имеет смысла. Поэтому возникает более широкая задача: установить функциональную зависимость  $y(x)$  между численно заданными величинами  $x$  и  $y$  и найти соответствующие коэффициенты (параметры) самой функции

$$y(x) = F[x].$$

В целом эта зависимость произвольная, и обычно соответствующая функция выбирается так, чтобы она определялась конечным числом искомым параметров (коэффициентов). Например, функция  $y(x) = ax + b$  – линейная относительно аргумента  $x$  и двух искомым коэффициентов  $a, b$ . Параболическая функция  $y(x) = ax^2 + bx + c$  – нелинейная по аргументу  $x$  и линейная относительно коэффициентов  $a, b, c$ . Экспоненциальная функция  $y(x) = e^{a \cdot x}$  – нелинейная одновременно и по аргументу  $x$ , и по коэффициенту  $a$ .

Очевидно, что при определенной допустимой пог-



**Исаак Ньютон**  
(Isaac Newton)  
(1643 - 1727) –

английский механик, математик, физик, астроном, богослов. Обобщил законы Кеплера и Галилея и предоставил классической механике окончательный вид. Вместе с Г.В.Лейбницем заложил основы математического анализа. Помимо значительного вклада в различные разделы математики разработал численные методы интерполяции и развязку алгебраических и дифференциальных уравнений.

решности приближения, существует не одна, а целое множество адекватных моделей функциональной зависимости или приближающих функций. Они могут отличаться как по виду, так и по количеству членов, а также получаемыми в результате расчета значениями коэффициентов.

Существует несколько вариантов реализации МНК. Рассмотрим один из наиболее практических и компактных – матричный метод. Сначала построим соответствующий алгоритм для линейной двухпараметрической функциональной зависимости  $y(x) \equiv F[a, b; x] = a \cdot x + b$ , и покажем как этот алгоритм применяется для широкого класса функций, зависящих от двух параметров.

Пусть эмпирические данные  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$  подчиняются зависимости вида  $Y_i = a \cdot X_i + b$ . Тогда относительно неизвестных параметров  $a, b$  получим систему  $N$  линейных алгебраических уравнений

$$A \cdot z = c, \quad A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ X_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ X_N & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Система (4.31) переопределена при  $N > 2$ , так как число уравнений больше числа неизвестных.

Если линейное соотношение действительно справедливо и эмпирические данные измерены точно, то система (4.31) совместна и ранг матрицы  $A$  равен двум (числу неизвестных), а численные значения параметров линейной зависимости  $a, b$  можно найти, например, из первых двух уравнений системы.

На практике эмпирические данные всегда имеют погрешности, а линейная модель – приближенная. Поэтому в действительности система (4.31) – несовместна. Для решения несовместных систем линейных алгебраических уравнений используется МНК. Обозначим разность  $Az - c$  при произвольном векторе  $z$  через  $r$ . Вектор  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) = Az - c$  называется *вектором невязки*,

а его норма  $|r| = |Az - c| = \sqrt{\sum_{k=1}^N r_k^2}$ , – *невязкой*. Вектор  $z^*$ , при котором невязка минимальна, называется нормальным обобщенным решением системы  $A \cdot z = c$   $Az = c$ , т. е.  $|Az^* - c| = \min_{z \in E_N} |Az - c|$ .

При произвольном векторе  $u$  вектор  $A \cdot u$  ортогонален вектору минимальной невязки  $Az^* - c$ , а именно  $A \cdot u \cdot (Az^* - c) = 0$ , или

$$u^T \cdot A^T \cdot (Az^* - c) = u^T \cdot (A^T \cdot Az^* - A^T \cdot c) = 0.$$

Последнее равенство выполняется при

$$(A^T \cdot A) \cdot z^* = A^T \cdot c. \quad (4.32)$$

Если матрица  $A^T A$  имеет обратную, тогда  $z^* = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot (A^T \cdot c)$  – ис-

комое решение системы (4.31), а сам метод решения является МНК, поскольку

$$\min_{z \in E_N} |A \cdot z - c| = \min_{z \in E_N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{ij} \cdot z_j - c_j)^2}.$$

Таким образом нормальное обобщенное решение позволяет найти лучшее приближенное значение коэффициентов (параметров) искомой линейной функции, которые удовлетворяют нормальной системе МНК (4.32):

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot (A^T \cdot c).$$

Этим методом можно воспользоваться для произвольной двухпараметрической функции, если преобразованием переменных она сводится к линейной функции.

**Пример** Пусть заданы следующие исходные данные:

$$Y = (62,17 \ 63,05 \ 63,72 \ 64,24 \ 64,09 \ 63,59 \ 65,41 \ 65,29 \ 65,05 \ 68,88),$$

$$X = (11,1 \ 11,2 \ 11,3 \ 11,4 \ 11,5 \ 11,6 \ 11,7 \ 11,8 \ 11,9 \ 12).$$

Сначала рассмотрим случай линейной приближающей функции. Строим матрицу коэффициентов  $A$  и правую часть системы уравнений (4.31)

$$A^T = \begin{pmatrix} 11.111.211.311.411.511.611.711.811.912 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \end{pmatrix}, \quad c = Y.$$

Находим решение системы (4.31) и искомые параметры  $a, b$

$$(A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot c = z = \begin{pmatrix} 5.167 \\ 4.874 \end{pmatrix}, \quad a = 5.167, \quad b = 4.874.$$

На рис. 4.8 показан график полученной аппроксимирующей линейной функции  $y(x) = 5,167 \cdot x + 4,874$ . Далее рассмотрим экспоненциальную функциональную зависимость  $z(x) = p \cdot e^{q \cdot x}$ . Прологарифмируем эту функцию  $\ln z(x) = \ln p + q \cdot x$  и введем новое обозначение:

$$w(v) = b + a \cdot v, \quad w(v) = \ln z(v), \quad b = \ln p, \quad a = q, \quad x = v.$$

В соответствии с проведенными преобразованиями переменных, вычисляем новые исходные данные:

$$v = x, \quad w = \ln y$$

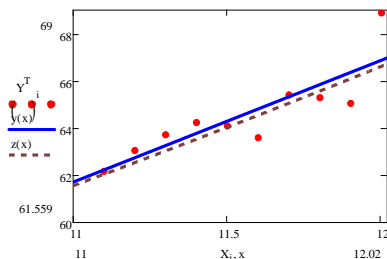


Рис. 4.8 График аппроксимирующих функций

Далее повторяем алгоритм из первой части примера для линейной функции  $w(x)$ . В результате получаем:  $a = q = 0,079$ ,  $b = 3,251$ ,  $p = e^b = 25,816$ .

$$z(x) = 25,816 \cdot e^{0,079x}$$

В данном случае среднеквадратическая ошибка линейной функции – 0,081, а экспоненциальной – 0,086 (см. рис.4.8).

#### 4.4. Элементы теории дифференциальных и разностных уравнений

Теория дифференциальных и разностных уравнений является разделом математики особенно важным в приложениях. Поэтому неудивительно, что за последние 350 лет это были наиболее распространенные, эффективные и универсальные математические модели техники и естествознания. С их помощью изучались сложные явления астрономии и физики, артиллерии и авиации, радиоэлектроники и управления, экологии и психологии и многих других областей науки и практики.

С самого начала использования дифференциальных уравнений оказалось, что точные аналитические решения существуют только для линейных уравнений с постоянными коэффициентами и для некоторых отдельных простейших нелинейных уравнений. Поэтому основное внимание было привлечено к созданию приближенных методов и в первую очередь численных.

Особо следует отметить выдающийся вклад в разработку этих методов инженеров и исследователей, которые, изучая новые явления, создавая новые приборы и машины, первыми, раньше математиков, встречались еще с неизвестными типами уравнений и самостоятельно их решали. Яркий пример – ученый и инженер Оливер Хевисайд, который разработал операционный метод решения дифференциальных уравнений и успешно применял его к конкретным задачам электротехники и телеграфии. Математики сумели строго обосновать метод Хевисайда через 50 лет, а до этого считали его «незаконным», несмотря на его успешное применение.

Кроме численных методов и операционного исчисления для линейных систем дифференциальных и разностных уравнений применяется также матричный метод, основанный на рассмотренных выше методах построения матричных функций.

**Определение и классификация дифференциальных и разностных уравнений (ДУ и РУ).** Решениями хорошо известных из школьного курса математики алгебраических уравнений являются действительные или комплексные числа. Уравнение, в котором искомым решением есть не число, а функция, называется *функциональным*.

*Дифференциальным (разностным)* называют функциональное уравнение, в которое помимо искомой функции входят ее производные (разности).

*Решением* дифференциального (разностного) уравнения называется функция, которая при подстановке превращает это уравнение в тождество.

Простейший **пример** дифференциального уравнения - соотношение вида:

$dy/dx = f(x)$ . Это основная задача интегрального исчисления, которая сводится к определению функции  $y(x)$ , производная по  $x$  которой равна функции от независимой переменной  $f(x)$ . Если функция  $f(x)$  однозначна и непрерывна, *общее* решение этого уравнения находится с помощью основной формулы интегрального исчисления  $y(x) = \int_0^x f(z)dz + C$ , в которую входит произвольная постоянная  $C$ . Любая функция  $y(x)$ , полученная при определенном значении  $C$ , дает *частное* решение уравнения.

Более сложным **примером** ДУ является уравнение радиоактивного распада  $dy(t)/dt = -k \cdot y(t)$ , где  $k$  - постоянная распада;  $y(t)$  - количество вещества, которое не распалось, к моменту времени  $t$ ;  $dy(t)/dt$  - скорость распада. Это уравнение имеет общее решение  $y(t) = C \cdot e^{-kt}$  с произвольной постоянной  $C$ , определяемой начальным условием: если это условие задано,  $y(0) = y_0$ , то  $C = y_0$  и частное решение принимает вид  $y(t) = y_0 \cdot e^{-kt}$ .

Еще один **пример** – уравнение движения точки массы  $m$ :

$$m \cdot d^2 \mathbf{r}(t)/dt^2 = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}(t), d\mathbf{r}(t)/dt),$$

где  $\mathbf{F}$  - сила, функция времени  $t$ , радиус-вектор точки  $\mathbf{r}$  и ее скорости  $d\mathbf{r}/dt$ .

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения. Чаще всего для интегрирования применяют приближенные методы.

Наивысший порядок производной (разности) искомой функции определяет *порядок* дифференциального (разностного) уравнения. В общем случае дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с искомой функцией  $y(x)$  от одной переменной имеет вид

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad (4.33)$$

где  $F(\cdot)$  – некоторая известная функция от  $(n+2)$  переменных, независимая переменная  $x$  принимает значения из интервала  $x \in [a, b] \subset \mathbf{R}$ .

Если в уравнении (4.33) искомая функция зависит от нескольких независимых переменных, такое уравнение называется ДУ *в частных производных*. Эти уравнения изучаются в разделе математики - математической физике, именно потому, что они возникают в гидродинамике, теории упругости и других областях физики.

В данном разделе изучаются только уравнения, неизвестная функция в которых зависит от одной независимой переменной. Такие уравнения, в отличие от уравнений математической физики, называются *обыкновенными дифференциальными уравнениями*.

В случае разрешимости уравнения (4.33) относительно старшей производной получаем дифференциальное уравнение в нормальной форме

$$y^{(n)}(x) = g(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)). \quad (4.34)$$

В отличие от алгебраического уравнения  $n$ -го порядка, для которого всегда существует ровно  $n$  решений, дифференциальное уравнение может иметь бесконечное число решений, а может не существовать ни одного. Свойства функции  $g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$  определяют свойства и тип уравнения (4.34), в том числе свойство существования и единственности его решения. Чтобы выделить среди многих решений необходимое, следует зафиксировать начальные условия, т.е. нужно уравнение (4.34) дополнить  $n$  соотношениями

$$y(a) = y_0, y'(a) = y'_0, y''(a) = y''_0, \dots, y^{(n-2)}(a) = y^{(n-2)}_0, y^{(n-1)}(a) = y^{(n-1)}_0, \quad (4.35)$$

где  $y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0$  - заданные числа (начальные условия) при  $x = a$ .

Уравнение (4.34) с условиями (4.35) называется *начальной задачей*, или *задачей Коши*.

**Классификацию ДУ (РУ)**, т.е. разбиение множества всех уравнений на отдельные классы с соответствующими свойствами, начнем с простейшего случая: функция  $g(x, y, \dots, y^{(n-1)})$  линейная с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}(x) = a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)}(x). \quad (4.36)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  - некоторые заданные числа. Уравнение (4.36) называется *линейным однородным автономным* дифференциальным уравнением.

Если в правой части уравнения (4.36) добавляется известная функция  $f(x)$  (внешнее возмущение), тогда оно называется *линейным неоднородным автономным* дифференциальным уравнением.

Дифференциальное уравнение (4.36) становится неавтономным (нестационарным), если его коэффициенты – функции независимой переменной:

$$a_k = a_k(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

В общем случае, когда функция  $g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  - нелинейная, тогда  $y^{(n)}(x) = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  называется *нелинейным однородным неавтономным* (независимая переменная  $x$  явно входит в правую часть уравнения), а уравнение  $y^{(n)}(x) = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) + f(x)$ , где  $f(x)$  - известная функция, называется *нелинейным неоднородным неавтономным* уравнением. И, наконец, уравнение  $y^{(n)}(x) = g(y, y', \dots, y^{(n-1)})$  называется *нелинейным однородным автономным*.

**Форма Коши.** Уравнение  $n$ -го порядка (4.34) в общем случае простым переобозначением неизвестных функций ( $y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$ ) может

быть представлено в виде системы  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка.

Для этого достаточно ввести новое определение искомой функции и ее производных

$$\begin{aligned} y(x) &= z_1(x), \\ y'(x) &= z_2(x), \\ y''(x) &= z_3(x), \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x) &= z_n(x). \end{aligned}$$

Тогда уравнение (4.93) переписывается в виде:

$$y^{(n)}(x) = g(x, z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)). \quad (4.37)$$

Найдем первые производные от функций  $z_1(x), \dots, z_n(x)$

$$\begin{cases} dz_1/dx = y'(x) = z_2(x), \\ dz_2/dx = y''(x) = z_3(x), \\ \dots\dots\dots \\ dz_{n-1}/dx = y^{(n-1)}(x) = z_n(x), \\ dz_n/dx = y^{(n)}(x) = g(x, z_1(x), \dots, z_n(x)). \end{cases} \quad (4.38)$$

Для получения последнего уравнения мы воспользовались выражением для  $y^{(n)}(x)$  из формулы (4.37). Уравнения (4.34) и (4.38) эквивалентны, а именно каждому решению уравнения (4.34) соответствует решение уравнения (4.38). Система  $n$  уравнений первого порядка (4.38) называется **формой Коши** дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (4.34). Система (4.38) может быть представлена и в векторной форме

$$dz/dx = G(x, z), \quad (4.39)$$

где  $z = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \dots \\ z_n(x) \end{pmatrix}$ ,  $G(x, z) = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ z_3(x) \\ \dots \\ g(x, z_1(x), \dots, z_n(x)) \end{pmatrix}$  - вектор-

функция размерности  $n$ .

Для линейного уравнения (4.36) уравнение (4.39) можно записать в векторно-матричной форме

$$dz/dx = Az, \quad (4.40)$$

где матрица  $A$  имеет вид



**Огюстен Луи Коши**  
(Augustin Louis Cauchy)  
(1789 - 1857) –

французский математик. Заложил основы современной теории функций, математической физики, математического анализа, теории рядов, теории дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного.





уравнения (4.41) в значениях функции  $y(k)$  значительно его упрощает. Например, уравнение в разностях  $\Delta^{(2)}y(k) + 2 \cdot \Delta y(k) + y(k) - f(k) = 0$ , где  $f(k)$  - заданная функция, в значениях функции оказывается просто решением исходного уравнения  $y(k+2) = f(k)$ .

Во всех других отношениях определение и классификация РУ полностью аналогична ДУ. Покажем это для случая, когда уравнение (4.42) разрешено относительно старшего значения  $y(k+1)$  искомой функции  $y(k)$

$$y(k+n) = g(k, y(k), y(k+1), \dots, y(k+n-1)). \quad (4.43)$$

Тип функции  $g(k, y(k), y(k+1), \dots, y(k+n-1))$  определяет *линейное* или *нелинейное* уравнение (4.43). Явное вхождение независимой переменной  $k$  указывает, что это уравнение неавтономное. Отсутствие аддитивной известной функции в правой части уравнения означает, что оно однородное. Таким образом, разностное уравнение (4.43) нелинейное, неавтономное, однородное.

Так же, как и уравнение (4.34), уравнение (4.43) может быть представлено в форме Коши  $z(k+1) = G(k, z(k))$ , где  $n$ -мерные вектор-функция дискретного аргумента  $k$  имеют вид

$$z(k) = \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ \dots \\ z_n(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \dots \\ y(k+n-1) \end{pmatrix}, \quad G(k, z) = \begin{pmatrix} z_2(k) \\ z_3(k) \\ \dots \\ z_n(k) \\ g(k, z_1, \dots, z_n) \end{pmatrix}.$$

Это уравнение для линейного автономного неоднородного уравнения (4.43) записывается в векторно-матричной форме:

$$z(k+1) = A \cdot z(k) + f(k), \\ z(0) = z_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

где  $z_0 = \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(n-1) \end{pmatrix}$  - вектор заданных начальных условий;  $f(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ f(x) \end{pmatrix}$  -

$n$ -мерный вектор,  $f(x)$  - заданная функция;  $n \times n$  матрица  $A$  (4.40).

**Методы решения дифференциальных уравнений.** Появление ДУ и РУ в XVII в. было вызвано потребностью математического описания движения тел в только что созданной в то время динамике. Второй закон динамики напрямую связывает координаты тела, как функции времени, с их второй

производной – ускорением тела. Тогда уже с помощью ДУ и РУ были рассчитаны навигационные таблицы для мореплавания и таблицы стрельбы в артиллерии. С тех пор ДУ (РУ) остаются наиболее универсальными и распространенными математическими моделями науки и техники.

ДУ могут иметь бесконечно много решений или не иметь ни одного. Даже для уравнений первого порядка представления их решений в аналитическом виде через элементарные функции возможно в исключительных случаях. Решения некоторых линейных ДР второго порядка с переменными коэффициентами было затабулировано, т.е. для этих функций были составлены таблицы, как для тригонометрических функций. Так появились новые специальные функции Бесселя, Ламе, Матье и др.

Только для линейных ДУ (РУ) с постоянными коэффициентами существует общее аналитическое представление решения, которое строится с помощью матричного или операционного метода. Относительно других классов ДУ (РУ) разработано большое количество приближенных методов.

**Классификация методов решения дифференциальных уравнений.** Все методы изучения и построения решений ДУ делятся на качественные и количественные.

*Качественные* методы позволяют получить информацию о решении уравнения не строя его, а изучая свойства самого уравнения.

*Количественные* методы позволяют непосредственно строить отдельные решения уравнения, например для конкретных начальных условий. К количественным методам относятся методы точного интегрирования ДУ, среди которых отметим метод *разделения переменных*, методы *замен и преобразования переменных*. К количественным относятся также методы приближенного интегрирования, а именно: *метод рядов*, *метод возмущений* и *асимптотические методы*. Значительную часть количественных методов составляют численные методы, позволяющие находить решение ДУ для фиксированных начальных условий в виде числовых таблиц. Именно этими методами получены таблицы специальных функций – решений особенно распространенных ДУ. Появление электронной вычислительной техники дало толчок развитию *численным*, а также *графическим* и *символьным* методам.

**Решение уравнений первого порядка. Метод разделения переменных.** Общее нелинейное неавтономное однородное ДУ первого порядка имеет вид

$$dy/dx = f(x, y), \quad (4.44)$$

где  $y(x)$  - неизвестная функция независимой переменной  $x$ ;  $y(0) = y_0$  - начальное условие. Считаем, что функция  $f(x, y)$  представляет собой однозначную функцию от  $x$  и  $y$  с конечными производными по  $x$  и по  $y$ .

Есть исключительные случаи, когда решение уравнения (4.44) может быть найдено с помощью квадратуры (прямым интегрированием). Один из этих случаев имеет место, если переменные  $x$  и  $y$  могут быть разделены:



*Карл Давид  
Тольма Рунге (Karl  
David Tolme Runge,  
1856 - 1927),*

немецкий физик и математик. Внес значительный вклад в приложения математики и особенно в развитие приближенных методов решения дифференциальных уравнений.

$$dy/dx = f(x, y) = X(x)/Y(y) \text{ или} \\ Y(y) \cdot dy = X(x) \cdot dx.$$

Интегрируя обе части соответственно по  $y$  и по  $x$ , с учетом начального условия имеем

$$\int_{y_0}^y Y(y)dy - \int_0^x X(x)dx = 0, \text{ находим уравнение, опреде-}$$

ляющее решение (интегральную кривую) ДУ (4.44), которое проходит через заданную начальную точку  $x=0, y=y_0$ :  $F(y) - G(x) = C$ ,

$$\text{где } F(y) = \int_{y_0}^y Y(\tau)d\tau, G(x) = \int_0^x X(\tau)d\tau.$$

**Пример.** Линейное неавтономное и неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка – это еще один из случаев, когда ДР имеет аналитическое решение. Общий вид линейного неавтономного уравнения первого порядка

$$dy/dx = a(x)y + b(x) \quad (4.45)$$

Представим решение уравнения в виде произведения двух функций

$$y(x) = u(x) \cdot v(x),$$

где  $u(x), v(x)$  - две пока неизвестные функции от  $x$ .

После подстановки этого представления  $y(x)$  в уравнение (4.45) получаем

$$\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} = a(x) \cdot u \cdot v + b(x). \quad (4.46)$$

Очевидно, что одну из функций  $u(x), v(x)$  можно выбрать произвольно. Выберем функцию  $v(x)$  так, чтобы  $u dv/dx = a(x) \cdot u \cdot v$ , откуда имеем  $dv/dx = a(x) \cdot v$ , а это уравнение решается методом разделения переменных:  $dv/v = a(x) dx$ .

$$\text{Имеем } \ln v(x) = \int_0^x a(\tau)d\tau \text{ или } v(x) = e^{\int_0^x a(\tau)d\tau}.$$

Тогда уравнение (4.46) принимает вид  $v(x) \cdot du/dx = b(x)$  и может быть решено непосредственно (функция  $v(x)$  - известная):

$$u(x) = \int_0^x e^{-\int_0^x a(\tau) d\tau} \cdot b(x) \cdot dx + C.$$

Подставляя выражения функций  $u(x), v(x)$  в  $y(x)$ , получим общее решение уравнения (4.45):

$$y = e^{\int_0^x a(\tau) d\tau} \left[ \int_0^x e^{-\int_0^x a(\tau) d\tau} \cdot b(x) \cdot dx + C \right],$$

где  $C$  - произвольная постоянная, которая зависит от начальных условий.

**Методы решения систем линейных автономных ДУ.** Системы линейных автономных ДУ широко распространены в приложениях при исследовании многих процессов и объектов. Рассмотрим два способа решения таких систем.

*Матричный метод* применяется к линейным системам заданным в векторно-матричном виде:  $dy/dx = Ay + f(x)$ , где  $y = y(x)$  - искомая  $n$ -мерная вектор-функция,  $A$  - матрица с постоянными элементами *размера*  $n \times n$ ;  $f(x)$  - известная  $n$ -мерная вектор-функция.

При заданных начальных условиях  $y(0)$  общее решение данной системы записывается как

$$y(t) = e^{At} \left( y(0) + \int_0^t e^{-A\tau} f(\tau) d\tau \right).$$

Первая часть этого выражения (решение однородной системы) описывает переходный процесс и связана с начальными условиями, а вторая - с влиянием на решение правой части уравнения (интеграл Дюамеля).

В случае системы линейных автономных неоднородных РУ:  $z(k+1) = A \cdot z(k) + f(k)$ ,  $z(0) = z_0$ , где  $z(k), f(k)$  -  $n$ -мерные искомая и известная функции натурального аргумента  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $A - n \times n$  заданная матрица коэффициентов системы;  $z_0$  - заданные начальные условия. Последовательные итерации позволяют получить общее решение этой системы в матричной форме

$$z(k) = A^k \cdot z(0) + \sum_{j=1}^{k-1} A^{k-j-1} \cdot f(j).$$

*Операционный метод* (метод Хевисайда) применяется к линейным автономным уравнениям  $n$ -го порядка

$$y^{(n)}(x) + a_0 \cdot y(x) + a_1 \cdot y'(x) + \dots + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) = f(x).$$

После применения преобразования Лапласа получаем алгебраическое уравнение:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0) \cdot y(s) = f(s),$$

из которого находим изображение по Лапласу искомого решения

$$y(s) = f(s) / (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0).$$

Далее, используя обратное преобразование Лапласа, находим решение исходного уравнения  $y(x)$ .

Аналогично решается линейное РУ с постоянными коэффициентами с помощью  $z$ -преобразования (дискретного преобразования Лапласа).

**Численные методы интегрирования.** Существует много численных методов интегрирования функций и нахождения решений ДР. Большинство из них сводится к приближенному вычислению определенного интеграла, которое заключается в разбиении искомой площади криволинейной трапеции (рис. 4.9) на небольшие части, нахождении их площади и в последовательном суммировании этих площадей.

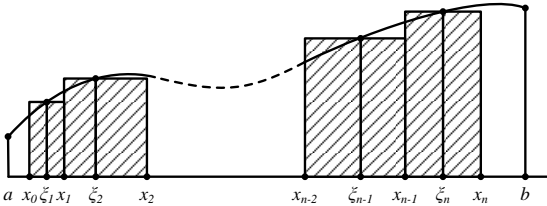


Рис. 4.9. Геометрическая интерпретация общей формулы прямоугольников

Например, интеграл  $I = \int_a^b f(x) dx$  можно приближенно найти с помощью формулы суммы

$$I \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}), \quad (4.47)$$

$n$  прямоугольников с основанием  $(x_i - x_{i-1})$  и высотой (ординатой)  $f(\xi_i)$  ( $i = 1 \dots n$ ), где значение  $\xi_i$  выбирается из интервала  $[x_i - x_{i-1}]$ . Формула (4.47) называется общей формулой прямоугольников. На рис. 4.9 приведена геометрическая интерпретация этой формулы.

Приближенные формулы типа (4.47) для вычисления определенных интегралов называются *квадратурными формулами* (механическими квадратурами) или *формулами численного интегрирования*.

Группа квадратурных формул вычисления определенных интегралов использует замену подынтегральной функции  $f(x)$  ее интерполяционным полиномом Лагранжа с последующим явным интегрированием степенных фун-



**Мартин Вильгельм Кутта**  
(*Martin Willhelm Kutta*)  
(1867 - 1944) –

немецкий математик. Главный вклад в вычислительную математику: алгоритм Кутты, формулы и теория метода численного интегрирования дифференциальных уравнений.

кций.

**Численное решения задачи Коши.** Приближенный метод Эйлера нахождения интегральной кривой ДР:  $dy/dx = f(x, y)$ , которая проходит через начальную точку  $(x_0 - y_0)$ , заключается в построении ломаной, каждым звеном которой являются прямолинейные отрезки касательной к искомой интегральной кривой на соответствующем участке разбиения интервала интегрирования  $[x_0 - x_n]$ . Если это разбиение равномерное и каждый из  $n$  участков имеет размер  $h = (x_n - x_0)/n$ , тогда простейшая схема метода Эйлера определяется рекуррентным соотношением  $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$ , где  $y_k = y(x_k)$ .

Недостаток этого метода – большая погрешность вычислений, которая пропорциональна шагу интегрирования  $h$ . Уменьшение шага ограничено значительным ростом погрешностей округлений и объемом вычислений. На практике применяются различные модификации метода Эйлера, а также численные методы построения решений задачи Коши, порядок которых равен  $h^m$ , где  $m > 1$ . Широкое распространение на практике нашел метод Рунге–Кутты, идея которого состоит в вычислении приближенного значения решения  $y_{k+1}$  в точке  $x_k+h$  в виде линейной комбинации  $y_j$  с постоянными коэффициентами.

Тогда приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Вычисление нового значения проходит в четыре этапа:

$$k_1 = hf(x_k, y_k), \quad k_2 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{1}{2}k_2\right), \quad k_4 = hf(x_k + h, y_k + k_3).$$

Этот метод имеет четвёртый порядок точности, то есть суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок  $O(h^4)$  (ошибка на каждом шаге порядка  $O(h^5)$ ).

**Качественные методы исследования ДУ.** Рассмотрим качественный подход к изучению решений ДУ  $n$ -го порядка, воспользовавшись векторным представлением, и дадим определение особых решений ДУ.

Приравняем правую часть уравнения (4.39) к нулю:  $G(x, \bar{z}) = 0$  и обозначим решения этой системы нелинейных уравнений через  $\{\bar{\phi}_1(x), \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_m(x)\}$  ( $m$  может быть бесконечным, а некоторые из вектор-функций  $\bar{\phi}_k(x)$  – постоянными). Именно эти функции, для которых производная искомой вектор-функции равна нулю, называются *особыми* или *стационарными*.

нарными решениями уравнения (4.39).

После нахождения особых решений ДУ (представляют собой точки, или некоторые многообразия в фазовом пространстве уравнения) начинается изучение окрестности каждого из этих решений в фазовом пространстве, т.е. от глобального анализа переходят к локальному.

В малой окрестности особого решения можно воспользоваться разложением правой части уравнения (4.39) в ряд Тейлора, и оставив только линейный член ряда, по спектру матрицы коэффициентов оценить тип особого решения и поведение других решений с его окрестности.

Это принципиальная схема качественного исследования, но в общем случае при решении системы уравнений (4.40) для произвольных  $n$  составляющих вектор-функции  $G(x, \bar{z})$  возникают значительные трудности. Поэтому полный качественный анализ ДУ удастся провести для достаточно широкого класса автономных уравнений, но только на плоскости ( $n=2$ ).

**Исследования автономных динамических систем второго порядка.** Рассмотрим автономное однородное ДУ второго порядка  $y^{(2)}(x) = g(y, y'(x))$ , где  $x \in [0, \infty)$  и функция  $g(0, 0) = 0$ .

Представим это уравнение в форме Коши:  $d\bar{z}/dx = G(\bar{z})$  с фазовым вектором  $\bar{z} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$  и правой частью  $G(\bar{z}) = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ g(z_1, z_2) \end{pmatrix}$ . Из свойств функции  $g(y, y')$  следует, что среди решений уравнения  $G(\bar{z}) = 0$  есть решение  $\bar{z} = 0$  (или  $z_1 = z_2 = 0$ ). Таким образом, для нашего уравнения начало системы координат его фазовой плоскости – особое решение. Найдем разложение функции  $G(\bar{z})$  в ряд Тейлора в окрестности  $\bar{z} = 0$  и примем во внимание только линейные члены разложения

$$G(\bar{z}) \cong \begin{pmatrix} z_2 \\ az_1 + bz_2 \end{pmatrix}, \text{ где } a = \frac{dg}{dz_1}(0), \quad b = \frac{dg}{dz_2}(0).$$

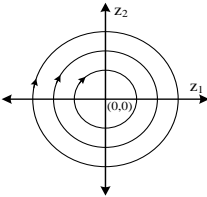
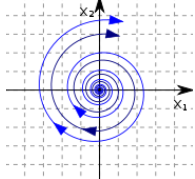
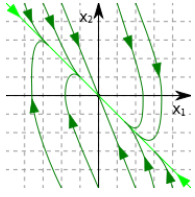
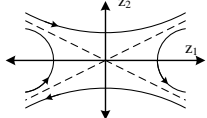
То есть, в окрестности точки  $(0, 0)$  фазовой плоскости исходное нелинейное уравнение можем приближенно заменить линейным:

$$\frac{d\bar{z}}{dx} = A \cdot \bar{z}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Критерием типа поведения особого решения  $\bar{z} = 0$  являются собственные значения матрицы  $A$ . В табл. 4.2 приведены основные типы особых решений автономных уравнений второго порядка. При этом приняты обозначения: для вещественных собственных значений матрицы –  $\lambda_1 = \alpha_1, \lambda_2 = \alpha_2$ ; а для комплексных –  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ .



Таблица 4.2

Собственные значения матрицы $A$	Тип особого решения $A$	Фазовые траектории в окрестности особого решения
<p><u>Чисто мнимые</u>  <math>\alpha_1 = 0; \alpha_2 = 0</math>  <math>\lambda_{1,2} = \pm i \cdot \omega</math></p>	<p><u>Фокус</u>                      устойчивый (<math>\alpha &lt; 0</math>)                      неустойчивый (<math>\alpha &gt; 0</math>)</p>	
<p><u>Комплексные (сопряженные)</u>  <math>\lambda_1 = \alpha + i\omega</math>  <math>\lambda_2 = \alpha - i\omega</math></p>		
<p><u>Вещественные одного знака</u>  <math>\lambda_1 = \alpha_1, \lambda_2 = \alpha_2</math></p>	<p><u>Узел</u>                      устойчивый (<math>\alpha_1 &lt; 0; \alpha_2 &lt; 0</math>)                      неустойчивый (<math>\alpha_1 &gt; 0, \alpha_2 &gt; 0</math>)</p>	
<p><u>Вещественные разных знаков</u>  <math>\alpha_1</math> и <math>\alpha_2</math></p>	<p><u>Седло</u></p>	

Таким образом, качественное изучение фазового пространства решений ДУ начинается с исследования его особых точек (решений) по линеаризованным уравнениям в этих точках. После этого этапа исследования находятся связи между особыми точками, а также изучается асимптотическое поведение решений ДУ, т.е. их поведение при  $x \rightarrow \infty$ . Здесь возможны два основных случая: решение стремится в бесконечность (монотонным или колебательным образом) или оно остается в конечной области фазового пространства. Наиболее распространенным примером последнего случая является периодическое решение, которому в фазовом пространстве соответствует замкнутая траектория.

Устойчивость по Ляпунову означает, что решение  $y(x)$  остается в ограниченной области при  $x \rightarrow \infty$ , при условии, что начальные условия также заданы в некоторой ограниченной области фазового пространства. Если же при  $x \rightarrow \infty$  решение стремится к нулю, то оно называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову*.

Основной критерий устойчивости по Ляпунову – это отрицательность

вещественной части спектра линейной части ДУ, т.е. расположение спектра матрицы линейной части ДУ в левой части комплексной плоскости.

Это утверждение следует из того факта, что в окрестности особой точки можно исследовать поведение решений ДУ по линейному приближению правой части. Если эта часть автономна, общее решение представляется совокупностью экспонент  $\sum_{k=1}^n c_k \cdot e^{\lambda_k \cdot t}$  с постоянными (при условии, что все собственные значения различны) коэффициентами  $c_k$  ( $k=1, \dots, n$ ), которые определяются начальными условиями, а  $\lambda_k$  - собственные значения матрицы коэффициентов линейной части ДУ. Отсюда следует, что решение ДУ стремится к 0 при  $x \rightarrow \infty$ , если выполняется условие

$$Re(\lambda_k) < 0,$$

где  $Re(\lambda_k)$  - вещественная часть собственного значения  $\lambda_k$  ( $k=1, \dots, n$ ).

Фундамент качественной теории дифференциальных уравнений был заложен в 1878 - 1892 гг. двумя выдающимися математиками - Анри Пуанкаре и А. М. Ляпуновым. Именно с именем Ляпунова связано понятие устойчивости и критерии асимптотического поведения решений ДУ в зависимости от начальных условий.

В случае, когда хотя бы одно собственное значение имеет положительную вещественную часть ( $Re(\lambda_k) > 0$ ), решение ДУ – неустойчиво.

Если хотя бы одно собственное значение имеет нулевую действительную часть ( $Re(\lambda_k) = 0$ ), тогда нельзя делать выводы об устойчивости решения ДУ по спектру его линейной части и нужно привлекать еще и нелинейные члены правой части ДУ. Это более трудная задача, которая требует отдельного исследования и разработки специальных методов.

**Нелинейные ДУ. Генератор колебаний.** Среди всевозможных типов решений нелинейных уравнений (здесь могут быть и решения линейных уравнений, рассмотренные выше) на практике чаще всего встречаются периодические решения, что связано с распространенностью колебательных процессов в природе, науке и технике. Во многих случаях эти процессы описываются ДУ второго порядка и на фазовой плоскости уравнения им отвечают замкнутые траектории. Для вышерассмотренных линейных уравнений второго порядка периодические решения имеют место в случае особой точки типа центр. При этом амплитуда колебаний определяется начальными условиями.

Нелинейные ДУ в окрестности особых точек могут иметь несколько, одно или ни одного периодического решения. Соответствующие им замкнутые фазовые траектории называются предельными циклами, которые бывают трех типов: устойчивые, полустойчивые и неустойчивые. Пример устойчивого предельного цикла показан на рис. 4.10, из которого видно, что внутренние и внешние фазовые траектории асимптотически наматываются на цикл. То

есть все траектории, начальные условия которых находятся вне цикла, направляются к циклу, и траектории, которые начинаются внутри цикла также стремятся к циклу.

В полуустойчивом предельном цикле траектории на одну сторону цикла асимптотически наматываются, а с другой – сматываются. От неустойчивого предельного цикла все окрестные траектории удаляются.

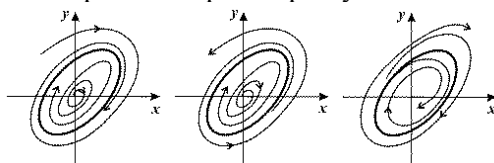


Рис. 4.10. Фазовый портрет устойчивого предельного цикла

Большое значение анализа и синтеза предельных циклов связано, в первую очередь с широким распространением передатчиков и приемников электромагнитных колебаний.

**Пример.** Рассмотрим генератор с колебательным  $RLC$  контуром (рис. 4.11), элементом обратной связи (катушка  $L_{св}$  связана с катушкой  $L$  отрицательной взаимной индукцией  $M$ ) и с нелинейным электронным элементом с вольт-амперной характеристикой  $i = f(u)$ , где  $i$  – ток в цепи обратной связи,  $u$  – напряжение на конденсаторе (и соответственно на управляющем электроде электронного прибора).

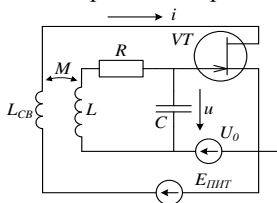


Рис. 4.11. Схема автогенератора с трансформаторной связью

Согласно уравнению колебательного контура (4.1) и учитывая обратную связь

$$L \cdot C \cdot d^2u(t)/d^2t + R \cdot C \cdot du(t)/dt + u(t) = M \cdot di(t)/dt = M \cdot df(u)/dt. \quad (4.48)$$

При условии малости колебаний напряжения  $u(t)$  в окрестности рабочей точки  $i_0$  вольт-амперную характеристику можно линеаризовать  $f(u) \approx i_0 + S_0 \cdot u$  и уравнение (4.48) представить в виде

$$d^2u(t)/d^2t + (R/L - M \cdot S_0/L \cdot C) \cdot du(t)/dt + u(t)/L \cdot C = 0. \quad (4.49)$$

Уравнение (4.49) описывает линейные колебания напряжения

$$u(t) = e^{-h \cdot t} (A \cdot \cos \omega \cdot t + B \cdot \sin \omega \cdot t)$$

с частотой  $\omega^2 = \omega_0^2 - h^2$ , где  $\omega_0^2 = 1/L \cdot C$  – собственная частота контура,  $h = (R/L - M \cdot S_0/L \cdot C)/2$  – коэффициент затухания контура ( $A, B$  – постоянные, зависящие от начальных условий). Понятно, что характер этих колебаний зависит от  $h$ : при  $h > 0$  – колебания затухают, при  $h < 0$  – колебания нарастают, при  $h = 0$  – колебания происходят с постоянной амплитудой.

Последнее условие является признаком предельного цикла, частота и амплитуда которого регулируются параметрами электронного прибора и обратной связи. Для устойчивости цикла рабочая точка на характеристике  $i = f(u)$  должна избираться таким образом, чтобы удовлетворялись условия крутизны вольт-амперной характеристики  $S_0$  в этой точке:  $S_0 = R \cdot C / M$  - колебания с постоянной амплитудой; если амплитуда колебаний возрастает, уменьшается крутизна  $S$  в новой точке характеристики, то т.е. из  $S_0 > S$  следует  $h > 0$  и колебания затухают; при уменьшении амплитуды колебаний в контуре крутизна должна увеличиваться  $S_0 < S$ , тогда условие  $h < 0$  обеспечивает увеличение амплитуды до номинальной.

Из этого приближенного описания видно, что установление амплитуды колебаний является процессом динамичным, характер которого зависит от выбранной структуры и параметров генератора.

---

### ***Основные выводы***

---

Измерение, как важнейшая составная часть практической деятельности человека на производстве, в науке и повседневной жизни, определяет и стимулирует состояние современной техники и естествознания. В свою очередь наука и техника обеспечивают метрологию необходимой теоретической и приборной базой.

Практика инженера-метролога постоянно требует обработки данных измерений, оценки их точности, совершенствования процессов измерения и обработки данных. Для этого он должен профессионально владеть методами математического моделирования, уметь выбирать и строить уравнения, связывающие параметры и переменные исследуемого объекта или процесса, а также методами решения этих уравнений.

К числу основных математических моделей, применяемых в метрологии, относятся алгебраические, разностные и дифференциальные уравнения и численные методы их решения.

Современные ИИС характеризуются многими переменными, поэтому описывающие их работу уравнения часто оказываются многомерными и нелинейными. Их решение возможно только приближенными и численными методами, развитыми в линейной алгебре, теории приближения функций и теории дифференциальных уравнений.

Для получения численных результатов необходимо, во-первых, численно представить соответствующие векторы и функции, во-вторых, найти численные значения параметров объекта, построить его математическую модель и, в-третьих, найти ее решение.

Задача координатизации векторов и функций состоит в выборе базиса, позволяющего получить наиболее простой вид математической модели. В инженерной практике широкое распространение получили матричные методы. В собственном базисе матрица коэффициентов линейных уравнений имеет диагональную форму, что приводит к разделению переменных.

Преобразование Фурье (представление функции в базисе Фурье) переводит исходные данные в частотную область и позволяет применить спектральные методы, а переход на комплексную плоскость с помощью преобразования Лапласа дает возможность решать линейные интегральные и дифференциальные уравнения алгебраическими методами.

Объем и сложность числовых расчетов в значительной степени зависят от выбранного базиса; их сложность может быть уменьшена использованием алгоритмов ортонормирования произвольного базиса и определения собственного базиса матрицы, в котором она имеет диагональную форму.

Особое значение матричные методы имеют при решении систем линейных алгебраических уравнений, которые широко применяются для обработки измерительной информации. При решении измерительных задач методами алгебры, анализа и теории дифференциальных уравнений возникает потребность в построении функций от матрицы. Построение таких функций значительно упрощается если воспользоваться собственным базисом матрицы.

Невозможность реально вычислить бесконечное число координат функции в таком базисе заставляет ограничиться конечным отрезком соответствующего ряда, требует оценки скорости сходимости ряда и погрешности такого приближенного представления функции. Примерами упорядоченных базисов служат степенной (ряд Тейлора), полиномиальный и тригонометрический (ряд Фурье).

В отличие от дискретных базисов, состоящих из упорядоченной последовательности функций одного аргумента, базисы второго типа – несчетные, описываются одной функцией двух непрерывных аргументов. В этих базисах функции представляются не в виде суммы, а в виде интеграла. Такое представление называют интегральным преобразованием (преобразования Фурье, Лапласа).

Дифференциальные и разностные уравнения являются наиболее распространенными, эффективными и универсальными математическими моделями техники и естествознания. Отсутствие точных решений этих уравнений в большинстве случаев требует применения приближенных и в первую очередь численных методов.

Кроме численных методов и операционного исчисления для линейных систем дифференциальных и разностных уравнений применяется также матричный подход, основанный на методах построения матричных функций.

---

### ***Вопросы для самоконтроля***

---

- 1. В чем заключается математическое моделирование?*
- 2. В чем заключается специфика математических задач и моделей в метрологии?*
- 3. Приближенные методы исследования математических моделей. Как связана задача приближения функции с задачей ее координатизации?*

4. *Какая разница между пространствами  $E_n$  и  $L_2[a, b]$ ?*
5. *Сколько базисов в функциональном пространстве?*
6. *Дайте определение обобщенного ряда Фурье.*
7. *Чем отличаются ортогональные полиномиальные базисы?*
8. *Что такое спектр функции?*
9. *Приведите примеры ортогональных и неортогональных базисов?*
10. *В каких случаях применяются интерполяционные полиномы?*
11. *Какова степень полинома Лагранжа для функции с 10-ю значениями?*
12. *Как выбрать вид функции приближая ее в МНК?*
13. *Сколько решений у алгебраического уравнения  $n$ -й степени? А в ДУ  $n$ -го порядка?*
14. *Изложите геометрический смысл ДУ первого порядка?*
15. *Когда применяются приближенные методы решения ДУ?*
16. *Приведите две формы представления РУ.*
17. *Чем отличается тип особого решения ДУ?*

---

### **Conclusions**

---

Measurement as an important component of any human activity in industry, science and everyday life, defines and stimulates the state of modern technology and natural science. In its turn science and technology provide the necessary theoretical and instrument base for metrology.

Practice of metrology engineer constantly demands processing of measurement data, evaluation of their accuracy, improving of measurement processes and data processing. To do this one should possess professional methods of mathematical modeling, to be able to select and build equations connecting parameters and variables of investigated object or process, as well as methods for solving these equations.

Basic mathematical models, used in metrology, are algebraic, difference and differential equations and numerical methods of their solution.

Modern IMS are characterized by many variables, so they often described by multidimensional and nonlinear equations. They can be solved only by approximate and numerical methods, developed in linear algebra, theory of function approximation and theory of differential equations.

To obtain numerical results it is necessary, firstly, to provide numerically relevant vectors and functions, secondly, to find numerical values of object parameters, to build its mathematical model, and thirdly, to find a solution.

The first task, i.e. coordinatization of vectors and functions, is to choose a basis that allows to get the simplest form of a mathematical model. In engineering practice, matrix methods are widespread. In eigenbasis matrix of linear equations coefficients has a diagonal shape which leads to complete separation of variables.

Fourier transformation (representation of function in Fourier basis) trans-

forms initial data into the frequency domain and allows applying spectral methods; when the transition to complex plane using Laplace transformation gives the opportunity to solve linear integral and differential equations with algebraic methods.

The volume and complexity of numerical calculations largely depend on the chosen basis; their complexity could be reduced by using algorithms of arbitrary basis orthonormality and by defining their own matrix basis where it has a diagonal shape.

Matrix methods are of particular importance for solving systems of linear algebraic equations that are widely used for measurement information processing. When solving measurement problems with methods of algebra, analysis and theory of differential equations there is a need in construction of matrix functions. Construction of such functions is greatly simplified when matrix own basis is used.

Inability to actually calculate an infinite number of functions coordinate in such basis forces to be limited by a finite segment of corresponding series; requires estimations of the rate of series convergence and error of such approximate functions representation. Examples of ordered bases are power (Taylor series), polynomial and trigonometric (Fourier series).

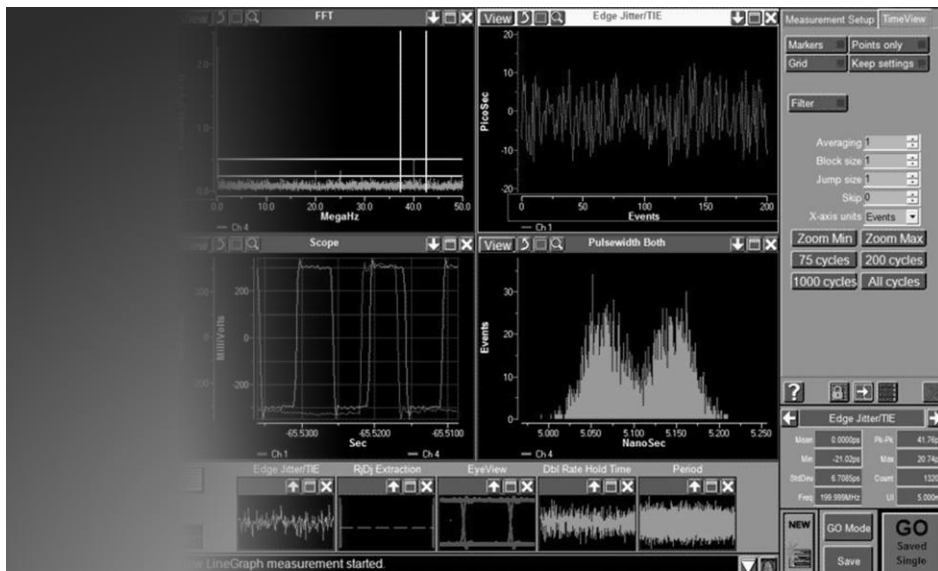
Unlike discrete bases consisting of an ordered sequence of functions of one argument, bases of the second type are uncountable, described by a single function of two continuous arguments. In these bases function does not appear as a sum, but as an integral. Such representation is called integral transformations (Fourier, Laplace transformations).

Differential and difference equations are most common, effective and universal mathematical models in technics and natural science. Lack of accurate solutions to these equations, in most cases requires the use of approximate and, primarily, numerical methods.

Except numerical methods and operational calculus for linear systems of differential and difference equations, a matrix approach is also used, based on methods of matrix functions construction.

**Ключевые слова**

математическое моделирование	simulation
норма	norm
Евклидово пространство	Euclidean space
координатизация	coordinatization
скалярное произведение	scalar product
базис	basis
интегральное преобразование	integral transformation
спектр	spectrum
метрика	metric
численное дифференцирование	numerical differentiation
численное интегрирование	numerical integration



## СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ

# 5

- 5.1. Основные понятия статистической обработки данных измерений
- 5.2. Методы обработки данных измерений
- 5.3. Основы регрессионного анализа
- 5.3. Статистическая обработка случайных углов
- 5.4. Типовые методы обработки результатов измерений



### 5.1. Основные понятия статистической обработки данных измерений

Наличие в современных ИИС вычислительной компоненты позволяет решать, в отличие от ранее используемых средств измерения, различные задачи по сбору, обработке, хранению и представлению измерительной информации. Такие задачи возникают при измерении параметров технологических процессов, характеристик физических полей, в технической и медицинской диагностике, неразрушающем контроле, анализе состава веществ, а также при калибровке, валидации и верификации измерительного оборудования. Возможность решения задач измерений требует также использования соответствующих математических методов – теории вероятности, математической статистики, теории случайных процессов и др. В данной главе будет рассмотрена статистическая обработка данных измерений, анализа и оценивания их погрешностей, которая используется в современных ИИС.

**Измерение, выборка, вариационный ряд.** В ходе исследования явлений окружающей среды, контроля качества продукции или статистическом регулировании технологических процессов используются результаты измерений определенного свойства объекта исследования. Результатом измерения является число, вектор, функция или множество чисел как именованных, так и неименованных.

Результат измерения включает в себя все виды погрешностей присущих измерительной процедуре. Например, это погрешности могут быть обусловлены несовершенством используемой модели измерения, нежелательным взаимным влиянием средства измерения и объекта измерения, воздействием внешних факторов и неинформативных параметров на средство измерения, несовершенством вычислительного алгоритма, потерей и искажением данных в измерительных каналах, субъективные факторы и др.

Случайный характер результата измерения в общем случае обуславливают две основные причины. Первая причина относится к измерениям постоянных, не изменяющихся во времени физических величин. Результаты измерения искажаются случайным во времени измерительным шумом, поэтому полученные последовательно во времени результаты стохастично изменяются во времени относительно определенного значения. Вторая причина касается измерения величин, которые сами по себе принимают случайны значения, например, значения параметра в партии изделий.

В современной теории измерений априорная модель результата измерения – это случайная величина, характеристики которой неизвестны. Статистическому оцениванию этих характеристик и посвящены методы обработки данных измерений, результатом применения которых являются как оценка самого результата измерения, так и оценки его характеристик качества (погрешности, неопределенности, достоверности).

Одна из задач математической статистики состоит в том, чтобы на основании информации о некотором свойстве подмножества элементов генераль-

ной совокупности обосновать данное свойство для всего множества - генеральной совокупности.

В теории погрешностей случайные величины рассматриваются обычно как результат прямых измерений определенной физической величины неизвестного, но неизменного размера, искаженные случайными погрешностями.

Если провести  $n$  повторных измерений случайной величины  $\xi(\omega), \omega \in \Omega$ , то получим  $n$  различных численных значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  как реализаций этой величины.

Случайная выборка - это несколько выборочных элементов, взятых из генеральной совокупности и предназначенных для получения информации о ней. Случайная выборка должна достаточно полно отражать особенности всех объектов генеральной совокупности, чтобы получаемые оценки были достоверными, т.е. она должна быть репрезентативной (представительной).

Случайная выборка будет репрезентативной, если отбор элементов в нее проводится случайно и независимо. Это означает, что все элементы генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Функции случайной выборки, используемой для оценки параметров распределений и (или) для проверки статистических гипотез, называют статистиками. Если в вероятностной модели данные измерений рассматриваются как случайные величины (или случайные элементы), то статистики, как функции случайных величин (элементов), сами являются случайными величинами (элементами). Статистики используются для определения характеристик случайных величин (математического ожидания, медианы, дисперсии, моментов высших порядков и др.), а их реализации используются для оценки этих характеристик, которые именуется статистическими оценками.

В вероятностной модели случайную выборку обычно рассматривают как реализацию независимых одинаково распределенных случайных величин  $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ , где  $\omega$  - элементарное событие из пространства  $\Omega$ . В результате измерительного эксперимента получаем соответствующие реализации случайной выборки - конкретные значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Вариационным рядом  $x_{[1]}, x_{[2]}, \dots, x_{[n]}$  называется реализация случайной выборки, записанная в порядке возрастания вариант  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , где элементы выборки  $x_j, j = \overline{1, n}$  называются вариантами. В дальнейшем элементы вариационного ряда будем обозначать как  $x_{[j]}$ .

В случае анализа выборки значительного объема ( $n > 50$ ) проводится разбиение вариационного ряда на классы (интервалы) и получается интервальный вариационный ряд. Ширину интервалов  $\Delta x$  определяют по формуле

$$\Delta x = (x_{\max} - x_{\min}) / k,$$

где  $x_{\max}$  и  $x_{\min}$  - наибольшее и наименьшее значения вариант выборки;  $k$  - количество классов.

Оптимальное количество классов зависит от объема выборки. Для определения количества классов можно пользоваться табл. 5.1.

Таблица 5.1

Объем выборки $n$	25÷40	40÷60	60÷80	100÷200	200÷1000
Количество классов $k$	5÷6	6÷8	7÷10	8÷12	10÷15

Предположим, что сделано  $n$  измерений случайной величины  $\xi(\omega)$  и получено  $k$  различных реализаций  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . При этом значение  $x_1$  наблюдалось  $m_1$  раз,  $x_2$  - раз, ...,  $x_k - m_k$  раз. Числа  $m_1, m_2, \dots, m_k$  являются частотами измеряемых значений  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Величины  $\tilde{m}_1 = m_1 / n, \tilde{m}_2 = m_2 / n, \dots, \tilde{m}_k = m_k / n$  называют относительными частотами вариант  $x_i$ . Ясно, что  $\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 + \dots + \tilde{m}_k = 1$ . Будем считать, что варианты  $x_1, x_2, \dots, x_k$  расположены в порядке возрастания, т.е. построен вариационный ряд. Полученные результаты удобно представить в табличном виде (табл. 5.2). Вторая строка таблицы представляет собой вариационный ряд для частот, третий - для относительных частот, четвертый - для кумулятивных (накопленных) относительных частот.

Таблица 5.2

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_i$	...	$x_k$
$m_i$	$m_1$	$m_2$	...	$m_i$	...	$m_k$
$\tilde{m}_i$	$m_1 / n$	$m_2 / n$	...	$m_i / n$	...	$m_k / n$
$F_i = \sum_{j=1}^i \tilde{m}_j$	$m_1 / n$	$\frac{m_1 + m_2}{n}$	...	$\sum_{j=1}^i m_j / n$	...	$\sum_{j=1}^k m_j / n = 1$

Если количество вариант  $k$  не очень большое, то для получения более наглядного представления о распределении случайной величины  $X$  строят полигоны частот. Для этого на оси абсцисс откладывают значения вариант  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , а на оси ординат соответствующие значения частот  $m_1, m_2, \dots, m_k$  или относительных частот  $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \dots, \tilde{m}_k$  или кумулятивных относительных частот  $F_i$ . Ясно, что полигон относительных частот дает представление о распределении вероятностей, а график кумулятивных относительных частот можно назвать реализацией эмпирической функции распределения. Эта функция выражает зависимость между значениями количественного признака и накопленной частотой. Эмпирическая функция распределения содержит всю информацию о результатах измерений.

Чтобы записать выражение для эмпирической функции распределения в виде формулы, введем функцию двух переменных

$$c(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq y, \\ 1, & x > y. \end{cases}$$

Случайные величины, моделирующие результаты измерений, обозначим

$\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega), \omega \in \Omega$ . Тогда эмпирическая функция распределения имеет вид:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c(x, \xi_i(\omega)).$$

Согласно закону больших чисел - для каждого действительного числа  $x$  эмпирическая функция распределения  $F_n(x)$  сходится к функции распределения  $F(x)$  результатов измерений, т.е.  $F_n(x) \rightarrow F(x)$ , при  $n \rightarrow \infty$  (теорема В.И. Гливенко).

Функция распределения определена на всей числовой оси. Ясно, что  $F(x) = 0$  для всех  $x < x_1$  и  $F(x) = 1$  для всех  $x > x_k$ . На интервале  $x_1 < x < x_k$  реализация эмпирической функции  $F_n(x)$  имеет вид ступенчатой монотонно растущей от 0 до 1 функции, такой, что  $F_n(a) = P(X < a)$  (рис. 5.1)

В случае интервального вариационного ряда частота равна общему количеству вариантов в данном классе. Все классы, кроме последнего, являются полуоткрытыми интервалами (например,  $[a_i; a_{i+1})$ ), а последний закрыт  $[a_{k-1}; a_k]$ .

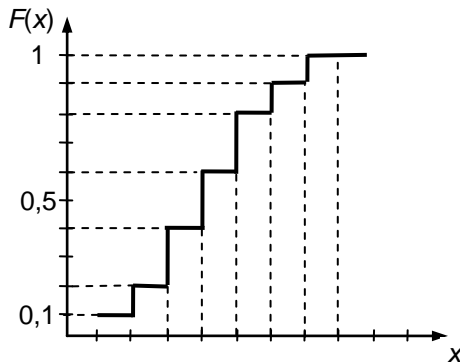


Рис. 5.1. Пример реализации эмпирической функции распределения вероятности

Можно составить следующую таблицу (табл. 5.3) интервальных вариационных рядов, где  $a_i$  - границы классовых интервалов. Если на оси абсцисс отложить классовые интервалы и над ними построить прямоугольники с высотами, равными соответствующим плотностям  $\tilde{m}_i$  относительной частоты, то площадь каждого прямоугольника будет равна относительной частоте  $S_i = \Delta x \cdot p_i = \Delta x \cdot \tilde{m}_i / \Delta x = \tilde{m}_i$ . Полученная таким образом ступенчатая фигура называется гистограммой (рис. 5.2). Площадь под гистограммой равна единице, поскольку равна сумме площадей прямоугольников  $S = \sum_{i=1}^k S_i = \sum_{i=1}^k \tilde{m}_i = 1$ .

Ломаная линия, которая идет по оси абсцисс, затем обводит гистограмму

и затем снова проходит по оси абсцисс, является графиком реализации эмпирической функции плотности распределения вероятности.

Таблица 5.3

Номер класса	1	2	...	$k$
Классовый интервал	$[a_0; a_1)$	$[a_1; a_2)$	...	$[a_{k-1}; a_k]$
Частота	$m_1$	$m_2$	...	$m_k$
Относительная частота	$\tilde{m}_1 = m_1 / n$	$\tilde{m}_2$	...	$\tilde{m}_k$
Плотность относительной частоты	$p_1 = \tilde{m}_1 / \Delta x$	$p_2$	...	$p_k$

При бесконечно большом количестве классовых интервалов, частота  $\tilde{m}_i$  служит приближением вероятности попадания случайной величины в  $i$ -й интервал  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx \approx p_i$ . Это свойство используют для сравнения теоретического и эмпирического распределений.

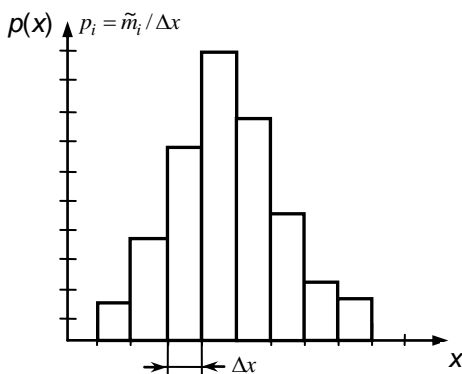


Рис. 5.2. Пример реализации эмпирической функции плотности распределения вероятности

Плотность вероятности случайной величины считается постоянной внутри каждого интервала, а функция распределения на каждом интервале как линейно возрастающая от начального до конечного ее интервального значения.

**Точечные оценки характеристик ряда измерений.** Методологической основой статистической обработки результатов измерений является выборочный метод, сущность которого заключается в переносе результатов исследования выборки на генеральную совокупность. Такая возможность обосновывается следующим образом. Пусть генеральная совокупность имеет определенный генеральный параметр  $Q$ . Проводится серия из  $n$  независимых

измерений случайной величины  $\xi(\omega)$  с определенным неизвестным законом распределения вероятности. Результатом измерения является выборка  $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  объема  $n$ .

Необходимо найти оценку генерального параметра  $Q$ , т.е.  $\hat{Q} = \phi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ . В качестве параметра  $Q$  могут выступать, например, математическое ожидание, дисперсия, другие моменты случайной величины высших порядков, а также медиана и мода распределений случайной величины. Считается, что  $x_i$  получают при неизменных условиях, и все результаты измерений независимы.

Каждое значение  $x_i$  можно рассматривать как реализацию случайной величины  $\xi_i(\omega)$ , а всю выборку  $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  - как реализацию случайного вектора (выборки)  $(\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ , в котором все  $\xi_i(\omega)$ ,  $j = \overline{1, n}$  независимы и имеют то же распределение вероятности, что и  $\xi(\omega)$ .

Точечное оценивание - способ статистической оценки (далее просто оценки) - заключается в том, что непосредственно полученное значение оценки применяется в качестве неизвестного значения параметра распределения. Точечная оценка параметра  $Q$  - оценка, которая определяется одним числом  $\hat{Q} = \phi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  по выборке  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ , она определяет одну точку числовой оси.

Наличие нескольких методов оценки одних и тех же параметров приводит к необходимости выбора между этими методами. Степень соответствия  $Q$  его оценке  $\hat{Q}$  зависит не только от объема  $n$  выборки, но и от вида функции  $\phi$ . Требования наилучшего приближения  $\hat{Q}$  к  $Q$  должны удовлетворять следующим показателям качества:

- а) несмещенность;
- б) состоятельность;
- в) эффективность.

*Несмещенность* оценки предполагает, что при росте количества измерений среднее значение оценки стремится к значению оцениваемого параметра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{M}(\hat{Q})) = Q,$$

где  $\mathbf{M}(\cdot)$  - оператор математического ожидания.

Если это условие не выполняется, оценку называют смещенной, а смещение определяется как разность  $\mathbf{M}(\hat{Q}) - Q$ .

Это смещение может быть обусловлено как свойствами самой функции, так и погрешностями измерения, юстировки, калибровки, случайным характером полученной выборки или комбинацией этих факторов. В ряде случаев оно не зависит от объема выборки и называется систематической погрешностью. Наличие систематических погрешностей не дает возможности судить

об истинном значении измеряемого параметра.

Оценка называется *состоятельной*, если с увеличением объема выборки  $n \rightarrow \infty$  она совпадает с соответствующим параметром генеральной совокупности, т.е. для любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$  имеет место уравнение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|Q - \hat{Q}\right| \leq \varepsilon\right) = 1, \varepsilon > 0.$$

Это значит, что рассеяние оценки  $\hat{Q}$  (как случайной величины) с ростом  $n$  все плотнее концентрируется вокруг истинного значения  $Q$ .

Требование *эффективности* оценки заключается в следующем - для выборок равного объема эффективная оценка должна иметь минимальное рассеивание (выборочную дисперсию). Если выполняется неравенство  $\mathbf{D}(\hat{Q}_1) \leq \mathbf{D}(\hat{Q}_2)$ , то оценка  $\hat{Q}_1$  является более эффективной. В этом выражении  $\mathbf{D}(\cdot)$  - обозначение оператора дисперсии.

Точечной оценкой математического ожидания генеральной совокупности является выборочное среднее  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

Эта оценка является несмещенной, состоятельной и эффективной.

Если выборочные данные сгруппированы в вариационный ряд, то оценка математического ожидания определяется по формуле  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k m_i x_i$ .

В приведенной формуле  $x_i$  - значение варианты для вариационного ряда или середина классового интервала для интервального вариационного ряда;  $m_i$  - частота варианты или классовая частота.

Выборочная медиана  $\hat{Me}$  также может служить оценкой математического ожидания генеральной совокупности (особенно в случае симметричного генерального распределения). Для дисперсии выборочной медианы справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbf{D}(\hat{Me})\right) = \frac{\pi}{2} \mathbf{D}(\bar{x}).$$

Заметим, что дисперсия оценки медианы превышает дисперсию выборочного среднего  $\bar{x}$  в  $\pi/2$  раз, т.е. оценка выборочного среднего является более эффективной.

Выборочная дисперсия  $\hat{s}^2$  является оценкой дисперсии генеральной совокупности

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbf{M}(\xi))^2.$$

Эта оценка является несмещенной, но если действительное значение математического ожидания  $\mathbf{M}(\xi)$  нам неизвестно и используется его оценка, то

полученная оценка дисперсии  $\hat{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  является смещенной

$\hat{s}^2 = \frac{n-1}{n} s^2$ . Для получения несмещенной оценки дисперсии используют следующую формулу:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 .$$

В этой формуле знаменатель  $(n-1) = \nu$  называется количеством степеней свободы. Количество степеней свободы в общем случае равно разности между количеством значений, на основании которых было вычислено эту оценку, минус количество констант, необходимых для вычисления этой оценки, которые были определены на основании тех же значений. Например, в приведенном выше уравнении была потеряна одна степень свободы при определении выборочного среднего на основе  $n$  измерений.

Несмещенной точечной оценкой стандартного отклонения выборочного среднего  $\bar{x}$  будет статистика

$$\hat{s}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} .$$

Эта статистика является характеристикой совокупности измерений, тогда как  $\hat{s}$  является характеристикой отдельного измерения.

**Интервальные оценки характеристик ряда измерений.** Рассмотрены точечные оценки дают одно числовое значение параметра, которое является случайной величиной и в общем случае отличается от детерминированного истинного значения параметра. Эта случайность обусловлена тем, что оценки параметров распределения генеральной совокупности вычисляют не по всей совокупности, а по выборкам с ограниченным количеством элементов. Случайность значений элементов, попавших в выборку, и определяет случайность полученного значения оценки. По значению оценки параметра нельзя сделать вывод о ее точности. Более информативным был бы результат оценивания, который бы характеризовался возможным отклонением оценки от параметра и вероятностью выполнения этого условия. Эту задачу решает интервальное оценивание параметра.

*Интервальное оценивание* - способ оценки, при котором определяется интервал, в котором с заданной вероятностью находится искомое (истинное) значение параметра распределения.

Этот интервал называется доверительным или надежным, а соответствующая вероятность - доверительной вероятностью или надежностью. Понятно, что чем больше доверительный интервал, тем больше уверенность, что оцениваемая величина находится в пределах данного интервала.

Доверительная вероятность определяется как  $P=1-\alpha$ , где  $\alpha$  называется уровнем значимости, равный вероятности того, что надежный интервал не



накрывают значение параметра, т.е. вероятность того, что при оценке допущена ошибка.

Допустим, необходимо определить доверительный интервал для параметра  $Q$  генеральной совокупности, используя несмещенную и состоятельную выборочную оценку  $\hat{Q}$ . Эта оценка имеет выборочное распределение со средним  $\mathbf{M}(\hat{Q}) = Q$  и стандартным отклонением  $\sigma_{\hat{Q}} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Можно указать вероятность  $P(|\hat{Q} - Q| \leq \varepsilon) = 1 - \alpha$ , с которой отклонения оценки от ее математического ожидания не будет превышать некоторого малого положительного числа  $\varepsilon$ . Это выражение можно переписать следующим образом  $P(\hat{Q} - \varepsilon \leq Q \leq \hat{Q} + \varepsilon) = 1 - \alpha$ , где  $\hat{Q} - \varepsilon$ ,  $\hat{Q} + \varepsilon$  соответственно нижняя и верхняя границы доверительного интервала. Эти границы являются случайными величинами, поскольку полученная по выборочным данным измерений оценка  $\hat{Q}$  является случайной величиной.

## 5.2. Методы обработки данных измерений

**Критерии проверки согласия законов распределений.** При обработке результатов многократных измерений стоит задача оценивания их закона распределения, поскольку от вида закона распределения зависят значения границ интервалов случайной погрешности. Существует два основных подхода к решению данной задачи.

Первый, основанный на применении критериев согласия для сгруппированных данных, используется при наличии достаточно большой выборки результатов измерений ( $n \geq 50$ ). Данные критерии требуют предварительного построения таких оценок закона распределения, как полигон частот, гистограмма, эмпирическая функция распределения, по виду которых формулируют гипотезу о законе распределения. Однако необходимо учитывать, что группирование данных приводит к потере информации.

Другой подход основывается на использовании специализированных критериев согласия, которые не требуют группирования данных и могут применяться на выборках объемом от 10 до 50 значений. Для данных критериев необходима априорная информация о виде закона распределения.

Рассмотрим наиболее часто применяемые критерии согласия для сгруппированных данных – это критерии  $\chi^2$  Пирсона и Колмогорова - Смирнова.

**Критерий  $\chi^2$  Пирсона.** По исследуемой выборке строится гистограмма (рис. 5.3), по которой для каждого интервала рассчитываются эмпирические частоты  $\hat{m}_j$  – количество значений ряда, попавших в  $j$ -й интервал, а также оценки значений эмпирической плотности вероятности  $p_j = \hat{m}_j / (n \cdot h)$ , где  $h$  – ширина столбиков гистограммы. По выборочным данным рассчитывают-

ся параметры выбранной теоретической функции плотности распределения  $p(x)$ . Например, для нормального закона это оценки математического ожидания  $\bar{x}$  и среднеквадратического отклонения  $s$ . Рассчитываются значения теоретической функции плотности вероятности в точках, соответствующих средним значениям интервалов гистограммы  $\bar{x}_j - p_j^T = p(\bar{x}_j)$ . Для всех интервалов определяются теоретические частоты  $m_j^T = p_j^T nh$  и статистика  $\chi_p^2$

$$\chi_p^2 = \sum_{j=1}^l \frac{(\hat{m}_j - m_j^T)^2}{m_j^T} = nh \sum_{j=1}^l \frac{(p_j - p_j^T)^2}{p_j^T}. \quad (5.1)$$

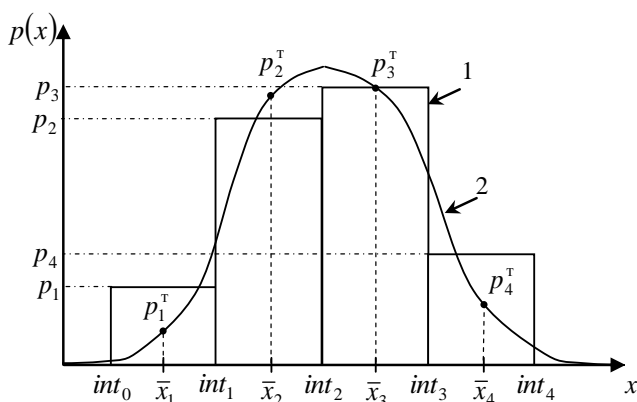


Рис. 5.3. Гистограмма (1) и сравниваемая теоретическая плотность распределения (2)

Если  $\chi_p^2 < \chi_\alpha^2(v)$  – принимается гипотеза о согласии эмпирического закона распределения с выбранным теоретическим. Значения  $\chi_\alpha^2(v)$  находят по таблицам  $\chi^2$ -распределения, для заданного уровня доверия  $\alpha$  и числа степеней свободы  $v = l - k - 1$ , где  $k$  – количество параметров выбранного закона распределения, а  $l$  – количество интервалов гистограммы.

**Критерий Колмогорова - Смирнова.** По выборке строится оценка интегральной функции распределения  $F(x)$ , по графику которой выносятся гипотеза о типе закона распределения. Соответствующая теоретическая интегральная функция  $F^T(x)$ , рассчитанная по оценкам параметров, наносится на тот же график (рис. 5.4). Находятся максимальное значение  $D = \max |F^T(x) - F(x)|$  и оценка статистики  $\lambda = D\sqrt{n}$ .

Если для заданной вероятности  $P$ ,  $\lambda < \lambda(P)$ , то принимается гипотеза о том, что закон распределения  $F(x)$  соответствует  $F^T(x)$ . Значения  $\lambda(P)$  приведены в табл. 5.4.

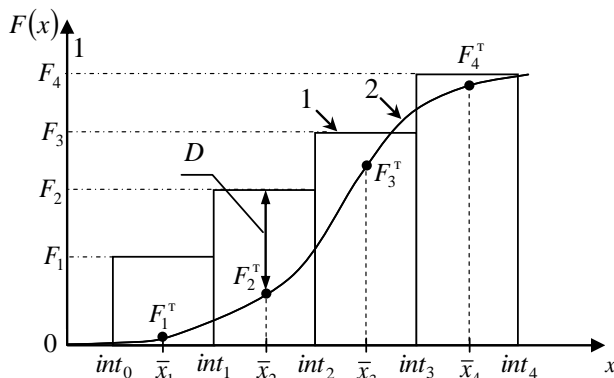


Рис. 5.4 Эмпирическая (1) и теоретическая (2) функции распределения

Таблица 5.4

$P$	0,99	0,95	0,9
$\lambda(P)$	0,44	0,52	0,57

### Критерии согласия без группировки данных. Составной критерий.

Этот критерий применяется для проверки согласия эмпирического распределения с гауссовым распределением при количестве результатов измерений, меньшим 50. Он фактически состоит из двух критериев:

*Критерий 1.* Вычисляют отношение

$$\tilde{d} = \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| / n\hat{s}, \quad (5.2)$$

где  $\hat{s}$  — смещенная оценка среднеквадратичного отклонения (СКО)

$$\hat{s} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n}$$

Результаты измерений группы можно считать распределенными нормально, если  $d(1 - \alpha_1 / 2, n) < \tilde{d} \leq d(\alpha_1 / 2, n)$ , где  $d(1 - \alpha_1 / 2, n)$  и  $d(\alpha_1 / 2, n)$  — табличные квантили распределения для объема выборки  $n$ ,  $\alpha_1 / 2$  и  $(1 - \alpha_1 / 2)$ ,  $\alpha_1$  — заранее выбранный уровень значимости критерия.

*Критерий 2.* Можно считать, что результаты измерений принадлежат нормальному распределению, если не более чем  $m$  разностей  $|x_i - \bar{x}|$  превысили значение  $z_{P/2}s$ , где  $s$  — оценка СКО, вычисленная по формуле

$s = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)}$ , а  $z_{P/2}$  — верхний квантиль распределения нормированной функции Лапласа при вероятности  $P/2$ .

Значения вероятности  $P$  определяются по выбранному уровню значимости  $\alpha_2$  и количеству результатов измерений  $n$ . Для уровней значимости, от-

личных от предусмотренных в таблице, необходимые значения  $P$  находят путем линейной интерполяции.

В случае, если для критерия 1 выбран уровень значимости  $\alpha_1$ , а для критерия 2 – уровень  $\alpha_2$ , то результирующий уровень значимости составного критерия  $\alpha \leq \alpha_1 + \alpha_2$ .

Гипотеза о согласии эмпирического распределения с гауссовым принимается только тогда, когда выполняются оба критерия.

**Критерий Фроцини.** Используется для проверки гипотезы о равномерном (равновероятном) распределении экспериментальных данных. Выборка ранжируется по возрастанию и нормируется, таким образом получается упорядоченный ряд  $U = (U_{[1]} \leq \dots \leq U_{[n]})$ , распределенный на отрезке  $[0,1]$ . Оценка статистики критерия Фроцини рассчитывается как

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left| U_{[i]} - \frac{i-0,5}{n} \right|. \quad (5.3)$$

Распределение есть равномерным, если  $B_n < B_n(P)$ , где  $B_n(P)$  – граничное значение статистики Фроцини для заданной доверительной вероятности.

**Проверка гипотез о математическом ожидании.** В измерительной практике встречаются задачи по экспериментальному определению систематических погрешностей измерительных каналов и ИИС в целом, при этом значение случайной погрешности (прецизионности) может быть известно заранее либо определено экспериментальным путем. Такие задачи в математической статистике называют проверкой гипотез о математическом ожидании.

**Сравнение неизвестного среднего значения с заданным значением  $\mu_0$  при известной дисперсии.** В данном случае проверяется гипотеза об отсутствии систематической погрешности в результатах измерений, выполненных ИИС с известной прецизионностью, которая характеризуется значением СКО  $\sigma_0$ , физической величины со значением  $\mu_0$ , воспроизводимой с помощью эталона.

Для решения данной задачи необходимы следующие исходные данные: объем выборки  $n$ , сумма наблюдаемых значений  $\sum_{i=1}^n x_i$ , заданное значение  $\mu_0$ , значение дисперсии генеральной совокупности  $\sigma_0^2$  или стандартного отклонения  $\sigma_0$ , выбранный уровень значимости  $\alpha$ .

Следующим шагом является определение квантиля стандартного гауссовского закона распределения уровня  $(1-\alpha)$   $u_{1-\alpha}$ , квантиля стандартного гауссовского закона распределения уровня  $(1-\alpha/2)$   $u_{1-\alpha/2}$ , а также вычисления значения  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n$ . По полученным результатам выполняется

сравнение выборочного среднего значения  $\bar{x}$  с  $\mu_0$  заданным значением следующим образом:

1) в двустороннем случае:

гипотеза статистической равенства выборочного среднего и заданного значения (нулевая гипотеза об отсутствии систематической погрешности) отклоняется, если

$$|\bar{x} - \mu_0| > (u_{1-\alpha/2} / \sqrt{n}) \sigma_0; \quad (5.4)$$

2) в одностороннем случае :

а) гипотеза о том, что выборочное среднее не менее  $\mu_0$  (нулевая гипотеза) отклоняется, если

$$\bar{x} < \mu_0 - (u_{1-\alpha} / \sqrt{n}) \sigma_0; \quad (5.5)$$

б) гипотеза о том, что выборочное среднее не более  $\mu_0$  (нулевая гипотеза) отклоняется, если

$$\bar{x} > \mu_0 + (u_{1-\alpha} / \sqrt{n}) \sigma_0. \quad (5.6)$$

**Сравнение неизвестного среднего значения с  $\mu_0$  заданным значением при неизвестной дисперсии.** Данный критерий в измерительной практике применяется в тех же случаях, что и предыдущий, с единственным отличием – прецизионность ИИС или измерительного канала заранее не известна и оценивается по экспериментальным данным.

Для решения данной задачи потребуются следующие исходные данные: объем выборки  $n$ , сумма значений  $\sum x_i$  и сумма квадратов значений наблюдаемых величин  $\sum x_i^2$ , заданное значение  $\mu_0$ , степени свободы  $\nu = n - 1$ , а также выбранный уровень значимости  $\alpha$ .

Определяются квантиль распределения Стьюдента уровня  $(1 - \alpha)$  с  $\nu$  степенями свободы  $t_{1-\alpha}(\nu)$ , квантиль уровня  $(1 - \alpha / 2)$  -  $t_{1-\alpha/2}(\nu)$  и среднее значение  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n$ . Далее вычисляются выборочная дисперсия и стандартное отклонение

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 / n}{n - 1}, \quad s = \sqrt{D}.$$

По полученным результатам выполняется сравнение выборочного среднего значения  $\bar{x}$  с заданным значением  $\mu_0$ :

1) в двустороннем случае:

гипотеза равенства выборочного среднего и заданного значения (нулевая гипотеза об отсутствии систематической погрешности) отклоняется, если выполняется неравенство:

$$|\bar{x} - \mu_0| > (t_{1-\alpha/2}(v) / \sqrt{n})s ; \quad (5.7)$$

2) в одностороннем случае:

а) гипотеза о том, что выборочное среднее не менее  $\mu_0$  (нулевая гипотеза) отклоняется, если выполняется условие

$$\bar{x} < \mu_0 - (t_{1-\alpha}(v) / \sqrt{n})s ; \quad (5.8)$$

б) гипотеза о том, что выборочное среднее не более  $\mu_0$  (нулевая гипотеза) отклоняется при

$$\bar{x} > \mu_0 + (t_{1-\alpha}(v) / \sqrt{n})s . \quad (5.9)$$

Рассматриваемый ниже критерий может быть применен для решения следующих задач:

1) процесс измерения проводят параллельно двумя различными ИИС, точность каждой из них неизвестна, но может быть определена по экспериментальным данным. Необходимо ответить на вопрос, можно ли считать, что оба прибора дают равноточные результаты;

2) сравнение результатов измерений, полученных при двух различных значениях влияющих величин.

**Сравнение средних значений двух выборок с неизвестными но равными дисперсиями (равноточные измерения).** Для решения данной задачи необходимы следующие исходные данные: объемы двух выборок  $n_1$  и  $n_2$ , сумма значений величин  $\sum x_{1,i}$  и  $\sum x_{2,i}$ , сумма квадратов значений величин  $\sum x_{1,i}^2$  и  $\sum x_{2,i}^2$ , степени свободы  $v = n_1 + n_2 - 2$ , выбранный уровень значимости  $\alpha$ . Определяют квантили распределения Стьюдента уровня  $(1-\alpha)$  с  $v$  степенями свободы -  $t_{1-\alpha}(v)$  и уровня  $(1-\alpha/2)$  -  $t_{1-\alpha/2}(v)$  и значения

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i}, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i} .$$

Далее вычисляются  $s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1,i} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2,i} - \bar{x}_2)^2}$

и величина  $s_d = \sqrt{\frac{(n_1 + n_2)}{n_1 \cdot n_2} \cdot \frac{s}{n_1 + n_2 - 2}}$ .

По полученным результатам выполняется сравнение средних значений двух совокупностей:

1) в двустороннем случае:

предположение равенства средних значений (нулевая гипотеза) отклоняется, если имеет место неравенство

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > t_{1-\alpha/2}(v) s_d ; \quad (5.10)$$

2) в одностороннем случае:

а) предположение о том, что первое среднее  $\bar{x}_1$  не менее второго  $\bar{x}_2$  (нулевая гипотеза) отклоняется, если выполняется неравенство

$$\bar{x}_1 < \bar{x}_2 - t_{1-\alpha}(v)s_d; \quad (5.11)$$

б) предположение о том, что первое среднее  $\bar{x}_1$  не больше второго  $\bar{x}_2$  (нулевая гипотеза) отклоняется, если справедливо выражение

$$\bar{x}_1 > \bar{x}_2 + t_{1-\alpha}(v)s_d. \quad (5.12)$$

**Примечание.** Дисперсии неизвестны, но в предположении могут быть равными.

**Гипотезы о дисперсии. Сравнение дисперсии или стандартного отклонения с заданной величиной.** Исходными данными являются: объем выборки  $n$ , сумма значений величин  $\sum x_i$ , сумма квадратов значений величин  $\sum x_i^2$ , заданное значение  $\sigma_0^2$ , степени свободы  $\nu = n - 1$ , выбранный уровень значимости  $\alpha$ .

Сначала определяются квантили  $\chi^2$ -распределения для уровней значимости  $\alpha$ ,  $(1 - \alpha)$ ,  $\alpha/2$  и  $(1 - \alpha/2)$  соответственно:  $\chi_\alpha^2(\nu)$ ,  $\chi_{1-\alpha}^2(\nu)$ ,  $\chi_{\alpha/2}^2(f)$ ,  $\chi_{1-\alpha/2}^2(\nu)$ . Далее вычисляются значения

$$C = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 / n \quad \text{и} \quad C / \sigma_0^2.$$

По полученным результатам выполняется сравнение оценки дисперсии  $\hat{D}$  с заданным значением  $\sigma_0^2$  или сравнение стандартного отклонения  $\sigma$  с заданным значением  $\sigma_0$ :

1) двусторонний случай:

предположение равенства дисперсии (стандартного отклонения) и заданного значения (нулевая гипотеза) отклоняется, если выполняется условие

$$C / \sigma_0^2 < \chi_{\alpha/2}^2(\nu) \quad \text{или} \quad C / \sigma_0^2 > \chi_{1-\alpha/2}^2(\nu); \quad (5.13)$$

2) односторонний случай:

а) предположение о том, что дисперсия (стандартное отклонение) не более заданного значения (нулевая гипотеза) отклоняется, если справедлива неравенство

$$C / \sigma_0^2 > \chi_{1-\alpha}^2(\nu); \quad (5.14)$$

б) предположение о том, что дисперсия (стандартное отклонение) не менее заданного значения (нулевая гипотеза) отклоняется, если

$$C / \sigma_0^2 < \chi_\alpha^2(\nu); \quad (5.15)$$

Описанный критерий может применяться для сравнения точности исследуемой ИИС, оцененной экспериментальным путем с заданной (т.е. известным параметром  $\sigma_0$ ) или с точностью другого оборудования.

**Сравнение стандартных отклонений двух генеральных совокупностей.** Для решения данной задачи требуются следующие исходные данные:

объемы двух выборок  $n_1$  и  $n_2$ , сумма значений величин  $\sum x_{1,i}$  и  $\sum x_{2,i}$ , сумма квадратов значений величин  $\sum x_{1,i}^2$  и  $\sum x_{2,i}^2$ , степени свободы  $\nu_1 = n_1 - 1$  и  $\nu_2 = n_2 - 1$ , выбранный уровень значимости.

Необходимо определить квантили распределения Фишера  $F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)$  и  $F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2)$  и вычислить значения  $C_1 = \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1,i} - \bar{x}_1)^2 = \sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i}^2 - \left( \sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i} \right)^2 / n_1$ ,  $s_1^2 = C_1 / n_1 - 1$ ,  $C_2 = \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2,i} - \bar{x}_2)^2 = \sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i}^2 - \left( \sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i} \right)^2 / n_2$ ,  $s_2^2 = C_2 / n_2 - 1$ .

Полученные результаты используются для сравнения дисперсий двух совокупностей:

1) двусторонний случай:

гипотеза равенства дисперсий или равенства двух стандартных отклонений (нулевая гипотеза) отклоняется при выполнении условия

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} < \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(\nu_2, \nu_1)} \quad \text{или} \quad \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2); \quad (5.16)$$

2) односторонний случай:

а) гипотеза о том, что  $D_1 \leq D_2$  ( $\sigma_1 \leq \sigma_2$ ) (нулевая гипотеза) отклоняется при условии:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} > \frac{1}{F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2)}; \quad (5.17)$$

б) гипотеза о том, что  $D_1 \geq D_2$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ) (нулевая гипотеза) отклоняется, если справедливо неравенство

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} < \frac{1}{F_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1)}. \quad (5.18)$$

Рассматриваемый критерий применяется для следующих задач:

1) сравнение точности двух средств измерений по результатам измерений значения одной физической величины;

2) соотношение стабильности метрологических характеристик во времени или при изменении влияющих факторов.

**Гипотезы о математические ожидания и дисперсии серий измерений.** Данные критерии, позволяют сравнить математические ожидания или дисперсии нескольких групп данных. Такими группами могут быть, например, группы результатов измерений, выполненных несколькими измерительными каналами ИИС.

**Критерий Кохрена.** Для совокупности из  $p$  стандартных отклонений  $s_i$ , рассчитанных исходя из одного и того же количества результатов измерений  $n$  в группах данных, статистика Кохрена имеет вид



$$C = s_{\max}^2 / \sum_{i=1}^p s_i^2, \quad (5.19)$$

где  $s_{\max}$  - наибольшее значение стандартного отклонения в совокупности.

В случае, если значение статистики меньше (или равно) 5 %-го критического значения, тестовую позицию ( $s_{\max}$ ) признают корректной, т.е. стандартные отклонения групп данных можно считать статистически равными (измерения в группах равнозначные).

Если значение тестовой статистики больше 5 %-го критического значения и меньше (или равно) 1 %-го значения, то тестовую позицию ( $s_{\max}$ ) считают отличающийся от общей группы. Использование результатов измерений, полученных в данном канале ИИС, может привести к ошибкам.

В случае, если значение тестовой статистики больше 1 %-го критического значения, тестовая позиция существенно отличается от общей группы и данные результаты измерений не должны использоваться.

Критерий Кохрена применяют в случаях, когда все стандартные отклонения найдены по одному и тому же количеству  $n$  результатов измерений, полученных в условиях повторяемости. С помощью критерия Кохрена проверяют наибольшее значение в совокупности стандартных отклонений, и поэтому такая проверка является односторонней. Рассеяния в дисперсиях может также проявляться и в минимальных значениях стандартных отклонений.

Если наибольшее значение стандартного отклонения классифицировано как содержащее чрезмерную погрешность, оно должно быть исключено, а проверка с использованием критерия Кохрена может быть повторена на значениях, которые остались. Следует отметить, что процедура повторения может привести к чрезмерным исключений данных в случаях, когда нормальное распределение данных, принятое за основу, не является достаточно корректной аппроксимацией.

**Критерий Граббса.** Для проверки гипотезы о статистическом равенстве группы математических ожиданий выделяют наибольшую величину из группы  $x_p$  расположенных в порядке возрастания совокупности данных  $x_{[i]}$ ,  $i=1, 2, \dots, p$  и вычисляют статистику Граббса

$$G_p = (x_{[p]} - \bar{x}) / s, \quad (5.20)$$

где  $\bar{x} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_{[i]}$ ,  $s = \sqrt{\frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p (x_i - \bar{x})^2}$ .

Для проверки значимости минимального математического ожидания  $x_1$  вычисляют тестовую статистику  $G_1 = (\bar{x} - x_{[1]}) / s$ .

В случае, если значение тестовой статистики меньше (или равно) 5 %-го критического значения, тестовую позицию  $x_{[p]}$  или  $x_{[1]}$  признают корректной. В случае, если значение тестовой статистики больше 5 %-го критического

го значения и меньше (или равно) 1 %-го критического значения, тестовую позицию можно считать отличающейся от общей группы. Ее использование в дальнейших расчетах может привести к ошибкам.

Если значение тестовой статистики больше 1 %-го критического значения, тестовая позиция слишком отличается от общей группы и не должна использоваться в дальнейших расчетах.

**Гипотезы о принадлежности результата измерения к генеральной совокупности экспериментальных данных.** При обработке результатов измерений, как правило, первым этапом является проверка принадлежности индивидуальных измерений к общей совокупности экспериментальных данных. Фактически производится проверка на наличие грубой погрешности (промаха) в измерениях. Грубые погрешности относятся к погрешностям, которые возникают случайно при повторных измерениях. Они явно превышают по своему значению погрешности, оправданные условиями проведения измерений. Под грубой погрешностью понимается значение погрешности, которое существенно превышает ожидаемое в данных условиях значение. Причинами грубых погрешностей могут быть неконтролируемые изменения условий измерений, скачки напряжения питания, неисправность ИИС или ее измерительных каналов, ошибки оператора и др. Для исключения результатов измерений с грубыми погрешностями применяют аппарат проверки статистических гипотез и соответствующие статистические критерии.

**Критерий Романовского.** Результат  $x_i$  по ряду измерений  $x_i, i = \overline{1, n}$  содержит грубую погрешность, если выполняется следующее условие

$$t = |x_i - \bar{x}| / s \geq t_\alpha(v) \sqrt{\frac{n+1}{n}}, \quad (5.21)$$

где  $\bar{x}$  - среднее значение ряда без "подозрительного" значения;  $s$  - оценка СКО результатов ряда без "подозрительного" значения;  $v$  - количество степеней свободы,  $v = n - 1$ .

С помощью данного критерия проверяют максимальное и минимальное значение в ряде измерений, а также несколько минимальных или максимальных значений, причем предельное значение статистики Стьюдента  $t_\alpha(v)$  выбирают для  $v = n - k$ , где  $k$  - количество "подозрительных" результатов.

**Критерий Диксона.** Может применяться при гауссовом распределении погрешности и для небольших объемов данных ряда измерений  $n \leq 25$  для проверки максимального или минимального значения в ряде измерений.

Значение ряда упорядочиваются по возрастанию:  $x_{[1]} < x_{[2]} < \dots < x_{[n]}$ . Результат  $x_{[n]}$  (максимальный) содержит избыточную погрешность, если

$$r_{\max} = \frac{(x_{[n]} - x_{[n-1]})}{(x_{[n]} - x_{[1]})} > Z_\alpha(n);$$

результат  $x_{[1]}$  (минимальный) содержит избыточную погрешность, если

$$r_{\min} = \frac{(x_{[2]} - x_{[1]})}{(x_{[n]} - x_{[1]})} > Z_{\alpha}(n),$$

где  $Z_{\alpha}(n)$ - коэффициент, значение которого выбирают исходя из объема ряда  $n$  и уровня значимости  $\alpha$  (табл. 5.5).

Таблица 5.5

$n$	Уровень значимости $\alpha$			$n$	Уровень значимости $\alpha$		
	0,10	0,05	0,10		0,10	0,05	0,10
4	0,68	0,76	0,89	16	0,28	0,33	0,43
6	0,48	0,56	0,70	18	0,26	0,31	0,41
8	0,40	0,47	0,59	20	0,26	0,30	0,39
10	0,35	0,41	0,53	30	0,22	0,26	0,34
14	0,29	0,35	0,45				

Для промежуточных значений  $n$  для определения  $Z_{\alpha}(n)$  применяется линейная интерполяция.

Критерий Диксона может использоваться для проверки двух или более результатов на наличие промахов.

**Критерий "свободный" от закона распределения погрешности.** В случае ограниченного количества измерений  $n$  и (или) сложности оценки параметров или определения закона распределения рекомендуется исключать результаты с грубыми погрешностями, используя приближенные оценки коэффициентов вида распределения. По ряду измерений исключаются результаты  $x_i < x_{r-}$  и  $x_i > x_{r+}$ . Пороговые значения определяются по формулам

$$x_{r-} = \bar{x} - s \left( 1 + A \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1} \right), \quad x_{r+} = \bar{x} + s \left( 1 + A \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1} \right), \quad (5.22)$$

где  $\bar{x}, s$  - выборочные среднее и СКО ряда измерений;  $A$  - коэффициент, значение которого выбирается в зависимости от заданной доверительной вероятности в диапазоне от 0,85 до 1,30, обычно выбирается  $A=1,3$ ;  $\gamma$  - контрэксцесс, значение которого зависит от формы закона распределения

$$\gamma = \sqrt{s^4 / \mu_4}, \quad \mu_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4.$$

Расчеты значений  $\bar{x}, s$  и  $\mu_4$  проводят без "подозрительного" измерения.

**Гипотезы о наличии тренда в ряде измерений.** Методы выявления тренда в ряде измерений зависят от его характера: линейный рост или падение математического ожидания или дисперсии ряда, периодическая смена математического ожидания и т.п. При условии, если случайной погрешностью можно пренебречь, тренд можно обнаружить путем анализа чередования знаков отклонений результатов или от центра распределения вероятности, которым может быть математическое ожидание, медиана и т.п., или от предыдущих результатов. Итак, если знаки неисправленных случайных от-

клонений чередуются с какой-то закономерностью, это свидетельствует о наличии тренда. Например, если имеется последовательность знаков "+" или "-" случайных отклонений предыдущих результатов от следующих, то налицо *прогрессирующая систематическая погрешность* (рис. 5.5, а). Если группы знаков "+" и "-" случайных отклонений от центра распределения чередуются, то имеется *периодическая систематическая погрешность* (рис. 5.5, б).

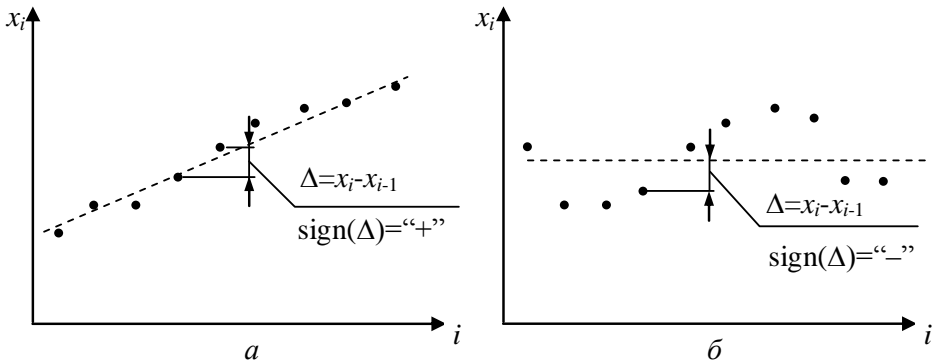


Рис. 5.5 Графическое объяснение процесса выявления тренда

Эти правила выявления тренда можно использовать, если случайная составляющая погрешности незначительна. В противном случае для выявления тренда применяют другие критерии.

**Критерий серий, основанный на медиане.** Этот критерий позволяет выявить как периодический тренд, так и прогрессирующий. Последовательность его применения следующая.

1. Определяется значение медианы  $\mathbf{Med}(x)$  по ряду измерений  $x_i, i = \overline{1, n}$ .

2. Для ряда измерений вместо каждого  $x_i$  ставят плюс, если  $x_i > \mathbf{Med}(x)$ , и минус, если  $x_i < \mathbf{Med}(x)$ , а если значение ряда равно  $\mathbf{Med}(x)$ , то его пропускают в полученной последовательности плюсов и минусов.

3. Для полученных последовательностей плюсов и минусов определяют серии, общее число серий  $\nu(n)$  и длительность наибольшей серии  $\tau(n)$ . Под серией понимают последовательность плюсов или минусов (короткая серия состоит из одного плюса или минуса).

4. Проверяют гипотезу  $H_0$  о статистической независимости случайных отклонений, т.е. об отсутствии систематической погрешности. Конкурирующая гипотеза  $H_1$  - случайные отклонения статистически зависимы, т.е. имеется периодическая систематическая погрешность. Гипотеза  $H_0$  для уровня значимости  $0,05 < \alpha < 0,0975$  принимается, если одновременно выполняются неравенства

$$\nu(n) > 0,5(n+1-1,96\sqrt{n-1}), \quad \tau(n) < (3,31g(n+1)) \quad (4.23)$$

Если хотя бы одно из неравенств не выполняется, принимают гипотезу  $H_1$  о наличии периодического тренда.

**Критерий "растущих" и "спадающих" серий.** Этот критерий чувствителен к наличию прогрессирующего тренда (прогрессирующих систематических погрешностей). Последовательность его применения следующая.

1. Для ряда измерений  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$  на  $i$ -м месте ставят плюс, если  $x_{i+1} > x_i$ , ( $x_{i+1} - x_i > 0$ ), и минус, если  $x_{i+1} < x_i$ , ( $x_{i+1} - x_i < 0$ ) (если  $x_{i+1} = x_i$ , учитывают только одно значение).

2. Для полученной последовательности плюсов и минусов определяют серии, общее количество серий  $v(n)$  и продолжительность самой длинной серии  $\tau(n)$ .

3. Проверяют гипотезу  $H_0$  о статистической независимости случайных отклонений ( $x_{i+1} - x_i$ ), т.е. отсутствие систематической погрешности. Конкурирующая гипотеза  $H_1$  - случайные отклонения статистически зависимы, т.е. имеется прогрессирующая систематическая погрешность. Гипотеза  $H_0$  для уровня значимости  $0,05 < \alpha < 0,0975$  принимается, если одновременно выполняются два неравенства:

$$v(n) > \left( \frac{1}{3}(2n-1) - 1,96\sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right), \tau(n) < \tau_0(n). \quad (5.24)$$

Пороговое значение  $\tau_0(n)$  выбирается в зависимости от  $n$ :  $\tau_0(n \leq 26) = 5$ ;  $\tau_0(26 < n \leq 153) = 6$ ;  $\tau_0(153 < n \leq 1170) = 7$ .

Если хотя бы одно из приведенных неравенств не выполняется, то гипотезу  $H_0$  отвергают.

### 5.3. Основы регрессионного анализа

Регрессионный анализ получил широкое применение при калибровке измерительных каналов ИИС, градуировке датчиков, в системах измерения и контроля физико-химических свойств материалов. В зависимости от модели искомой функции  $Y(X)$  различают линейную, нелинейную и множественную регрессии, а в соответствии с методами оценивания параметров модели – параметрическую и непараметрическую.

Общая схема регрессионного анализа содержит следующие этапы.

1. Нахождение выборочной оценки регрессии:
  - выбор модели и оценивания ее параметров;
  - оценивание статистической значимости полученных параметров.
2. Оценивание адекватности выбранной модели.
3. Определение доверительных интервалов функции регрессии, которые с заданной вероятностью содержат средние или индивидуальные значения  $Y$

по которым определяют границы погрешности (расширенную неопределенность) значения  $Y$  для заданного значения  $X$ .

На сегодня наиболее полно разработан аппарат регрессионного анализа, который предусматривает, что выборочные значения статистически независимы и имеют гауссовский закон распределения. При нарушении этого условия целесообразно применять методы непараметрической регрессии.

**Линейная регрессия.** В случае линейной регрессии рассматривается модель зависимости двух величин  $X$  и  $Y$  в следующем общем виде

$$Y(X) = kX + b, \quad k, b \in R.$$

Начальными данными могут быть  $n$  пар выборочных значений  $x_i$  и  $y_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  (рис. 5.6, а) или в случае многоразовых измерений значений  $y_{i,k}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, m}$   $n$  пар  $x_i$  и средних значений  $\bar{y}_i$  (рис. 5.6, б).

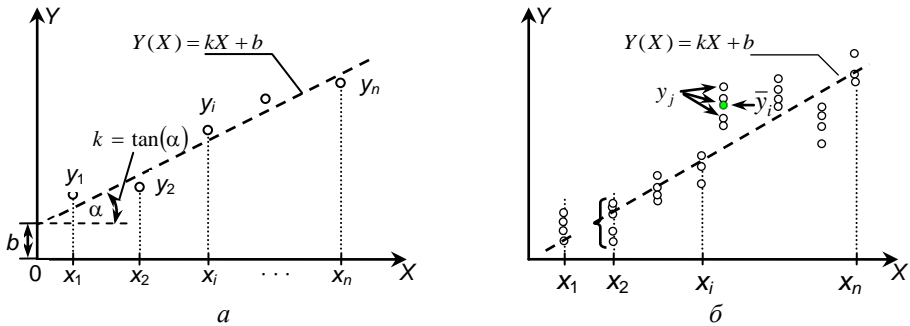


Рис. 5.6. Данные для построения регрессии: значения  $Y$  получены как результаты измерений с одnorазовыми (а) или многоразовыми (б) наблюдениями

Существует несколько методов оценивания коэффициентов регрессии – упрощенные, метод наименьших квадратов (МНК), метод правдоподобия.

*Оценивание коэффициентов регрессии методом наименьших квадратов.* Значение коэффициентов регрессии  $k$  и  $b$  находят из условия минимума суммы квадратов отклонений начальных значений от значений полученных основе построенной функции регрессии

$$\text{MIN} \left( \sum_{i=1}^n (y_{\text{рег.}} - y_i)^2 \right).$$

В соответствии с этим условием, значения оценок коэффициентов регрессии вычисляются по следующим формулам

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad k = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i y_i) - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}.$$

*Проверка значимости коэффициентов  $k$  и  $b$ .* Для оценивания значимости используется критерий Стьюдента для проверки гипотезы:  $H_0$  – оценка статистически незначимая, коэффициент равняется 0;  $H_1$  – оценка статистически значима. Рассчитываются *t-статистики*:

$$t_k = |k| / s_k, \quad t_b = |b| / s_b,$$

где  $s_k, s_b$  – оценки СКО коэффициентов  $k$  и  $b$  соответственно:

$$s_k = s_y / \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad s_b = s_k \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 / n}, \quad s_y = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{\text{перп}_i})^2},$$

где  $\bar{x}$  – среднее арифметическое выборочных значений ряда  $\{x_i, i = \overline{1, n}\}$ .

Если  $t_k < t_\alpha(v)$  или  $t_b < t_\alpha(v)$  принимается гипотеза  $H_0$ . В противном случае соответствующий коэффициент является статистически значимым. Значение  $t_\alpha(v)$  находится как  $(1-\alpha) \cdot 100\%$  односторонняя доверительная граница распределения Стьюдента для  $v = n - 2$  степеней свободы.

*Проверка адекватности полученной модели.* Проводится проверка гипотезы о том, что выбранная модель регрессии вида  $Y = g(X)$ , построенная по результатам парных измерений  $x_i, y_i, i = \overline{1, n}$ , удовлетворительно согласуется с этими данными. Проверку адекватности модели регрессии проводят на основе критерия Фишера. Суть проверки заключается в том, что значения наблюдений  $y_i$  ( $\bar{y}_i$ ) должны лежать приблизительно на прямой  $Y(X)$ , то есть их отклонения от прямой регрессии не должны быть существенно большими по отношению к отклонению значений в группе наблюдений  $y_{i,k}$  от их среднего  $\bar{y}_i$ .

Статистика Фишера рассчитывается по формуле  $F = s_y^2 / s_{\text{гр}}^2$ ,

где  $s_y$  – СКО рассеивания значений  $y_i$  вокруг линии регрессии;

$s_{\text{гр}}$  – СКО рассеивания значений в группе наблюдений в окрестности  $\bar{y}_i$ .

В случае многоразовых измерений  $s_{\text{гр}}^2 = \frac{1}{n(m-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (y_{i,k} - \bar{y}_i)^2$ .

В случае однократных измерений величины значение  $s_{\text{гр}}^2$  должно быть известным до проведения эксперимента.

*Определение доверительных интервалов (расширенной неопределенности) значений  $y$  рассчитанных по регрессии.* Оценивается СКО случайной составляющей погрешности (стандартная неопределенность) среднего  $\bar{y}$  и индивидуального значения  $y_i$ , определенных по полученной зависимости,

как функция от аргумента  $x$  :

$$s_{\bar{y}}(x) = u_{\bar{y}}(x) = s_y \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}, \quad s_y(x) = u_y(x) = s_y \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}.$$

СКО случайной составной погрешности среднего  $\bar{y}$  достигает максимального значения на краях линии регрессии:

$$s_{\bar{y}\max} \approx \sqrt{1 + 3w^2} s_y / \sqrt{m},$$

где  $w$  – количество полуразмахов ( $V = |x_{\max} - \bar{x}| = |x_{\min} - \bar{x}|$ ) в отклонении аргумента  $x$  от среднего значения;  $x_{\max}$ ,  $x_{\min}$  – максимальное и минимальное значение аргумента.

По полученным значениям СКО оценивают доверительный интервал случайной погрешности (расширенную неопределенность) среднего и индивидуального значения  $y$  :

$$\Delta_{\bar{y}}(x) = U_{\bar{y}}(x) = t_{\alpha/2}(v) \cdot s_{\bar{y}}(x), \quad \Delta_y(x) = U_y(x) = t_{\alpha/2}(v) \cdot s_y(x),$$

где  $t_{\alpha/2}(v)$  – квантиль распределения Стьюдента, для доверительной вероятности  $P = 1 - \alpha/2$  и  $v = n - 2$  степеней свободы.

Величины доверительных областей, которые с заданной вероятностью  $P$  содержат средние или индивидуальные значения  $y$  зависят от расстояния значения  $x$  (по которому определяют  $y$ ) от среднего  $\bar{x}$  (рис. 5.7, а).

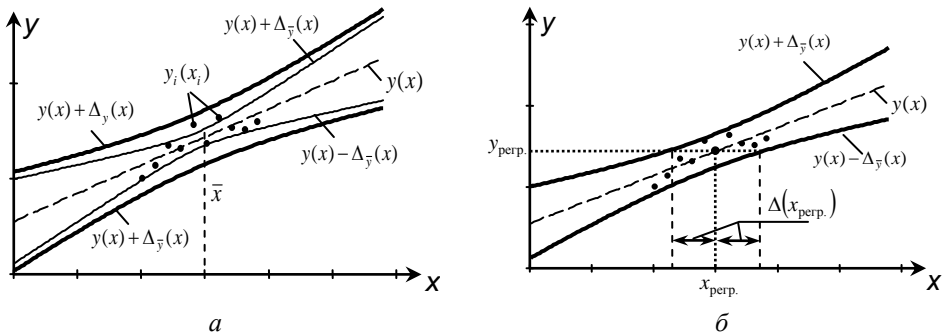


Рис. 5.7. Графики доверительных интервалов регрессии:  
а - для значений  $y$ ; б - для значений  $x$

*Определение доверительных интервалов (расширенной неопределенности) значений  $x$  рассчитанных по регрессией.* Для реализации определенных метрологических задач, например, в аналитических системах часто применяется градуировка (построение линейной регрессионной зависимости) путем измерения определенного показателя  $y_i$  для разных значений оцени-



ваемого показателя  $x_i$ , например зависимость поглощения, прохождения и отражения инфракрасного излучения, от влажности материала или других его свойств. Полученная градуировочная зависимость используется потом для вычисления показателя  $x_{\text{перг.}}$  для объекта, который дает отклик

$$x_{\text{перг.}} = (y_{\text{перг.}} - b) / k .$$

СКО случайной погрешности значения  $x_{\text{перг.}}$  связано с  $s_y$  :

$$s(x_{\text{перг.}}) = \frac{s_y}{k} \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{(x_{\text{перг.}} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} .$$

Соответственно значение доверительного интервала погрешности (расширенной неопределенности) (рис. 5.7, б) составляет:

$$\Delta(x_{\text{перг.}}) = U(x_{\text{перг.}}) = t_{\alpha/2}(v) s(x_{\text{перг.}}), \quad (5.25)$$

где  $t_{\alpha/2}(v)$  – квантиль распределения Стьюдента.

Значения  $x$  и  $y$  могут иметь постоянные систематические погрешности  $\theta_x$  или  $\theta_y$ . В этом случае СКО значения  $x_{\text{перг.}}$ :

$$s_{\Sigma}(x_{\text{перг.}}) = \sqrt{\left(\frac{\theta_x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\theta_y}{k\sqrt{3}}\right)^2 + s^2(x_{\text{перг.}})} .$$

Подставив  $s_{\Sigma}(x_{\text{перг.}})$  в формулу (5.25) вместо  $s(x_{\text{перг.}})$  получим искомые значения доверительных интервалов погрешности  $\Delta(x_{\text{перг.}})$ .

#### 5.4. Статистическая обработка случайных углов

Задачи анализа случайных данных, представленных значениями углов на плоскости, возникают в различных областях деятельности человека – в медицине и биологии, географии и метеорологии, экономике и психологии, а также во время исследования информационных процессов в физике, радиотехнике, диагностике и неразрушающем контроле и т.п. Для определения статистических характеристик и параметров угловых данных необходимо применять соответствующие статистические методы анализа.

**Основные понятия, определения и единицы измерения углов.** Базовые понятия углометрии сформированы в евклидовой геометрии и хорошо известны. В первую очередь это понятие плоского угла - геометрической фигуры, образованной двумя различными лучами, исходящими из одной точки, называемой вершиной угла.

В геометрической системе, в основу которой положена точечно-векторная аксиоматика, угол определяется иначе: под углом понимается определенная метрическая величина, которая связана с двумя векторами через

операцию их скалярного произведения. каждая пара векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  определяет некоторый угол – число, связанное с векторами формулой

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}, \quad (5.26)$$

где  $(\bar{a}, \bar{b})$  – скалярное произведение векторов.

**Единицы измерения углов.** Еще жрецы древнего Вавилона, оценивая процесс изменения природных циклов на Земле интервалом  $\sim 360$  сут., разделили окружность на соответствующее число равных частей, которым соответствует угол в один градус –  $1^\circ$  (одна девяностая часть прямого угла). По другой гипотезе, деление окружности на 360 град., каждого градуса – на 60 мин. и каждой минуты – на 60 с происходит от шумеров (примерно 2100 г. до н.э.), которые умели измерять углы с точностью до нескольких угловых минут. Существенный вклад в разработку единиц измерения углов сделали древнегреческие математики и астрономы. Известный древнегреческий астроном Клавдий Птолемей (II в. н. э.) делил круг на 360 частей, для обозначения которых применял слово "τμηματα", т.е. "отрезки", которое было переведено латинским словом "segmentes". Птолемей обозначал их как  $\mu^\circ$ . В дальнейшем начали писать только один верхний символ – кружочек, который сохранился до нашего времени для обозначения градуса.

Каждую из равных частей (градусов) Птолемей делил на 60 частей, которые назвал "λεπτα", что дословно означает "мелочь" или "первые шесть десятые". Следующие два шестидесятиричных деления он назвал "вторые шестидесятые" и «третьи шестидесятые». В переводе на латынь эти деления получили названия соответственно "minuta prima", "minuta secunda", "minuta tetria" (т.е. первая минута, вторая минута и третья минута). Слово "minuta" означает "уменьшенная", "мелкая". Птолемей пользовался сокращенными обозначениями шестидесятиричных разрядов, совпадающими с современными обозначениями угловых минут и секунд.

Естественной единицей плоского угла есть полный плоский угол величиной  $2\pi$  – угол, на который поворачивается луч вокруг точки, из которой он выходит до совмещения с его исходным положением. На практике применяют дольные единицы – часть угла полного оборота. В системе СИ единицей плоского угла является 1 радиан – центральный угол, образованный двумя радиусами окружности радиуса  $r$ , отсекающими на ней дугу длиной  $r$  оборота (напомним, что плоский угол  $\theta \in [0, 2\pi)$  определяется отношением длины дуги, соответствующей центральному углу  $\theta$ , к радиусу  $r$ ). Радиан, как дополнительная единица системы единиц, имеет одну исключительную особенность – независимость от выбора основных единиц системы.

Наряду с радианом применяют и другие единицы измерения:

град – это  $1/100$  прямого угла (обозначается  $1^s$ ) и его десятичные доли;

градус – это  $1/90$  часть прямого угла (один градус содержит 60 угловых

минут или 3600 угловых секунд).

Результаты угловых измерений принято отображать точками или направлениями, задаваемыми лучами на окружности или в круге единичного радиуса (рис. 5.8).

Разбиение окружности на класс-интервалы и группировка данных по этим класс-интервалам позволяет применить для отображения данных угловых измерений значительного объема круговые гистограммы (рис. 5.9, а). Они представляют собой круг, разделенный на  $m$  класс-секторов (чаще равной величины). Для  $j$ -го сектора подсчитывается количество наблюдаемых углов  $M_j$ , значения которых принадлежат этому интервалу.

Другая форма графического представления угловых измерений – развернутая на интервале  $\theta \in [0, 2\pi)$  угловая гистограмма (рис. 5.9, б). На этих гистограммах в определенных секторах имеем треугольники или прямоугольники, высоты которых равны значениям относительных частот  $M_j / M$ .

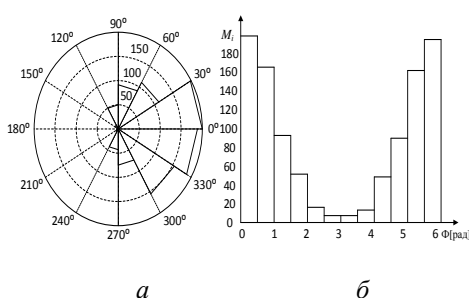
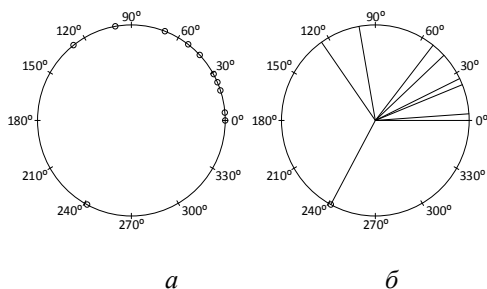


Рис. 5.8 Графическое отображение результатов измерения углов точками на окружности (а) или лучами (б)

Рис. 5.9 Круговая (а) и –развернутая круговая (б), гистограммы результатов угловых измерений

В общем случае измеряемые углы могут выходить за пределы интервала  $[0, 2\pi)$ . В этом случае областью значений угла  $\Phi > 2\pi$  является множество всех действительных чисел  $R$ , а значение таких углов удобно интерпретировать винтовой линии (рис. 5.8).

Отображение угла  $\Phi$  на числовую ось происходит через винтовую линию, задаваемую уравнениями:  $x = \cos \Phi$ ,  $y = \sin \Phi$ ,  $\Phi = 2\pi n + \varphi$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$  На рис. 5.10 направлению вектора в плоскости  $xOy$  соответствует дуга АВ длиной  $l$ . Этой дуге через винтовую линию ставится в соответствие одно из чисел оси  $0\Phi$  вида  $\varphi + 2\pi n$ . Числовое значение  $n$  задается начальными условиями или определяется условиями физической реализации эксперимента.

Форма представления угла  $\Phi > 2\pi$  в виде

$$\Phi = \left[ \frac{\Phi}{2\pi} \right] \cdot 2\pi + \varphi, \tag{5.27}$$

где  $[\Phi]$  – целая (количество полных оборотов) и  $\varphi \equiv \Phi \pmod{2\pi} \in [0, 2\pi)$  – дробная (определяемая по модулю  $2\pi$ ) части угла, является базовой формулой определения произвольного угла.

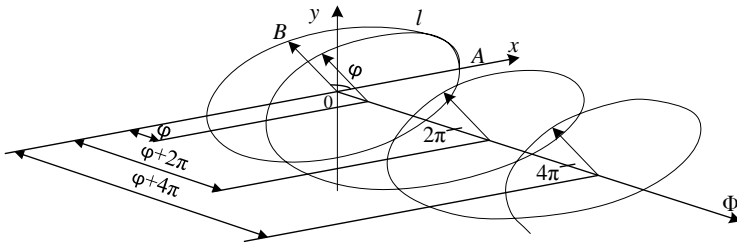


Рис. 5.10. Задание углов на винтовой линии и на круге

Рассматривая периодические процессы, разворачивающиеся во времени с периодом  $T$  (или в пространстве с пространственным периодом  $\lambda$ ), можно поставить в соответствие их периодам величину  $2\pi$ . Тогда каждому интервалу времени  $t$  (или расстояния  $D$ ) ставится в соответствие угол  $\varphi \equiv 2\pi \left( \frac{t}{T} \right) \pmod{1}$  (или  $\varphi \equiv 2\pi \left( \frac{D}{\lambda} \right) \pmod{1}$ ). Таким образом, дробная часть  $t$  (или дробная часть  $D$ ) идентифицируется с углом  $\varphi$ , после чего она может исследоваться методами углометрии.

**Статистические угловые измерения.** Результаты анализа данных угловых измерений имеют характерные свойства, отличные от свойств линейных измерений, т.е. измерений, аргументом которых является числовая ось. Это определяет необходимость построения соответствующих статистических оценок при обработке результатов угловых измерений.

**Пример.** Пусть в серии  $M = 100$  измерений получены значения:  $\varphi_j = 1^\circ$  для  $j = \overline{1,50}$  и  $\varphi_j = 359^\circ$  для  $j = \overline{51,100}$ . Вполне естественно принять, что среднее значение угла равно  $0^\circ$ , а рассеяние значений -  $1^\circ$ . Формальное применение известных для случайных величин с распределением на прямой оценок среднего и среднеквадратического отклонения, дает другие результаты :

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \varphi_j = \frac{50}{100} (1^\circ + 359^\circ) = 180^\circ ,$$

$$\tilde{\sigma}_\varphi = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\varphi_j - \tilde{\varphi})^2} = \sqrt{\frac{50}{99} 2 \cdot (179^\circ)^2} \approx 180^\circ .$$

Этот пример иллюстрирует необходимость применения для обработки результатов угловых измерений своих статистических оценок. В табл. 5.6 проведен сравнительный анализ характеристик случайных величин и углов.

Таблица 5.6

Характеристика	Случайная величина	Случайный угол
1	2	3
<p>Определение случайных величины и угла</p>	<p>Действительной случайной величиной называется функция <math>\xi(\omega)</math> с областью определения <math>\Omega = \{\omega\}</math> и областью значений <math>X \subset R</math> такая, что для произвольного <math>x \in X</math> множество тех <math>\omega \in \Omega</math>, для которых <math>\xi(\omega) &lt; x</math> есть событие <math>A</math> из множества случайных событий <math>\mathfrak{A}</math>, которая задана на фиксированном вероятностном пространстве <math>(\Omega, \mathfrak{A}, P)</math></p>	<p>Действительным случайным углом есть функция <math>\Psi(\omega)</math> с областью определения <math>\Omega = \{\omega\}</math> и областью значений <math>\Theta \subset R</math> такая, что для произвольного <math>\theta \in \Theta</math> дробная часть угла</p> $\psi(\omega) = \Psi(\omega) - \left[ \frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right]^+ 2\pi = \Psi(\omega) \bmod 2\pi$ <p>является случайной величиной.</p>
<p>Функция распределения вероятностей</p>	<p>Функция распределения вероятностей <math>F(x)</math>, <math>x \in R</math> случайной величины <math>\xi(\omega)</math> :</p> $F(x) = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\},$ $-\infty < x < \infty.$ <p><b>Свойства <math>F(x)</math>:</b></p> <p>1) монотонность (если <math>x_1 &lt; x_2</math>, то <math>F(x_1) \leq F(x_2)</math>);</p> <p>2) непрерывность слева <math>(\lim_{x \uparrow x_0} F(x) = F(x_0))</math>;</p> $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0;$ $F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$	<p>Функция распределения вероятностей <math>F(\theta)</math> случайного угла <math>\Psi(\omega)</math> :</p> $F(\theta) = G(\theta') + \left[ \frac{\theta}{2\pi} \right]^+ + C,$ $-\infty < \theta < \infty, 0 \leq \theta' < 2\pi,$ <p>где <math>G(\theta')</math> - функция распределения случайной величины <math>\psi(\omega)</math>, <math>\theta'</math> - дробная часть <math>\theta</math>, <math>C</math> - произвольная постоянная.</p> <p><b>Основные свойства <math>F(\theta)</math>:</b></p> <p>1) монотонность (если <math>\theta_1 &lt; \theta_2</math>), то <math>F(\theta_1) \leq F(\theta_2)</math>);</p> <p>2) <math>G(\theta')</math> непрерывная справа <math>(\lim_{\theta' \downarrow \theta'_0} G(\theta') = G(\theta'_0))</math>, поэтому <math>G(2\pi) = 1</math>;</p> $F(\theta + 2\pi n) - F(\theta) = n; n = 0, 1, 2, \dots;$ $F(-\infty) = \lim_{\theta \rightarrow -\infty} F(\theta) = 0; F(\infty) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} F(\theta) \rightarrow \infty$
<p>Квантили законов распределения</p>	<p>Решение уравнения <math>F(\alpha_\gamma) = \gamma</math>, где <math>\gamma</math> - заданная вероятность <math>(0 &lt; \gamma &lt; 1)</math> относительно <math>\alpha_\gamma \in (-\infty, \infty)</math> называется квантилем распределения <math>F(x)</math> уровня <math>\gamma</math>, где <math>\gamma = \int_{-\infty}^{\alpha_\gamma} p(x) dx</math>.</p>	<p>Решение уравнения <math>G(\theta'_\gamma) = \gamma</math>, где <math>\gamma</math> - заданная вероятность <math>(0 &lt; \gamma &lt; 1)</math> относительно <math>\theta'_\gamma \in [0, 2\pi)</math> называется квантилем распределения <math>F(\theta)</math> уровня <math>\gamma</math>, где <math>\gamma = \int_0^{\theta'_\gamma} p(\theta) d\theta</math></p>

1	2	3
Плотность распределения вероятностей	<p>Если существует такая функция <math>p(x)</math>, в которой для произвольного <math>x \in R</math></p> $F(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy,$ <p>то <math>p(x)</math> называется плотностью вероятностей.</p> <p><b>Свойства <math>p(x)</math>:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>p(x) \geq 0</math>;</li> <li>2) <math>\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1</math>;</li> <li>3) для произвольных <math>a</math> и <math>b</math></li> </ol> $P\{a \leq \xi < b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b p(x) dx.$	<p>Если существует такая функция <math>p(\theta)</math>, <math>\theta \in [0, 2\pi)</math>, где для произвольных <math>\theta</math></p> $F(\theta_2) - F(\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta) d\theta, \quad (\theta_2 - \theta_1) \in [0, 2\pi)$ <p>то <math>p(\theta)</math> называется плотностью вероятностей на окружности.</p> <p><b>Свойства <math>p(\theta)</math>:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>p(\theta) \geq 0</math>;</li> <li>2) <math>p(\theta + 2\pi) \equiv p(\theta)</math>;</li> <li>3) <math>\int_{\theta_1}^{\theta_1 + 2\pi} p(\theta) d\theta = 1</math>;</li> <li>4) для произвольных <math>\theta_1, \theta_2</math></li> </ol> $P(\theta_1 < \Psi \leq \theta_2) = \begin{cases} 0, & \theta_2 \leq \theta_1, \\ F(\theta_2) - F(\theta_1), & \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_1 + 2\pi, \\ 1, & \theta_2 > \theta_1 + 2\pi. \end{cases}$ <ol style="list-style-type: none"> <li>5) <math>p(\theta)</math> периодическая функция на <math>R</math> с периодом <math>2\pi</math></li> </ol>
Характеристическая функция	<p>Характеристической функцией случайной величины <math>\xi(\omega)</math> называется математическое ожидание случайной функции</p> $f(u) = M e^{ju\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} dF(x),$ <p><math>u \in (-\infty, \infty)</math>.</p>	<p>Характеристической функцией случайного угла <math>\Psi(\omega)</math> (последовательностью тригонометрических моментов относительно нулевого направления) называется математическое ожидание функции <math>\exp(j\rho\Psi)</math></p> $f_n = M e^{jn\Psi} = \int_0^{2\pi} \exp(jn\theta') dG(\theta') = \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \exp(jn\theta) dF(\theta) = \rho_n \exp(jn\mu_n),$ <p><math>k</math> - произвольное целое число; <math>n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots</math></p>
Неравенство Чебышева	$P\left\{ \xi - M\xi  \geq g\sqrt{D\xi}\right\} \leq \frac{1}{g^2}$	$P\left\{\left \sin \frac{\Psi - \mu_1}{2}\right  > \varepsilon\right\} < \frac{\nu}{2\varepsilon^2},$ $0 < \varepsilon < 1, \quad 0 < \frac{\nu}{2\varepsilon^2} < 1.$

1	2	3
Первый начальный момент (среднее значения)	<p>Математическим ожиданием случайной величины <math>\xi(\omega)</math> с функцией распределения <math>F(x)</math> называется число, определенное интегралом Стильеса</p> $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$	<p>Круговым средним значением случайного угла <math>\Psi(\omega)</math> с функцией распределения <math>G(\theta)</math>, для которого <math>f_1 = Me^{j\Psi} \neq 0</math> называется угол</p> $\mu_1 = \text{Arg}f_1$
Модуль тригон. момента	—	<p>Модуль тригонометрического момента первого порядка <math>\rho =  f_1 </math> определяется длиной результирующего вектора, представляющего собой математическое ожидание случайного вектора <math>(\cos \Psi, \sin \Psi)</math></p>
Разброс значений случайной величины и случайного угла	<p>Дисперсией случайной величины <math>\xi(\omega)</math> с функцией распределения <math>F(x)</math> называется математическое ожидание квадрата отклонения значения <math>\xi(\omega)</math> от ее математического отклонения <math>M\xi</math></p> $D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 dF(x)$	<p>Круговой дисперсией случайного угла <math>\Psi(\omega)</math> с функцией распределения <math>G(\theta)</math> называется величина</p> $v = 1 - \rho = 1 -  f_1 ,$ <p>которая характеризует отклонение значения случайного угла от его среднего значения</p>
Медиана	<p>Медианой непрерывного распределения <math>F(x)</math> случайной величины <math>\xi(\omega)</math> называется такое значение <math>x = Me</math>, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина большей или меньшей <math>Me</math>, т.е.</p> $P(\xi < Me) = P(\xi > Me)$	<p>Круговой медианой непрерывного распределения на окружности <math>G(\theta)</math> случайного угла <math>\psi(\omega)</math> называется значение угла <math>\mu_m</math>, которое является одним из решений уравнения</p> $Q(\mu_m) = F(\mu_m + \pi) - F(\mu_m) - 0,5 = \int_{\mu_m}^{\mu_m + \pi} p(\theta) d\theta - 0,5 = 0,$ <p>и для которого значение <math>Q(\mu_m - 0,5\pi)</math> максимально</p>
Мода	<p>Модой называется значение <math>\text{Mod}</math> случайной величины <math>\xi(\omega)</math>, для которого плотность распределения имеет максимальное значение</p>	<p>Модой называется значение <math>\text{Mod}</math> случайного угла <math>\psi(\omega)</math>, для которого плотность распределения имеет максимальное значение</p>

**Вероятностная модель угла на плоскости.** В теории статистических угловых измерений в качестве основной математической модели используется модель случайного угла

$$\Psi(\omega) = \left[ \frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right] 2\pi + \psi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (5.28)$$

где  $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$  - дробная часть случайного угла.

Функция распределения вероятностей случайного угла  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$  в общем виде определяется как

$$G(x') = P\{\omega \in \Omega : 0 < \psi(\omega) \leq x'\}, \quad x' \equiv x \pmod{2\pi}. \quad (5.29)$$

Выражение (5.28) задает функцию распределения вероятностей  $\psi(\omega)$ . Ее свойства приведены в табл. 5.6, а на рис. 5.11 – примеры графиков непрерывной (а) и дискретной (б) функций  $G(x')$ .

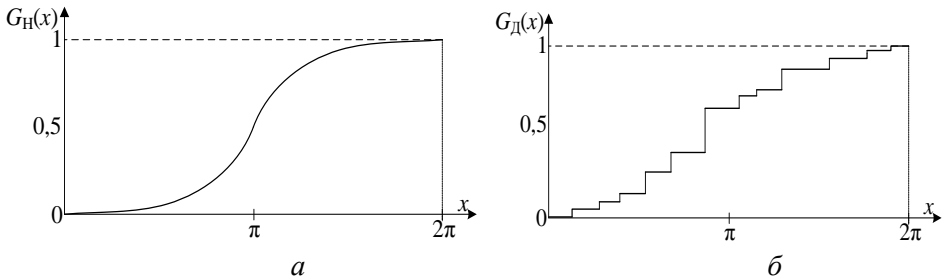


Рис. 5.11 Графики функций распределения

*Интегральная функция распределений вероятностей случайных углов  $\Psi(\omega)$*  в общем виде определяется как

$$F(x) = G(x') + \left[ \frac{x}{2\pi} \right] + C, \quad x \in R, \quad x' \equiv x \pmod{2\pi}. \quad (5.30)$$

Кроме указанных в в табл. 5.6, обладает следующими свойствами:

1.  $F(x') = F(x'_-) - F(0_-)$ ,  $x' \in [0, 2\pi)$ .
2.  $F(x) - \frac{x}{2\pi}$  является периодической функцией с периодом  $2\pi$ .
3.  $F(x + 2\pi) - F(x) \equiv 1$ ,  $x \in R$ .
4. Для  $0 \leq x_2 - x_1 \leq 2\pi$  имеем

$$P\{\omega \in \Omega : x_1 < \Psi(\omega) \leq x_2\} = \begin{cases} 0, & x_2 \leq x_1, \\ F(x_2) - F(x_1), & (x_1 < x_2 \leq x_1 + 2\pi) \\ 1, & x_2 > x_1 + 2\pi \end{cases}$$

5. Для характерного случая разницы углов в пределах  $2\pi$ , т.е.  $0 < x_2 - x_1 \leq 2\pi$  имеем



$$\left\{ \begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= P\{x_1 < x' \leq x_2\} \text{ для } \left[ \frac{x_2}{2\pi} \right] = \left[ \frac{x_1}{2\pi} \right]; \\ (F(x'_2) - F(0)) + (F(x'_1) - F(2\pi)) &= \\ &= P\{(0 \leq x' \leq x'_2) + P(x'_1 \leq x' \leq 2\pi)\} \text{ для } \left[ \frac{x_2}{2\pi} \right] = \left[ \frac{x_1}{2\pi} \right] + 1. \end{aligned} \right.$$

6. Постоянная составляющая  $C$  в выражении (5.30), как правило, равна нулю, но в зависимости от постановки задачи угловых измерений может принимать и другие числовые значения.

Из приведенных свойств функции  $F(x)$ ,  $x \in R$  следует, что эта функция на интервалах  $2\pi$  с началом в произвольной точке числовой оси имеет одинаковые приращения  $F(x + 2\pi(k + 1)) - F(x + 2\pi k) = 1$ , что не противоречит свойствам нормированной вероятностной меры. Пример графика  $F(x)$  для непрерывного случая приведен на рис. 5.12.

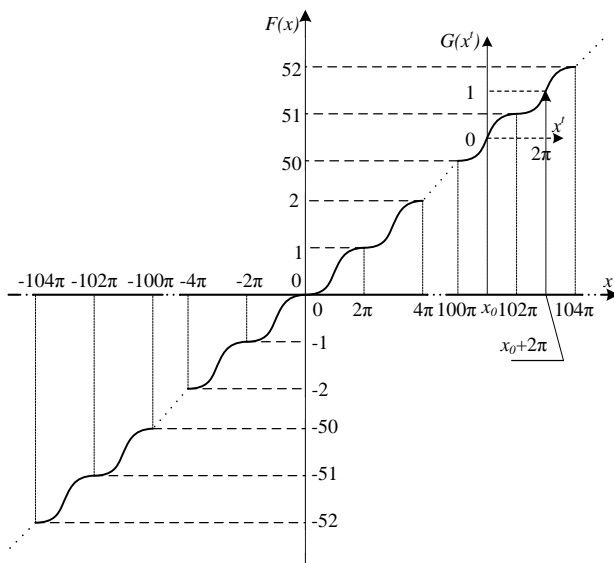


Рис. 5.12 Пример графика непрерывной функции  $F(x)$

**Свойства характеристической функции случайного угла  $\Psi(\omega)$ .** Характеристическая функция случайного угла, определение которой дано в табл. 5.6, представляет собой последовательность тригонометрических моментов вида

$$f_n = a_n + jb_n, \tag{5.31}$$

где косинус и синус моменты определяются относительно начального нулевого направления в соответствии с выражениями

$$a_n = \mathbf{M}\{\cos n\Psi(\omega)\} = \int_0^{2\pi} \cos nx dG(x), \quad b_n = \mathbf{M}\{\sin n\Psi(\omega)\} = \int_0^{2\pi} \sin nx dG(x).$$

Характеристическая функция случайных углов имеет такие свойства.

1. Модуль характеристической функции  $|f_n| \leq 1$ .
2. Для  $n = 0$  имеем  $f_0 = 1$ .
3. Характеристическая функция отрицательного аргумента равна комплексносопряженной характеристической функции  $f_{-n} = f_n^*$ , поскольку  $a_{-n} = a_n$ ,  $b_{-n} = -b_n$ .

4. Характеристическая функция суммы независимых случайных углов  $\Psi_1(\omega), \dots, \Psi_m(\omega)$  равна произведению характеристических функций компонент случайных углов:

$$f_n = \prod_{k=1}^m f_n^{(k)},$$

где  $f_n^{(k)}$  - характеристическая функция  $n$ -го порядка  $k$ -го случайного угла.

5. Плотность распределения вероятностей случайного угла однозначно определяется его характеристической функцией

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-jn\theta}.$$

**Законы распределений вероятностей случайных углов.** Выполнение для углов операции сложения по модулю  $2\pi$  определяет свойство периодичности законов плотности распределения вероятностей случайного угла  $\Psi(\omega)$ , чем они существенно отличаются от распределений вероятностей случайных величин (рис. 5.13).

Плотность распределения вероятности на рис. 5.13 периодична с периодом  $2\pi$ . В теории статистической углометрии такие распределения называют *одночастотными*. *Многочастотные* распределения имеют период меньше в некое целое число раз, т.е. период  $2\pi/j$ ,  $j = 2, 3, \dots$ . Ниже рассмотрены некоторые плотности вероятности случайных углов.

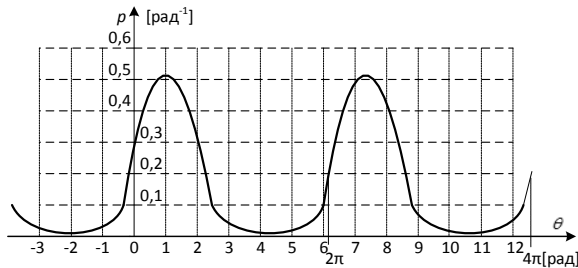
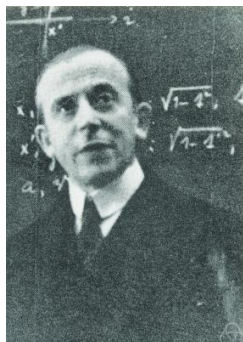


Рис. 5.13 Общий вид плотности распределения вероятностей случайного угла



**Рихард Эдлер фон Мизес (Richard von Mises, 1883 - 1953),**

выдающийся немецкий математик и механик австрийского происхождения. Родился в Лемберге, Австро-Венгрия (ныне Львов, Украина). Работы в области аэродинамики, прикладной механики, механики жидкостей, авионавтики, статистики и теории вероятностей. В теории вероятностей предложил частотную концепцию понятия вероятности, ввёл в общее употребление интегралы Стильтьеса и первым разъяснил роль теории марковских цепей в физике; был невероятно динамичным и удивительно универсальным человеком, особенно хорошо сведущим в области технологии; признанный эксперт в поэзии.

*Распределение Мизеса.* Плотность распределения вероятностей Мизеса случайного угла  $\psi(\omega)$  определяется формулой

$$p_M(\theta | \mu, k) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} e^{k \cos(\theta - \mu)}, \quad |\mu| < \infty, k > 0, \quad (5.32)$$

где  $I_0(k)$  - модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка;  $\mu$  - круговое среднее направление случайного угла;  $k$  - параметр концентрации случайного угла в окрестности  $\mu$ . Примеры графиков функций  $p_M(\theta | \mu, k)$  для различных значений параметров представлены на рис. 5.14.

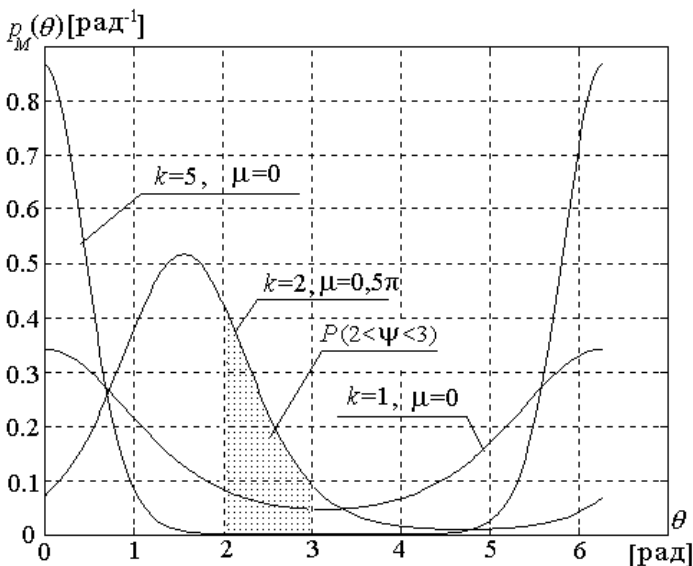


Рис. 5.14 Примеры графиков плотности распределения вероятностей Мизеса

Характеристическая функция распределения Мизеса определяется как

$$f_n = \alpha_n = \frac{I_n(k)}{I_0(k)}. \quad (5.33)$$

Это распределение имеет следующее важное свойство: наиболее правдоподобной оценкой параметра  $\mu$  является круговое среднее направление.

Распределением Мизеса удовлетворительно аппроксимирует намотанное гауссовское распределение при выполнении следующего соотношения между их

параметрами рассеяния  $\sigma = \sqrt{-2 \ln \frac{I_1(k)}{I_0(k)}}$ .

*Намотанное гауссовское распределение* принадлежит к семье *намотанных распределений*, которое получают при нелинейном преобразовании случайной величины в случайный угол вида

$$\psi(\omega) \equiv [K\xi(\omega)] \bmod 2\pi, \quad (5.34)$$

где  $K$  - масштабный коэффициент.

Данное преобразование приводит к трансформации законов распределения на прямой в намотанные законы распределения вероятностей случайных углов (т.е. в "намотанные" на единичную окружность распределения).

Если случайная величина  $\xi(\omega)$  имеет плотность распределения вероятности  $p(x)$ , то непрерывный случайный угол  $\psi(\omega)$  также распределен непрерывно с плотностью распределения

$$p_{2\pi}(\theta) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p(\theta + 2\pi i). \quad (5.35)$$

В общем случае функция  $p_{2\pi}(\theta)$  несимметрична относительно середины интервала  $[0, 2\pi)$ , а на его концах принимает одинаковые значения:

$$p_{2\pi}(0) = \lim_{\theta \rightarrow 2\pi} p_{2\pi}(\theta).$$

Плотность вероятности намотанного гауссовского распределения задается выражением

$$p_{2\pi}(\theta/\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{[(\theta - \mu) \bmod 2\pi + 2\pi j]^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.36)$$

где  $\mu$  - математическое ожидание;  $\sigma$  - среднеквадратическое отклонение случайной величины  $\xi(\omega)$ .

Данный закон обладает важным свойством: сумма независимых углов, каждый из которых имеет распределение (5.36), имеет распределение того же вида, но с другими характеристиками.

Характеристическая функция намотанного гауссовского распределения вероятностей имеет вид

$$f_n = \alpha_n = \exp(-n^2\sigma^2/2), \quad \beta_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.37)$$

В статистической углометрии имеет место центральная предельная теорема, утверждающая, что для независимых случайных углов  $\psi_1(\omega), \dots, \psi_n(\omega)$ , имеющих одинаковую функцию распределения вероятности  $F(\theta)$ , распределение вероятностей нормированной суммы углов  $\left[ \sum_{j=1}^n \psi_j(\omega) / \sqrt{n} \right] \bmod 2\pi$  в случае  $n \rightarrow \infty$ , приближается к намотанного гауссовского распределению.

Примеры плотностей распределения вероятностей намотанного гауссовского распределения для различных значений параметров показаны на рис. 5.15. Из этих графиков видно, что намотанные гауссовские распределения одновершинные.

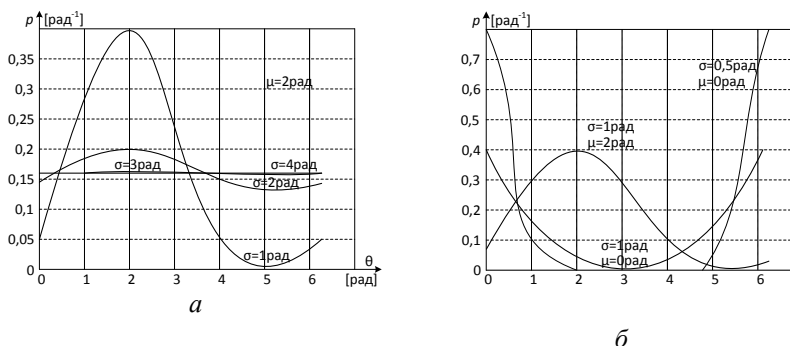


Рис. 5.15 Примеры плотности намотанного гауссовского распределения

Информация о некоторых других непрерывные распределения вероятностей случайных углов сведена в табл. 5.7.

Таблица 5.7

Название	Плотность распределения вероятностей $p(\theta)$	Характеристическая функция $f_n$
Равномерный	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{e^{2\pi i j} - 1}{2\pi i j} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$
Кардиоидный	$(2\pi)^{-1} [1 + 2\rho \cos(\theta - \mu)],$ $ \mu  < \infty,  \rho  < 0,5$	-
Треугольный	$\frac{1}{8\pi} [4 - \pi^2 \rho + 2\pi\rho \pi - \theta ],$ $\rho \leq 4 / \pi^2$	$\alpha_{2n-1} = \frac{\rho}{(2n-1)^2},$ $\alpha_{2n} = 0, \beta_n = 0$
Намотанный Коши'	$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - \rho^2}{1 - \cos 2\rho + \rho^2}$ $\rho = e^{-a} \in [0,1]$	$\rho^{ a }$

**Выборочные круговые характеристики случайных углов.** При выполнении многократных измерений случайного угла  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$  получают множество его реализаций  $\{\rho_j, j = \overline{1, M}\}$ , т.е. выборку объема  $M$ . Оценка числовых характеристик случайных углов выполняется путем определения соответствующих выборочных круговых характеристик, содержание которых приведено в табл. 5.8.

Таблица 5.8

Наименование статистической характеристики	Размерность	Содержание, математическая запись
1	2	3
Выборочное круговое среднее статистики углов	рад	$\varphi_c = \left\{ \arctg \frac{S}{D} + \frac{\pi}{2} \{2 - (\text{sign } S) \times [1 + \text{sign } C]\} \bmod 2\pi; \right.$ $C = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos \varphi_j; \quad S = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin \varphi_j$
Выборочная длина результирующего вектора	-	$r = \sqrt{C^2 + S^2}$
Выборочная круговая дисперсия статистики углов	-	$V = 1 - r$
Круговое стандартное отклонение статистики углов	рад	$\sigma = \sqrt{-2 \ln(1 - V)} = \sqrt{-2 \ln r};$ $V = 1 - \exp(-0,5\sigma^2)$
Выборочная круговая медиана статистики углов	рад	Углу соответствует такая точка окружности Р, для которой диаметр PQ делит значения статистики пополам, и в окрестности Р наблюдается максимальная концентрация ее значений
Выборочная мода статистики углов	рад	Углу соответствует точка окружности, в окрестности которой наблюдается максимальная концентрация значений статистики
Выборочный круговой размах статистики углов	рад	<p>Длина наименьшей дуги, охватывающей все значения статистики, определяется из вариационного ряда</p> $T_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j, \quad j = 1, \dots, M - 1;$ $T_M = 2\pi - \varphi_M + \varphi_1;$ $W = 2\pi - \max\{T_1, \dots, T_M\}$
Выборочная характеристика асимметрии статистики углов	-	$g_1 = \frac{b_2(m)}{V^{3/2}} = \frac{r_2 \sin[m_2(0) - 2m]}{V^{3/2}}$
Выборочная характеристика эксцесса статистики углов	-	$g_2 = \frac{a_2(m) - (1 - V)^4}{V^2} =$ $= \frac{r_2 \cos m_2(0) - 2n - (1 - V)^4}{V^2}.$

1	2	3
<p>Выборочный тригонометрический момент порядка <math>u</math> относительно направления <math>\alpha</math> (<math>u</math> - целое число)</p>	<p>—</p>	$T_u(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M e^{iu(\theta_j - \alpha)} = a_u(\alpha) +$ $+ ib_u(\alpha) = r_u(\alpha) e^{im_u(\alpha)}; \quad u = 0, 1, 2, \dots$ $a_u(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos[u(\varphi_j - \alpha)] =$ $= a_u(0) \cos(u\alpha) + b_u(0) \sin(u\alpha);$ $b_u(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin[u(\varphi_j - \alpha)] =$ $= -a_u(0) \sin(u\alpha) + b_u(0) \cos(u\alpha);$ $r_u(\alpha) = \sqrt{a_u^2(\alpha) + b_u^2(\alpha)} =$ $= \sqrt{a_u^2(0) + b_u^2(0)} = r_u(0);$ $m_u(\alpha) = m_u(0) - u\alpha.$

Наиболее часто употребляемыми являются выборочное круговое среднее и выборочная круговая дисперсия.

*Выборочное круговое среднее.* Результат отдельного измерения -  $\varphi_j$ , изображается плоским углом такой же величины, которому соответствует на круге единичного радиуса дуга длиной  $l_j$  между положительной полуосью абсцисс и вектором  $\overrightarrow{OP_j}$  (рис. 5.16, а), который имеет декартовы  $[\cos \varphi_j, \sin \varphi_j]$  и полярные  $(1, \varphi_j)$  координаты.

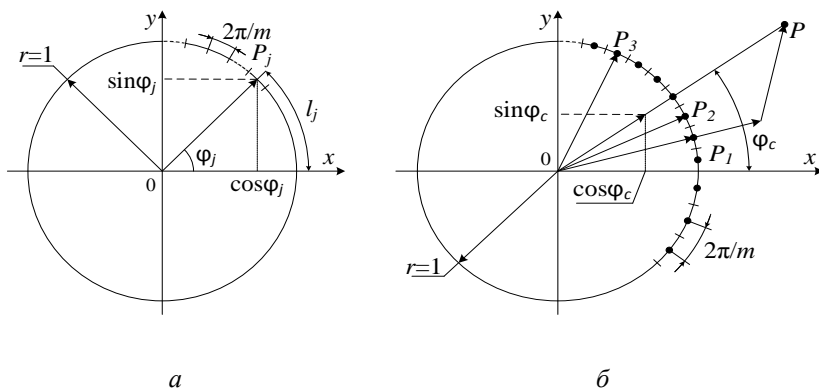


Рис. 5.16. Графическое изображение на окружности результатов одного измерения (а) и усредненная выборка углов объема  $M = 3$  (б)

Предполагается, что измерения выполняются с шагом  $\frac{2\pi}{m}$ . Дискретно-

му характеру результатов измерений соответствует разбиение круга на  $m$  класс-интервалов (точка  $P_j$  соответствует середине  $j$ -го класс-интервала).

Любая конструктивная характеристика  $L$  кругового среднего должна удовлетворять условию аддитивности

$$\{L(\varphi_1 - \nu, \dots, \varphi_M - \nu)\}(\bmod 2\pi) \equiv \{L(\varphi_1, \dots, \varphi_M) - \nu\}(\bmod 2\pi), \nu \in [0, 2\pi),$$

т.е. для произвольного угла дробные части (по модулю  $2\pi$ ) чисел  $\{L(\varphi_1, \dots, \varphi_M) - \nu\}$  и  $L(\varphi_1 - \nu, \dots, \varphi_M - \nu)$  должны совпадать. Иначе говоря, угол, задаваемый характеристикой  $L(\varphi_1, \dots, \varphi_M)$ , должен аддитивно зависеть от начального угла  $\nu$ . Этому требованию удовлетворяет выборочный круговой средний угол.

Для множества  $\{\varphi_j, j = \overline{1, M}\}$  понятие *выборочного кругового среднего угла* определяется как направление суммы всех единичных векторов  $\overrightarrow{OP_1}, \dots, \overrightarrow{OP_M}$ . На рис. 5.16, б рассмотрен случай  $M = 3$ . Суммарный вектор

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{j=1}^3 \overrightarrow{OP_j} \text{ имеет декартовы координаты } \left( \sum_{j=1}^3 \cos \varphi_j, \sum_{j=1}^3 \sin \varphi_j \right) \text{ и характери-}$$

зуется выборочным круговым средним углом  $\varphi_c$ . Физическое толкование  $\varphi_c$  с точки зрения механики заключается в следующем: если всем единичным векторам, заканчивающимся точками единичного круга, приписать одинаковую "массу", то координаты "центра масс" этой системы определяются как

$$C = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos \varphi_j, \quad S = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin \varphi_j. \quad (5.38)$$

Значения  $C$  и  $S$  позволяют вычислить угол  $\varphi_c$  (см. табл.5.8). Правильность вычисления  $\varphi_c$  проверяется выполнением условия

$$\sum_{j=1}^M \sin(\varphi_j - \varphi_c) = 0. \quad (5.39)$$

Пересчет координат вектора  $\mathbf{r}$  из декартовой системы в полярную выполняется согласно формулам  $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{C^2 + S^2}$ ,  $C = r \cos \varphi_c$ ,  $S = r \sin \varphi_c$ .

Величину  $r$  называют *выборочной результирующей длиной* вектора.

Если  $r = 0$  значение  $\varphi_c$  в интервале  $[0, 2\pi)$  однозначно не определяется.

*Выборочная круговая дисперсия* случайного угла относительно  $\varphi_c$  определяется следующим образом:

$$V(\varphi_c) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \{1 - \cos(\varphi_j - \varphi_c)\} = 1 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos(\varphi_j - \varphi_c) = 1 - r. \quad (5.40)$$

Характеристика  $V(\varphi_c)$  имеет свойство инвариантности относительно начала отсчета углов.

**Статистические интервальные оценки случайных углов.** При усред-



нении на окружности совокупности  $M$  статистически независимых случайных углов выборочная круговая дисперсия среднего угла уменьшается в  $\sqrt{M}$  раз. С учетом этого методика интервального оценивания среднего значения случайного угла с намотанным гауссовским распределением определяется следующей последовательностью действий.

1. Расчет сумм  $C$  и  $S$  (формула (5.38)).
2. Расчет выборочного кругового среднего  $\varphi_c$ .
3. Проверка условия формулы (5.39) для подтверждения правильности определения значения  $\varphi_c$ .
4. Определение выборочной круговой дисперсии  $V=1-r$  одного углового измерения. В случае  $M < 15 \dots 20$  значение  $k$   $r$  применяют поправку типа поправки Шеннарда:  $r_g = r c_g$ , где  $c_g = \pi / m \sin \frac{\pi}{m}$ .
5. Расчет кругового стандартного отклонения  $\sigma$ .
6. Определение кругового стандартного отклонения кругового среднего  $\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{M}}$  выборки объема  $M$ .
7. Расчет границы доверительного интервала  $\alpha_{\text{дов}}$  для заданной доверительной вероятности  $P_{\text{дов}}$  и функции Лапласа.
8. Формирование доверительного интервала:  
нижняя граница доверительного интервала -  $P_{\text{дов}}$  ;  
верхняя граница доверительного интервала -  $(\varphi_c + \alpha_{\text{дов}}) \bmod 2\pi$ .

### 5.5. Типовые методы обработки результатов измерений

**Обработка прямых многократных измерений.** Обработка результатов прямых многократных измерений регламентирована в нормативной документации. При статистической обработке группы результатов прямых многократных независимых измерений выполняются следующие операции:

исключаются известные систематические погрешности из результатов измерений;

вычисляется оценка измеряемой величины;

вычисляется среднее квадратическое отклонение результатов измерений;

проверяется наличие грубых погрешностей и при необходимости проводится их исключение;

проверяется гипотеза о принадлежности результатов измерений нормальному распределению;

вычисляются доверительные границы случайной погрешности оценки измеряемой величины;

вычисляются доверительные границы неисключенной систематической погрешности оценки измеряемой величины;

вычисляются доверительные границы погрешности оценки измеряемой

величины.

Проверка гипотезы о том, что результаты измерений принадлежат нормальному распределению, проводится с уровнем значимости  $q$  от 10 до 2 %. Конкретные значения уровней значимости выбираются исходя из условий проведения измерений.

Для определения доверительных границ погрешности оценки измеряемой величины доверительная вероятность  $P$  в большинстве технических измерений принимается равной 0,95.

В качестве оценки измеряемой величины  $x$  принимается среднее арифметическое значение исправленных результатов измерений

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n,$$

где  $x_i$  -  $i$ -й результат измерений;  $n$  - число исправленных результатов.

Полученный результат округляется.

Если во всех результатах измерений содержится постоянная систематическая погрешность, ее допускается исключить после вычисления среднего арифметического значения неисправленных результатов измерений.

Среднее квадратическое отклонение  $S$  группы, содержащей  $n$  результатов измерений, которое является оценкой характеристики рассеяния результатов измерений, вызванных наличием случайных составляющих погрешности, вычисляется по формуле

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)}.$$

Среднее квадратическое отклонение среднего арифметического (фактически результата измерения)  $s_x$  определяется как  $s_x = s / \sqrt{n}$ .

Доверительные границы случайной погрешности оценки измеряемой величины в соответствии со стандартной методикой устанавливаются для результатов измерений, принадлежащих нормальному распределению. При числе результатов измерений  $n \leq 15$  принадлежность их к нормальному распределению не проверяют. В этом случае суждение о гауссовости распределения принимаются на основании априорных сведений. Если нет достаточных оснований считать распределение случайной погрешности нормальным, методы вычисления доверительных границ случайной погрешности должны быть разработаны дополнительно.

При числе результатов измерений  $15 < n \leq 50$  для проверки принадлежности их к нормальному распределению предпочтительно использовать составной критерий, рассмотренный выше.

Если число результатов измерений  $n > 50$ , для проверки принадлежности их к нормальному распределению можно применять рассмотренные критерии  $\chi^2$  Пирсона или Колмогорова - Смирнова.

Доверительные границы  $\varepsilon$  (без учета знака) случайной погрешности

оценки измеряемой величины вычисляются по формуле  $\varepsilon = t s_{\bar{x}}$ , где  $t$  - коэффициент Стьюдента, зависящий от доверительной вероятности  $P$  и числа результатов измерений  $n$  (числа степеней свободы).

Неисключенная систематическая погрешность (НСП) оценки измеряемой величины образуется из составляющих, в качестве которых могут быть приняты НСП:

- метода;
- средства измерений;
- вызванные другими источниками.

В качестве границ составляющих НСП принимаются, например, пределы допускаемых основных и дополнительных погрешностей средств измерений, если случайные составляющие погрешности пренебрежимо малы.

Граница НСП  $\Theta_{\Sigma}$  оценки измеряемой величины при наличии менее трех составляющих ( $m < 3$ ) НСП, каждая из которых представлена границами  $\Theta_i$ , оценивается по формуле

$$\Theta_{\Sigma} = \pm \sum_{i=1}^m |\Theta_i|.$$

При наличии трех и более составляющих НСП распределения внутри границ этих составляющих (погрешности средств измерений каждого типа, погрешности поправок и т. д.) рассматриваются как распределения случайных величин. При отсутствии данных о виде распределений составляющих, они принимаются равномерными. В данном случае доверительные границы  $\Theta_{\Sigma}(P)$  допускается вычислять по формуле

$$\Theta_{\Sigma}(P) = \pm k \sqrt{\sum_{i=1}^m |\Theta_i|^2},$$

где  $\Theta_i$  - граница  $i$ -й НСП;  $k$  - коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью, числом составляющих НСП и их соотношением между собой.

Для доверительной вероятности  $P=0.95$  значение коэффициента  $k$  пренебрежимо мало зависит от числа составляющих НСП и их соотношения, поэтому при указанной доверительной вероятности коэффициент  $k$  принимается равным 1,1.

Если законы распределения составляющих НСП известны и отличаются от равномерного, то доверительные границы НСП  $\Theta_{\Sigma}(P)$  вычисляют путем построения композиции данных законов распределения.

В случаях, если НСП появляется в результате исключения систематической погрешности, вызванной воздействием влияющей величины  $Y$  на измеряемую величину  $X$ , необходимо определить вид зависимости измеряемой величины от влияющей (например, функцию  $X = f(Y)$ ). В этом случае при вычислении границ НСП оценки измеряемой величины необходимо учитывать коэффициент влияния  $\partial f / \partial Y$ , получаемый при разложении данной

функции влияния в ряд Тейлора.

При наличии числа  $k$  НСП, представленных границами, и числа  $m - \mu$  НСП, полученных от воздействия влияющих величин и представленных с коэффициентами влияния, представленная выше формула будет иметь вид:

$$\Theta_{\Sigma}(P) = \pm k \sqrt{\sum_{i=1}^{\mu} \Theta_1^2 + \sum_{i=\mu+1}^m \left(\frac{\partial f_1}{\partial Y_i} \Theta_1\right)^2}. \quad (5.41)$$

Доверительная вероятность для вычисления границ неисключенной систематической погрешности принимается такой же, как и при вычислении доверительных границ случайной погрешности результата измерения.

Доверительные границы погрешности оценки измеряемой величины находят путем построения композиции распределений случайных погрешностей и НСП, рассматриваемых как случайные величины. Границы погрешности оценки измеряемой величины  $\Delta$  (без учета знака) определяются как  $\Delta = K s_{\Sigma}$ , где  $K$  - коэффициент, зависящий от соотношения случайной составляющей погрешности и составляющей, обусловленной НСП.

Суммарное среднее квадратическое отклонение  $s_{\Theta}$  оценки измеряемой величины находится по формуле

$$s_{\Sigma} = \sqrt{s_{\theta}^2 + s_x^2},$$

где  $s_{\theta} = \frac{\Theta_{\Sigma}}{k\sqrt{3}}$  - среднее квадратическое отклонение НСП;  $\Theta_{\Sigma}(P)$  - довери-

тельные границы НСП, которые определены по формуле (5.40);  $k$  - коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью  $P$ , числом составляющих НСП и их соотношением между собой.

Коэффициент  $K$  определяется по эмпирической формуле  $K = \frac{\varepsilon + \Theta_{\Sigma}(P)}{s_x + s_{\theta}}$ .

Оформление записи оценок измеряемых величин проводится в соответствии с правилами по межгосударственной стандартизации.

При симметричных доверительных границах погрешности оценку измеряемой величины представляют в форме  $\bar{x} \pm \Delta, P$ .

Числовое значение оценки измеряемой величины должно оканчиваться цифрой того разряда, что и значение погрешности.

При отсутствии данных о виде функций распределений составляющих погрешности оценки измеряемой величины и необходимости дальнейшей обработки результатов измерений или анализа погрешностей оценки измеряемой величины представляют в форме  $\bar{x}; s_x; n; \Theta$ . Оценки  $s_x$  и  $\Theta$  могут быть выражены в абсолютной и относительной формах.

**Обработка результатов косвенных измерений.** При косвенных измерениях искомое значение физической величины  $A$  находят на основании результатов измерений аргументов  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , связанных с искомой вели-

чиной уравнением

$$A = f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_m). \quad (5.42)$$

Данная функциональная зависимость устанавливается либо из теоретических предпосылок, либо экспериментально с погрешностью, которой можно пренебречь. Результаты измерений аргументов и оценки их погрешностей могут быть получены из прямых, косвенных, совокупных, совместных измерений. Сведения об аргументах могут быть взяты из справочной литературы, технической документации.

Методики обработки результатов косвенных измерений подразделяются на три основных типа:

методику обработки при линейной зависимости и отсутствии корреляции между погрешностями измерений аргументов;

методику обработки при нелинейной зависимости и отсутствии корреляции между погрешностями измерений аргументов;

методику обработки для коррелированных погрешностей измерений аргументов при наличии рядов отдельных значений измеряемых аргументов.

При оценивании доверительных границ погрешностей результата косвенного измерения обычно принимают вероятность, равную 0,95.

**Косвенные измерения при линейной зависимости.** Результат измерения  $A$  связан с  $m$  измеряемыми аргументами  $a_1, a_2, \dots, a_m$  уравнением вида

$$A = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_m a_m, \quad (5.43)$$

где  $b_1, b_2, \dots, b_m$  - постоянные коэффициенты при аргументах  $a_1, a_2, \dots, a_m$  соответственно;  $m$  - число аргументов.

Если коэффициенты  $b_1, b_2, \dots, b_m$  определяют экспериментально, то задача определения результата измерения величины решается поэтапно: сначала оценивают каждое слагаемое  $b_i a_i$  как косвенно измеряемую величину, полученную в результате произведения двух измеряемых величин, а потом находят оценку измеряемой величины  $A$ .

Результат косвенного измерения  $\tilde{A}$  вычисляется по формуле:

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^m b_i \tilde{a}_i, \quad (5.44)$$

где  $\tilde{a}_i$  - результат измерения аргумента  $a_i$ .

Среднее квадратическое отклонение результата косвенного измерения определяется как

$$s(\tilde{A}) = \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2 s^2(\tilde{a}_i)}, \quad (5.45)$$

где  $s(\tilde{a}_i)$  - среднее квадратическое отклонение  $a_i$ .

Доверительные границы случайной погрешности результата косвенного измерения при условии, что распределения погрешностей результатов измерений аргументов согласуется с нормальным распределением, вычисляется

(без учета знака) по формуле

$$\varepsilon(p) = t_q S(\tilde{A}), \quad (5.46)$$

где  $t_\alpha$ , - коэффициент Стьюдента, соответствующий доверительной вероятности  $P=1-\alpha$  и числу эффективных степеней свободы  $\nu_{эф}$ , вычисляемому по приведенной ниже формуле и округленному до меньшего значения

$$\nu_{эф} = \frac{(\sum_{i=1}^m b_i^2 S^2(\tilde{a}_i)) - 2(\sum_{i=1}^m \frac{b_i^4 S^4(\tilde{a}_i)}{(n_i + 1)})^2}{\sum_{i=1}^m \frac{(b_i^4 S^4(\tilde{a}_i))}{(n_i + 1)}},$$

где  $n_i$  - число измерений при определении аргумента  $a_i$ .

Доверительные границы неисключенной систематической погрешности результата косвенного измерения  $\Theta_{(p)}$  (без учета знака) при вероятности  $P$  вычисляют по заданным границам  $\Theta_j$  неисключенных систематических погрешностей результатов измерений аргументов  $\Theta_{(p)} = k \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2 \Theta_i^2}$ , где  $k$  - поправочный коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью и числом  $m$  составляющих  $\Theta_i$ . При доверительной вероятности  $P = 0,95$  поправочный коэффициент  $k$  принимают равным 1,1.

Суммарную погрешность результата косвенного измерения оценивают на основе композиции законов распределений случайных и неисключенных систематических погрешностей, согласно следующему правилу:

если отношение  $\Theta(P) / S(\tilde{A}) > 8$ , то в качестве погрешности результата косвенного измерения принимается неисключенная систематическая составляющая погрешности измерения;

если  $\Theta(P) / S(\tilde{A}) < 0,8$ , в качестве погрешности результата косвенного измерения принимается случайная составляющая погрешности измерения;

если  $0,8 \leq \Theta(P) / S(\tilde{A}) \leq 8$ , то доверительная граница погрешности результата косвенного измерения  $\Delta(P)$  определяется как  $\Delta(P) = K(\varepsilon(P) + \Theta(P))$ , где  $K$  - коэффициент, зависящий от доверительной вероятности и от отношения  $\Theta(P) / S(\tilde{A})$ :

$\Theta(p)/S(\tilde{A})$	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8
$K$ (для $P = 0,95$ )	0,81	0,77	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,81

**Косвенные измерения при нелинейной зависимости.** Для косвенных измерений при нелинейных зависимостях и некоррелированных погрешностях измерений аргументов используется метод линеаризации, который

предполагает разложение нелинейной функции в ряд Тейлора

$$f(a_1, \dots, a_m) = f(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial a_i} \Delta a_i + R, \quad (5.47)$$

где  $f(a_1, \dots, a_m)$  - нелинейная функциональная зависимость измеряемой величины  $\tilde{A}$  от измеряемых аргументов  $a_i$ ;  $\frac{\partial f}{\partial a_i}$  - первая производная от функции  $f$  по аргументу  $a_i$ , вычисленная в точках  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m$ ;  $\Delta a_i$  - отклонение результата измерения аргумента  $a_i$  от его среднего арифметического;

$$R = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_j} (\Delta a_i a_j) - \text{остаточный член.}$$

Остаточным членом можно пренебречь, если выполняется неравенство:

$$R < 0.8 \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial a_i}\right)^2 S^2(\tilde{a}_i)},$$

где  $S^2(\tilde{a}_i)$  - среднее квадратическое отклонение случайных погрешностей результата измерения  $a_i$  - го аргумента.

Результат измерения  $\tilde{A}$  определяется по формуле

$$\tilde{A} = f(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m). \quad (5.48)$$

Значение среднего квадратического отклонения случайной погрешности результата косвенного измерения определяется как

$$S(\tilde{A}) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial a_i}\right)^2 S^2(\tilde{a}_i)}.$$

Доверительные границы случайной погрешности, границы неисключенной систематической погрешности и суммарную погрешность результата косвенного измерения при условии, что распределения погрешностей результатов измерений аргументов согласуются с нормальным распределением, вычисляют согласно с приведенной выше процедурой для линейной зависимости, подставляя вместо коэффициентов  $b_1, b_2, \dots, b_m$  первые производные  $\partial f / \partial a_1, \partial f / \partial a_2, \dots, \partial f / \partial a_m$  соответственно.

**Косвенные измерения при наличии корреляции между погрешностями измерений аргументов.** Для определения наличия корреляционной связи между погрешностями измерений аргументов рассчитывается оценка коэффициента парной корреляции

$$\tilde{r} = \frac{\sum_{i=1}^n (a_{hi} - \tilde{a}_h)(a_{ji} - \tilde{a}_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{hi} - \tilde{a}_h)^2 (a_{ji} - \tilde{a}_j)^2}},$$

где  $a_j, a_{hi}, a_{ji}$  - результаты  $i$  - го измерения  $h$  - го и  $j$  - го аргументов;  $n_j = n$  - число измерений каждого из аргументов.

Если измеряемая величина зависит от  $m$  аргументов, необходимо проверить отсутствие корреляционных связей между погрешностями всех парных сочетаний аргументов.

При нормальном законе распределения случайных погрешностей аргументов критерием отсутствия корреляционной связи между погрешностями результатов измерений аргументов является выполнение неравенства  $\left| \tilde{r} \sqrt{n-2} / \sqrt{1-\tilde{r}^2} \right| < t_\alpha$ , где  $t_\alpha$  - коэффициент Стьюдента, соответствующий уровню значимости  $\alpha$  и числу степеней свободы  $\nu = n - 2$ .

Если гипотеза о наличии корреляционной связи между погрешностями аргументов подтверждается, то для вычисления результата косвенных измерений используется метод приведения, который предполагает наличие ряда отдельных значений измеряемых аргументов, полученных в результате многократных измерений. Этот метод можно также применять при неизвестных распределениях погрешностей измерений аргументов. Метод основан на приведении ряда отдельных значений косвенно измеряемой величины к ряду прямых измерений. Получаемые сочетания отдельных результатов измерений аргументов подставляют в формулу (5.43) и вычисляют отдельные значения измеряемой величины  $A$ :  $A_1, A_2, \dots, A_l$ .

Результат косвенного измерения  $A$  определяется как

$$\tilde{A} = \sum_{j=1}^l \frac{A_j}{l},$$

где  $l$  - число отдельных значений измеряемой величины;  $A_j$  - отдельное значение изменяемой величины, полученное в результате подстановки  $j$ -го сочетания согласованных результатов измерений аргументов в формулу (5.43).

Среднее квадратическое отклонение случайных погрешностей результата косвенного измерения вычисляется по формуле

$$S(\tilde{A}) = \sqrt{\sum_{j=1}^l \frac{(A_j - \tilde{A})^2}{l(l-1)}}.$$

Доверительные границы случайной погрешности для результата измерения  $\Delta = TS(\tilde{A})$ , где  $T$  - коэффициент, который зависит от вида распределения отдельных значений измеряемой величины  $A$  и от выбранной доверительной вероятности.

Границы неисключенной систематической погрешности результата косвенных измерений и доверительные границы погрешности результата косвенного измерения вычисляют по приведенным выше формулам.

Результат косвенного измерения и его погрешность можно представить



либо в виде  $\tilde{A}$ ,  $s(\tilde{A})$ ,  $n$ ,  $\Theta(P)$ , если предполагается его исследование и сопоставление с другими результатами, либо как  $\tilde{A} \pm \Delta(P)$  в случае симметричности границ погрешности результата измерения.

---

### *Основные выводы*

---

Случайный характер результата измерения в общем случае обуславливают две основные причины. Первая причина относится к измерениям постоянных, не изменяющихся во времени физических величин. Результаты измерения искажаются случайным во времени измерительным шумом, поэтому полученные последовательно во времени результаты хаотично изменяются во времени относительно определенного значения. Вторая причина касается измерения величин, которые сами по себе имеют случайные значения, например значения параметра в партии изделий. В этом случае существуют случайные значения в пространстве набора значений. Поэтому при обработке результатов измерений широко используется статистический анализ.

В общем случае задача математической статистики состоит в том, чтобы на основании знаний некоторых свойств подмножества элементов, взятых с некоторого множества, сформулировать некоторые суждения о свойствах этого множества. Таким образом, применяя статистический анализ, на основании полученных результатов измерений мы должны получить информацию об истинном значении измеряемой величины и оценку степени достоверности данной информации. Статистические методы основываются на таких понятиях, как измерение, генеральная совокупность и выборка.

При проведении многократных измерений физической величины получают выборку результатов, которые должны представлять истинное значение величины с необходимой (заданной) точностью или достоверностью, что фактически соответствует требованию репрезентативности выборки.

На основе статистической обработки выборочных данных необходимо получить оценки значений измеряемой величины и ее погрешностей. Оценки бывают точечными и интервальными. Точечное оценивание - способ оценки, заключается в том, что непосредственно полученное значение оценки применяется в качестве неизвестного значения параметра распределения. Точечные оценки должны удовлетворять следующим показателям качества – несмещенности, состоятельности, эффективности.

Несмещенность оценки предполагает, что при росте количества измерений среднее значение оценки стремится к значению оцениваемого параметра. Смещение оценки может быть обусловлено как свойствами уравнения измерения, так и погрешностями измерения, юстировки, калибровки, случайным характером полученной выборки или комбинацией этих факторов. В против-

ном случае оно не зависит от объема выборки и называется систематической погрешностью. Наличие систематических погрешностей не дает возможности судить об истинном значении измеряемого параметра.

Оценка будет состоятельной если с увеличением объема выборки она совпадает с соответствующим параметром генеральной совокупности. Это значит, что прецизионность результата измерения с увеличением объема анализируемых данных должна возрастать.

Требование эффективности оценки: для выборок равного объема эффективная оценка должна иметь минимальное рассеивание.

Результат измерения может также быть представлен в виде интервала, в котором с заданной вероятностью лежит истинное значение измеряемой величины. В этом случае применяется интервальное оценивание. Интервальное оценивание - способ оценки, при котором определяется интервал, в котором с заданной вероятностью находится искомое (истинное) значение параметра распределения. Этот интервал называется доверительным или надежным, а соответствующая вероятность - доверительной вероятностью или надежностью. Понятно, что чем больше доверительный интервал, тем больше уверенность, что оцениваемая величина находится в пределах данного интервала.

При обработке результатов многократных измерений стоит задача оценивания их закона распределения, поскольку от вида закона распределения зависят рассчитываемые значения границ интервалов случайной погрешности, а также алгоритмы дальнейшей статистической обработки. Данная задача может быть решена с помощью критериев проверки согласия эмпирического закона распределения с теоретическим законом. Сравнение может проводиться с использованием двух типов критериев. Первый тип – это критерии согласия для сгруппированных данных. Данные критерии требуют предварительного построения таких оценок закона распределения как полигон частот, гистограмма, эмпирическая функция распределения, по виду которых формулируют гипотезу о законе распределения. Однако необходимо учитывать, что группирование данных приводит к потере информации. Другой тип критериев - это специализированные критерии согласия, которые не требуют группирования данных и могут применяться на малых выборках. Для данных критериев необходима априорная информация о виде закона распределения.

В измерительной практике встречаются задачи по экспериментальному определению значимости систематических погрешностей измерительных каналов, алгоритмов обработки и ИИС в целом, при этом значение случайной погрешности (прецизионности) может быть известно заранее либо определено экспериментальным путем. Данные задачи в математической статистике называются проверкой гипотез о математическом ожидании.

При сравнении выборочного среднего значения с заданным значением при известной дисперсии. проверяется гипотеза об отсутствии систематической погрешности в результатах измерений, выполненных ИИС с известной прецизионностью физической величины, воспроизводимой с помощью эта-

лона. Предполагается, что значение случайной погрешности воспроизводимой величины пренебрежимо мало.

Критерии сравнения выборочного среднего значения с заданным при неизвестной дисперсии. Данный критерий в измерительной практике применяется в тех же случаях, что и предыдущий с единственным отличием – прецизионность ИИС или исследуемого измерительного канала заранее не известна и оценивается по тем же экспериментальным данным.

Если необходимо провести сравнение точности двух измерительных каналов или систем на основе экспериментальных данных или сравнение результатов измерений, полученных при двух различных значениях влияющих величин, используется критерий сравнения средних значений двух выборок с неизвестными, но равными дисперсиями.

При исследовании случайных погрешностей измерительных каналов и ИИС используются критерии сравнения стандартных отклонений (дисперсий) - это критерий сравнения стандартного отклонения с заданной величиной, который применяется для сравнения прецизионности исследуемой ИИС, оцененной экспериментальным путем или с заданной точностью другого оборудования, и критерий сравнения стандартных отклонений двух генеральных совокупностей, применяемый для сравнения точности двух средств измерений по результатам измерений значения одной физической величины и определения стабильности метрологических характеристик ИИС во времени или при изменении влияющих факторов.

Критерии проверки гипотез о средних значениях и стандартных отклонениях серий измерений позволяют одновременно сравнить результаты измерений и их прецизионность оцененных по нескольким группам данных. Такими группами могут быть, например, группы результатов измерений, выполненных несколькими измерительными каналами ИИС. Это критерии Граббса и Кохрена.

При обработке результатов измерений, как правило, первым этапом является проверка принадлежности индивидуальных измерений к общей совокупности экспериментальных данных. Фактически производится проверка на наличие грубой погрешности (промаха) в измерениях. Грубые погрешности относятся к погрешностям, которые возникают случайно при повторных измерениях. Они явно превышают по своему значению погрешности, оправданные условиями проведения измерений и существенно влияют на точность оценивания среднего значения и стандартного отклонения. Причинами грубых погрешностей могут быть неконтролируемые изменения условий измерений, скачки напряжения питания, внезапные отказы в ИИС или ее измерительных каналах, ошибки оператора и др. Для исключения результатов измерений с грубыми погрешностями применяются критерии проверки статистических гипотез, например критерии Романовского, Диксона и др.

Систематические погрешности ИИС или ее отдельных каналов могут изменяться во времени, что не позволяет вносить поправки в отдельные ре-

зультаты измерений, а также может привести к выходу точностных характеристик за регламентируемые пределы. Выявление таких погрешностей может быть выполнено с помощью критериев проверки гипотезы о наличии тренда в ряде измерений. Выбор критерия зависит от его характера: линейный рост или падение среднего значения или стандартного отклонения результатов измерений, периодическая смена математического ожидания и т.п. При условии, если случайной погрешностью можно пренебречь, тренд можно обнаружить путем анализа чередования знаков отклонений результатов или от центра распределения вероятности, которым может быть математическое ожидание, медиана и т.п., или от предыдущих результатов. Также могут быть использованы медианный критерий серий, позволяющий выявить как периодический, так и прогрессирующий тренд, и критерий "растущих" и "спадающих" серий, чувствительный к наличию прогрессирующих систематических погрешностей.

Угловые измерения имеют место во многих областях деятельности человека. Результаты угловых измерений в интервале  $[0, 2\pi)$  принято отображать точками на окружности единичного радиуса или лучами на плоскости. В общем случае измеряемые углы могут выходить за пределы интервала  $[0, 2\pi)$ . Областью значений углов больше  $2\pi$  является множество всех действительных чисел. Значения таких углов удобно интерпретировать винтовой линией. Измерять углы принято в радианах или градусах.

Результаты анализа данных угловых измерений имеют характерные свойства отличные от свойств линейных измерений, т.е. измерений, аргументом которых является числовая ось. Это определяет необходимость построения соответствующих статистических оценок для обработки результатов угловых измерений.

Выполнение для углов операции сложения по модулю  $2\pi$  определяет свойство периодичности законов плотности распределения вероятностей случайных углов, чем они существенно отличаются от распределений вероятностей случайных величин. В практике угловых измерений наиболее часто используют распределения вероятности Мизеса, семейство намотанных распределений (Гаусса, Коши), кардиоидное, равномерное, треугольное.

Наиболее часто используемыми статистическими характеристиками результатов угловых измерений являются выборочные круговые средние статистики углов, дисперсия и медиана, характеристики асимметрии и эксцесса, а также результирующая длина вектора.

---

### ***Вопросы для самоконтроля***

---

1. Объясните термины "выборка", "генеральная совокупность", "порядковая статистика", "статистическая оценка".

2. Какие показатели качества статистических оценок Вам известны?
3. Приведите несмещенную, состоятельную и эффективную оценку математического ожидания генеральной совокупности.
4. Какие оценки называют точечными, интервальными?
5. Что такое ранг элемента выборки и какие правила его определения?
6. Какую выборку называют ранжированной?
7. Приведите и объясните известные методы определения закона распределения по данным ряда измерений.
8. Какие критерии согласия Вы знаете, и с какой целью они применяются при обработке результатов измерений?
9. Объясните суть и последовательность применения специализированных критериев согласия с определенными законами распределения.
10. Какие гипотезы о статистических характеристиках Вам известны?
11. Какие есть способы проверки равнозначности результатов многократных измерений?
12. Как определить отсутствие систематической погрешности в результатах измерений?
13. С какой целью проводится проверка статистического равенства математических ожиданий или дисперсий групп данных?
14. С какой целью проводится проверка принадлежности измерения к общей совокупности экспериментальных данных?
15. Какие методы выявления результатов с грубыми погрешностями Вам известны?
16. Что такое статистическая однородность экспериментальных данных. Какие существуют методы проверки?
17. Что такое тренд? С какой целью проводится проверка результатов измерений на наличие тренда?
18. Назовите известные единицы измерения углов.
19. Какие кривые используются для графического отображения результатов угловых измерений?
20. В чем заключаются различия измерения случайных углов и случайных величин.
21. Дайте определение и перечислите основные свойства функции распределения вероятности случайного угла.
22. Дайте определение и перечислите основные свойства плотности вероятностей случайного угла.
23. Дайте определение и перечислите основные свойства характеристической функции случайного угла.
24. Приведите примеры распределений вероятностей случайных углов.
25. Назовите известные числовые характеристики случайных углов и поясните их смысл.
26. Раскройте суть и приведите основные свойства выборочной круговой дисперсии.

27. Дайте определение и геометрическую интерпретацию выборочного кругового размаха статистики углов.

28. В чем заключается особенность формирования интервальных оценок результатов угловых измерений?

---

### *Conclusions*

---

The random nature of measurement result, in general, is caused by two main reasons. The first reason relates to measurement of constants, not time varying physical quantities. Measurement results are distorted by random in time measuring noise, so results, obtained consistently in time, vary randomly in time relative to a certain value. The second reason concerns measurement of quantities with random values, for example, the parameter value in production lot. In this case, there are random values in the space of value set. Therefore, when processing measurement results, statistical analysis is widely used.

In general, the task of mathematical statistics is to formulate some judgments about properties of given set, based on knowledge about certain properties of subset of elements taken from this set. Thus, by applying statistical analysis, based on obtained measurements results we have to receive information about true value of measured quantity and assessment of information reliability degree. Statistical methods are based on such notions as observation, general totality and sampling.

Operations conducted with the purpose of timely and correct results fixation are the measuring under observation ones.. Observation results include all types of errors inherent in measurement procedure. Thus, measurement results could be considered as observation.

Quantity results sampling is obtained as a result of repeated measurements. These results should represent true value of a quantity with necessary (given) adequacy or accuracy that actually meets the requirement of sampling representativeness.

On the basis of statistical processing of sample data it is necessary to obtain estimation values of measured quantity and its errors. Estimates could be point and interval. Point estimation is an estimation method, meaning that directly obtained estimation value is used as an unknown value of distribution parameter. Point estimates should satisfy the following quality indicators - unbiasedness, consistency, efficiency.

Estimation unbiasedness suggests that while observations number increases the average estimation value tends to the value of estimated parameter. This bias may be caused by measurement equation properties and measurement errors, alignment, calibration, random nature of obtained sampling, or a combination of these factors. Otherwise, it does not depend on sampling size and is called a syste-

matic error. Presence of systematic errors makes it impossible to judge the true value of measured parameter.

Estimation will be consistent if increase of sampling size coincides with the corresponding parameter of general totality. This means that measurement result precision should increase with an increase in volume of analyzed data.

Requirement for estimation effectiveness is as follows - for samplings of equal volume effective estimate should have a minimal dissipation.

The measurement result could also be represented as an interval where the true value of measured quantity is given with a given probability. In this case interval estimation is applied. Interval estimation is an estimation method, where the defined interval is the one in which with a given probability a required (true) value of distribution parameter exists.

This interval is called confidence or reliable and the corresponding probability is called confidence probability or reliability. It is clear that the bigger is confidence interval, the greater is confidence that estimated quantity within this interval.

When processing multiple measurement results there is a task of estimating their distribution law, because calculated values of interval boundaries of random error, as well as further statistical processing algorithms depend on distribution law type. This problem may be solved with the help of testing criteria of correspondence between empirical distribution law and theoretical law.

In measurement practice there are tasks of experimental determination of systematic errors importance of measurement channels, processing algorithms and IMS as a whole, while the value of random error (precision) can be known in advance or determined experimentally. These tasks in mathematical statistics are called testing hypotheses about mathematical expectation.

Criteria for comparing sampling average value with given value within known variance. In this case a hypothesis of systematic error absence in the results of measurements performed by IMS with a given precision; and physical quantity reproduced using a standard, is tested. It is assumed that random error value of reproducible quantities is negligibly small.

Criteria for comparing the sampling average value with given value within unknown variance. This criterion is used in measurement practice in the same cases as previous one with the only difference - the precision of IMS or studied measuring channel is not known beforehand and is estimated according to the same experimental data.

If it is necessary to compare the accuracy of two measurement channels or systems based on experimental data or comparison of measurement results obtained for two different values of influencing quantities, a criteria of comparing average values of two samplings with unknown but equal variances is used.

When studying random errors of measurement channels and IMS, a criteria of standard deviations (variances) comparison is used – it is a criteria of comparison of standard deviation and given quantity, that is used to compare precision of studied IMS, estimated experimentally with a given IMS or with a given precision of

other equipment; and a criteria of comparison of standard deviations of two general totalities, that is used to compare the accuracy of two measurement means using the results of value measurement of the single physical quantity and stability determination of IMS metrology characteristics in time or within changing of influencing factors.

Testing criteria for hypothesis about average values and standard deviations of the sets of observations allows simultaneously compare measurement results and their precision, estimated on several data sets. Such groups could be, for example, groups of the results of measurements, performed by several IMS measurement channels. These are Grubbs and Cochran criteria.

When processing observation results, as a rule, the first step is to check whether individual observations belong to general set of experimental data. As a matter of fact, it is check for gross errors in observations. Gross errors belong to errors that occur randomly in repeated observations. They clearly exceed value of errors, justified by measurement conditions and significantly affect the estimating accuracy of average value and standard deviation. Reasons for gross errors could be uncontrolled changes in measurement conditions, power surges, sudden failures in IMS or measuring channels, operator errors, etc. To exclude the results of observations with gross errors criteria of statistical hypothesis testing' are used, such as criteria by Romanovsky, Dixon, etc.

Systematic errors in IMS or individual channels may vary over time that does not allow amending the individual measurement results, and may also cause accuracy characteristics to overstep regulated limits. Identification of such errors can be done by using the criteria of testing the hypothesis of trend presence in a number of observations. Criteria selection depends on its nature: the linear growth or decline of the average value or standard deviation of measurement results, the periodic change of mathematical expectation, etc.

Under condition that random error can be neglected, the trend could be detected by analyzing the alternation of deviations signs or from the center of probability distribution, which may be mathematical expectation, median etc., or derived from previous results. Median criterion of series could also be used, that allows to identify periodic and progressive trend; and criterion of "growing" and "declining" series that is sensitive to the presence of progressive systematic errors.

Angular measurements are used in many areas of human activity. It is accepted that angular measurements results in interval  $[0, 2\pi)$  displayed by dots on a unit circle or as a plane rays. In general, measured angles could go beyond interval  $[0, 2\pi)$ .

Range of angle values that are bigger than  $2\pi$  is a set of all real numbers. Values of such angles are convenient to interpret as a spiral line. Angles are measured in radians and degrees.

The results of angular measurement data analysis have typical properties different from those of linear measurements, i.e. measurements, the argument of which is numerical axis. It determines the necessity to build corresponding statis-



tical estimates for processing the results of angular measurements.

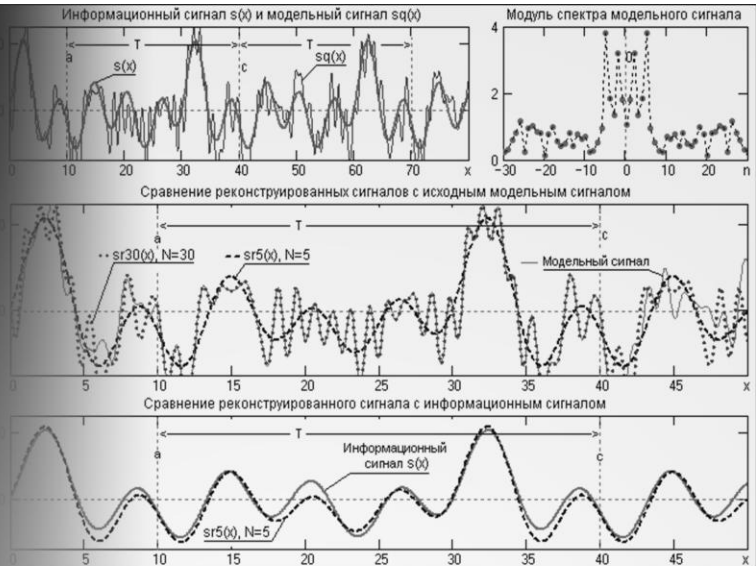
Performing the addition for angles using module  $2\pi$  determines the periodicity property of laws of random angles probability distribution density, that is significantly differ them from random variables probability distributions.

Mises probability distribution, Gauss, Cauchy distributions, cardioid, uniform, triangular distributions are mostly used in angle measurement practice.

Most commonly used statistical characteristics of angular observations results are sample circular angles statistics average, variance and median, asymmetry and excess characteristics, as well as resultant vector length.

***Ключевые слова***

систематическая погрешность	systematic error
прецизионность	precision
результат измерения	result of a measurement
статистическое оценивание	statistical estimation
статистические критерии	statistical criterions
обработка результатов измерений	processing of measurement data
круговая гистограмма	circular histogram
круговое среднее	mean angle
круговая дисперсия	angular dispersion
распределение Мизеса	the von Mises distribution
намотанное распределение	wrapped distribution
результатирующая длина вектора	resultant length of the vector



## СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

# 6

- 6.1. Характерные особенности статистического оценивания характеристик стационарных процессов
- 6.2. Статистическое оценивание стационарности случайной последовательности
- 6.3. Статистическое оценивание временных характеристик стационарной последовательности
- 6.4. Статистическое оценивание спектральных характеристик стационарной последовательности

### 6.1. Характерные особенности статистического оценивания характеристик стационарных процессов

Математическая модель случайного процесса широко используется при исследованиях во всех отраслях науки и техники, это обусловлено практической эффективностью ее применения. Можно прогнозировать и дальнейшее ее использование для решения многих задач, включая задачи определения статистических характеристик случайных процессов по данным измерений.

Результаты статистического оценивания характеристик случайных функций опубликованы в научных монографиях, специализированных научно-технических журналах, а также в учебной литературе. На сегодня можно констатировать, что наиболее полно задачи статистического оценивания рассмотрены с использованием случайной величины. Результаты исследования таких моделей, как случайных вектор, случайный процесс, случайное поле получены не в полном объеме для решения современных информационных измерительных технологий с использованием ИИС.

Применение терминологии типа *статистические измерения, методы измерения характеристик случайных процессов, статистическое оценивание характеристик* на практике имеет общий характер и для рассмотрения задач измерений требуют дальнейшей конкретизации.

**Стационарные и эргодические процессы.** В данном параграфе рассмотрены характерные особенности использования стационарного случайного процесса для определения его статистических характеристик по данным измерениям в рамках корреляционной теории.

Известно, что в рамках корреляционной теории стационарный случайный процесс  $\xi(\omega, t)$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$  (синонимы названия - *стационарный в широком смысле, гильбертовский стационарный, стационарный второго порядка, слабостационарный*) полностью задан, если определены:

а) двумерная функция распределения

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) \equiv F(x_1, x_2; t_2 - t_1) = F(x_1, x_2, \tau), \quad x_1, x_2 \in R, \quad t_1, t_2, \tau \in (-\infty, \infty);$$

б) или двумерная плотность вероятностей  $p(x_1, x_2, \tau)$ ;

в) или двумерная характеристическая функция  $f(u_1, u_2, \tau)$ ,  $u_1, u_2 \in R$ .

Числовые характеристики стационарного процесса  $\xi(\omega, t)$ :

математическое ожидание  $a_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$ , где  $p(x)$  - одномерная (мар-

гинальная) плотность распределения процесса  $\xi(\omega, t)$ ;

дисперсия  $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_1)^2 p(x)dx$ ;

автоковариационная функция  $B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2$ ;

автокорреляционная функция

$$R(\tau) = \int\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - a_1)(x_2 - a_1)p(x_1, x_2, \tau)dx_1dx_2; \quad (6.1)$$

спектральная плотность мощности, определяемая согласно теореме Винера - Хинчина

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f\tau} R(\tau)d\tau. \quad (6.2)$$

Для стационарно связанных стационарных процессов  $\xi_1(\omega, t)$  и  $\xi_2(\omega, t)$  определяется взаимокорреляционная функция

$$R_{12}(\tau) = \int\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - a_1)(x_2 - a_1)p_{12}(x_1, x_2, \tau)dx_1dx_2, \quad (6.3)$$

соответственно взаимная спектральная плотность мощности

$$S_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f\tau} R_{12}(\tau)d\tau \quad (6.4)$$

и функция когерентности

$$v_{12}^2(f) = |S_{12}(f)|^2 / S_1(f)S_2(f), \quad v_{12}^2(f) \in [0,1] \quad (6.5)$$

как нормированная совместная функция четвертого порядка статистической взаимосвязи двух стационарно связанных стационарных процессов  $\xi_1(\omega, t)$  и  $\xi_2(\omega, t)$  в частотной области.

В дальнейшем при описании случайных процессов будут использованы следующие обозначения:

$\{\xi(\omega, t), \omega \in \Omega_1, t \in (-\infty, \infty)\}$  - стационарный процесс с непрерывной областью определения  $\Omega_1 \times R$  и непрерывной областью значений  $X \subseteq R$ ;

$\{\xi(\omega, t_j), \omega \in \Omega_2, t_j \in (-\infty, \infty), j \in N\}$  - стационарный процесс с дискретным временем как стационарная последовательность непрерывных случайных величин;

$\{\xi(\omega, t_j), \omega \in \Omega_3, t_j \in R, j \in N\}$  - стационарный процесс с дискретными временем и значениями как стационарная последовательность дискретных случайных величин.

В классе стационарных случайных процессов выделяется подмножество эргодических процессов, которые являются конструктивной моделью для статистической обработки данных измерений. При этом достаточные и необходимые условия эргодичности процесса определяются отдельно для математического ожидания, корреляционной функции и одномерной функции распределения. Приведем необходимые и достаточные условия эргодичности стационарного процесса  $\xi(\omega, t)$ :

а) относительно математического ожидания  $a_1$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (2/c) \int_0^c R(\tau) (1 - \tau/c) d\tau = 0, \quad (6.6)$$

где  $R(\tau)$  - автокорреляционная функция процесса  $\xi(\omega, t)$ ;

б) относительно автокорреляционной функции  $R(\tau)$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (2/c) \int_0^c R(s, \tau) (1 - s/c) ds = 0, \forall \tau, \quad (6.7)$$

где автокорреляционная функция  $R(s, \tau)$  является моментом четвертого порядка относительно процесса  $\xi(\omega, t)$ , так как сформированный случайный процесс второго порядка

$$\zeta(\omega, \tau, t) = [\xi(\omega, t) - a_1][\xi(\omega, t + \tau) - a_1] \quad (6.8)$$

имеет такие характеристики: математическое ожидание процесса  $\zeta(\omega, \tau, t)$  определяется как центральный момент второго порядка процесса  $\xi(\omega, t)$

$$\mathbf{M}\zeta(\omega, \tau, t) = R(\tau) \quad (6.9)$$

и соответственно его автокорреляционная функция как центральный момент четвертого порядка процесса  $\xi(\omega, t)$

$$R(s, \tau) = \mathbf{M}[(\zeta(\omega, \tau, t) - R(\tau))(\zeta(\omega, \tau, t + s) - R(\tau))]; \quad (6.10)$$

в) относительно одномерной функции распределения  $F(x, t) \equiv F(x)$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (2/c) \int_0^c (F(x_1, x_2, \tau) - F(x_1)F(x_2))(1 - \tau/c) d\tau = 0, \quad (6.11)$$

где  $F(x_1, x_2, \tau)$  - двумерная функция распределения процесса  $\xi(\omega, t)$ .

Отметим, что все указанные условия эргодичности процесса  $\xi(\omega, t)$  относительно своих характеристик выражаются через другие характеристики того же процесса, но на порядок больше. Так, для эргодичности математического ожидания процесса  $\xi(\omega, t)$  требуются знания его корреляционной функции  $R(\tau)$ , для одномерной функции распределения  $F(x)$  - знания двумерной функции распределения  $F(x_1, x_2, \tau)$ . Поэтому для большинства задач измерений на практике первоначально необходимо подтвердить гипотезу о стационарности исследуемого процесса с последующим подтверждением гипотезы эргодичности процесса.

**Статистическое оценивание.** Рассмотрим характерные особенности определения статистических характеристик эргодического процесса по данным измерения – временного ряда как реализации исследуемого процесса. Другими словами, для априорно заданного эргодического процесса с неизвестными характеристиками необходимо определить их статистические оценки и тем самым подтвердить или опровергнуть статистическую гипотезу об адекватности модели. Такая постановка задачи является частным случаем более общей задачи построения (разработки, создания, обоснования) матема-

тической модели объекта исследования по экспериментальным данным (данным наблюдений) различного рода. Решение такой общей задачи неоднозначно и определяется объемом, содержанием экспериментальных данных и априорно известными характеристиками модели. Целесообразно рассмотреть два подхода к решению такой задачи:

- 1) в узком смысле, когда в качестве экспериментальных данных используются данные измерений с соответствующей погрешностью их получения (определения);
- 2) в широком смысле, когда в качестве экспериментальных данных используются все другие данные наблюдений.

По сути, такая классификация первичных экспериментальных данных для построения модели определяет и уровень достоверности результатов решения задачи. Получение данных измерений среди экспериментальных данных являются наиболее затратными как по времени, так и экономически и требует использования соответствующих средств измерений. В ряде случаев проводится согласование данных измерений, относящихся к одному и тому же объекту измерений, но сами измерительные эксперименты проведены в разных местах, времени и средствами измерений. В таких случаях проводится предварительная их статистическая обработка с целью создания единого пакета данных измерений – как правило, временного ряда. Основными операциями при такой обработке являются: удаление тренда, отсеивание грубых промахов, центрирование и, при необходимости, нормирования временного ряда. В то же время нельзя пренебрегать экспериментальными данными любого уровня, поскольку они вносят свой вклад при решении поставленной задачи. На рис. 6.1 изображена последовательность операций получения и обработки экспериментальных данных в узком и широком смыслах для обоснования модели объекта измерения.

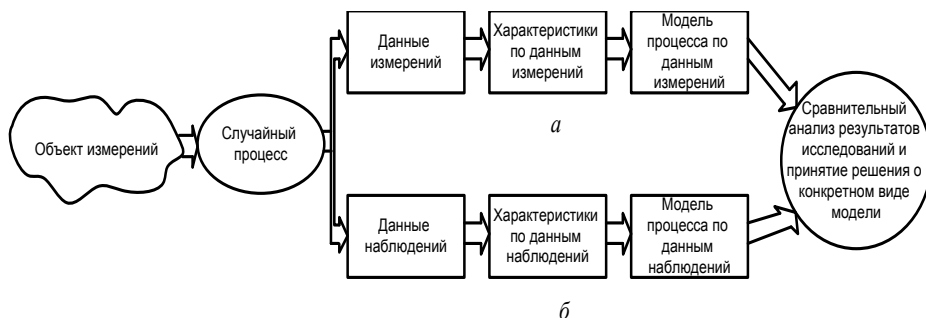


Рис. 6.1. Последовательность операций получения и обработки экспериментальных данных для обоснования конкретного вида модели объекта измерения: *a* - в узком смысле; *б* - в широком смысле

Отметим характерные особенности формирования (получения) и статистической обработки экспериментальных данных в узком и широком смыслах. Вначале рассмотрим случай экспериментальных данных в узком смысле, когда

по условиям эксперимента и применения соответствующих средств измерений (ИИС) имеет возможность получить (зарегистрировать) данные измерений. При проведении операций с данными измерений используются две меры – мера исследуемой физической величины и вероятностная мера при получении статистических оценок характеристик и обосновании модели (рис. 6.2).

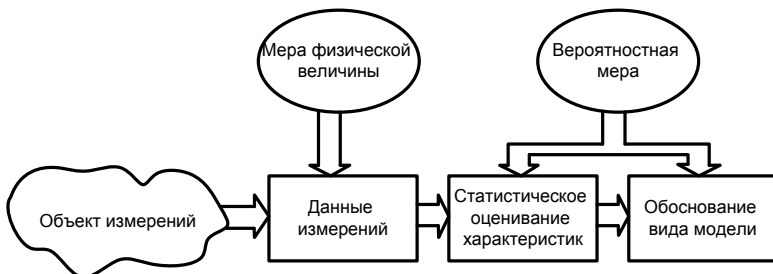


Рис. 6.2. Структура взаимосвязи названных объектов при построении модели по данным измерений

Во втором случае используются экспериментальные данные в широком смысле. Следует отметить, что такие данные должны быть числовыми, т.е. зарегистрированными в числовом виде для последующей статистической обработки. Примеры таких данных наблюдений будут приведены ниже. При проведении операций с данными наблюдений используется только вероятностная мера (рис. 6.3).

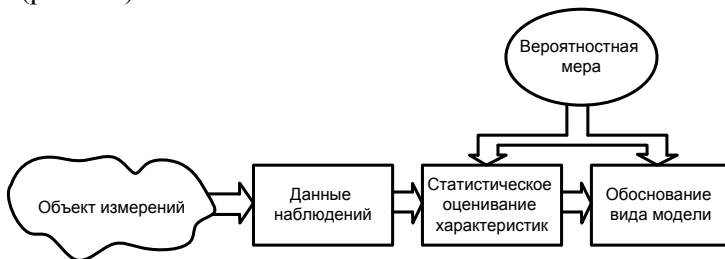


Рис. 6.3. Структура взаимосвязи названных объектов при построении модели по данным наблюдений

В качестве конкретизации экспериментальных данных в широком смысле – данных наблюдений – рассмотрим следующий **пример**. Числовые значения этих данных получены в результате проведения широкого круга исследований, вычислений, определения множества влияющих физических, социальных и других явлений, событий и фактов не только земного, но и космического происхождения. По своей сути полученные экспериментальные данные отображают как многолетний труд одного (ряд Бевериджа), так и труд многих исследователей (график изменения степени обледенения Земли). Такие экспериментальные данные характеризуют многолетнюю динамику (эволюцию) конкретного объекта измерений. Погрешности приведенных результатов экспериментальных исследований не приведены. На рис. 6.4 приведены графики экспериментальных данных как реализаций случайных процессов (*a* и *b*) и функции (*в*) на условно кратком интервале времени и длины. Графики экспериментальных данных рис. 6.5 отображают долговременный характер наблюдений слож-

ных по своей природе объектов измерений.

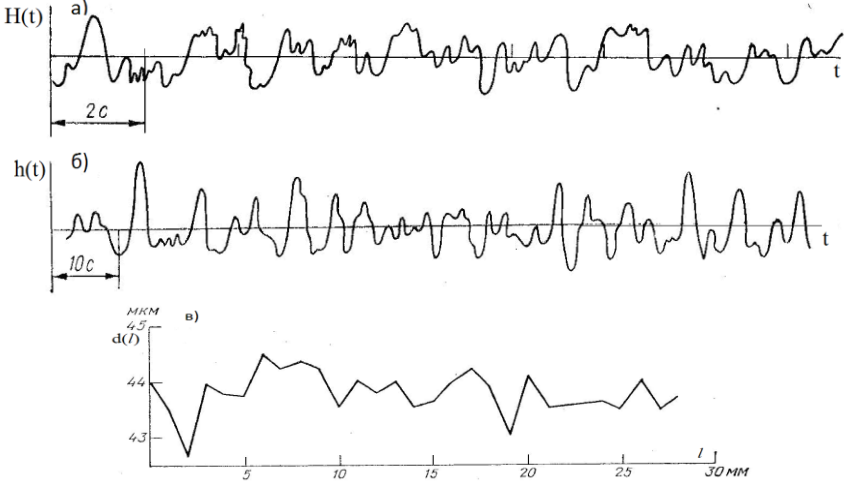


Рис. 6.4. Примеры кратковременных реализаций случайных процессов и функций: *a* – микропульсации уровня Земли (микросейсмы)  $H(t)$ , зарегистрированные сейсмографом в районе Семипалатинска (Восточный Казахстан) – место нахождения полигона подземных ядерных испытаний; *б* – изменение высоты поверхности волнующегося моря  $h(t)$  в фиксированной точке; *в* – изменение диаметра нейлоновой нити  $d(l)$  вдоль ее длины

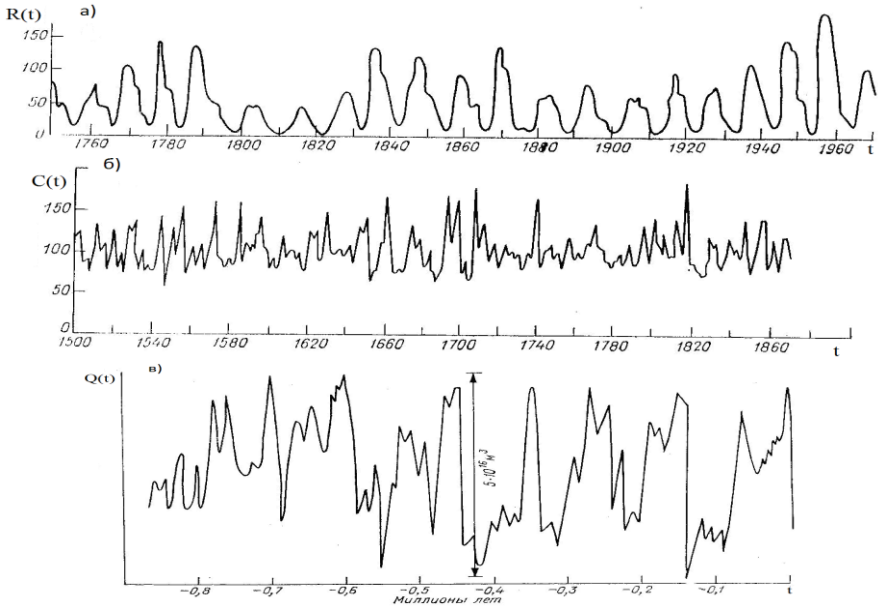


Рис. 6.5. Примеры долговременных реализаций случайных процессов: *a* – средние годовые значения числа Вольфа  $R(t)$  (число солнечных пятен); *б* – колебания цен на пшеницу  $C(t)$  на рынках Западной и Центральной Европы за период с 1500 до 1869 г. (ряд Бевериджа); *в* – изменение степени обледенения Земли (т.е. сум-



марного объема льда на планете)  $Q(t)$  за последний миллион лет

Рассмотрим известные методы статистического оценивания характеристик случайных процессов по экспериментальным данным на конкретном примере.

**Пример.** В результате проведения экспериментальных исследований зарегистрирована серия  $m$  реализаций стационарного случайного процесса  $\xi(\omega, t)$  на конечном интервале времени  $T$ . Серия реализаций  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$  задана на одинаковых конечных временных интервалах  $T$  и получена при одинаковых контролируемых условиях проведения экспериментальных исследований.

Графики  $m$  реализаций процесса  $\xi(\omega, t)$  приведены на рис. 6.6, на котором также приведены стрелками два возможных метода усреднения при получении статистических оценок характеристик процесса:

- 1) усреднения по множеству (ансамблю) реализаций;
- 2) усреднения по времени одной реализации.

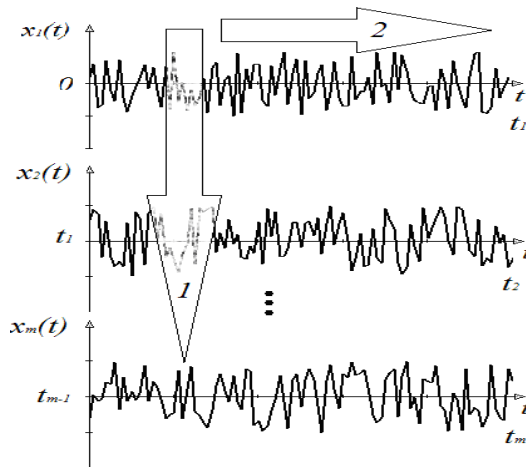


Рис. 6.6. Графики серии  $m$  реализаций  $\{x_j(t), j = \overline{1, m}\}$  стационарного случайного процесса  $\xi(\omega, t)$  и возможные два метода усреднения:

- 1 – усреднение по ансамблю реализаций;
- 2 – усреднение по времени одной реализации

Отметим, что метод усреднения по ансамблю реализаций является общим методом статистического оценивания характеристик случайных сигналов по экспериментальным данным. Такой метод используется как для стационарных, так и для нестационарных случайных процессов. Для нестационарных процессов метод используется только в случае формирования ансамбля синхронизируемых во времени (с одинаковой начальной фазой развития или динамики) реализаций.

Результаты применения метода усреднения по ансамблю реализаций были рассмотрены в главе 5 при статистическом оценивании характеристик случайной величины.

Метод усреднения по одной (по времени) реализации имеет место для эргодических случайных процессов. Остановимся на этом более подробно.

На практике весьма важно знать, когда результаты усреднения – средние – сходятся к определенной величине и равны ли средние по ансамблю реализациям средним по времени. От этого будет зависеть весь план эксперимента, его продолжительность и экономические затраты. Эти вопросы рассматривает эргодическая теория, а исследуемые при этом законы сходимости именуется законами больших чисел или эргодическими теоремами. Центральное место при решении вероятностных задач занимает эргодическая теорема Биркхофа – Хинчина. Теорема была доказана как общая теорема механики в 1931 г. американским математиком Г. Биркхофом. Спустя три года советский математик А. Я. Хинчин показал, что такая теорема имеет теоретико-вероятностное обобщение и для стационарной последовательности случайных величин формируется следующим образом.

Для стационарной последовательности случайных величин  $\xi_1(\omega)$ ,  $\xi_2(\omega)$ ,  $\xi_3(\omega)$ , ..., у которых  $\mathbf{M}\xi_j(\omega)$  конечные с вероятностью единица, последовательность средних арифметических  $\sum_{j=1}^n \xi_j(\omega) / n$  сходится к пределу.

Отметим, что если в условиях этой теоремы предположить существование дисперсии  $\mathbf{M}\left\{\left[\xi_j(\omega) - \mathbf{M}\xi_j(\omega)\right]^2\right\} = \mathbf{D}\xi_j(\omega) < \infty$ , то такая теорема доказывается на основе неравенства Чебышева.

Данная теорема имеет не только теоретическое, но и большое прикладное значение. Это связано прежде всего с тем, что при выполнении условия эргодичности для исследуемого стационарного случайного процесса можно избавиться от многократных экспериментов по получению набора его реализаций и ограничиться одной реализацией на длительном интервале времени.

Понятие эргодичности относится к конкретной характеристике процесса и условия их эргодичности были приведены выше. Это означает, что один и тот же процесс может быть эргодическим относительно математического ожидания и не быть эргодическим относительно корреляционной функции. Поэтому необходимо всегда указывать, в каком смысле понимается эргодичность, а вместо выражения *эргодический процесс* более правильно употреблять выражение *процесс эргодический относительно конкретной характеристики*, например корреляционной функции.

**Математические модели.** Отметим еще очень важный момент, связанный с адаптацией математических моделей исследуемых стационарных процессов до реальных данных измерений их значений. Использование измерительных сигналов в цифровом виде, цифровой обработки при статистическом оценивании характеристик процессов в настоящее время реализовано и будет использоваться в будущем. С точки зрения измерений использование цифровых методов вносят дополнительные факторы погрешностей, например шу-

мы округления, шумы квантования, непостоянство частоты дискретизации и изменения уровней квантования интенсивности сигналов во времени и др. С другой стороны, применение цифровых методов в средствах измерения создает принципиально новые возможности автоматизации, адаптации, интеллектуализации процессов измерения. И альтернативы использования в будущем цифровых методов в средствах измерения (ИИС) не существует.

Рассмотрим следующий конкретный пример адаптации математических моделей исследуемых стационарных процессов при формировании данных измерений в цифровом виде – цифровых временных рядов.

**Пример.** На рис. 6.7 приведены графики реализаций стационарного процесса на конечном временном интервале  $T$  как измерительных сигналов в трех видах: непрерывного сигнала ( $a$ ); сигнала с дискретным временем ( $b$ ); цифрового сигнала с дискретным временем и квантованными по уровню значениями ( $в$ ).

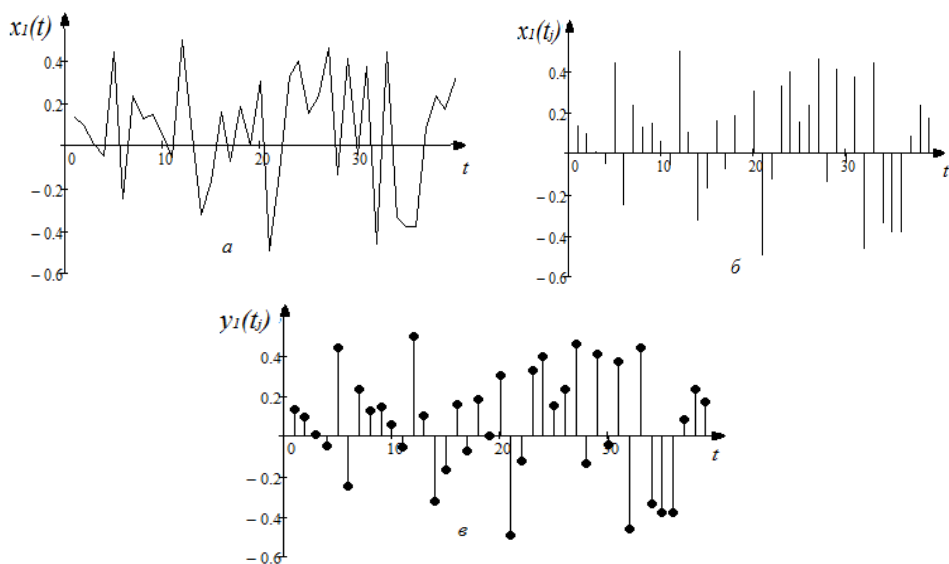


Рис. 6.7. Графики исследуемых измерительных сигналов:

$a$  - непрерывного  $x(t)$ ;  $б$  - с дискретным временем  $x(t_j)$ ;  $в$  - цифрового  $y_1(t_j)$

В общем случае случайный процесс  $\xi(\omega, t)$  является функцией двух аргументов  $\omega$  и  $t$ , первым из которых  $\omega \in \Omega$  является неупорядоченным аргументом на пространстве элементарных событий  $\Omega$ . Такая неупорядоченность и характеризует случайность, стохастичность и, по сути, непрогнозируемость динамики процесса  $\xi(\omega, t)$  во времени. Аргумент  $t$  является упорядоченным во времени и при каждом фиксированном  $t = t_1$  мы имеем сечение случайного процесса  $\xi(\omega, t)_{t=t_1}$  - случайную величину  $\xi_1(\omega)$ .

При решении задач статистического оценивания характеристик случайных процессов наибольший интерес представляет исследование динамики и

характерных особенностей пространства  $\Omega$  во времени, поскольку при этом используется только вероятность (вероятностная мера) качества их оценивания. Если пространство  $\Omega$  не зависит от времени, т.е. остается неизменным во времени, то имеем стационарный, а во всех остальных – нестационарный случаи. Известно также, что пространство  $\Omega$  изменяется при различного рода преобразованиях измерительных сигналов в электронных трактах ИИС. Этот факт необходимо учитывать при статистическом оценивании характеристик случайных процессов, а именно различие пространств элементарных событий  $\Omega$  при формировании:

а) аналоговых измерительных сигналов как множество реализаций соответствующих случайных процессов для случая  $\Omega_1 \Rightarrow \{x_i(t), i \in N, t \in T\}$ , где  $\Omega_1$  является бесконечным непрерывным множеством и отображает случайность механизма формирования реализаций;

б) дискретизации по времени аналоговых сигналов  $\{x_i(t)\}$

$$\Omega_2 \Rightarrow \{x_i(t_j), i, j \in N, t_j \in T\},$$

где множество  $\Omega_2$  в общем случае не является эквивалентным множеству  $\Omega_1$ . Это объясняется тем фактом, что дискретизация по времени производится не идеальными преобразователями, а реальными техническими устройствами, которые вносят свою специфическую случайность в исследуемый сигнал  $x_i(t_j)$  как отклик на выходе технического устройства при входном воздействии  $x_i(t)$ . При этом множество  $\Omega_2$  также является бесконечным непрерывным множеством;

в) квантовании по уровню сигналов  $\{x_i(t_j)\}$

$$\Omega_3 \Rightarrow \{y_i(t_j), i = \overline{1, d}, j \in N, t_j \in T\},$$

где пространство  $\Omega_3$ , в отличие от  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , является конечным дискретным числовым множеством.

Математической моделью непрерывной реализации  $x(t)$  (см. рис. 6.7, а), которая относится к аналоговым (непрерывным) измерительным сигналам, является стационарный процесс  $\xi(\omega, t), \omega \in \Omega_1, t \in (-\infty, \infty)$ . Множества значений области определения и области значений процесса  $\xi(\omega, t)$  бесконечны и имеют мощности континуума. Процесс  $\xi(\omega, t)$  порождает бесконечное множество реализаций  $\{x_j(t), j \in N\}$ , при этом каждая конкретная реализация  $x_1(t)$  соответствует конкретному элементарному событию  $\omega = \omega_1$  из бесконечного пространства элементарных событий  $\Omega_1$ .

Рассмотрим реализацию процесса  $x_1(t_j)$  (см. рис. 6.7, б), которая получается как результат дискретизации по времени аналогового сигнала  $x_1(t)$ . Математическая модель такой реализации – стационарная последователь-

ность непрерывных случайных величин  $\xi(\omega, t_1), \xi(\omega, t_2), \dots, \xi(\omega, t_j), \dots, \omega \in \Omega_2, j \in N$ .

Множества значений областей определения и областей значения стационарной последовательности непрерывных случайных величин  $\{\xi(\omega, t_j)\}$  также бесконечно, однако имеют различную мощность, а именно область определения – счетное (дискретное) множество, а область значений – множество (непрерывное) мощности континуума.

При квантовании по уровню значений процесса  $\xi(\omega, t_j)$  имеем случайный процесс  $\{\zeta(\omega, t_j), \omega \in \Omega_3, j \in N\}$  с дискретным временем и дискретными значениями, который имеет конечное множество уровней квантования, бесконечное счетное множество элементов  $t_j$  и конечное дискретное множество значений  $\zeta(\omega, t_j) \in Q$ , где  $Q$  – конечное дискретное множество чисел. Таким образом процесс  $\{\zeta(\omega, t_j), \omega \in \Omega_3, j \in N\}$  является стационарной последовательностью дискретных случайных величин  $\xi(\omega, t_1), \dots, \xi(\omega, t_j), \omega \in \Omega_2, j \in N$ .

Процесс  $\zeta(\omega, t_j)$  можно сформировать двумя способами:

1) при заданном непрерывном процессе  $\xi(\omega, t)$  путем дискретизации области определения аргумента  $t$  и одновременно квантования по уровню его области значений;

2) при заданном процессе  $\xi(\omega, t_j)$  с дискретным временем путем квантования по уровню его области значений.

График соответствующей реализации  $y_1(t_j)$  на конечном интервале времени  $T$  процесса  $\zeta(\omega, t_j)$  приведен на рис. 6.7, в. Как правило, реализации процесса  $\zeta(\omega, t_j)$  как цифровые временные ряды заданы на равномерной временной решетке с постоянным шагом

$$\Delta t = h: 0, h, 2h, \dots, (n-1)h \quad (6.12)$$

где  $[0, T = (n-1)h]$  – временной интервал, определяет область измерения цифрового временного ряда  $y_i(t_j)$ .

Таким образом, исследуемый цифровой временной ряд  $y_i(t_j)$  можно обозначать так:

$$y_i(j\Delta t) = y_i(jh) = y_i(t_j), i = \overline{1, m}, j = \overline{0, n-1}, \quad (6.13)$$

как  $i$ -ю реализацию процесса  $\zeta(\omega, t_j)$  на конечном интервале времени  $T$ .

На основании анализа приведенных выше моделей стационарных случайных процессов рассмотрим математическую модель, реализацией которой являются данные измерений в цифровом виде как цифровой временной ряд на конечном интервале времени  $T$ .

*Случайная выборка объема  $n$  как конечномерная последовательность*

случайных величин

$$\zeta(\omega, t_1), \zeta(\omega, t_2), \dots, \zeta(\omega, t_n) = \{\zeta(\omega, t_j), \omega \in \Omega_3, j = \overline{1, n}\} \quad (6.14)$$

из генеральной совокупности последовательности случайных величин

$$\{\zeta(\omega, t_j), \omega \in \Omega_3, j \in N\} \quad (6.15)$$

является математической моделью цифрового временного ряда, заданного на равномерной временной решетке (6.12) в виде (6.13), т.е.

$$y(jh) = y(t_j), j = \overline{0, n-1}. \quad (6.16)$$

Если проводится  $m$  измерительных экспериментов, то последовательность  $m$  реализаций формирует матрицу данных измерений в цифровом виде – матрицу цифровых временных рядов

$$\begin{pmatrix} y_1(0) & \dots & y_1(t_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_m(0) & \dots & y_m(t_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Исследуемые характеристики случайных процессов определяются соответствующими статистиками

$$\mathbf{T}_k(\zeta(\omega, t_1), \dots, \zeta(\omega, t_n)), k = 1, 2, \dots, g \quad (6.17)$$

как однозначно определенными функциями каждой  $k$ -й характеристики.

Статистическая оценка  $k$ -й характеристики случайной последовательности (6.15) определяется согласно  $\mathbf{T}_k(y(0), \dots, y(t_{n-1}))$ , где  $y(0), \dots, y(t_{n-1})$  – временной ряд данных измерений в виде (6.13) как реализация (6.14).

Приведенные характерные особенности статистического оценивания характеристик случайных процессов по данным измерений в рамках корреляционной теории не отображают всего диапазона многоплановости и разнообразия задач измерений. Так, например, не рассмотрены очень важные задачи измерений, когда результат измерений получен в цифровом виде и возникают вопросы его интерполяции, аппроксимации для первичных исследуемых процессов, явлений, сигналов в аналоговом (непрерывном) виде. Эта проблематика заслуживает отдельного рассмотрения. С практической точки зрения в данном параграфе рассмотрен ряд положений статистического оценивания характеристик стационарных (эргодических) случайных процессов, что нашло широкое отображение в теории и практике измерений.

## 6.2. Статистическое оценивание стационарности случайной последовательности

**Постановка задачи.** Одной из первых задач анализа данных измерений при определении характеристик случайных процессов, полученных при проведении измерительных экспериментов, является проверка данных на стационарность. Такая задача известна, и ее общая постановка заключается в проверке статистических гипотез о стационарности исследуемого случайного процесса на основании результатов статистической обработки реализаций

процесса, полученных экспериментально.

Результат статистического оценивания - является ли исследуемый случайный процесс стационарным или гипотеза о его стационарности отвергнута - имеет принципиальное значение для дальнейшей статистической обработки данных измерений. На сегодня в значительной мере разработана методология (методы, способы, информационное обеспечение) статистической обработки реализаций стационарных случайных процессов. При статистической обработке реализаций нестационарных случайных процессов возникают трудности по сравнению со стационарным случаем, для преодоления которых необходимо проведение дополнительного значительного объема исследований.

Рассмотрим задачу статистического оценивания стационарности последовательности дискретных случайных величин (6.15) по данным измерений реализаций случайной выборки последовательности (6.14) в виде двух цифровых временных рядов

$$\{y_1(ih) = y_1(t_i), i = \overline{0, n-1}\}, \{y_2(jh) = y_2(t_j), j = \overline{0, n-1}\}, \quad (6.18)$$

заданных на пересекающихся интервалах времени  $T_1$  и  $T_2$ . Как отмечалось выше, одним из статистических методов решения такого рода задач является метод проверки статистических гипотез. В большинстве случаев  $T_1$  и  $T_2$  выбираются равными.

Сформулируем следующие две статистические гипотезы:  $H_0$  – основная гипотеза – последовательность (6.15) является стационарной;  $H_1$  – альтернативная гипотеза – последовательность (6.15) не является стационарной.

Таким образом, статистическая гипотеза  $H_0$  о стационарности последовательности (6.15) против альтернативной гипотезы  $H_1$  о нестационарности этой последовательности проверяется на основе реализаций случайной выборки (6.14) в виде двух цифровых временных рядов (6.18).

**Решение задачи.** Рассмотрим два варианта решения сформулированной задачи о стационарности исследуемой последовательности:

1) случайная последовательность (6.15) распределена по закону Гаусса (нормальный закон);

2) случайная последовательность (6.15) распределена по другому закону.

1. Для проверки стационарности последовательности (6.15) при условии нормального закона распределения воспользуемся методами проверки статистических гипотез с использованием  $F$ - и  $t$ -критериев, которые именуются соответственно статистическими критериями  $t$ -Стьюдента и  $F$ -Фишера. Их применение дает возможность проверить исследуемую последовательность по математическому ожиданию и дисперсии, что для нормального закона распределения последовательности (6.15) эквивалентно проверке ее на стационарность в строгом смысле.

Гипотеза о стационарности нормальной последовательности (6.15) на основе двух независимых временных рядов (6.18) одинакового объема  $n$  проверяется с использованием  $F$ -критерия Фишера. По этому критерию ги-

потеза о равенстве дисперсий, оцениваемых по двум реализациям  $\{y_1(ih) = y_1(t_i), i = \overline{0, n-1}\}$  и  $\{y_2(jh) = y_2(t_j), j = \overline{0, n-1}\}$  последовательности (6.15) на непересекающихся интервалах времени  $T_1$  и  $T_2$  проверяется с помощью статистики

$$W_{n-1, n-1} = \hat{\sigma}_1^2 / \hat{\sigma}_2^2, \quad (6.19)$$

где  $\hat{\sigma}_1^2$ ,  $\hat{\sigma}_2^2$  - несмещенные оценки дисперсий на указанных интервалах  $T_1$  и  $T_2$ , определяются по формулам

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_1(t_i) - {}_1\hat{a}_1)^2, \quad \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_2(t_j) - {}_2\hat{a}_1)^2 \quad (6.20)$$

и соответствующие несмещенные и эффективные оценки математического ожидания определяются согласно

$${}_1\hat{a}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_1(t_i), \quad {}_2\hat{a}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_2(t_j). \quad (6.21)$$

Статистика  $W_{n-1, n-1}$  при справедливости гипотезы о постоянстве дисперсии во времени последовательности  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$  имеет  $F$ -распределение со степенями свободы  $n-1, n-1$ . В дальнейшем предполагаем  $\hat{\sigma}_1^2 > \hat{\sigma}_2^2$ , что не ограничивает общности, так как в противном случае надо перенумеровать наблюдаемые реализации в обратном порядке.

Критическая область, соответствующая рассматриваемому случаю проверки гипотезы о стационарности по дисперсии, строится следующим образом. По таблице для  $F$ -распределения, которые имеются в справочной литературе по математической статистике, для заданного уровня значимости  $\alpha$ , находим табличное значение  $F_{\alpha/2, n-1, n-1}$ . Как правило, заданные уровни значимости  $\alpha \in \{0,1; 0,05; 0,01\}$ .

Если при заданном уровне значимости  $\alpha$  полученное значение статистики  $W_{n-1, n-1}$  будет меньше табличного  $F_{\alpha/2, n-1, n-1}$ , то расхождение между дисперсиями последовательности  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$  считают несущественным или незначимым. Тогда принимается гипотеза о стационарности исследуемой последовательности (6.15). В противном случае, т.е. когда  $W_{n-1, n-1} > F_{\alpha/2, n-1, n-1}$ , гипотеза о стационарности отвергается.

Отметим, что в рассмотренном случае проверки на стационарность с помощью  $F$ -критерия по дисперсии нет никаких допущений относительно математического ожидания последовательности (6.15). Если возникают сомнения в отношении постоянства математических ожиданий во времени, то осуществляется еще одна дополнительная проверка с использованием  $t$ -критерия Стьюдента. Такая проверка, как правило, необходима с целью повышения достоверности о стационарности исследуемой последовательности.



Двухвыборочный  $t$ -критерий Стьюдента используется при проверке гипотезы о стационарности последовательности (6.15) по математическому ожиданию при постоянной дисперсии. При этом гипотеза  $H_0$  о равенстве математических ожиданий двух независимых случайных выборок (6.14) с одинаковым объемом  $n$  из генеральной совокупности (6.15) с нормальной функцией распределения проверяется с помощью  $t$ -статистики

$$|t| = \left| \frac{{}_1\hat{a}_1 - {}_2\hat{a}_1}{\sqrt{(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2)/n}} \right|, \quad (6.22)$$

где  ${}_1\hat{a}_1$  и  ${}_2\hat{a}_1$  - несмещенные оценки математического ожидания соответственно двух цифровых временных рядов  $\{y_1(ih) = y_{1i}, i = \overline{0, n-1}\}$  и  $\{y_2(jh) = y_{2j}, j = \overline{0, n-1}\}$  последовательности (6.15) на непересекающихся временных интервалах  $T_1$  и  $T_2$ , вычисленные по формулам (6.21), а  $\hat{\sigma}_1^2$ ,  $\hat{\sigma}_2^2$  - несмещенные оценки дисперсий – по формулам (6.20).

При справедливости равенства математического ожидания процесса  $\xi(\omega, t)$  на непересекающихся интервалах  $T_1$  и  $T_2$  – справедливости статистической гипотезы  $H_0$  статистика (6.18) имеет  $t$  - распределение Стьюдента с  $m = n + n - 2 = 2n - 2$  степенями свободы.

Критическая область, соответствующая данному случаю проверки статистической гипотезы  $H_0$  о стационарности по математическому ожиданию, строится таким образом. Для заданного уровня значимости  $\alpha$  по таблице для  $t$  - распределения Стьюдента находим табличное значение  $t_{m, 1-\alpha/2}$ .

Если для заданного уровня значимости  $\alpha$  вычисленное по формуле (6.22) значение статистики  $|t|$  меньше табличного, т.е.  $|t| < t_{m, 1-\alpha/2}$ , то расхождение между оценками математического ожидания считаются незначимыми и имеет место гипотеза  $H_0$ .

Разность  ${}_1\hat{a}_1 - {}_2\hat{a}_1$  считается значимой при заданном  $\alpha$ , если  $|t| > t_{m, 1-\alpha/2}$ . При этом гипотеза  $H_0$  отвергается, т.е. считается, что последовательность (6.15) является нестационарной.

Уровень значимости  $\alpha$  выражает вероятность принятия неправильного решения. На практике, как правило, его выражают в процентах и выбирают равным 5%, т.е.  $\alpha = 0,05$ , в ряде случаев  $\alpha = 0,01$  или  $\alpha = 0,005$ , что соответствует 1% и 0,5%. Для повышения достоверности принятия решения необходимо увеличить объем выборки.

2. Для статистического оценивания стационарности последовательности дискретных случайных величин (6.15) с распределением, отличным от гауссова, по данным измерений в рамках корреляционной теории можно воспользоваться описанными выше  $F$ - и  $t$ -критериями, которые являются параметрическими. При этом для более эффективной проверки на стационарность необходимо проверку провести различными попарными комбинациями на большем

( $m > 2$ ) количестве непересекающихся интервалах времени  $\{T_j, j = \overline{1, m}\}$ .

**Примеры** использования непараметрических критериев, например  $\chi^2$  - критерия, критерия Колмогорова-Смирнова для проверки последовательности (6.15) на стационарность по данным измерений также встречаются в публикациях. Их результаты относятся к проверке на стационарность одномерной функции распределения  $F(x)$ , которая для стационарности (6.15) не зависит от времени. Поэтому проверка на стационарность сводится к проверке двух эмпирических функций распределения  $F_{n_i}(x), i = 1, 2$ , полученных на непересекающихся интервалах времени  $T_1$  и  $T_2$  по данным измерения объемом  $n_i$  - цифровых временных рядов вида (6.13).

Встречаются и другие подходы к статистическому оцениванию стационарности последовательности (6.15) по данным измерений. Однако такие подходы носят индивидуальный конкретный характер при решении задачи статистического оценивания на стационарность, что в итоге не приводит к созданию типовой методики для негауссовых распределений.

### 6.3. Статистическое оценивание временных характеристик стационарной последовательности

Вначале приведем сравнительный анализ статистического оценивания характеристик случайной величины и стационарной последовательности дискретных случайных величин по данным измерений. При этом будем использовать результаты статистических исследований случайной величины, приведенных в предыдущей главе. Последовательность процедур такого сравнительного анализа статистического оценивания изображена на рис. 6.8.

Перейдем к конкретным результатам сравнительного анализа.

**Случайная величина.** Из главы 5 следует, что математическая модель многократных прямых измерений случайной величины  $\xi(\omega)$  вида

$$\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega), \omega \in \Omega \quad (6.23)$$

является случайной выборкой объема  $n$  одинаково распределенных независимых случайных величин из генеральной совокупности  $\{\xi_j(\omega), j \in Z\}$ . Реализация случайной выборки (6.23) объема  $n$  представляет собой последовательность чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Формулы для вычислений статистических оценок характеристик случайной величины  $\xi(\omega)$  известны и имеют следующий вид:

$$\hat{a}_1 = \sum_{i=1}^n x_i / n, \quad \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{a}_1)^2 / (n - 1),$$

где  $\hat{a}_1, \hat{\sigma}^2$  - несмещенные статистические оценки математического ожидания и дисперсии соответственно. В качестве основного метода статистического оценивания математического ожидания  $a_1$  и дисперсии  $\sigma^2$  случайной вели-

чины  $\xi(\omega)$  использован метод усреднения по ансамблю реализаций.

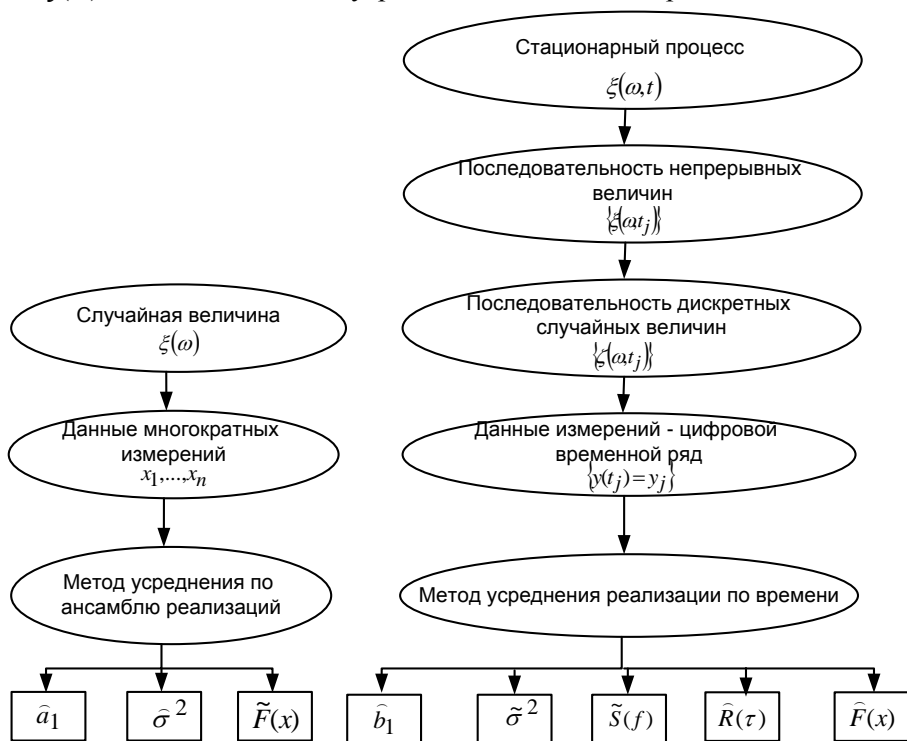


Рис. 6.8. Последовательность процедур статистического оценивания характеристик случайной величины и стационарного процесса

### Стационарная последовательность дискретных случайных величин.

Математическая модель случайной выборки стационарной последовательности дискретных случайных величин вида (6.14), т.е.  $\zeta(\omega, t_1), \zeta(\omega, t_2), \dots, \zeta(\omega, t_n)$  отличается от случайной выборки (6.23) тем, что это последовательность зависимых случайных величин.

Как отмечалось выше, реализацией последовательности (6.14) является цифровой временной ряд (6.13), т.е.  $y(jh) = y(t_j), j = \overline{0, n-1}$ .

Сформулируем более четко постановку задачи статистического оценивания временных характеристик стационарной последовательности дискретных случайных величин (6.15), которая в общем случае является вложенной случайной последовательностью в стационарную последовательность непрерывных случайных величин  $\{\xi(\omega, t_j)\}$ . Последовательность  $\{\xi(\omega, t_j)\}$  является действительной, для нее выполняется эргодическая гипотеза относительно первых четырех моментов, существование которых также предполагается.

Требуется по данным измерений исследуемого процесса – цифрового временного ряда (6.13) вычислить статистические оценки математического

ожидания, дисперсии, автокорреляционной функции и одномерной эмпирической функции распределения. Одним из условий успешного решения такой задачи является значительный объем  $n$  цифрового временного ряда.

Отметим, что результаты решения такой задачи приведены в значительном количестве работ, которые можно условно разделить на две группы:

- 1) временные ряды задаются без учета погрешностей их измерений (ряды в широком смысле);
- 2) временные ряды задаются с учетом погрешностей их измерений (ряды в узком смысле).

К первой группе относится большинство из публикаций. Такое деление не играет, казалось бы, существенной роли с точки зрения новизны полученных результатов исследований, поскольку известны формулы суммарной погрешности с учетом погрешностей измерений значений временных рядов. Однако с точки зрения практических измерений, учет таких погрешностей имеет обязательный характер, который оказывает влияние на методологию проведения процесса измерений и оценку его результатов.

Характерным моментом статистического оценивания одномерных временных характеристик стационарной последовательности дискретных случайных величин  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$  - среднее (математическое ожидание)  $a_1$  и дисперсия  $\sigma^2$  - является тот факт, что эти вероятностные в теоретическом смысле характеристики являются постоянными величинами и не зависят от времени. Одномерные функции распределения  $F(x)$ , плотность распределения  $p(x)$  и характеристическая функция  $f(u)$  последовательности  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$  также не зависят от времени  $t$ . Двумерные характеристики стационарного процесса – автоковариационная  $B(\tau)$ , автокорреляционная  $R(\tau)$ , двумерная функция (плотность) распределения  $F(x_1, x_2; \tau)$  - зависят лишь от разности времени, т.е.  $\tau = t_2 - t_1$ .

Такая идеализация модели стационарного процесса не имеет места на практике статистического оценивания характеристик процесса по данным измерениям. Измерения проводятся на конечном интервале времени, на результаты измерения действуют как контролируемые, так и неконтролируемые, как правило, случайные факторы. В итоге проведения статистического оценивания теоретические числовые постоянные характеристики или функции детерминированных аргументов стационарного процесса становятся функциями дополнительных аргументов, например объема выборки, интервала временного окна, погрешностей измерений, округлений при вычислениях и рядом других. По сути имеют место несоответствия (неадекватности) модели реальному исследуемому процессу. И компромисс адекватности можно достигнуть на уровне возможных погрешностей статистического оценивания, которые не превышают заданных. В большинстве случаев дисперсия оценки искомой характеристики служит характеристикой точности ее статистического оценивания. Если по условиям задачи статистического оценивания удастся определить довери-

тельный интервал с заданной вероятностью (вероятностной мерой) оценки искомой характеристики, можно говорить о достижении цели – решении задачи статистического оценивания в более полном объеме.

В более строгой постановке задачи соответствия модели и результатов измерений используется аппарат математической статистики, например, проверка адекватности модели и полученных результатов измерений на основе проверки соответствующих статистических гипотез на основании обоснованного статистического критерия

**Статистическое оценивание временных характеристик.** Кратко приведем основные алгоритмы статистического оценивания указанных характеристик стационарной последовательности дискретных случайных величин.

**Статистическое оценивание математического ожидания.** Статистическая оценка математического ожидания (среднего) стационарной последовательности дискретных случайных величин, для которой выполняется эргодическая гипотеза относительно математического ожидания, вычисляется усреднением по времени одной реализации стационарной последовательности – цифрового временного ряда вида (6.13) по формуле

$$\hat{b}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y(t_j). \quad (6.23)$$

Оценка  $\hat{b}_1$  является несмещенной и эффективной, поскольку  $\mathbf{M}\hat{b}_1 = a_1$ .

Для конкретного цифрового временного ряда (6.13) оценка  $\hat{b}_1$  является средним значением и статистической оценкой математического ожидания стационарной последовательности дискретных случайных величин (6.15).

Если известна корреляционная функция стационарной последовательности (6.19) в виде

$$R(k) = \mathbf{M} \left\{ \zeta(\omega, t_j) - a_1 \left[ \zeta(\omega, t_{j+k}) - a_1 \right] \right\}, \quad (6.24)$$

то дисперсия оценки математического ожидания (6.23) определяется как

$$\mathbf{D}\hat{b}_1 = \mathbf{M} \left[ \hat{b}_1 - a_1 \right]^2 = \frac{1}{n} \left[ R(0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left( 1 - \frac{k}{n} \right) R(k) \right], \quad (6.25)$$

где количество значений функции  $R(k)$  определено на конечном множестве точек, определяемой объемом выборки  $n$  цифрового временного ряда.

В выражении (6.25) значение  $a_1$  не входит в явном виде для вычисления дисперсии, но его знание необходимо при вычислении  $R(k)$  по формуле (6.24).

На основании результатов анализа публикаций по статистическому оцениванию характеристик стационарных процессов относительно статистического оценивания математического ожидания  $a_1$  стационарной последовательности дискретных случайных величин  $\left\{ \zeta(\omega, t_j) \right\}$  можно сделать такие выводы.

В большинстве случаев для  $\left\{ \zeta(\omega, t_j) \right\}$  неизвестными являются как  $a_1$ , так

и корреляционная функция  $R(k)$ . По результатам статистического оценивания определяют их оценки  $\hat{b}_1$  и  $\hat{R}(k)$ . В общей постановке задача статистического оценивания  $a_1$  и  $R(k)$  стационарных процессов не имеет общего решения и это, вероятно, является естественным из-за разноплановости и многообразия задач статистического оценивания. В то же время на базе использования дополнительных условий, например для  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$  задан гауссовый закон распределения или известна корреляционная характеристика  $R(k)$  или  $a_1$ , задача статистического оценивания решается в требуемом для практического использования виде.

По своей сути задача статистического оценивания, а это в полной мере и относится к задаче измерения, ставится, чтобы вычислить (определить) ту или иную характеристику случайного процесса необходимо знание характеристик того же процесса на порядок выше. Так, для оценки качества определения математического ожидания при вычислении дисперсии  $D\hat{b}_1$  необходимо знание корреляционной функции  $R(k)$  (см. формулу (6.25)).

Следует отметить, что важность использования гипотезы эргодичности для  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$ , в данном случае эргодической гипотезы относительно математического ожидания  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$ . При этом должно выполняться условие (6.6),

т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n R(j)(1 - j/n) = 0$ , которое для практического применения можно

заменить другим условием. На основе неравенства  $\sum_{j=1}^n R(j)(1 - j/n) \leq \sum_{j=1}^n R(j)$  на практике используется достаточное и необходимое условие эргодичности  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$  относительно математического ожидания  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n R(j) < \infty$ .

Такому условию удовлетворяет значительная часть используемых исследуемых стационарных процессов.

**Статистическое оценивание корреляционной функции.** Статистическая оценка корреляционной функции цифрового временного ряда (6.13) определяются по формуле

$$\tilde{R}(k) = \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} (y(t_j) - \tilde{b}_1)(y(t_{j+k}) - \tilde{b}_1). \quad (6.26)$$

Данная оценка асимптотически смещенная и в случае замены случайной величины  $\tilde{b}_1$  на  $a_1$  полученная по формуле (6.26) статистическая оценка корреляционной функции  $\tilde{R}(k)$  становится асимптотически несмещенной, т.е. имеет место  $\lim_{n \rightarrow \infty} M\tilde{R}(k) = R(k)$ .

Отметим следующий факт, который имеет важное практическое значение при статистическом оценивании характеристик стационарных случайных процессов. При вычислении статистических оценок корреляционной функции стационарной последовательности дискретных случайных величин (6.15), для которой выполняется эргодическая гипотеза относительно корреляционной функции по данным измерений – цифрового временного ряда (6.13), используется не классическая форма определения корреляционной функции в виде (6.1), а так называемое *корреляционное преобразование* – действие соответствующего корреляционного оператора в виде (6.26). Таким образом, оценка  $\tilde{R}(k)$  является откликом корреляционного оператора, который осуществляет усреднение по времени произведений исходного центрированного временного ряда  $\{y(t_j) - \tilde{b}_1\}$  на сдвинутый во времени центрированный временной ряд  $\{y(t_{j+k}) - \tilde{b}_1\}$ . При  $k=0$  вычисляется статистическая оценка дисперсии  $\tilde{R}(0) = \tilde{\sigma}^2$ . Дисперсия статистической оценки  $\tilde{R}(k)$  определяется по формуле

$$D\tilde{R}(k) = \left[ R(k, 0) + 2 \sum_{j=1}^{n-k-1} (1 - j/(n-k)) R(k, s) \right] / (n-k-1),$$

где используются выражения, аналогичные выражениям (6.8),..., (6.10), а именно:

формируется случайная последовательность второго порядка относительно исследуемой стационарной последовательности дискретных случайных величин  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$  вида  $\zeta(\omega, \tau, t) = [\zeta(\omega, t_j) - a_1][\zeta(\omega, t_{j+\tau}) - a_1]$ , затем определяется ее математическое ожидание  $M\zeta(\omega, \tau, t) = R(\tau)$  и соответственно ее автокорреляционная функция как центральный момент четвертого порядка последовательности  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$ :  $R(s, \tau) = M[\zeta(\omega, \tau, t) - R(\tau)][\zeta(\omega, \tau, t+s) - R(\tau)]$ .

Таким образом, дисперсия статистической оценки  $\tilde{R}(k)$  стационарной последовательности дискретных случайных величин  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$ , удовлетворяющая эргодической гипотезе относительно корреляционной функции определяется, если задана функция  $R(s, \tau)$  - четвертый центральный момент последовательности  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$ .

**Статистическое оценивание одномерной функции распределения.** Это одна из известных задач статистического оценивания для стационарной последовательности дискретных случайных величин  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$ . Известно, что эмпирической или выборочной функцией распределения для случайной выборки (6.14) объема  $n$  называется функция  $F_n(x) = g_x/n$ , где  $g_x$  - число тех  $\zeta(\omega, t_j)$ , значение которых меньше  $x$ .

Эта функция является случайной, а каждая ее реализация – кусочно-постоянная функция  $x$ , изменяющаяся от 0 до 1 только скачками, число кото-

рых равно  $n$ . Реализация функции  $F_n(x)$  в ряде случаев определяется непосредственно, а в большинстве практических случаев строится с использованием гистограммы как реализации плотности распределения.

Результаты решения этой задачи аналогичны результатам статистического оценивания функции распределения случайной величины, которые были приведены в пятой главе. Только интерпретация полученных результатов статистического оценивания совершенно иная, а именно:

а) статистическая оценка одномерной функции распределения  $\tilde{F}(x)$ , вычисленная с использованием временного ряда (6.13), характеризует стационарную последовательность дискретных случайных величин (6.15) и не зависит от времени  $t$ ;

б) для выполнения необходимого и достаточного условия эргодичности одномерной функции распределения  $F(x)$  последовательности  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$ , необходимо выполнение условия (6.11), т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [F(x_1, x_2; \tau) - F(x_1)F(x_2)] \cdot (1 - j/n) = 0, \forall \tau.$$

где  $F(x_1, x_2; \tau)$  - двумерная функция распределения последовательности, представленной в виде (6.15).

В большинстве случаев проверка выполнения условия (6.11) вызывает на практике определенные трудности. Поэтому, если выполнены условия эргодичности относительно математического ожидания и корреляционной функции для исследуемой стационарной последовательности, то можно предположить о применимости эргодической гипотезы и для одномерной функции распределения  $F(x)$ .

**Статистическое оценивание двумерной функции распределения**  $F(x_1, x_2; \tau)$ . Для статистического оценивания такой функции как пример рассмотрим другую постановку задачи по сравнению с рассмотренными ранее. Двумерная функция распределения  $F(x_1, x_2; \tau)$  задается аналитически с неизвестными параметрами и функциями.

**Пример.** Задана двумерная плотность распределения стационарной последовательности гауссовых дискретных случайных величин  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$  в виде

$$p(x_1, x_2; \tau) = \left(1/2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2(\tau)}\right) \exp\left\{-1/2(1-\rho^2(\tau))\left[\frac{(x_1-a_1)^2 - 2\rho(\tau)(x_1-a_1)(x_2-a_1) + (x_2-a_1)^2}{\sigma^2}\right]\right\},$$

где математическое ожидание  $a_1$ , дисперсия  $\sigma^2$  и нормированная корреляционная функция  $\rho(\tau)$  не заданы. Требуется определить статистические оценки

$a_1$ ,  $\sigma^2$ ,  $\rho(\tau)$  и двумерной функции распределения  $F(x_1, x_2; \tau)$  по данным измерений – цифровому временному ряду (6.13), т.е.  $\{y(jh) = y(t_j), j = \overline{0, n-1}\}$ .



При этом предполагается, что исследуемая последовательность  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$  имеет конечные первые два момента и эргодическая гипотеза имеет место для математического ожидания, корреляционной функции и одномерной функции распределения процесса.

Используя ранее приведенные формулы, вычисляем соответствующие статистические оценки

$$\tilde{a}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y(t_j), \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n [y(t_j) - \tilde{a}_1]^2,$$

$$\tilde{\rho}(\tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{j=1}^{n-\tau} \frac{[y(t_j) - \tilde{a}_1][y(t_{j+\tau}) - \tilde{a}_1]}{\tilde{\sigma}^2}, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, k, \quad k \leq 0, 1, n,$$

и определяем искомую статистическую оценку двумерной функции распределения в виде

$$\tilde{F}(x_1, x_2; \tau) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}^2\sqrt{1-\tilde{\rho}^2(\tau)}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\tilde{\rho}^2(\tau))} \cdot \left[\frac{(y_1 - \tilde{a}_1)^2 - 2\tilde{\rho}(\tau)(y_1 - \tilde{a}_1)(y_2 - \tilde{a}_1) + (y_2 - \tilde{a}_1)^2}{\tilde{\sigma}^2}\right]\right\} dy_1 dy_2.$$

В данном разделе приведены типовые задачи статистического оценивания временных характеристик стационарной последовательности дискретных случайных величин по данным измерений в цифровом виде. Результаты решения конкретных задач и более глубоких исследований статистического оценивания относятся к различного рода комбинациям детерминированных и случайных сигналов при различных соотношениях сигнал/помеха. В большинстве такого рода публикаций решены задачи обнаружения сигналов при воздействии шумов, статистической обработки преобразований их в трактах электронных систем и др. Однако в них не приведены наиболее интересные для задач измерений точностные характеристик полученных результатов статистического оценивания, например статистические оценки дисперсии, законов распределения результатов исследований, а следовательно решения указанных задач измерений требует более глубоких исследований.

#### 6.4. Статистическое оценивание спектральных характеристик стационарных последовательностей

Результаты определения спектральной плотности мощности стационарного процесса  $S(f)$  изложены в многочисленных публикациях, в которых используются различные методы при ее статистическом оценивании. Среди прикладных методов статистического оценивания  $S(f)$  выделяют следующие:

- 1) на основе преобразования Фурье реализаций стационарного процесса;
- 2) на основе преобразования Фурье статистической оценки корреляцион-

ной функции стационарного процесса (теорема Винера - Хинчина);

3) на основе использования узкополосной линейной фильтрации реализаций стационарного процесса, возведение в квадрат откликов с последующим их усреднением по ансамблю.

Рассмотрим первый метод статистического оценивания  $S(f)$  по данным измерениям реализаций стационарной последовательности дискретных случайных величин – цифрового временного ряда (6.13).

Обоснованием выбора данного метода являются следующие факторы:

а) данные измерений в виде временного ряда без дополнительных преобразований и, соответственно, внесения дополнительных погрешностей измерения непосредственно используются для статистического оценивания  $S(f)$ ;

б) информационное обеспечение в виде алгоритмов, программного обеспечения практических рекомендаций выбора частоты дискретизации, числа уровней квантования, объема  $n$  отсчетов, временных и спектральных окон статистического оценивания  $S(f)$  данного направления наиболее разработано и внедрено в практику использования современных ИИС;

в) непосредственное использование данных измерений для статистического оценивания характеристик исследуемых процессов обосновывает применение единой методологии статистической обработки информации в ИИС с последующей оценкой результатов и погрешностей измерений.

Следует также отметить, что ранее, примерно в 50 - 70-е годы XX ст., для статистического оценивания  $S(f)$  в основном использовался метод оценивания корреляционной функции на основе использования теоремы Винера - Хинчина (6.2). Вначале вычислялась оценка автокорреляционной функции  $\hat{R}(\tau)$  исследуемого процесса по данным измерений (6.1), затем использовалось преобразование Фурье вычисленной оценки  $S(f)$  по известному алгоритму Блэкумана-Тьюки.

В последующие годы было разработано информационное обеспечение цифровой обработки сигналов, что дало возможность улучшить качество статистического оценивания спектральной плотности  $S(f)$  при дискретном преобразовании Фурье реализаций исследуемых стационарных процессов и использовании соответствующих временных и спектральных окон.

Остановимся на этом более подробно. Рассмотрим статистическое оценивание следующих спектральных характеристик для двух стационарных и стационарно связанных последовательностей дискретных случайных величин

$$\{\zeta_1(\omega, t_j)\} \text{ и } \{\zeta_2(\omega, t_j)\}:$$

спектральных плотностей мощности  $S_{11}(f)$  и  $S_{22}(f)$  соответственно;

взаимной спектральной плотности мощности  $S_{12}(f)$  согласно формуле (6.3);

функции когерентности  $v^2(f)$  как нормированной совместной функции четвертого порядка статистической взаимосвязи централизованных последовательностей  $\{\zeta_1(\omega, t_j)\}$  и  $\{\zeta_2(\omega, t_j)\}$  в частотной области, определяемой выражением (6.4), т.е.  $v^2(f) = |S_{12}(f)|^2 / S_{11}(f) \cdot S_{22}(f)$ ,  $v^2(f) \in [0, 1]$ .

Ранее отмечалось, что данные измерений формируются в виде цифровых измерительных сигналов, т.е. сигналов с дискретным временем и квантованными по уровню значениями. Таким образом, цифровые измерительные сигналы в виде временных рядов имеют конечный объем  $n$  элементов. При этом обоснование частоты дискретизации непрерывных измерительных сигналов по времени и число уровней квантования их значений в каждой конкретной задаче выбирается на основании априорных данных об измерительной информации. Более подробно эти вопросы рассмотрены в главе 9 данной книги.

Таким образом, на вход подсистемы статистического оценивания спектральных характеристик стационарных последовательностей ИИС поступает два цифровых временных ряда как реализации исследуемых последовательностей  $\{\zeta_1(\omega, t_j)\}$  и  $\{\zeta_2(\omega, t_j)\}$ , каждая из которых имеет вид (6.13), т.е.

$$\{y_1(ih) = y_1(t_i), i = \overline{0, n-1}\} \text{ и } \{y_2(jh) = y_2(t_j), j = \overline{0, n-1}\}, \quad (6.27)$$

где  $h = \Delta t$  - постоянный шаг равномерной временной решетки задания отсчетов цифровых временных рядов.

В дальнейшем будем рассматривать оба временных ряда (6.27) с одинаковым объемом  $n$  отсчетов, с одинаковым временем дискретизации  $\Delta t$ , т.е. (6.27) можно записать в виде  $\{y_m(ih) = y_m(t_i), m = \overline{1, 2}, i = \overline{0, n-1}\}$ .

Рассмотрим последовательность вычислений методами цифровой обработки временных рядов как реализаций исследуемых последовательностей при статистическом оценивании указанных выше спектральных характеристик.

1. На начальном первом этапе при предварительной статистической обработке исходных цифровых временных рядов, при которой производится:

- а) удаление промахов, ошибочных значений отсчетов ряда;
- б) необходимая цифровая фильтрация;
- в) удаление тренда;
- г) центрирование обоих временных рядов:

если известно среднее (математическое ожидание) исследуемой последовательности  $\{m a_1, m = \overline{1, 2}\}$ , то

$$\bar{y}_m(ih) = y_m(ih) - m a_1 = \bar{y}_m(t_i), m = \overline{1, 2}, i = \overline{0, n-1}; \quad (6.28)$$

если  $\{m a_1, m = \overline{1, 2}\}$  неизвестно, то для операции центрирования используется ее статистическая оценка  $\{m \tilde{b}_1, m = \overline{1, 2}\}$  и имеет соответственно

$$\tilde{y}_m(ih) = \tilde{y}_m(t_i) = y_m(ih) - m \tilde{b}_1, m = \overline{1, 2}, i = \overline{0, n-1}. \quad (6.29)$$

Каждый из временных рядов (6.29), используемых для последующей цифровой статистической обработки, представляет собой центрированный цифровой временной ряд с  $n$  отсчетами (объем ряда  $n$ ) как реализацию случайной выборки центрированной стационарной последовательности дискретных случайных величин  $\{\xi(\omega, t_i)\}$  вида (6.14).

Как отмечалось ранее, временной ряд (6.29) можно рассматривать и по-другому. Если предположить, что зарегистрирована непрерывная реализация  $x(t)$  непрерывного стационарного процесса  $\xi(\omega, t)$ , то временной ряд (6.29) можно сформировать путем проведения следующих операций:

дискретизации реализации  $y(t)$  по времени с постоянным шагом  $\Delta t = h$  на равномерной временной решетке, т.е.  $x(t) \Rightarrow x(ih) = x(t_i), i = \overline{0, n-1}$ ;

квантованием с числом  $Q$  уровней значений  $x(t_i)$  и формированием цифрового сигнала  $x(t_i) \Rightarrow y(ih) = y(t_i), y(t_i) \in [-Q, Q], i = \overline{0, n-1}$ .

В средствах измерения (ИИС) формирование цифровых сигналов вида (6.29) осуществляется с использованием АЦП, каждый из которых имеет метрологические характеристики. Более подробно функционирование АЦП рассмотрено в главе 9.

2. На втором этапе предварительной статистической обработки рекомендуется с целью улучшения качества (как правило, уменьшения дисперсии статистических оценок) статистического оценивания спектральных характеристик стационарной последовательности использовать:

а) разбиение исходного временного ряда (6.29) на  $k$  отрезков с одинаковым объемом  $N$  отсчетов, создание таким образом ансамбль из  $K$  реализаций и использование в дальнейшем метод усреднения по ансамблю статистических оценок исследуемых спектральных характеристик;

б) умножение исходного временного ряда (6.29) на временное весовое окно  $W(t_i)$ , выбор каждого из которого основывается на постановке задачи статистического оценивания спектральных характеристик и априорных данных об исследуемом случайном процессе, а также спектральных характеристик весового окна  $W(t_j)$ .

Данные рекомендации относятся к типовым при статистическом оценивании спектральных характеристик стационарных процессов, а их содержание обосновано результатами значительного практического опыта применения как аналоговых, так и цифровых статистических методов обработки.

Представленные для последующей цифровой статистической обработки ряды (6.29), каждый из которых содержит  $n$  отсчетов, разбивается на  $k = \overline{1, K}$  отрезков из  $N$  отсчетов, т.е.  $N = n/k$ .

При этом целесообразно выбирать значение  $K$  как можно больше, по-

скольку дисперсию соответствующей спектральной характеристики можно потенциально уменьшить в  $1/k$  раз на основании применения статистического метода усреднения по ансамблю реализаций.

Таким образом, каждый из (6.29) центрированный цифровой временной ряд  $\tilde{y}_m(ih)$ ,  $m = 1, 2, \dots, i = 0, n-1$  разбивается на  $K$  участков (рис. 6.9).

Примеры некоторых временных весовых окон  $w(t_j)$ , используемых для повышения качества статистического оценивания спектральных характеристик стационарной последовательности  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$ , приведены в таблице.

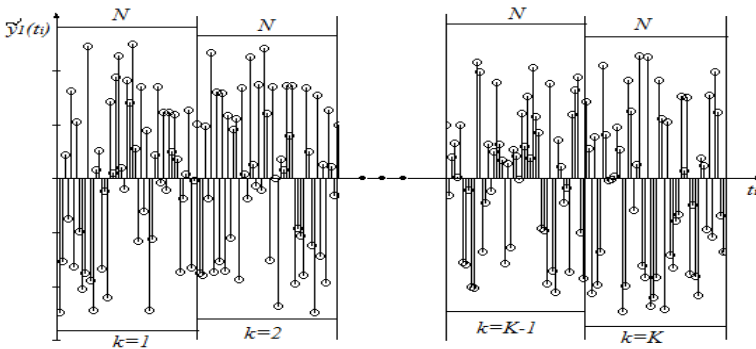


Рис. 6.9. Графическая иллюстрация разбиения исследуемого центрированного цифрового временного ряда с  $n$  отсчетами на  $K$  участков с  $N$  отсчетами в каждом

Название окна	Дискретно-временная функция $w(n)$ , $n = 0 \dots N-1$	Частотная характеристика $W(f)$ $f_k = 0, 1, \dots, N/2$ , $D_N(f) = T \exp(-j2\pi f TN) \frac{\sin[N\pi f T]}{\sin[\pi f T]}$
Прямоугольное	$w(n) = 1$	$D_N(f)$
Треугольное (окно Бартлетта)	$w(n) = 1 -  n/A - 1 $ , $A = (N-1)/2$	$\frac{2}{N} \cdot D_N^2\left(\frac{f}{2}\right)$
Окно Ханна	$w(n) = 0.5 - 0.5 \times \cos(2\pi n / (N-1))$	$0.5 D_N(f) + 0.25 \times (D_N(f - 1/NT) + D_N(f + 1/NT))$
Окно Хэмминга	$w(n) = 0.54 - 0.46 \times \cos(2\pi n / (N-1))$	$0.54 D_N(f) + 0.23 \times (D_N(f - 1/NT) + D_N(f + 1/NT))$

В таблице также приведены частотные (спектральные) характеристик весовых окон  $W(f)$ . Таким образом, для дальнейшей статистической обработки сформирован для каждого временного ряда (6.29) ансамбль  $K$  реализаций вида

$$Zm(t_i) = \tilde{y}_m(t_i)w(t_i) = \begin{cases} Z_{m1}(t_j) \\ \vdots \\ Z_{mk}(t_j), \quad m = \overline{1,2}, j = \overline{0, N-1}, k = \overline{1, K}, i = j + (k-1)N \\ \vdots \\ Z_{mK}(t_j) \end{cases}$$

3. Для каждой реализации из последовательности

$$\{Z_{mk}(t_j), m = \overline{1,2}, k = \overline{1, K}, j = \overline{0, N-1}\}$$

производятся следующие операции:

а) дискретное преобразование Фурье (ДПФ), на практике в большинстве случаев используется экономный с точки зрения числа вычислительных операций способ реализации ДПФ – быстрое преобразование Фурье (БПФ)

$$F_{mk}(f_g) = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} Z_{mk}(t_i) \cdot \exp(-j2\pi \cdot i \cdot g/N), \text{ где } j = \sqrt{-1}; \quad (6.30)$$

б) модуль полученного выражения (6.45) возводится в квадрат

$$|F_{mk}(f_g)|^2$$

в) используется метод усреднения по ансамблю  $K$  компонент (6.30) и определяется статистическая оценка двусторонней спектральной плотности стационарной последовательности дискретных случайных величин вида (6.14), т.е.  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$ , следующим выражением  $S_{mm}(f_g) = \frac{1}{KN\Delta t} \sum_{k=1}^K |F_{mk}(f_g)|^2, g = \overline{0, N-1}$ .

Для расчета оценки спектральной плотности  $S_{mm}(f_g)$  используются дискретные значения частоты  $f_g = g/N\Delta t, g = \overline{0, N-1}$ . Отметим, что оценка  $S_{mm}(f_g)$  определена в диапазоне как отрицательных, так и положительных частот. Первые  $N/2 + 1$  значений оценки спектральной плотности при  $j = 0, 1, \dots, N/2$  задают оценку  $S_{mm}(f_g)$  в диапазоне положительных частот  $f_j$  от 0 до  $N/2$ , а остальные  $N/2 - 1$  при  $j = N/2 + 1, N/2 + 2, \dots, N - 1$  - в диапазоне отрицательных (симметрично 0) частот  $-N/2 < f_j < 0$ . Статистическая оценка односторонней спектральной плотности  $S_{mm}(f_g)$  определяется

$$\text{выражением } G_{mm}(f_g) = \frac{2}{KN\Delta t} \sum_{k=1}^K |F_{mk}(f_g)|^2, g = \overline{0, N/2}.$$

4. На четвертом этапе статистического оценивания спектральных характеристик стационарной последовательности дискретных случайных величин (6.14), т.е.  $\{\zeta(\omega, t_j)\}$ , после выполнения операций предыдущих трех этапов цифровой статистической обработки первичных цифровых временных рядов вида (6.27) определяются следующие статистические оценки.

4.1. Односторонние спектральные плотности:

а) стационарной последовательности  $\{\zeta_1(\omega, t_j)\}$  в виде

$$G_{11}(f_g) = \frac{2}{KN\Delta t} \sum_{k=1}^K |F_{1k}(f_g)|^2, g = \overline{0, N/2};$$

б) стационарной последовательности  $\{\zeta_2(\omega, t_j)\}$  в виде

$$G_{22}(f_g) = \frac{2}{KN\Delta t} \sum_{k=1}^K |F_{2k}(f_g)|^2, g = \overline{0, N/2}.$$

4.2. Одностороннюю взаимную спектральную плотность стационарных последовательностей  $\{\zeta_1(\omega, t_j)\}$  и  $\{\zeta_2(\omega, t_j)\}$  в виде

$$G_{12}(f_g) = \frac{2}{KN\Delta t} \sum_{k=1}^K |F_{1k}(f_g) \cdot F_{2k}(f_g)|^2, g = \overline{0, N/2}.$$

4.3. Функции когерентности

$$v^2(f_g) = |G_{12}(f_g)|^2 / [G_{11}(f_g) \cdot G_{22}(f_g)], g = \overline{0, N/2}.$$

Следует отметить следующее. При анализе результатов статистического оценивания приведенных выше спектральных характеристик стационарной последовательности возникают вопросы чисто измерительного (метрологического) плана. Так, не приведены выражения для оценки качества полученных статистических оценок спектральных характеристик, например выражения для дисперсии оценок. Такие результаты могут быть получены только для конкретных задач статистического оценивания спектральных характеристик с использованием дополнительных априорных сведений о моделях измеряемых сигналов, частотном диапазоне спектральных характеристик и др. Поэтому в приведенную выше типовую методику статистического оценивания спектральных характеристик стационарных последовательностей результаты таких исследований не были включены.

5. На заключительном этапе статистического оценивания спектральных характеристик стационарных процессов проводится анализ полученных результатов, в ряде случаев с учетом использования, например соответствующих конкретных весовых окон, вводятся масштабные коэффициенты. По результатам проведенного анализа принимается решение о достижении или недостижении поставленной цели статистического оценивания спектральной плотности исследуемой стационарной последовательности.

6. Результаты статистического оценивания спектральной плотности мощности стационарных процессов также используются и в ряде других задач, например при статистическом оценивании аналогичных характеристик как функций времени нестационарного случайного процесса – периодически коррелированного - а также при исследовании аддитивной смеси двух стационарных независимых случайных процессов.

*Основные выводы*

---

Статистическое оценивание характеристик случайных процессов – это определение статистических оценок этих характеристик по данным измерений значений процессов.

Корреляционная теория используется для исследования и статистического оценивания первых двух моментных функций случайных процессов.

В теории и практике статистического оценивания наиболее полно разработаны модели, алгоритмы и программное обеспечение вычисления статистических оценок характеристик стационарных случайных процессов.

Характеристиками стационарных процессов являются: математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция, спектральная плотность мощности и одномерная функция распределения.

К информационному обеспечению статистического оценивания стационарных процессов относят математические модели, их основные статистические характеристики, алгоритмы и программное обеспечение вычислений статистических оценок характеристик стационарных процессов.

Статистические оценки математического ожидания, дисперсии, корреляционной функции, спектральной плотности мощности стационарных процессов вычисляются по данным измерений реализаций стационарных процессов.

Применение эргодической теоремы Биркхофа - Хинчина дает возможность при статистическом оценивании характеристик стационарных процессов использовать усреднение по времени реализаций исследуемых процессов.

Достаточные и необходимые условия эргодичности стационарного процесса относительно математического ожидания базируются на использовании известной корреляционной функции процесса.

Достаточные и необходимые условия эргодичности стационарного процесса относительно корреляционной функции базируются на использовании центрального четвертого момента исследуемого стационарного процесса.

К характерным особенностям задач статистического оценивания как процесса измерения относят специфику формирования экспериментальных данных о процессах и последующую их цифровую статистическую обработку.

Экспериментальные данные условно разделены на данные измерений и другие экспериментальные данные, что дает возможность производить статистическое оценивание характеристик стационарных процессов в узком и широком смыслах.

При цифровом статистическом оценивании характеристик стационарных процессов использован цифровой временной ряд как реализации исследуемого процесса, полученные путем дискретизации по времени и квантования по уровню исходной (непрерывной) реализации.

Среди основных методов статистического оценивания выделены два метода, один из которых дает возможность производить оценивание путем усреднения по множеству (ансамблю) реализаций исследуемого процесса; другой



– усреднением одной реализации процесса по времени.

Применение метода усреднения одной реализации по времени дает возможность значительного упрощения решения задач вычисления статистических оценок характеристик стационарных процессов на практике.

Математическая модель, реализацией которой является цифровой временной ряд как данные измерения, представляется как случайная выборка объема  $n$  стационарной последовательности дискретных случайных величин.

Статистика при статистическом оценивании  $k$ -й характеристики стационарной последовательности определяется как соответствующая функция случайной выборки объема  $n$  стационарной последовательности дискретных случайных величин и по своему определению является случайной функцией.

Задача статистического оценивания стационарности исследуемой последовательности решается на основе применения статистических критериев  $t$ -Стьюдента и  $F$ -Фишера. Статистический критерий  $t$ -Стьюдента используется на базе определения статистических оценок математических ожиданий, а статистический критерий  $F$ -Фишера – на базе определения статистических оценок дисперсии двух реализаций на непересекающихся временных интервалах.

При вычислении по данным измерений статистических оценок среднего (математического ожидания) и дисперсии стационарной последовательности дискретных случайных величин использована эргодическая гипотеза.

Статистическая оценка корреляционной функции стационарной последовательности получена по данным измерений в виде цифрового временного ряда, а дисперсия полученной оценки определяется как центральный момент четвертого порядка исследуемого процесса.

Методика получения статистической оценки одномерной функции распределения стационарной последовательности по данным измерений аналогична методике получения статистической оценки функции распределения случайной величины, но имеет другую физическую интерпретацию: как оценка стационарной последовательности дискретных случайных величин, заданных на временной оси.

Для определения двумерной функции распределения стационарной последовательности по данным измерений для гауссового закона распределения определены статистические оценки математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции.

Основной спектральной характеристикой стационарной последовательности случайных величин является ее спектральная плотность мощности.

К основным прикладным методам статистического оценивания спектральной плотности мощности стационарной последовательности относятся: дискретное преобразование Фурье реализаций исследуемой стационарной последовательности; дискретное преобразование Фурье статистической оценки корреляционной функции последовательности; линейная узкополосная фильтрация реализаций последовательности; возведение в квадрат откликов с последующим усреднением их по ансамблю.

В современных измерительных информационных технологиях используется статистическое оценивание спектральной плотности мощности на базе использования дискретного преобразования Фурье, как правило, алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ), реализаций исследуемой стационарной последовательности с последующей статистической обработкой.

Измерительная информационная технология статистического оценивания спектральной плотности мощности стационарной последовательности базируется на операциях: центрирования, дискретного преобразования Фурье (БПФ), возведения в квадрат и использования соответствующих временных окон и усреднения по ансамблю результатов вычислений.

Эффективность статистического оценивания спектральной плотности мощности стационарных процессов удастся обеспечить конкретизацией дополнительной информации об исследуемом стационарном процессе, например задания одномерного закона распределения или корреляционной функции процесса.

---

### **Вопросы для самоконтроля**

---

1. *Какая информация используется при определении математического ожидания и дисперсии стационарного случайного процесса?*
2. *Приведите определение ковариационной и корреляционной функций стационарного случайного процесса.*
3. *Раскройте суть корреляционной теории случайных процессов.*
4. *Какие основные характеристики стационарного в широком смысле случайного процесса?*
5. *Сформулируйте задачу статистического оценивания характеристик случайных процессов в рамках корреляционной теории?*
6. *Раскройте основную суть эргодических теорем при исследовании случайных процессов.*
7. *Что такое эргодичность стационарного процесса относительно математического ожидания, корреляционной функции?*
8. *Какие необходимые и достаточные условия эргодичности стационарного процесса относительно корреляционной функции?*
9. *Приведите постановку задачи построения математической модели объекта исследования по экспериментальным данным.*
10. *Сформулируйте два подхода в узком и широком смыслах к классификации полученных экспериментальных данных об исследуемых процессах, включая данные измерений.*
11. *Назовите последовательность операций получения и обработки данных измерений.*
12. *Проанализируйте динамику изменения характеристик исследуемых процессов на основе анализа реализаций на кратковременных интервалах времени.*
13. *Приведите примеры реализаций исследуемых процессов на длительных временных интервалах и дайте краткую характеристику динамики их изменений.*
14. *Раскройте суть двух основных статистических методов усреднения дан-*

ных измерений при статистическом оценивании характеристик процессов.

15. Какие основные операции преобразования непрерывного (аналогового) сигнала в цифровой временной ряд?

16. Раскройте суть изменений пространств элементарных событий как области определения случайного процесса при преобразованиях измерительного сигнала.

17. Приведите математическую модель стационарной последовательности, реализацией которого является цифровой временной ряд на конечном интервале времени.

18. Как определяется статистика при статистическом оценивании  $k$ -й характеристики стационарной последовательности?

19. Сформулируйте постановку задачи статистического оценивания стационарности исследуемой последовательности дискретных случайных величин.

20. Раскройте основное содержание применения статистических критериев  $t$ -Стьюдента и  $F$ -Фишера в задаче статистического оценивания стационарности исследуемой последовательности случайных величин.

21. Какие временные характеристики стационарных последовательностей определяются при их статистическом оценивании?

22. Приведите основные формулы вычисления по данным измерений статистических оценок среднего (математического ожидания) и дисперсии стационарной последовательности.

23. Раскройте суть оценки качества вычисления статистической оценки математического ожидания стационарной последовательности на основе использования дисперсии оценки.

24. Сформулируйте последовательность операций вычисления и оценки качества статистической оценки корреляционной функции стационарной последовательности.

25. Раскройте суть статистического оценивания одномерной функции распределения стационарной последовательности.

26. Сформулируйте постановку задачи статистического оценивания двумерной функции распределения стационарной последовательности.

27. Приведите для гауссового распределения пример статистического оценивания двумерной функции распределения стационарной последовательности по данным измерений.

28. Какие спектральные характеристики стационарной последовательности вычисляются при их статистическом оценивании по данным измерений?

29. Назовите основные прикладные методы статистического оценивания спектральной плотности мощности стационарной последовательности.

30. Какие операции необходимо выполнить при центрировании и нормировании данных измерений в виде цифровых временных рядов?

31. Приведите основные формулы применения дискретного преобразования Фурье при статистическом оценивании спектральной плотности мощности стационарной последовательности.

32. Раскройте основную суть применения весовых окон при статистическом оценивании спектральной плотности мощности стационарной последовательности.

33. Проведите анализ полученных статистических оценок спектральных характеристик стационарной последовательности.

### *Conclusions*

---

Statistical evaluation of random processes' characteristics – is a determination of statistical estimates of these characteristics based on measurement data of processes values.

Correlation theory is used for studying and statistical estimation of the first two moment functions of random processes. In theory and practice of statistical estimation most fully developed are: models, algorithms and software of calculating of statistical estimates of stationary random processes characteristics.

Characteristics of stationary processes are: mathematical expectation, dispersion, correlation function, spectral power density and one-dimensional distribution function.

Mathematical models, algorithms and software of calculating of statistical estimates of stationary processes characteristics referred to information support of stationary processes statistical estimation.

Statistical estimates of mathematical expectation, dispersion, correlation function, spectral power density of stationary processes are calculated based on measurement data of stationary processes values.

Application of Birkhoff-Khinchin ergodic theorem gives an opportunity, while statistically estimating stationary processes characteristics, to use time averaging implementations of investigated processes.

Sufficient and necessary conditions for ergodicity of a stationary process, with respect to mathematical expectation, are based on the use of known correlation function of the process.

Characteristic features of statistical estimation as a measurement process are: formation specifics of experimental data about studying processes and their consequent digital statistical processing.

Experimental data are conditionally divided into measurement data and other observational data that gives an opportunity to provide statistical estimation of stationary processes characteristics in narrow and broad sense.

Digital time series as an implementation of studied process were used during digital statistical estimation of stationary processes characteristics.

Among basic methods of statistical estimation two methods are highlighted, one of them gives an opportunity to make estimations by averaging over the set (ensemble) of implementations of the process studied; other – by averaging of process over time.

Application of method of implementation averaging over time allows for a considerable simplification of solving calculations problems of statistical estimations of stationary processes characteristics in practice.

Mathematical model, the implementation of which is a digital time series obtained as the measurement data, is presented as a random sampling of volume  $n$  of a stationary sequence of discrete random quantities.

Statistics, when statistically estimating  $k$ -th characteristics of the stationary sequence, is defined as the corresponding function of the random sampling of a stationary sequence of discrete random quantities.

Problem of statistical estimation of studied sequence stationary is solved by applying t-Student and F-Fisher statistical criteria. Here, t-Student statistical criterion is used on the basis of statistical estimates determination of mathematical expectations and F-Fisher statistical criterion - on the basis of statistical dispersion estimates determination of two implementations on disjoint time intervals.

When calculating, based on measurement data, statistical estimates of the average (mathematical expectation) and dispersion of stationary sequence is used ergodic hypothesis.

Statistical estimation of correlation function of stationary sequence is obtained based on data measurement in form of digital time series and calculated dispersion of the estimate obtained as a central moment of the fourth order.

Obtaining technique of statistical estimation of one-dimensional distribution function of stationary sequence based on measurements data is similar to obtaining technique of statistical estimation of random quantity distribution function, but has a completely different physical interpretation: as an estimate of stationary sequence of discrete random quantities.

To determine the two-dimensional distribution function of stationary sequence based on measurement data for Gaussian distribution law statistical estimates of mathematical expectation, dispersion and correlation function are defined.

The main spectral characteristic of stationary sequence is its spectral power density. Basic applied methods of spectral density statistical estimation are: discrete Fourier transformation of studied stationary sequence implementations; discrete Fourier transformation of sequence correlation function; linear narrowband filtration.

In modern measuring information technologies is used statistical estimation of spectral density based on the use of discrete Fourier transformation of studied stationary sequence implementations. Information measurement technology of statistical estimation of stationary sequence spectral density is based on operations: centering, discrete Fourier transformation, the use of appropriate time windows and averaging over an ensemble of calculations results.

**Ключевые слова**

корреляционная теория	correlation theory
стационарный процесс	stationary process
эргодическая теорема	ergodic theorem
методы усреднения	averaging methods
статистические гипотезы	statistical hypotheses
статистическое оценивание	statistical estimation
дисперсия	dispersion
корреляционная функция	correlation function
спектральная плотность	spectral density



## ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

# 7

- 7.1. Классификация и основные характеристики измерительных преобразователей
- 7.2. Основные типы датчиков
- 7.3. Модель идеального операционного усилителя
- 7.4. Модель реального операционного усилителя
- 7.5. Погрешности преобразователей на операционных усилителях

### 7.1. Классификация и основные характеристики измерительных преобразователей

Под *измерительным преобразователем* (ИП) понимают устройство с нормированными метрологическими характеристиками, служащее для преобразования измеряемой величины в другую величину или измерительный сигнал, удобный для обработки, хранения, последующих преобразований, индикации или передачи.

По характеру преобразования различают:

*аналоговый ИП*, преобразующий одну аналоговую величину (измерительный сигнал) в другую аналоговую величину (измерительный сигнал);

*аналого-цифровой ИП*, предназначенный для преобразования аналогового измерительного сигнала в цифровой код;

*цифро-аналоговый ИП*, предназначенный для преобразования цифрового кода в аналоговую величину.

По месту в измерительной цепи различают:

*датчик*, на который непосредственно воздействует измеряемая физическая величина и который является первым преобразователем в измерительной цепи прибора;

*ИП параметров сигналов и цепей* – измерительный преобразователь, занимающий место в измерительной цепи после датчика (измерительные усилители, масштабные преобразователи, детекторы и т.п.).

По принципу действия датчики делятся на генераторные и параметрические. Процесс преобразования включает трансформацию вида энергии и состоит из восприятия входной измеряемой величины с помощью сенсора (чувствительного элемента) и последующего преобразования ее в другую форму с помощью "преобразующего элемента". Такую комбинацию отображает обобщенная модель датчика на рис. 7.1.

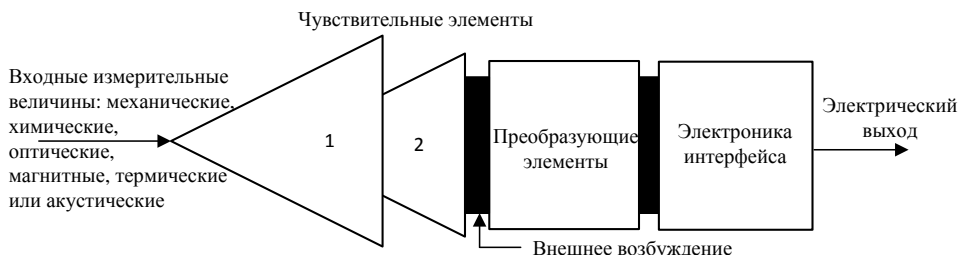


Рис. 7.1. Обобщенная модель датчика

Некоторые ИП допускают трансформацию вида энергии как в прямом, так и в обратном направлениях. Такое свойство характерно, например, для пьезоэлектрических преобразователей (прямой и обратный пьезоэффекты). Большинство датчиков не являются двунаправленными.

Классификация ИП приведена на рис. 7.2. Их принято делить на две группы: к первой относятся преобразователи, в которых происходит измене-

ние вида входной величины или датчики; ко второй группе относят ИП без изменения вида входной величины или ИП параметров сигналов и цепей. Последовательность превращений измеряемой физической величины может быть многоступенчатой, которую не всегда можно разделить на отдельные составляющие. Наибольшее распространение получили датчики с электрическим выходным сигналом и электрическим сигналом активирования (возбуждения). Каждая из выделенных групп ИП разделяется на две подгруппы: первая – на генераторные и параметрические, вторая – на активные и пассивные.



Рис. 7.2. Классификация ИП

Генераторные датчики создают необходимое напряжение или ток в процессе поглощения энергии измеряемой физической величины. Параметрические датчики питаются энергией внешнего источника. Они также могут поглощать часть энергии измеряемой величины.

Действие датчиков базируется на одном или нескольких физических явлениях или эффектах, к числу которых относятся емкостной, индуктивный и электромагнитный, резистивный и терморезистивный, пьезорезистивный, эффекты Холла, Гаусса, Доплера, пьезоэлектрический, туннельный, магниторезистивный, термоэлектрические (Зеебека и Пельтье), ионизационные, фотоэлектрический, фоторезистивный и фотогальванический и др.

На практике измерению чаще всего подлежат следующие физические величины и характеристики объектов: линейные перемещения, угловое положение объектов в пространстве, скорость, ускорение, сила, угловая скорость вращения, параметры вибрации, температура, давление, относительная влажность, шероховатость поверхности, концентрация газа и водородный



показатель, парциальное давление  $O_2$  и  $CO_2$  в крови, вращательный момент, характеристики электрического, магнитного и акустического полей и др. В табл. 7.1 приведены типы датчиков и некоторые измеряемые физические величины. Название каждого типа определяет принцип преобразования.

Таблица 7.1

Классификация датчиков	Измеряемые величины																								
	Перемещение	Положение	Скорость	Ускорение	Сила	Нагрузка	Растяжение	Крутящий момент Лин. и круг.	Преобразования Вибрация	Поток	Температура	Давление	Вакуум	Относительная влажность	Атомный контур	Газовая концентрация	Состояние крови, pH	Оптические поля	Магнитные поля	Акустические поля	Аудиополя и шум	Рентгенография	Не разрушающий контроль Измерения угловой скорости	Счетчики Гейгера-Мюллера	
Емкостные	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Индуктивные	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Электромагнитные	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Резистивные	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Тензодатчики	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Датчики деформации	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Терморезисторы	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Термисторы	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Магниторезисторы и датчики Холла	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Датчики на химич. полевых транзисторах	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Волноводные датчики	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Пьезодатчики	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Преобразователи Доплера	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Полимерные датчики	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Датчики на ПАВ	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Туннельные преобразователи	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Термодинамические датчики	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Ионизирующие датчики	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Фотонные преобразователи	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Оптоэлектронные (физ) преобразователи	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Оптоэлектронные (хим) преобразователи	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●

**Метрологические характеристики ИП.** ИП отличается от иных преобразователей тем, что имеет нормируемые метрологические характеристики (МХ). *Метрологическими характеристиками* – это технические характеристики ИП, описывающие их свойства, необходимые для выполнения ими функционального назначения и оказывающие влияние на результаты и погрешности измерений. В документации на ИП указывают следующие МХ:

*номинальная функция преобразования* (номинальная статическая характеристика преобразования) измеряемой величины в виде функции  $f(x)$ , графика или таблицы; если номинальная функция преобразования линейна и проходит через начало координат, указывается значение номинального коэффициента преобразования;

*чувствительность* – производная от номинальной функции преобразования по информативному параметру входного сигнала;

*порог чувствительности* — наименьшее изменение измеряемой величины, которое вызывает заметное изменение выходного сигнала ИП;

*погрешность* — это разность между выходным сигналом ИП и его ожидаемым значением; обусловлена отличием между номинальной и реальной функциями преобразования ИП; погрешности классифицируют следующим образом: по способу выражения — абсолютные, относительные; по характеру проявления — систематические, случайные; по отношению к условиям применения — основные, дополнительные;

*диапазон измерений* — область значений величины, в которой нормированы допускаемые пределы погрешности;

*динамические характеристики* (полные и частные), описывающие преобразование изменяющихся во времени сигналов измеряемой величины или сигналов измерительной информации; к *полным динамическим характеристикам* относятся *импульсная переходная характеристика* и *комплексная частотная характеристика*, *амплитудно-частотная характеристика* в комплекте с *фазо-частотной характеристикой*), к *частным динамическим характеристикам* относятся *время реакции* средства измерений и *граничные значения частот*, между которыми амплитудно-частотная характеристика отклоняется от номинального значения не более чем на заданную величину.

Физический смысл *импульсной переходной характеристики* — это выходной сигнал линейного аналогового ИП, возникающий, как реакция на входной сигнал в виде  $\delta$ -функции, т. е. очень короткий импульс, мощность которого достаточна для получения заметного сигнала на выходе.

*Переходная характеристика* — это выходной сигнал линейного аналогового ИП, возникающий как реакция на сигнал в виде единичного скачка.

*Амплитудно-частотная характеристика* — это зависящее от частоты отношение амплитуды синусоидального выходного сигнала к амплитуде вызвавшего его синусоидального входного сигнала.

*Фазочастотная характеристика* — это зависящий от частоты сдвиг фазы выходного синусоидального сигнала по отношению к фазе вызвавшего его синусоидального входного сигнала; фазочастотные характеристики физически реализуемых динамических звеньев отрицательны.

*Комплексная частотная характеристика* средства измерений представляет собой отношение двух полиномов от  $j\omega$ , причем степень полинома числителя не превосходит степени полинома знаменателя.

*Время реакции* средства измерений (*response time*) — интервал времени между моментом скачкообразного изменения сигнала на входе средства измерений и моментом, начиная с которого выходной сигнал отличается от установившегося значения не более чем на заданную величину (например, не более, чем на предел допускаемой основной погрешности).

Важной характеристикой датчиков является его импеданс, определяющий требования к их согласованию с последующими ИП. Импедансные характеристики некоторых датчиков приведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Датчик	Импедансная характеристика
Термопары	Низкая (< 20 Ом)
Терморезисторы	Высокая (> 1 кОм)
Резистивные датчики температуры	
	Высокая (> 1 кОм)
Тензодатчики	Низкая (< 1 кОм)
Стеклянный рН электрод	Очень высокая (10 <sup>9</sup> Ом)
Измерительный потенциометр	Высокая (500 Ом...100 кОм)

ИП для сигналов низких уровней с выхода высокоимпедансных датчиков должны быть размещены в непосредственной близости от него.

### 7.2. Основные типы датчиков

**Емкостные датчики.** С их помощью измеряют скорость, ускорение, силу, давление, уровень жидкости, влажность и другие физические величины.

Емкость между параллельными электропроводными пластинами с диэлектрическим материалом между ними определяется как

$$C_s = \epsilon_0 \epsilon_r S(n - 1) / d, \tag{7.1}$$

где  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  Ф/м - диэлектрическая постоянная;  $\epsilon_r$  - диэлектрическая проницаемость материала;  $S$  - площадь, общая для двух пластин конденсатора, м<sup>2</sup>;  $d$  - расстояние между пластинами, м;  $n$  - количество пластин.

Любые изменения входящих в формулу (7.1) параметров под действием измеряемой величины обеспечивают практические механизмы преобразования. На рис. 7.3 показаны примеры конфигураций емкостных датчиков, которые могут быть использованы для измерения различных физических величин, например: *a*, *б* – для определения смещения, силы, потока, вакуума и давления; конфигурация (*в*) – для измерения  $\epsilon_r$ , вызванной поглощением влаги или химической реакцией с диэлектрическим материалом.

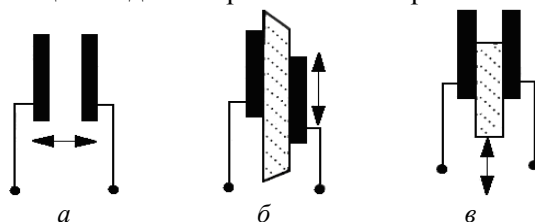


Рис. 7.3. Емкостные преобразователи перемещения

На рис. 7.4 изображен емкостной преобразователь давления, корпус которого изготовлен из плавленного кварца, имеющего незначительный температурный коэффициент расширения. Преобразователь состоит из круговой диафрагмы, неподвижно присоединенной к корпусу. Полость малого размера обеспечивает расстояние  $Z_0$  между пластинами конденсатора. Эта полость

связана с атмосферой небольшим отверстием, обеспечивающим возможность измерения атмосферного давления.

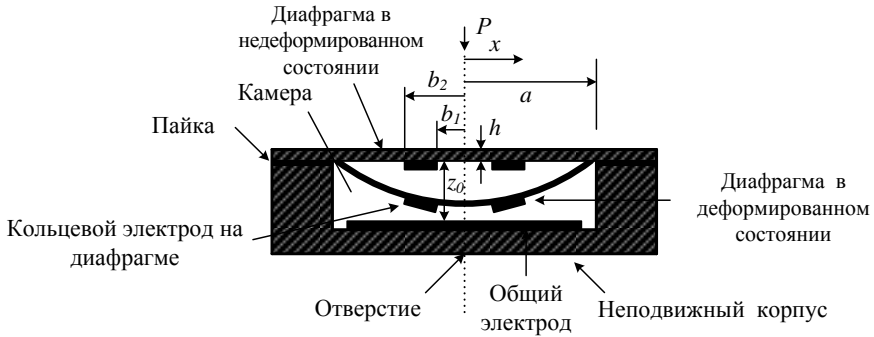


Рис. 7. 4. Емкостной преобразователь давления

Дифрагма имеет кольцеобразный электрод с металлизацией хромом или золотом на внутренней поверхности и общий электрод, размещенный в нижней части полости. Измерение емкости преобразователя измеряется в пикофарадах как функция давления  $P$  [кг/см<sup>2</sup>]:

$$\Delta C(P) \cong \frac{8,85 \cdot \pi (1 - \mu^2) a^4 (b_2^2 - b_1^2) P}{16 E Z_0^2 h^3} \quad (7.2)$$

где;  $\mu$  - коэффициент Пуассона (0,17 для плавленного кварца);  $E$  - модуль упругости Юнга ( $745 \cdot 10^3$  кг·см<sup>-2</sup> для плавленного кварца);  $a$  - радиус полости, м;  $b_1, b_2$  - внутренний и внешний радиусы электрода (м);  $h$  - толщина диафрагмы, м;  $Z_0$  - глубина полости, м.

Структура монолитного конденсаторного акселерометра показана на рис. 7.5, а.

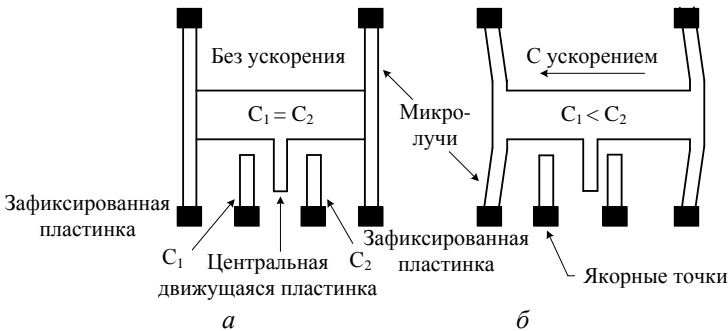


Рис. 7.5. Емкостной акселерометр

Акселерометр состоит из нескольких дифференциальных конденсаторов, а каждая конденсаторная секция - из двух неподвижных внешних пла-

стин и центральной подвижной пластины. На рис. 7.5, б показано отклоненное положение центральной пластины, когда на датчик действует сила ускорения. Изменение емкости пропорционально ускорению.

Во многих приложениях емкостные датчики включают в схему моста переменного тока для получения на выходе значения электрического сигнала, пропорционального измеряемой величине. В дифференциальном включении емкостных преобразователей чувствительность удваивается, а температурная чувствительность уменьшается. В других приложениях емкостные преобразователи включаются в колебательный контур  $LC$  генератора, частота генерации которого пропорциональна значению измеряемой величины.

**Индуктивные датчики.** Механизм преобразования заключается в том, что собственная индуктивность одной катушки или взаимная индуктивность двух катушек изменяются под действием измеряемой величины. В качестве последней могут быть линейное или вращательное перемещение, давление, сила, вращательный момент, виброскорость, ускорение. Изменения индуктивности вызываются перемещением ферромагнитного сердечника. Индуктивность катушки увеличивается, если сердечник входит в катушку, и достигает максимального значения, когда он отцентрирован по длине катушки.

Один из вариантов индуктивного датчика, показанный схематически на рис. 7.6, а, известный как преобразователь линейного перемещения на базе дифференциального трансформатора.

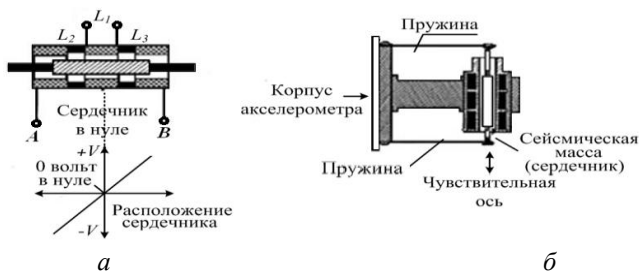


Рис. 7.6. Индуктивные датчики на преобразователях линейного перемещения на базе дифференциального трансформатора: а – линейного перемещения, б - ускорения

Датчик состоит из первичной катушки  $L_1$ , двух связанных катушек  $L_2$ ,  $L_3$  и общего ферромагнитного сердечника. Катушки намотаны на немагнитной трубке, а сердечник скользит соосно внутри трубки. Датчик предназначен для измерения силы, нагрузки, давления, вращательного момента. Схема акселерометра на его основе приведена на рис. 7.6, б. Сердечник служит сейсмической массой, а пружина обеспечивает компенсирующую силу.

Частота напряжения возбуждения для катушки  $L_1$  находится в диапазоне от 1 до 10 кГц. Катушки  $L_2$  и  $L_3$  намотаны в противофазе таким образом, чтобы напряжения, индуцируемые в них катушкой  $L_1$ , были сдвинутыми по

фазе на  $180^\circ$ . Следовательно, напряжение на клеммах  $A-B$  равно нулю в случае, когда сердечник расположен симметрично относительно катушек  $L_2$  и  $L_3$ . Когда он смещается относительно начального положения, напряжение на клеммах  $A-B$  изменяется по амплитуде и фазе.

Производятся такие датчики с диапазоном измерения от  $\pm 1$  до  $\pm 300$  мм и чувствительностью от 1,7 до 250 мВ/В/мм.

Тот же механизм преобразования на базе дифференциального трансформатора используется в преобразователях угловых перемещений и вращательного момента. Для достижения необходимой линейности угол вращения ограничен значениями  $\pm 40^\circ$ . Преобразователи линейного смещения на базе дифференциального трансформатора могут использоваться с трубками Бурдона, сильфонами и манометрами для измерения силы и давления.

**Электромагнитные датчики.** Если проводник длиной  $l$  или катушка такой же длины движется со скоростью  $ds/dt$  поперек и перпендикулярно линиям магнитного потока с индукцией  $B$ , в проводнике (катушке) в соответствии с законом Фарадея генерируется электродвижущая сила (э.д.с.)  $e(t) = Bl ds/dt$ , где  $lds$  - элемент площади, пересекаемой линиями потока за время  $dt$ ,  $Blds$  - дифференциал магнитного потока  $d\psi$  через эту площадь. Если катушка имеет  $W$  витков, то

$$e(t) = W d\psi/dt. \quad (7.3)$$

Значение э.д.с. зависит от скорости пересечения катушкой линий магнитного потока. Такой принцип преобразования используется в датчиках скорости. На рис. 7.7, *а* показаны две катушки  $L_1$  и  $L_2$ , соединенные противофазно.



Рис. 7.7. Электромагнитные датчики: *а* – линейный преобразователь скорости; *б* – преобразователь скорости потока жидкости

Измеряемая величина связана с подвижным магнитом, который свободно перемещается в катушках. Выходное напряжение пропорционально скорости движения магнита для всех его положений. Такие датчики известны как *линейные преобразователи скорости*.

Другим применением такого механизма преобразования является измерение скорости потока  $V$  электропроводящей жидкости (см. рис. 7.7, *б*). Поток направлен перпендикулярно плоскости рисунка. Магнитное поле перпендикулярно потоку. Э.д.с., генерируемая вдоль диаметра  $a-b$  перпендикулярно потоку и магнитному полю, пропорциональна скорости потока.

**Резистивные датчики.** Такие датчики применяют для преобразования перемещений, механических напряжений, давления, силы, температуры и скорости потока в электрические величины. Механизмы преобразования основаны на изменении электрического сопротивления под действием измеряемых величин. Ниже рассмотрены основные типы резистивных датчиков.

*Потенциометрический датчик* представляет механически управляемый переменный резистор. Он состоит из постоянного проволочного резистора и механического скользящего контакта, который двигается по нему и касается разных сегментов резистора, как это показано схематически на рис. 7.8 а, б, где *K* обозначает часть резистора между одним из его выводов и контактом.

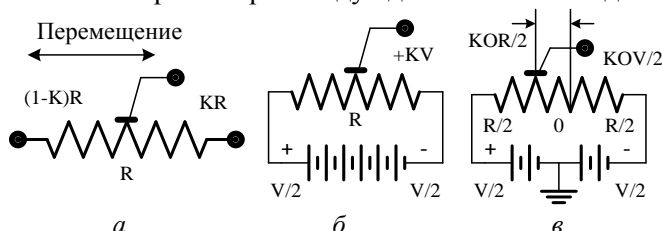


Рис. 7.8. Потенциометрические датчики перемещения : а - сопротивление пропорционально перемещению; б - напряжение пропорционально перемещению; в - перемещение измеряется относительно центральной позиции скользящего контакта

Измеряемое перемещение определяется расположением механического и электрического контактов относительно выводов резистора и пропорционально части сопротивления *KR* или части напряжения *KV*.

Разрешающая способность такого датчика зависит от диаметра провода. Для повышения разрешающей способности используют металлизированные керамические или пленочные резисторы. Если провод намотать на кольцеобразную трубку, датчик преобразует угловое перемещение механического контакта в сопротивление. Выходное напряжение *KV*, отвечающее перемещению, силе или давлению является частью внешнего значительного по величине напряжения *V*, что исключает необходимость его усиления.

*Резистивные тензодатчики.* Углеродные гранулы, упакованные в малом объеме в форме цилиндра, включенные последовательно с источником напряжения и резистором нагрузки, в прошлом использовались в качестве микрофонов. Такой же механизм используют датчики деформации на основе углеродных пластины. Позже появились проволочные, фольговые и полупроводниковые тензодатчики.

*Проволочные тензодатчики.* Сопротивление отрезка провода является функцией удельного сопротивления материала  $\rho$ , его длины *L* и площади поперечного сечения *A*:

$$R = \rho L / A. \tag{7.4}$$

Если провод растягивают, его длина увеличивается на  $\Delta L$ , диаметр уменьшается на  $\Delta d$ , а сопротивление увеличивается на  $\Delta R$  (при неизменном

р). Подставляя эти вариации в уравнение (7.4) и пренебрегая величинами второго порядка малости, получим выражение:

$$\Delta R/R = (1 + 2\mu)\Delta L/L, \quad (7.5)$$

где  $\mu$  - коэффициент Пуассона (отношение поперечного сжатия к осевому растяжению). Коэффициент тензочувствительности определяется как

$$(\Delta R/R)/(\Delta L/L) = 1 + 2\mu. \quad (7.6)$$

В датчиках струнного типа провод натянут между изолированными стойками: одна стойка присоединена к неподвижной части, а другая к перемещаемому элементу конструкции. Изменение расстояния между стойками приводит к растяжению провода и изменению его сопротивления. Этот принцип применяется в преобразователях силы и ускорения.

В тензорезисторах, жестко соединенных с поверхностью исследуемого объекта, сетка высококачественного проволочного сопротивления в форме меандра зажата между двумя тонкими слоями бумаги, пропитанной смолой для обеспечения необходимой прочности. Полученный таким способом датчик соединяется с конструктивными элементами для определения деформации в желаемом месте исследуемого объекта и в необходимом направлении.

*Фольговые тензодатчики* изготавливаются методами фотолитографии из листового константана или хромоникелевого сплава толщиной 2,5...5 мкм. Коэффициент тензочувствительности таких датчиков достигает величины 2,7. На рис. 7.9 изображен двухэлементный тензодатчик, позволяющий определять деформации в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

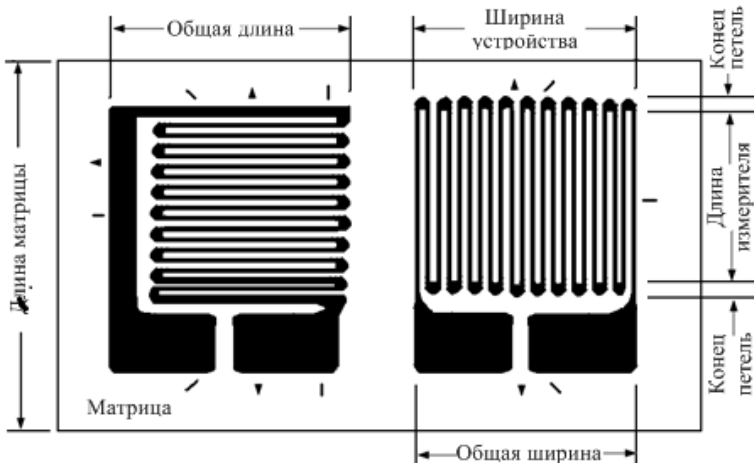


Рис. 7.9. Двухэлементный фольговый тензодатчик

Ширина и длина датчика определяют площадь поля измерения деформации. Преобразователи с большим полем используют, например, для измерения средней деформации в железобетонных брусках.



Полупроводниковые датчики деформаций работают в соответствии с механизмом преобразования, известным как *пьезорезистивный эффект*. Он заключается в изменении электрического удельного сопротивления, вызванного упругим полем деформации. В некоторых полупроводниках этот эффект является достаточно ощутимым (в сто раз больше, чем в металлических тензорезисторах).

Когда полупроводниковый преобразователь деформирован, распределение количества носителей заряда и их подвижность изменяются, следовательно, изменяется и удельное сопротивление. Коэффициент тензочувствительности полупроводниковых датчиков равен

$$G_F = (\Delta R / R) / (\Delta L / L) = 1 + 2\mu + \pi_L Y, \quad (7.7)$$

где  $\pi_L$  - продольный пьезорезистивный коэффициент;  $Y$  - модуль упругости Юнга. Первые два члена в формуле (7.7) отвечают изменениям размера подобно проволочным и фольговым тензодатчикам, третий член обусловлен пьезорезистивностью. Значение  $\pi_L$  больше, чем  $(1 + 2\mu)$ , примерно в 100 раз. Величина  $G_F$  зависит и от направления прилагаемого к датчику усилия.

Основная измерительная схема для резистивных преобразователей – мостовая схема постоянного тока Уитстона (рис. 7.10, а), которая может быть представлена в виде двух параллельно соединенных делителей напряжения, как это изображено на рис. 7.10, б. Такие схемы обычно используются для статических и динамических измерений механических деформаций.

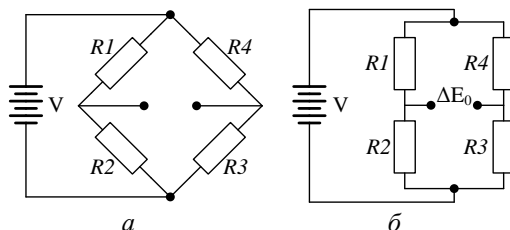


Рис. 7.10. Мост Уитстона (а) и его представление двумя делителями напряжения (б)

Вызванное деформацией тензопреобразователей изменение выходного напряжения моста равно

$$\Delta E_0 = Va(\Delta R_1/R_1 - \Delta R_2/R_2 + \Delta R_3/R_3 - \Delta R_4/R_4) / (1+a)^2 / (1-n), \quad (7.8)$$

где  $a = R_1/R_2 = R_4/R_3$ . Если  $R_3$  и  $R_4$  – постоянные резисторы, а  $R_1$  и  $R_2$  – металлические тензодатчики ( $n=0$ ) и  $a=1$ , то  $\Delta R_3$  и  $\Delta R_4$  принимаются равными нулю и формула (7.8) упрощается:

$$\Delta E_0 = V(\Delta R_1/R_1 - \Delta R_2/R_2) / 4. \quad (7.9)$$

*Терморезистивные преобразователи.* Электрическое удельное сопротивление металлов и полупроводников увеличивается при нагревании. Этот механизм используется в термометрах сопротивления (ТС), изготавливаемых

из никеля, нихрома, вольфрама, меди и платины. Платиновые ТС имеют практически линейную и высокостабильную зависимость сопротивления от температуры. Зависимость  $R_t(t^\circ)$  для платины описывается уравнением Ван-Дюзена

$$R_t(t) = R_0 \left[ 1 + At + B(t) + C(t-100)t^3 \right], \quad (7.10)$$

где  $R_t$  - сопротивление ТС при измеряемой температуре  $t$ ;  $R_0$  - сопротивление при температуре таяния льда ( $0,01^\circ\text{C}$ );  $A, B, C$  - константы Ван-Дюзена ( $C = 0$  при  $t > 0$ ).

Типичные величины коэффициентов по стандарту DIN43760 равны:  $A = 3,9080 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ;  $B = -5,8019 \cdot 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}$ ;  $C = 4,2735 \cdot 10^{-12} \text{ }^\circ\text{C}^{-4}$ . Точные величины  $A, B, C$  и  $R_0$  получают при измерении сопротивления преобразователя для четырех разных температур, включая  $t = 0^\circ\text{C}$  и решая соответствующую систему уравнений. ТС состоит из элемента сопротивления, выполненного из чистого платинового провода ( $Pt = 99,9\%$ ), внешней оболочки и соединительных проводов. ТС изготавливаются из металлической платиновой пленки с лазерной коррекцией сопротивления.

Как правило, ТС включают в плечо моста Уитстона. При этом возникает необходимость компенсации сопротивлений  $R_L$  соединительных проводов, реализуемой по трехпроводной (рис. 7.11) или четырехпроводной схеме.

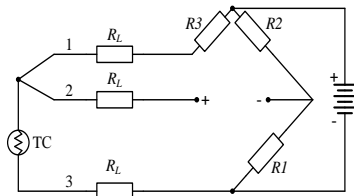


Рис. 7.11. Трехпроводный интерфейс для ТС

Действие резисторов  $R_L$  на рис. 7.11 скомпенсировано, поскольку они включены в противоположные плечи моста вместе с резистором  $R_3$  и ТС.

*Термисторные преобразователи* – температурночувствительные сопротивления в отличие от ТС имеют более



**Сэр Чарльз Уитстон**  
(*Sir Charles Wheatstone*,  
1802 - 1875),

английский физик, автор многих изобретений. В 1837 году в соавторстве с Уильямом Куком получил патент на электромагнитный телеграф и создал первую действующую телеграфную линию в Англии. В 1843 году предложил устройство для измерения сопротивления – измерительный мост.

ощутимую зависимость сопротивления от температуры, причем их ление с ростом температуры уменьшается. В термисторах используют сплавы оксидов марганца, никеля, кобальта, меди, железа и титана в форме ших шариков, пластинок или стержней.

Зависимость  $R_t(T)$  представляется полиномом третьей степени

$$\ln R_t(T) = a_0 + a_1/T + a_2/T^2 + a_3/T^3, \quad (7.11)$$

где  $R_t(T)$  - значение сопротивления при температуре  $T[K]$ ;  $a_0, a_1, a_2, a_3$  - числовые коэффициенты, для определения которых нужно иметь, как минимум, четыре точки градуировки.

Мостовые схемы Уитстона являются типичными и для термисторов. Иногда они включаются как элемент делителя напряжения (рис. 7.12). В такой схеме выходное напряжение  $e_0(t)$  увеличивается с ростом температуры:

$$e_0(t) = e_s R / [R - R_t(T)]. \quad (7.12)$$

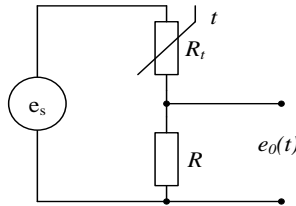


Рис. 7.12. Схема включения термистора с делителем напряжения

Правильный выбор величины  $R$  обеспечивает возможность работы на квазилинейном участке зависимости  $e_0 = f(t)$   $t$  - температура в  $^{\circ}C$ .

*Термоанемометр.* В этом датчике использовано свойство потока газа или жидкости, обтекающей чувствительный элемент с электрическим подогревом, охлаждать его. При постоянной мощности подогрева температура чувствительного элемента зависит от скорости потока. При постоянной температуре со скоростью потока связана потребляемая мощность нагрева. Термоанемометр используют для анализа микроструктуры потоков газов и жидкостей, что необходимо для изучения параметров потока при проектировании крыльев самолета, двигателей, систем вентиляции и измерений скорости крови в медицинских исследованиях. Его чувствительный элемент имеет малые размеры, изготавливается из тонких проводов и пленок, что обеспечивает высокую пространственную разрешающую способность и быстродействие.

Принцип действия таких датчиков заключается в изменении сопротивления чувствительного элемента, вызванном конвекцией тепла в потоке теплоносителя. Сопротивления терморезистора анемометра измеряют мостом Уитстона. Выходное напряжение моста в этом случае

$$e_0^2(V) = A + BV^{0.5} + CV, \quad (7.13)$$

где  $V$  - скорость теплоносителя;  $A, B, C$  - коэффициенты.

Термоанемометр состоит из терморезистивного чувствительного элемента, расположенного между двумя стержнями на опоре преобразователя. Чувствительный элемент изготавливают из платинового или вольфрамового провода малого диаметра (рис. 7.13).



Рис. 7.13. Конструкция анемометра

Чувствительным элементом пленочного термоанемометра является никелевое напыление на кварцевом волокне диаметром 70 мкм. Типичное сопротивление чувствительного элемента 3,5 Ом, а диапазон измеряемых скоростей потока – от 0,2 до 500 м/с.

**Преобразователи Холла** применяют для измерения магнитной индукции постоянных, переменных и импульсных магнитных полей. В качестве материала преобразователя используют полупроводники  $p$ - или  $n$ -типа (арсенид индия, фосфид арсенида индия и легированный кремний), в которых эффект Холла наиболее ощутим. Структуру преобразователя Холла образует кремниевый  $p$ -легированный полупроводник, расположенный в магнитном поле с индукцией  $B_z$  в направлении  $z$  и электрическом поле напряженностью  $E_x$  в направлении  $x$  (рис. 7.14).

Рабочий ток  $I_x$  проходит в направлении  $x$ . Дыры двигаются в направлении  $x$  в магнитном поле и подвергаются действию вертикально направленной силы, приводящей к накоплению дыр на поверхности и электронов на основе преобразователя, как показано на рис. 7.14. Электрическое поле  $E_y$ , известное как поле Холла, ориентировано в вертикальном направлении.

Исходя из того, что в направлении  $y$  электрический ток отсутствует, действующая на дыры сила магнитного поля уравнивается электрической силой, в результате э.д.с. Холла представляется выражением



**Эдвин Гёрберт Холл (Edwin Herbert Hall, 1855 - 1938),**

американский физик, открывший «эффект Холла». Проводил термоэлектрические исследования в Гарварде. Свой эксперимент Холл выполнил на золотой пластинке, размещенной на стекле, при пропускании через которую электрического тока возникла разность потенциалов на боковых краях пластины в магнитном поле.

$$V_H = R_H (I_x B_z) / h, \quad (7.15)$$

где  $R_H$  - постоянная Холла (отрицательная величина для полупроводника  $n$ -типа),  $h$  - толщина чувствительного элемента, параллельная  $B_z$ .

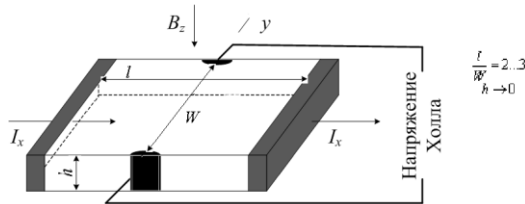


Рис. 7.14. Структура преобразователя Холла

С эффектом Холла тесно связан *магниторезистивный эффект*. Если длина  $l$  преобразователя намного меньше его ширины  $W$ , э.д.с. Холла может быть почти замкнута накоротко. Как следствие, носители заряда двигаются под углом Холла в направлении  $x$ . Увеличение длины пробега носителей заряда вызывает увеличение сопротивления устройства, которое и составляет суть магниторезистивного эффекта. На основе этого эффекта созданы преобразователи для измерения угловой скорости железных зубчатых колес.

**Датчики на основе химических полевых транзисторов (ChemFET).**

Преобразователи на химических полевых транзисторах (ХимПТ) базируются на принципе действия металл-окись-полупроводникового полевого транзистора (МОПТТ) с индуцируемым каналом. На затворы таких транзисторов наносятся один или несколько слоев специальных покрытий, способных реагировать на определенные химические вещества. Эти химические вещества, воздействуя на затвор транзистора, изменяют его проводимость между стоком и истоком. Величина этих изменений определяется типом химического вещества. На рис. 7.15 приведена структура ХимПТ, содержащего исток, сток и канал прохождения тока из истока к стоку.

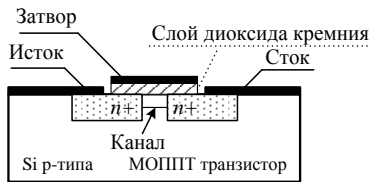


Рис. 7.15. Структура химического полевого транзистора

Для создания активных поверхностных мембран используют разнообразные окислы для обнаружения различных ионов. В настоящее время разработаны датчики водорода, аммиака, сероводорода, углеводов, спиртов и др.

Двумя важными примерами ХимПТ преобразователей являются МОПТТ с затвором из палладия ( $Pd$ ), чувствительные к газообразному водороду и ионам. Молекулярный водород (объект исследования) в воздухе по-

глощается поверхностью затвора, где он поддается каталитическому разложению в атомарный водород ( $H$ ). Атомарный водород, распространяясь на большую часть электрода из палладия, формирует дипольный слой в поверхности  $Pd - SiO_2$ . Дипольная поляризация модулирует ток канала прямо пропорционально концентрации ионов водорода. В другом ХимПТ платиновая пленка толщиной 10 нм, нанесенная технологией осаждения на поверхность  $Pd$  электрода затвора, позволяет измерять концентрацию аммиака ( $NH_3$ ). Если электрод затвора выполнен из перфорированной платиновой пленки, то ХимПТ обеспечит измерение концентрации монооксида углерода. Для увеличения быстродействия (скорость диффузии мала) используют внешний нагреватель (до 150 °С).

Существуют химические полевые транзисторы, позволяющие детектировать водород в воздухе, кислород в крови, некоторые опасные для здоровья человека газы, взрывоопасные вещества

Устройства данного типа используют и для создания *биодатчиков*. При этом в качестве селективной мембраны используются органические материалы. Их можно применять непосредственно на живом организме.

**Пьезоэлектрические датчики.** Пьезоэлектричество названо так от греческого слова "piezein" – прессовать. Когда пьезоэлектрический кристалл деформирован прилагаемым давлением, в нем возникает электрическая поляризация, пропорциональная по величине и знаку механическому напряжению, – это прямой пьезоэлектрический эффект. Обратный эффект имеет место, когда электрическое поле вызывает упругую деформацию того же кристалла.

Типичными материалами, используемыми в таких преобразователях, являются кристаллический кварц, ниобат лития, некоторые виды поляризуемой ферроэлектрической керамики, ферроэлектрические полимеры, осажденные или напыленные пленки сульфида кадмия и оксида цинка.

Ферроэлектрическая керамика приобретает пьезоэлектрические свойства только после того, как она была поляризована. Поляризация достигается приложением высокого напряжения постоянного тока к электродам, размещенным на боковых поверхностях пластины при высокой температуре.

Преобразователи бывают прямоугольными, круговыми с параллельными поверхностями, со сферической кривизной. Эффективность преобразования датчиков определяется коэффициентом электромеханической связи  $K$ :

$$K^2 = \frac{\text{механическая энергия, превращенная в электрическую энергию}}{\text{входная механическая энергия}}$$

для прямого пьезоэлектрического эффекта, и

$$K^2 = \frac{\text{электрическая энергия, превращенная в механическую энергию}}{\text{входная электрическая энергия}}$$

для обратного пьезоэлектрического эффекта.

Коэффициент  $K^2$  всегда меньше 1. Типичные величины  $K$  для кварца – 0,1, для ферроэлектрической керамики – 0,5...0,7, для ферроэлектрических полимеров – 0,2...0,3.

Важным параметром, необходимым для расчета преобразователей и их согласования с объектом контроля, является акустический импеданс  $Z_0[Peйт]=V\rho$ , где  $V$  - скорость продольной акустической волны в материале датчика;  $\rho$  - плотность материала датчика.

Пьезоэлектрические преобразователи обычно используют для генерации продольных или поперечных волн, распространяющихся со скоростью  $V_L$  и  $V_s$  соответственно. В продольной волне сила сжатия и движение частиц происходит в направлении распространения волны. Движение частиц в поперечной волне перпендикулярно направлению распространения волны.

В некоторых преобразователях, используются поверхностные акустические волны (ПАВ), распространяющиеся в приповерхностном слое твердой среды, где сосредоточена большая часть их энергии. ПАВ распространяются со скоростью  $V_R < V_L, V_s$ .

Максимум энергии переносится от преобразователя в другую среду, когда импеданс его материала  $Z_M$  равен импедансу преобразователя  $Z_0$ . Для оптимизации условий передачи используется четвертьволновой согласующий слой, акустический импеданс которого  $Z_{сл} \approx \sqrt{Z_0 Z_M}$ , а его толщина в четыре раза меньше длины продольной волны в материале объекта контроля. Для улучшения согласования могут использоваться несколько промежуточных слоев (четвертьволновой трансформатор).

**Пьезопреобразователи продольной волны.** На рис. 7.16 показаны пьезопреобразователи с двумя нанесенными на их поверхности электродами, ориентированными перпендикулярно направлению излучения/приема. Генератор электрических сигналов частотой  $f_0$  соединяется электрически с электродами излучающего преобразователя. Образованные продольные волны со скоростью  $V_L$  распространяются в материале. Максимальное возбуждение имеет место, когда толщина  $t$  активного элемента пьезопреобразователя равна половине длины волны в нем:

$$t = V_L / 2f_0. \quad (7.16)$$

Чаще всего одноэлементные пьезопреобразователи используются в системах ультразвукового контроля и измерений. В неразрушающем контроле и медицинских ультразвуковых обследованиях применяют преобразователи в диапазоне частот от 100 кГц до 50 МГц.

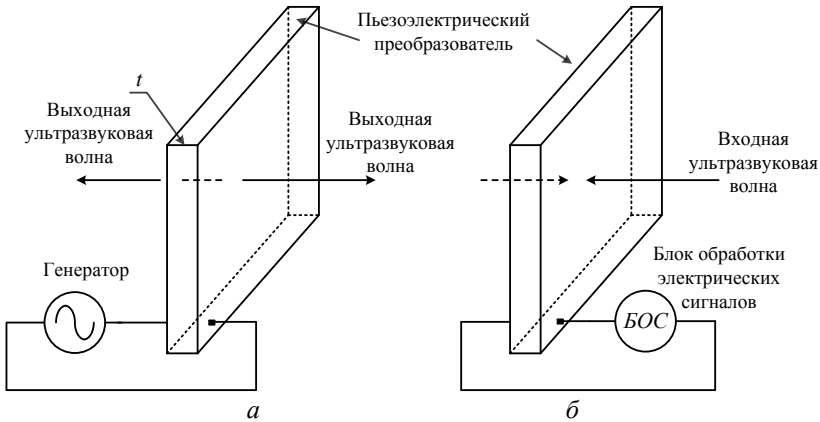


Рис. 7.16. Преобразователь волны продольного типа в режимах: *а* - генерирования (обратный пьезоэффект); *б* - приема (прямой пьезоэффект)

На рис. 7.17 показана осевая (пунктирная линия) и поперечные области ультразвукового поля круглого поршневого преобразователя.

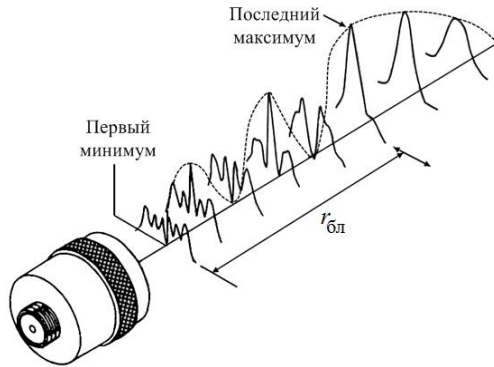


Рис. 7.17. Распределение осевого поля акустического давления одноэлементного преобразователя

Осевое поле акустического давления делится на две области – ближнее поле (область Френеля) протяженностью  $r_{\text{бл}}$  и дальнее поле (область Фраунгофера). В области Френеля поле имеет серию максимумов и минимумов и заканчивается последним энергетическим максимумом, который считается *эффективным фокусом преобразователя* (границей ближней зоны).

Граница ближней зоны определяется по формуле

$$r_{\text{бл}} = \left( D^2 / 4\lambda - \lambda / 4 \right), \quad (7.17)$$

где  $D$  - диаметр элемента преобразователя;  $\lambda = V_M / f_0$  - длина волны в среде распространения;  $V_M$  - скорость распространения волны в среде.

Диаметр луча (на уровне -6 dB) и эффективный фокус связаны соотношением



$$\text{Лучевой диаметр} = 1,028FV_M / f_0D, \quad (7.18)$$

где  $F$  - эффективное фокусное расстояние в среде.

Фокусировка излучения достигается применением акустических линз или использованием сферического пьезопреобразователя.

**Преобразователи для медицинских исследований.** Ультразвуковые формирователи изображений внутренних органов используются для визуализации и отражения неоднородности акустического импеданса в биологических средах путем распространения в нем короткого ультразвукового импульса, как показано на рис 7.18. Этот метод известен как технология *импульсной эхолокации* и широко используется в медицине.

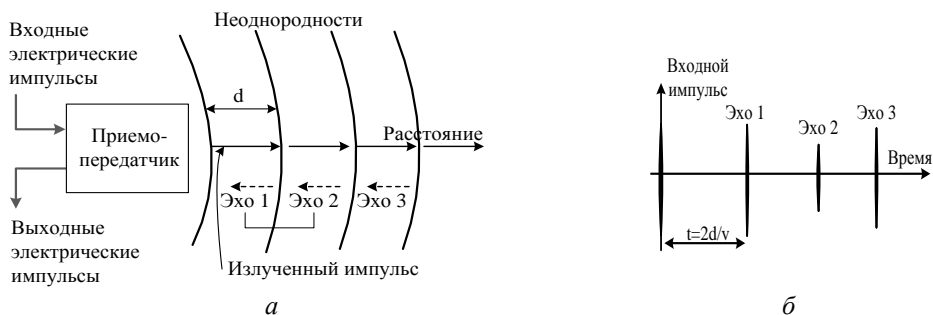


Рис. 7.18. Иллюстрация принципа импульсной эхолокации: *a* - формирование сигналов импульсной эхолокации; *б* - временное положение электрических эхоимпульсов

Ультразвуковой приемопередатчик (ПП) возбуждается электрическим импульсом и соответствующий акустический импульс распространяется в среде со скоростью  $V$  и взаимодействует с неоднородностью акустического импеданса на расстоянии  $d$ . На этой неоднородности часть энергии импульса отражается в обратном направлении. Первые отраженные импульсы возвращаются к тому же преобразователю ПП, который преобразует акустический сигнал в электрический. Полное время распространения сигнала в среде на расстояние  $2d$  определяется как  $t_v = 2d/V_M$ , откуда  $d = V_M t_v / 2$ .

На рис.7.19 показана система визуализации внутренних стенок кровеносного сосуда. В центре артерии находится миниатюрный одноэлементный преобразователь, который посылает ультразвуковой импульс к ее стенкам и остается в том же положении до получения отклика от неоднородности среды. После этого преобразователь поворачивается на некоторый угол и получает отклик с другого направления. Процесс сканирования повторяется до полного оборота преобразователя. Все отраженные импульсы запоминаются и обрабатываются компьютером, формирующим изображение сечения кровеносного сосуда.

**Преобразователи угла луча** используются в неразрушающем контроле для трансформации продольных ультразвуковых волн в другие виды волн.

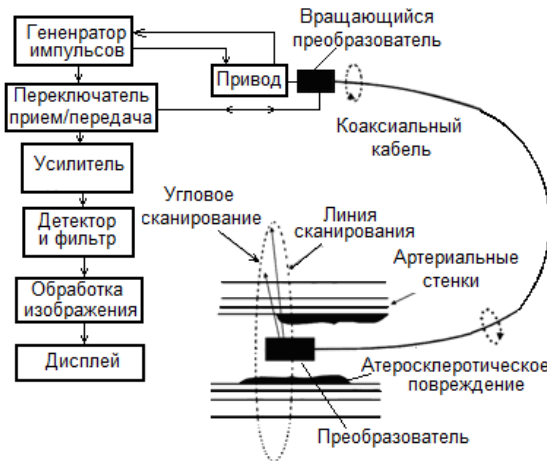


Рис. 7.19. Система визуального исследования внутренних стенок артерий

Преобразователи угла луча основываются на том, что продольная волна при переходе границы двух твердых тел 1 и 2 при угле падения  $\theta_{L1}$  (в пределах первого и второго критических углов) превращается в преломленную поперечную волну и преломленную продольную волну, распространяющиеся в твердом теле 2, как показано на рис. 7.20.

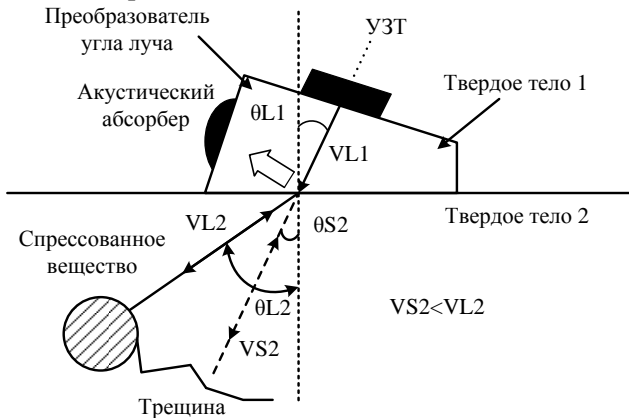


Рис. 7.20. Преобразователь угла луча

Направление преломленных волн подчиняется закону Снелла:  $\sin \theta_{L1}/V_{L1} = \sin \theta_{L2}/V_{L2} = \sin \theta_{S2}/V_{S2}$ . Эти волны используются для обнаружения трещин в



**Виллеброрд Снелл (Willebrord Snel van Royen, 1580 - 1626),**

голландский математик, физик и астроном. Предложил использовать метод подобия треугольников в геодезических измерениях. В 1621 году открыл закон преломления света. Однако результаты многочисленных экспериментов по оптике опубликованы не были. Позже они были обнаружены в архивах Рене Декартом, и использованы в его трудах.



**Кристиан Доплер**  
(*Christian Doppler*,  
1803 -1853),

австрийский физик. Научные труды в таких областях оптики, акустики. Основные труды выполнены по абберации света, теории микроскопа и оптического даль-номера, теории цвето-в. Теоретически обосновал зависимость частоты колебаний, воспринимаемых наблюдателем, от скорости и направле-ния движения источ-ника волн относитель-но наблюдателя.

сварных конструкциях и других структурных дефектах материалов.

Согласно закону Снелла, если  $\theta_{L1}$  увеличивается,  $\theta_{L2}$  и  $\theta_{S2}$  также увеличиваются. Если  $\theta_{L1}$  достигает критического значения,  $\theta_{L2}$  становится равным  $90^\circ$  и продольная волна  $V_{L2}$  исчезает – в твердом теле 2 рас-пространяется только волна сдвига со скоростью  $V_{S2}$ . Если  $\theta_{L1}$  значительно превышает критическое значе-ние, волна сдвига превращается в поверхностную вол-ну, которая распространяется в приповерхностном слое твердого тела 2. Этот тип волн используется в нераз-рушающем контроле для выявления поверхностных трещин.

**Преобразователи, основанные на эффекте Доп-лера.** Когда упругая волна частотой  $f_0$  отражается от движущегося со скоростью  $V$  объекта, частота отра-женного сигнала отлична от  $f_0$ . Такое смещение час-тоты называется *эффектом Доплера*. Частота увеличи-вается при движении объекта к наблюдателю, и уменьшается при отдалении. Смещение частоты вслед-ствие эффекта Доплера пропорционально скорости движущегося объекта

$$f_D = 2f_0 V \cos \theta / C, \quad (7.19)$$

где  $f_D$  - сдвиг частоты Доплера;  $C$  - скорость ультра-звука в среде;  $\theta$  - угол между векторами скорости  $V$  объекта и направлением ультразвукового луча.

Для измерения скорости потока жидкости с по-мощью эффекта Доплера используются два метода. Метод непрерывного излучения применяют для опре-деления скорости потока суспензии в трубе (рис. 7.21 а). Передающий сигнал от преобразователя 1 частично отражается частицами или пузырьками газа в жидко-сти. Преобразователь 2 принимает рассеянный сигнал, который сравнивается по частоте с излучаемым сигна-лом для определения  $f_D$ . Скорость  $V$  определяется выражением (7.19). Второй метод – метод пульсирую-щей волны – используется в медицинской диагностике для измерения скорости тока крови в небольшом объе-ме или на отдельных участках коронарной артерии (см. рис. 7.21, б). В одной из реализаций преобразователь

имеет 0,45 мм в диаметре и состоит из гибкого соединительного кабеля, в наконечнике которого находится лучатель сигналов частотой 12 МГц.

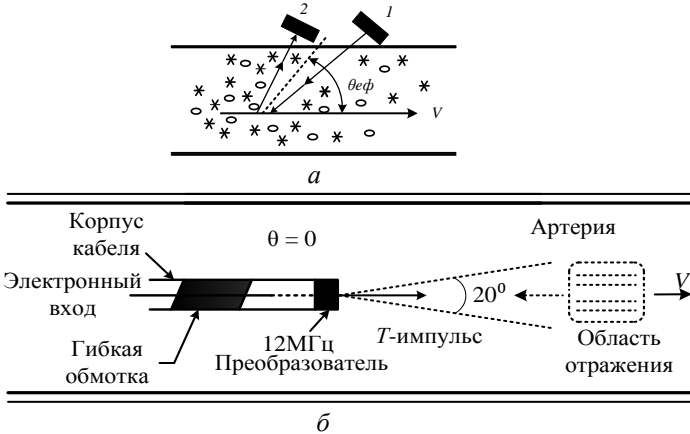


Рис. 7.21. Измерение скорости потока жидкости по эффекту Доплера: *a* - метод непрерывного излучения; *б* - метод пульсирующей волны

**Преобразователи перемещения на туннельном эффекте.** В 1986 году ученые Герд Биннинг и Генрих Рорер (Швейцария) получили Нобелевскую премию по физике за разработку сканирующего туннельного микроскопа (СТМ). Физической основой преобразователя профиля поверхности (ППП) в СТМ есть явление электронного туннеля, представляющее поток электронов между двумя проводящими поверхностями под воздействием напряжения смещения. Результирующий ток, или *туннельный эффект*, является мерой расстояния между этими проводящими поверхностями. На рис. 7.22 показан механизм действия ППП.

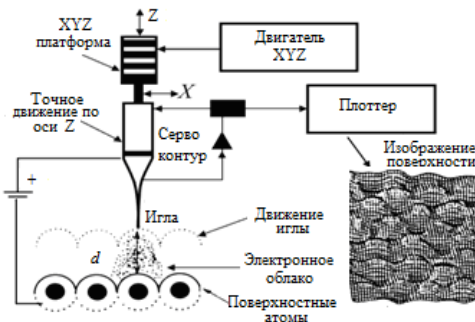
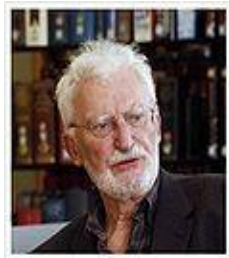


Рис. 7.22. Иллюстрация принципа действия ППП



**Герд Карл Бинниг (Gerd Karl Binnig, 1947),**

немецкий физик, в 1986 году совместно с Генрихом Рорером получил Нобелевскую премию по физике за изобретение сканирующего туннельного микроскопа. Разработки Биннига расширили возможности нанотехнологий, позволив не только визуализировать отдельные атомы, но и манипулировать ими.



**Генрих Рорер (Heinrich Rohrer, 1933- 2013),**

швейцарский физик, лауреат Нобелевской премии по физике в 1986 г. (половина премии, совместно с Гердом Биннигом «за изобретение сканирующего туннельного микроскопа»).

На практике один из проводников заменяется чрезвычайно острым наконечником, а другой – поверхностью с измеряемым профилем. Когда облака электронов, которые окружают наконечник и измеряемую поверхность, между которыми приложено напряжение смещения, частично перекрываются, между ними возникает туннельный ток  $I_t(d) \equiv e^{-2d/S_0}$ , где  $d$  - расстояние между наконечником и поверхностью,  $S_0$  - константа.

Туннельный ток – чрезвычайно чувствительная функция расстояния  $d$ . Например, изменение расстояния  $d$  на величину, равную одному атомному диаметру, вызывает изменение тока в 1000 раз. ППП использует эту чувствительность в СТМ для представления геометрии поверхности материалов на атомарном уровне.

**Термодинамические преобразователи.** В термодинамических системах перенос тепла от одного элемента к другому возникает каждый раз, когда есть разница температур между ними. Перенос тепла осуществляется благодаря теплопроводности, конвекции и излучению.

Калибровка платиновых термометров сопротивления, термопар и измерения тепловых потоков требуют точного определения температуры. Международный комитет мер и весов принял Международную температурную шкалу ITS-90. Эта шкала основана на шести реперных точках температурных фазовых равновесий – затвердения и кипения, а также на интерполяционных уравнениях между ними. Например, в диапазоне температур от  $-182,97$  до  $630,5$  °C как эталонный интерполяционный прибор используют платиновые термометры сопротивления.

В качестве единицы измерения используют кельвин – единицу термодинамической шкалы. В зависимости от того, какая температура принимается равной нулю, используют шкалу Кельвина  $T_{90}$  (абсолютный ноль 0 К) или шкалу Цельсия  $t_{90}$  (тройная точка воды  $0,01$  °C). Соотношение между ними:  $t_{90} = T_{90} - 273,15$ .

ITS-90 определяет специфику температур реперных точек, соответствующих разным состояниям вещества, подобно температуре тройной точки воды ( $0,01$ °C, или 273,16 К). Эти реперные точки используются в калибровке платиновых термометров сопротивления и термопар для оценки коэффициентов многочленов, которые представляют их функцию преобразования.

Согласно ITS-90 платиновый термометр сопротивления в диапазоне температур от  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  до температуры затвердевания алюминия, может быть откалиброван при температуре тройной точки воды ( $0,01\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) и точках затвердевания олова ( $231,928^{\circ}\text{C}$ ), цинка ( $419,527\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) и алюминия ( $660,323\text{ }^{\circ}\text{C}$  или  $933,473\text{ K}$ ).

**Термопары.** Когда два металлических разнородных проводника 1 и 2 соединяются концами, которые удерживаются при разных температурах  $T_i$  и  $T_o$ , возникнет ток в результате *эффекта Зеебека* (рис. 7.23, а). Если разорвать этот замкнутый контур, то на свободных концах возникнет напряжение, прямо пропорциональное разнице температур  $T_i$  и  $T_o$ . Коэффициент пропорциональности называется *коэффициентом Зеебека*. Если обеспечить постоянное значение температуры  $T_o$ , измеряемое напряжение будет прямо пропорциональным измеряемой температуре  $T_i$ .



**Томас Иоганн Зеебек**  
(*Thomas Johann Seebeck*,  
1770 -1831),

немецкий физик. сделал несколько открытий в оптике, акустике, учении о теплоте, но особенно - в области электричества, где в 1821 г. открыл и исследовал термоэлектрические токи.

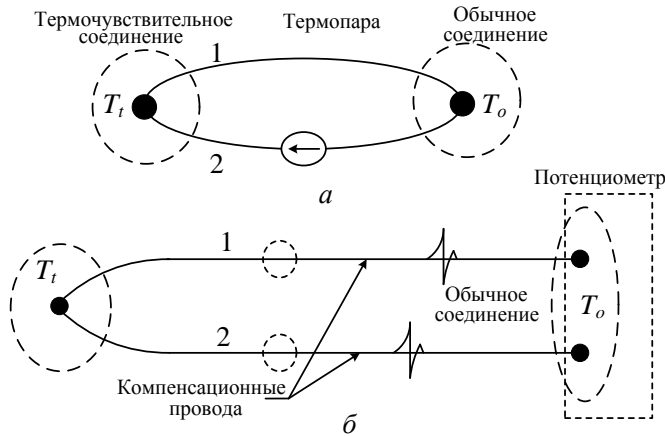


Рис. 7.23. Термопары: а - возникновение термо-э.д.с. по эффекту Зеебека; б - подключение термопары к потенциометру

Обратный *эффект Пельтье* заключается в том, что температура спая разнородных металлов может повышаться или понижаться в зависимости от направления тока внешнего источника, подключенного к свободным концам разомкнутого контура. Приборы, принцип работы которых основан на использовании эффекта Пельтье, называются *элементами Пельтье*. На рис. 7.23, б показано подключение термопары, когда измерительное оборудование удалено от термочувстви-



**Жан Шарль Пельтье**  
(*Jean-Charles Peltier*,  
1785 - 1845),

французский физик, автор трудов по термоэлектричеству, электромагнитизму, метеорологии. Ему принадлежит открытие в 1834 году явления выделения или поглощения тепла при прохождении электрического тока через контакт двух разнородных проводников,

тельного спая. В этом случае используются соединительные компенсационные провода, а эталонный спай формируется непосредственно около измерительного оборудования и должен поддерживаться при постоянной температуре  $T_0$ . Чаше компенсация влияния изменения  $T_0$  осуществляется автоматически внесением поправок. Свойства некоторых термопар приведены в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Тип	Состав	Диапазон температур, °С	Среда (оголенный провод)	Напряжение, мВ при 500 °С
В	Платина 30 % + родий с платина 6 % + родий	0÷1700	Окисленная или инертная; не вставляется в металлические трубы; используется в стекольной индустрии	1,241
Е	Никель+хром (хромель) с медь + никель (константан)	-200÷900	Окисленная или инертная; ограничено применение в вакууме	36,99
J	Железо с медь + никель	0÷750	Вакуум, инертная; ограничено применение в окисленной среде при высокой температуре	27,388
К	Никель + хром (хромель) с никель + алюминий (алюмель)	-200÷1250	Окисленная или инертная; используется в вакууме; широкий температурный диапазон	20,64
Р	Платина 13 % + родий с платиной	0÷1450	Окисленная или инертная; не вставляется в металлические трубы	4,471
Т	Медь с медь + никель (константан)	-200÷350	Мягко окисленная, вакуум или инертная; низкотемпературное или криогенное применение	20,869 мВ при 400 °С

Традиционно для измерения э.д.с. термопары используется вольтметр компенсационного типа (потенциометр).

Широко применяются цифровые мультиметры с автоматической компенсацией температуры  $T_0$  наиболее популярных типов термопар.

Термопары применяют для измерения температуры различных объектов и сред, а также в системах управления и контроля. Термопары из вольфрам-рениевого сплава являются самыми высокотемпературными контактными датчиками температуры. Они незаменимы в металлургии для контроля температуры расплавленных металлов.

Используемые в промышленности термопары изготавливаются из ограниченного количества комбинаций металлов.

**Преобразователи для вакуума.** Термопары могут также использоваться для мониторинга давления, меньшего, чем атмосферное (вакуум), в диапазоне от 2 до  $10^{-3}$  Торр (1 Торр = 1 мм рт. ст. – внесистемная единица, названная в честь Э. Торричелли). Преобразователь состоит из нити накаливания, по которой протекает постоянный ток от источника тока, а также термопары, находящейся в тепловом контакте с нитью для измерения ее температуры. Преобразователь размещают в измерительной камере, соединенной с емкостью, давление газа в которой подлежит измерению (рис.7.24).

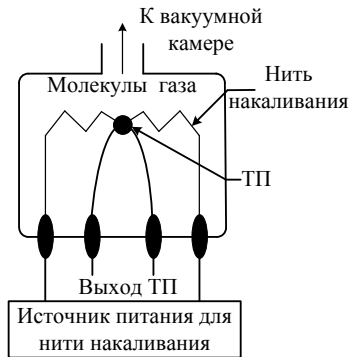


Рис. 7.24. Термоэлектрический преобразователь вакуума

Принцип преобразования основан на зависимости теплопроводности газа от давления при малых давлениях, когда свободный пробег молекул газа сравним с размерами нити накаливания. Выходное напряжение термопары пропорционально измеряемому давлению. Для увеличения чувствительности несколько термопар соединяют последовательно в термобатарее.

Принцип действия преобразователя Пирани аналогичен вышеупомянутому; различие заключается в том, что температура нити накаливания определяется не с помощью термопары, а измерением ее сопротивления с помощью моста Уитстона. Выходное напряжение неуравновешенного моста пропорционально измеряемому давлению. Диапазон измерений – от  $10^{-3}$  до 100 Торр. Верхний предел измерения можно увеличен до 1000 Торр.

**Кварцевый термометр.** Если пластина кристалла кварца включается в стандартный генератор вместо резонансного контура, получаем генератор,



частота которого определяется кварцевой пластиной (рис. 7.25). Характеристики такого генератора зависят от геометрии и ориентации пластины относительно кристаллографических осей. В кварцевых термометрах механизм преобразования базируется на зависимости упругих и пьезоэлектрических свойств кварцевой пластины от температуры.

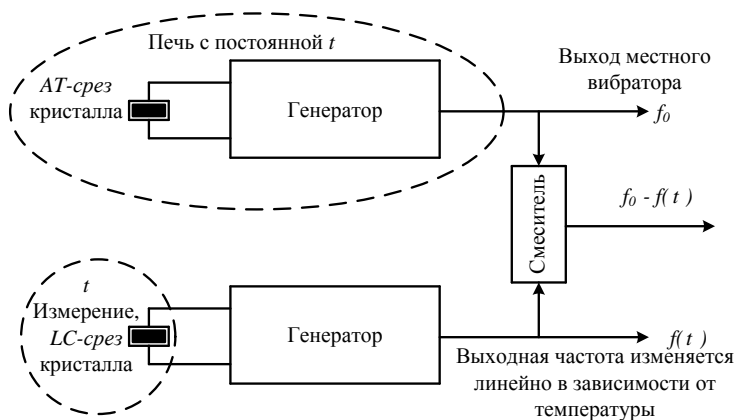


Рис. 7.25. Кварцевый термометр

Частоту генератора можно представить в виде многочлена третьей степени от температуры  $t$  с точкой калибровки при  $t_k = 25^\circ \text{C}$

$$f(t) = f_{25} \left[ 1 + A(t - 25) + B(t - 25)^2 + C(t - 25)^3 \right], \quad (7.20)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  - коэффициенты;  $f_{25}$  - частота генератора при  $t = t_k$ .

Хаммонд выявил срез, где  $A$  был большим, а  $B$  и  $C$  были одновременно нулевыми, и обозначил его как срез с линейным коэффициентом ( $LC$ ). Пластины с таким срезом используются в качестве чувствительного элемента в кварцевых термометрах. На рис. 7.25 показан генератор, который использует  $LC$ -срез кристалла кварца. Его выходное напряжение имеет частоту, линейно связанную с измеряемой температурой.

Выходные сигналы двух генераторов смешиваются. Разностная частота сигнала смесителя линейно зависит от температуры. Кварцевый термометр измеряет температуру в диапазоне от  $-80$  до  $250^\circ \text{C}$  с точностью  $\pm 0,075^\circ \text{C}$ . Чувствительность составляет  $1000 \text{ Гц}/^\circ \text{C}$ , что отвечает  $0,0001^\circ \text{C}$ .

**Ионизационные преобразователи.** Ионизационные датчики используются для измерения давлений меньше атмосферного. Принцип преобразования базируется на создании позитивных ионов из молекул газа, находящихся в измерительной камере. Эти ионы образуются в результате столкновений между молекулами газа и электронами высокой энергии, которые генерируются специально для этой цели. Результирующий ионный ток пропорционален давлению газа в измерительной камере.

**Датчики вакуума с горячим катодом.** Триод или ионизационный пре-

образователь термоэлектрической эмиссии является ионизационным датчиком вакуума с горячим катодом. Структура такого преобразователя и поперечный разрез датчика показаны на рис. 7.26.

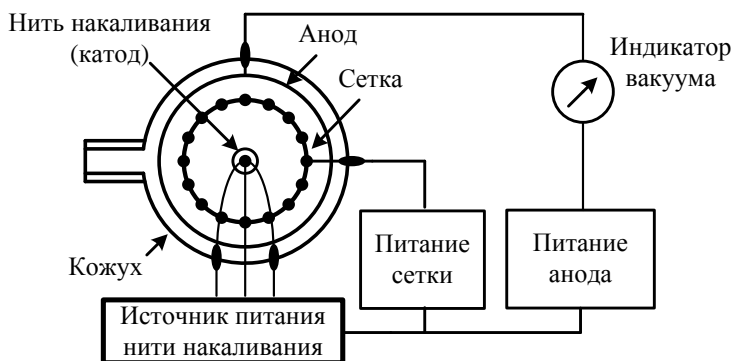


Рис. 7.26. Ионизационный ИП вакуума с горячим катодом

Датчик состоит из катода в центре, подогреваемого с помощью вольфрамовой нити. Концентрически с катодом расположена сетка в виде спирали из никелевого провода и закреплена справа к баллону (через точку крепления осуществляется питание сетки). Окружает сетку концентрический анод из листового никеля. Датчик размещен в баллоне, соединенном с емкостью, давление в которой измеряется.

В таком преобразователе электроны ускоряются в пространстве между катодом и сеткой напряжением 180 В. Большинство электронов не захватываются сеткой и направляются дальше к аноду, который имеет потенциал относительно катода – 20 В. Когда электроны двигаются вблизи анода, они отталкиваются его отрицательным потенциалом и опять подвергаются влиянию положительного потенциала сетки. Таким образом, электроны осуществляют несколько колебаний между сеткой и анодом, сталкиваясь с молекулами газа и создавая положительные ионы.

Когда электрон теряет свою кинетическую энергию, он перехватывается сеткой. Ионы притягиваются к аноду, который имеет отрицательный потенциал, образуя анодный (коллекторный) ток, величина которого пропорциональна измеряемому давлению. Эффективный диапазон измерения давления такого датчика составляет  $10^{-8} \div 10^{-3}$  мм рт. ст.

**Датчик вакуума с холодным катодом.** В таком датчике электроны генерируются мощным электрическим полем (2 кВ) вместо горячего катода. Датчик состоит из двух плоских катодов, которые изготовлены из циркония или тория. В пространстве между этими катодами размещен кольцевой анод. Постоянный магнит образует магнитное поле, перпендикулярное плоскости катодов, как показано схематически на рис. 7. 27.

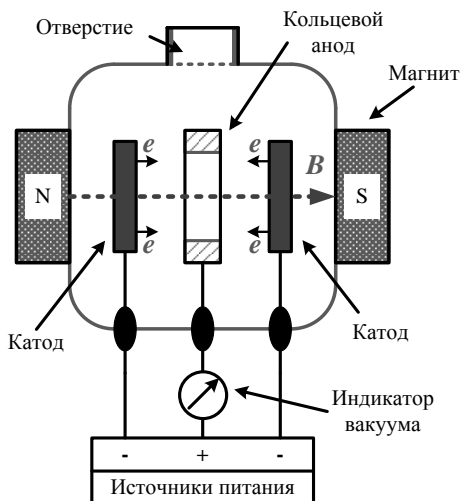


Рис. 7.27. Датчик вакуума с холодным катодом

Такая конструкция известна как датчик Пеннинга или Филлипса. Высокое напряжение, прилагаемое между анодом и катодами, вызывает эмиссию электронов из холодного катода. Эти электроны при наличии магнитного поля с индукцией  $B$  двигаются по спиральным траекториям в направлении положительно смещенного кольцевого анода, который находится под положительным потенциалом относительно катода. Только некоторая часть электронов перехватывается анодом, а остальные несколько раз проходят через кольцевой анод и ионизируют газ.

Позитивные ионы, собранные отрицательно смещенными катодами, вызывают ионный ток, пропорциональный измеряемому давлению. Диапазон измерения давления таким датчиком составляет  $10^{-8} \div 2 \cdot 10^{-2}$  мм рт. ст.

**Фотометрические преобразователи** используются для измерения интенсивности света путем измерения квантов света или фотонов. В этих устройствах энергия фотонов преобразуется в пропорциональный электрический сигнал с помощью следующих детекторов:

*фотоэмиссионных детекторов*, в которых энергия фотона выбивает электрон из металлической поверхности (внешний фотоэффект), размещенной в вакуумном или газонаполненном баллоне;

*фоторезистивных детекторов* – преобразователей, в которых входная фотонная энергия создает электронно-дырочные пары (внутренний фотоэффект), которые изменяют проводимость или сопротивление полупроводника, увеличивая число свободных носителей заряда;

*фотодиодных детекторов* – устройств, в  $p-n$  переходе которых входные фотоны также образуют электронно-дырочные пары. Эти электроны и дыры создают дополнительные условия для изменения электропроводности.

Такие детекторы могут использоваться в фоторезистивном (пассивном) или фотогальваническом (активном) режимах.

Энергия фотона, выраженная в электрон-вольтах, составляет:

$$E_{ph} = (4,13 \cdot 10^{-15})f . \quad (7.21)$$

Энергия  $E_{ph}$  пропорциональна частоте света  $f$  и обратно пропорциональна длине световой волны  $\lambda$ . Существует предел длины волны  $\lambda$ , выше которой детектор будет закрыт в силу того, что энергия  $E_{ph}$  меньше энергии выхода электрона в фотоэлектрическом детекторе и энергии преодоления потенциального барьера в фотодиодном детекторе.

Фотоэмиссионные или фотоэлектрические преобразователи действуют на базе внешнего фотоэлектрического эффекта, заключающегося в том, что электроны оставляют металлическую поверхность после поглощения энергии фотона. Вся энергия фотона передается одному электрону в металле, и этот электрон, получивший энергию выхода  $E_w$ , отделяется от металлической поверхности с кинетической энергией в соответствии с уравнением Эйнштейна для фотоэлектрического эффекта

$$mv^2/2 = E_{ph} - E_w , \quad (7.22)$$

где  $v$  - скорость выходящего электрона;  $m$  - масса электрона;  $E_w$  - энергия выхода, необходимая электрону на уровне Ферми чтобы покинуть поверхность металла с наибольшей кинетической энергией.

**Фотоэмиссионный детектор** – основной компонент вакуумных или газонаполненных фотоэлементов или фотоумножителей. Фотоэлемент состоит из полукруглого фотоэмиссионного катода, концентрического с центральным стержневым анодом, размещенными в специальном стеклянном баллоне. Падающий на фотокатод свет (пучок фотонов) создает поток электронов, которые оставляют поверхность фотокатода и направляются к аноду под воздействием внешнего электрического напряжения. Анодный ток пропорционален числу поглощенных катодом фотонов.

**Фотоумножающая трубка** действует аналогично вышеупомянутому фотоэлементу, но фотоумножитель



Смит Уиллоуби  
(*Smith Willoughby*,  
1828 - 1891),

английский инженер-электрик, открывший в 1873 г. эффект фотопроводимости селена, положенный в основу фотоэлектрических ячеек, использовавшихся в первых телевизионных системах.

имеет возможность для реализации больших коэффициентов усиления тока. Упрощенная схема фотоумножителя представлена на рис. 7.28. Фотоэлектроны генерируются так же, как в фотоэлементе. Они фокусируются на первом элементе цепи фотоумножителя, называемым *динодом*. Фотоэлектроны от первого динотронного электрода направляются к следующему, который имеет больший положительный потенциал. Электроны ускоряются между динотронными электродами и генерируют больше электронов. Это явление известно как *вторичная эмиссия*.

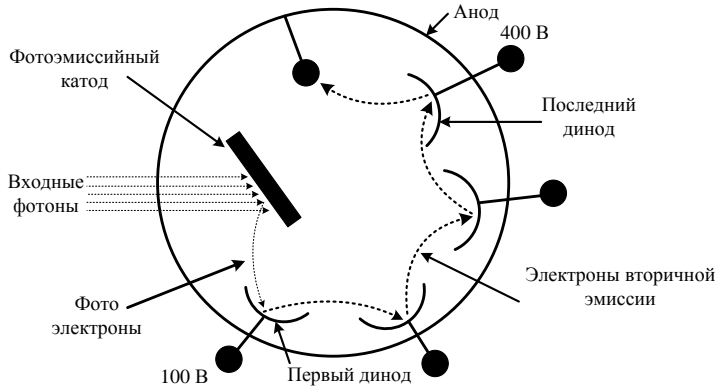


Рис. 7.28. Фотоумножающая трубка

**Например,** если фотоумножитель имеет 10 динотронных электродов и если каждый первичный электрон создает 4 вторичные электрона, то полное число электронов в конце цепи динотронных электродов приблизительно равняется  $10^6$  электронов. Электроны от последнего динотронного электрода собирает анод. Результирующий ток пропорционален количеству входных фотонов.

**Фоторезистивные преобразователи** основаны на эффекте *фотопроводимости*, который заключается в увеличении электропроводности полупроводника под воздействием электромагнитного излучения. Открыт в 1873 г. У. Смитом. На рис. 7.29, а схематически показана конструкция фоторезистивного детектора.

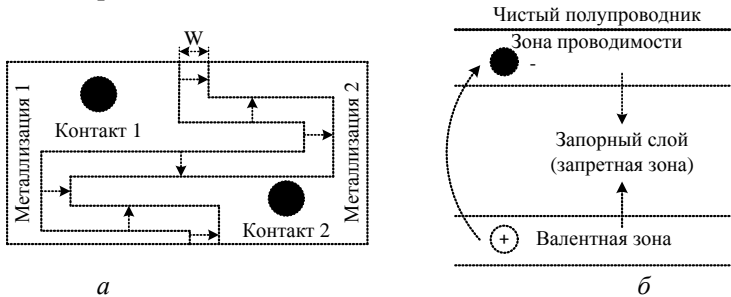


Рис. 7.29. Фотопроводящий детектор (а) и диаграмма энергетических уровней для чистого полупроводника (б)

Детектор состоит из зигзагообразной дорожки, выполненной из тонкой пленки полупроводника, например сульфида кадмия, на керамической основе. Длина дорожки  $L$ , ширина  $W$  и толщина  $t$ . С обеих сторон дорожки находятся металлизированные области для подсоединения электрических контактов. Электрическое сопротивление дорожки при любом освещении равно

$$R_0 = \rho_R W / L, \quad (7.23)$$

где  $\rho_R$  - поверхностное сопротивление полупроводникового материала.

Если создать разницу потенциалов  $V$  между электрическими контактами датчика, возникнет ток  $I_0 = VL / \rho_R W = \rho_C VL / W$ . Величина  $1 / \rho_R = \rho_C$  и определяется как *поверхностная проводимость*. Именно  $\rho_C$  модулируется световым потоком и вызывает изменения сопротивления и тока.

Механизм преобразования можно объяснить с помощью диаграммы уровня энергии для чистого (без примесей) полупроводника (см. 7.29, б). Чистый полупроводник поглощает фотон, когда его энергия едва превышает энергию запрещенной зоны, и одновременно создает пару «электрон - дырка». Электрон делает единственный переход через запрещенную зону в зону проводимости. Этот электрон и соответствующая дырка в зоне валентности способствуют увеличению полного тока. Как следствие, с увеличением потока фотонов электропроводимость растет, а сопротивление фотодетектора уменьшается. В полупроводниках с примесями за счет последних образуются ионы доноры и акцепторы, дающие дополнительный вклад в повышение концентрации носителей заряда в зоне проводимости и в валентной зоне. Благодаря этому проводимость возрастает еще больше. Примеси увеличивают квантовую чувствительность и предельную длину волны фотодетектора.

Фоторезистивные преобразователи производятся из сульфида свинца (PbS) или селенида свинца (PbSe), которые используются в инфракрасном диапазоне с длиной волн от 1 до 3 мкм и от 1 до 6 мкм соответственно.

**Фотодиодные преобразователи** основаны на использовании свойств полупроводниковых  $p-n$  переходов работать в двух режимах – фотогальваническом и фоторезистивном. Когда  $p-n$  переход сформирован, возникает концентрационный градиент носителей, обусловленный большинством носителей  $p$ -типа и  $n$ -типа в соответствующих областях. Дополнительные электроны из области  $n$ -типа двигаются в область  $p$ -типа, а дополнительные дырки движутся в противоположном направлении, для того чтобы уравнивать этот градиент.

Движение носителей через соединение полупроводников создает электрическое поле напряженностью  $E$  в пределах фотодиода, как указано на рис. 7.30, а, которое предотвращает любую дальнейшую диффузию носителей. Когда энергия фотона, который проникает в фотодиод, равняется или больше энергии запрещенной зоны, образуются пары «электрон – дырка». В

обедненной области, электроны под воздействием электрического поля  $E$  продвигаются по направлению к области  $n$ -типа, а дырки - к области  $p$ -типа. В  $p$ -области только электроны продвигаются в направлении к  $n$ -области, а движению дыр препятствует поле.

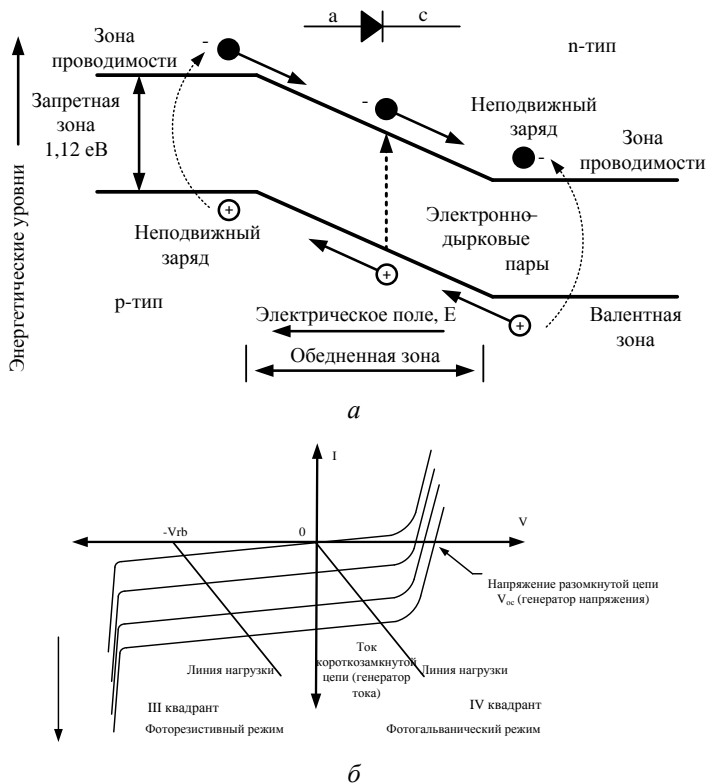


Рис. 7.30. Фотодиодный датчик:

$a$  - диаграмма энергетических уровней;  $b$  - вольтамперная характеристика

В  $n$ - области ситуация противоположна. Накопление зарядов из обеих сторон  $p-n$  перехода приводит к возникновению напряжения  $V_{0C}$  на разомкнутых выводах фотодиода, пропорционального потоку фотонов.

На рис. 7.30,  $b$  показаны вольтамперные характеристики фотодиода. Если поток фотонов отсутствует, вольтамперная характеристика фотодиода идентична вольтамперной характеристике обычного диода. В случае увеличения потока фотонов вольтамперная характеристика смещается вниз. Для любого уровня потока фотонов напряжение  $V_{0C}$  пропорционально этому потоку. Если выводы фотодиода замкнуть, ток короткого замыкания также пропорционален потоку фотонов. Это отвечает действию фотоэлектрического детектора в фотогальваническом режиме (четвертый квадрант вольтамперной характеристики фотодиода). Когда к фотодетектору прилагается обратное

напряжение, линия нагрузки смещается к третьему квадранту на расстояние, равное напряжению смещения. В этом квадранте фотодетектор ведет себя как источник тока и работает в фоторезистивном режиме.

Структурно измененные фотодиоды (фотодатчики положения) используются для измерения небольших углов, расстояний и машинных вибраций, которые являются родственными с измерениями линейных относительных перемещений. Боковой эффект в *PIN*-диодах обычно используется для этих измерений, как показано на рис. 7.31.

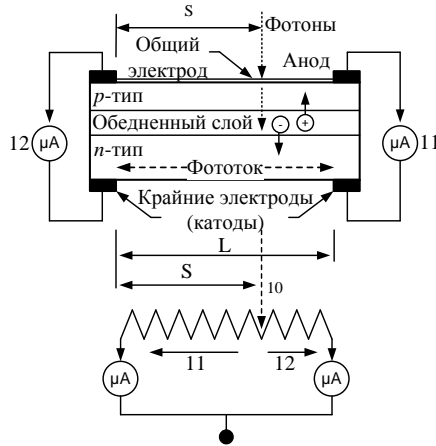


Рис. 7.31. Фоточувствительный датчик положения

Фотоны от лазерного источника излучения попадают на переднюю поверхность *p*-области *PIN*-диода и поглощаются в пределах области обеднения, где образуются пары «электрон - дырка». Электроны продвигаются к области *n*-типа и образуют фототок  $I_0$ . Фотодиод, действие которого основывается на боковом эффекте, можно представить, как переменный контактный резистор (см. рис. 7.31). Расположение лазерного пятна определяет этот переменный контакт. Фототок  $I_0$  распределяется между двумя ветвями как

$$(I_1 - I_2) / I_0 = 1 - 2S/L, \quad (7.24)$$

где  $L$  - расстояние между электродами;  $S$  - расстояние лазерного пятна от одного из электродов. Учитывая, что  $I_0 = I_1 + I_2$ , из формулы (7.24) можно определить  $S$  по результатам измерения токов  $I_1, I_2$ .

**Акустооптические преобразователи (АОП)** перемещения используют для выявления вибраций путем преобразования их в фазомодулированный электрический сигнал. Механизм преобразования заключается во взаимодействии оптической волны с акустической и образования новой оптической волны. На рис. 7.32 схематически показано устройство АОП, известное как датчик Брега.



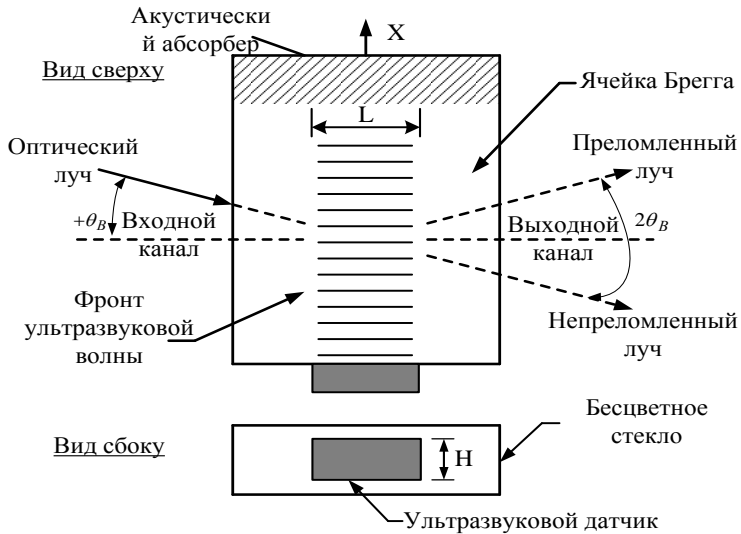


Рис. 7.32. Преобразователь Брегга

Акустооптическое преобразование происходит в пластине из оптически качественного стекла. Датчик имеет оптические окна на двух противоположных сторонах пластины для введения и вывода оптического луча. Высокочастотный ультразвуковой преобразователь приреплен к одной из двух других сторон. Ультразвуковой преобразователь возбуждает продольные волны в оптической пластине и создает области сжатия и растяжения, в которых коэффициент преломления изменяется. Эти области эквивалентны трехмерной дифракционной решетке. Генерируемый лазером оптический луч входит в датчик Брегга под углом  $\theta$ , проходя расстояние длиной  $L$  сквозь волны периодических изменений преломляющего коэффициента с частотой возбуждения  $\omega_m$ . Оптический луч на выходе преобразователя модулируется по фазе и состоит из оптической несущей с частотой  $\omega_c$  и пары боковых оптических полос в окрестности  $\omega_c$  с частотами

$$\omega_c \pm N\omega_m, \quad (7.25)$$

где  $N$  - коэффициент, отвечающий порядку боковых полос.

Есть особенное значение угла  $\theta = \theta_B$ , соответствующее оптической длине волны  $\lambda$  и акустической длине волны  $\Lambda$ , когда только одна боковая полоса первого порядка растет за счет влияния усиливающей интерференции, в то время как другие боковые полосы высших порядков уменьшаются благодаря угасающей интерференции. Это явление известно как *эффект Брегга*, а угол  $\theta_B$  как *угол Брегга*, определяемый из дифракционного уравнения Брегга

$$\sin \theta_B = \lambda/2\Lambda = \lambda\omega_m/4\pi v_m, \quad (7.26)$$

где  $v_m$  - скорость распространения ультразвуковой волны. Угол между дифракционным лучом Брегга и непреломленным лучом равняется  $2\theta_B$ .

На рис. 7.33 показано использование преобразователя для бесконтактного измерения вибраций.

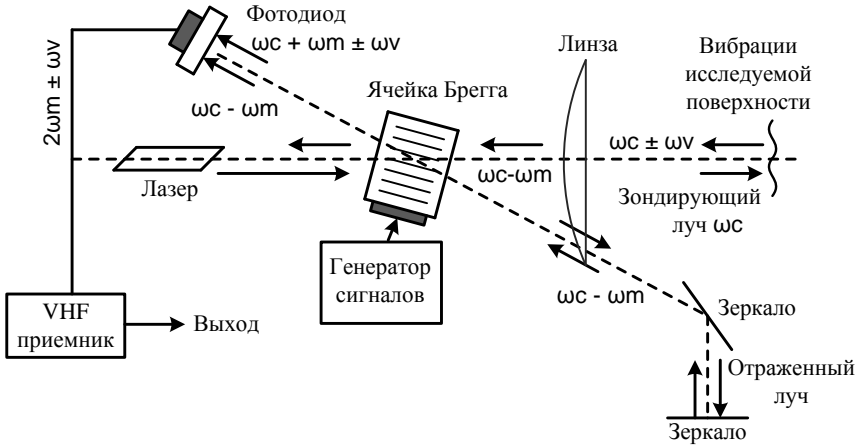


Рис. 7.33. Система бесконтактного измерения вибраций с преобразователем Брегга

В приведенной системе как источник оптического луча использован *He - Ne* лазер. Преобразователь Брегга используется для измерения поверхностных вибраций с частотой  $\omega_v$ . В фотодиоде происходит демодуляция оптических сигналов – выходной ток фотодиода имеет составляющую с частотой  $2\omega_m + \omega_v$ . Приемопередатчик метрового диапазона измеряет амплитуду боковой полосы, пропорциональную амплитуде измеряемых вибраций исследуемой поверхности. Минимальная амплитуда измеряемого смещения равняется  $2 \cdot 10^{-12}$  м и соответствует сигналу на входе фотодиода 300 мкВт.

**Волоконнооптические датчики.** Преобразователи этого вида разделяются на внешние и внутренние. Во внешних процесс преобразования имеет место снаружи волокна и волокно играет пассивную роль, т. е. используется лишь как проводник света. В датчиках внутреннего типа процесс преобразования происходит в оптическом волокне. Измеряемая величина в этом случае модулирует один из его параметров, например показатель преломления  $n$ . Волокно, в свою очередь, модулирует свет, распространяющийся в его сердцевине. Оптическое волокно, используемое в таких преобразователях, состоит из сердцевины и оболочки (рис. 7.34), также выполненной из стекла с определенными добавками для изменения показателя преломления. Луч света в оптическом волокне распространяется преимущественно в сердцевине благодаря полному внутреннему отражению. Падая в точке  $S$  на границу раздела поверхностей сердцевины и оболочки, луч света частично отражается ( $A'$ ), а частично преломляется в оболочку. В соответствии с законом Снелля

$$n_{CO} \sin \theta_{CO} = n_{CL} \sin \theta_{CL}, \quad (7.27)$$

где  $n_{CO}$ ,  $n_{CL}$  - показатели преломления материала сердцевины и оболочки соответственно ( $n_{CO} > n_{CL}$ );  $\theta_{CO}, \theta_{CL}$  - углы падения соответственно луча А и А".

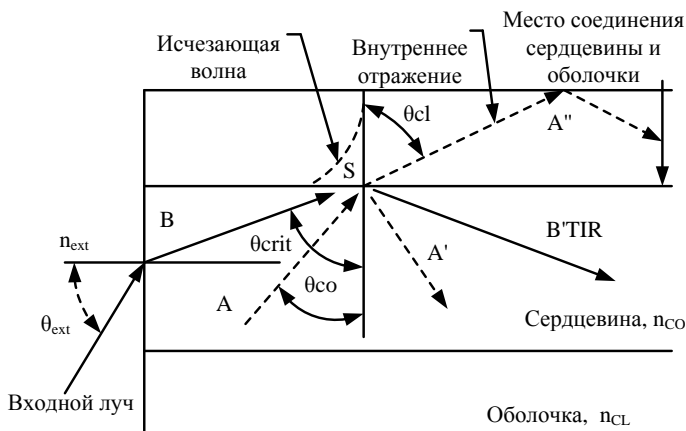


Рис. 7.34. Внутреннее отражение в оптическом волокне

Если  $\theta_{CO}$  растет, то  $\theta_{CL}$  в конце концов станет равным  $90^\circ$ ; для  $\theta_{CO} = \theta_{crit}$  имеем  $\sin \theta_{crit} = n_{CL}/n_{CO}$  и произвольный луч (В) полностью отражается (В') в сердцевине. Кроме того, существует нераспространяющаяся в волокне волна, которая вследствие граничного условия имеет нормальное к поверхности раздела сердцевины и оболочки экспоненциально угасающее поле. Этот процесс составляет часть механизма трансформации для некоторых физических и биомедицинских преобразователей. Оптический луч, распространяющийся во внешней среде с показателем преломления  $n_{ext}$ , попадает в сердцевину оптоволокну под углом  $\theta_{ext}$ , удовлетворяет закону Снелля и обеспечивает полное внутреннее отражение в оптоволокну.

Учитывая вышеприведенное, имеем

$$n_{ext} \sin \theta_{ext} = n_{CO} \sin(90^\circ - \theta_{crit}) \quad (7.28)$$

или

$$n_{ext} \sin \theta_{ext} = (n_{CO}^2 - n_{CL}^2)^{0,5}, \quad (7.29)$$

где произведение  $n_{ext} \sin \theta_{ext}$  известно как *числовая апертура оптоволокну*.

Величина  $\theta_{ext}$  устанавливает ограничение на апертурный угол, необходимый для максимальной передачи оптической энергии от источника света в оптоволокну. Примером использования оптического волокна для измерения физических величин является преобразователь микроизгибов, показанный на рис 7.35. Волокно деформируется под воздействием измеряемой величины – перемещения, натяжения, давления, силы, ускорения или температуры. Ме-

ханизм преобразования заключается в уменьшении интенсивности луча света через оптоволокну в результате его деформации, приводящей к потере энергии луча.



Рис. 7.35. Волоконнооптический датчик неровностей

На выходе волокна оптический сигнал преобразуется фотодетектором в электрический.

На рис. 7.36 показан преобразователь давления и температуры, известный как *интерферометр Фабри - Перо*. Интервал между зеркалами критический для действия интерферометра как преобразователя. Любое изменение этого интервала, вызванное изменением измеряемой величины, приводит к изменению коэффициента преобразования. Такие преобразователи внешнего типа имеют небольшие размеры и могут быть выполнены с использованием современных методов интегральной технологии.

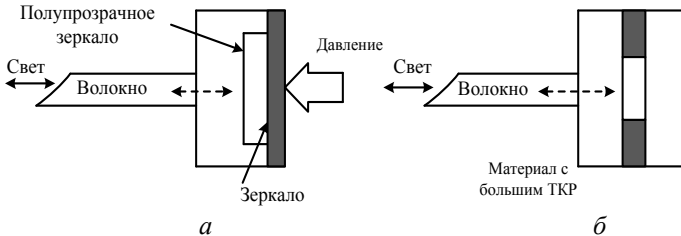


Рис. 7.36. Волоконнооптические датчики: *а* - давления; *б* - температуры

Оптические волокна используются также для измерения параметров магнитных и акустических полей. В преобразователе магнитного поля, показанном на рис. 7.37, механизм трансформации состоит из продольного натяжения в магнитоstrictionном материале, вызванном магнитным полем, и соответствующей деформации в сердцевине. Эта деформация модулирует показатель преломления сердцевины и вносит зависимый от поля фазовый сдвиг в выходной оптический луч. Преобразо-



Перо Жан-Батист Альфред (Perot Jean-Baptiste Alfred, 1863 - 1925),

французский физик. Исследования в области электричества, теплоты, спектроскопии, оптики. Изучал скрытую теплоту испарения воды, измерял длину световой волны. Совместно с Ш. Фабри развил новый метод оптической интерферометрии и построил интерферометр, названный их именами – интерферометр Фабри - Перо

ватель акустического поля также может быть выполнен вдоль оптоволоконных линий, заменяя магнитострикционную основу акустически-чувствительным покрытием вокруг оболочки оптоволокна. В этом случае акустическое поле вызывает соответствующие фазовые смещения оптического луча.

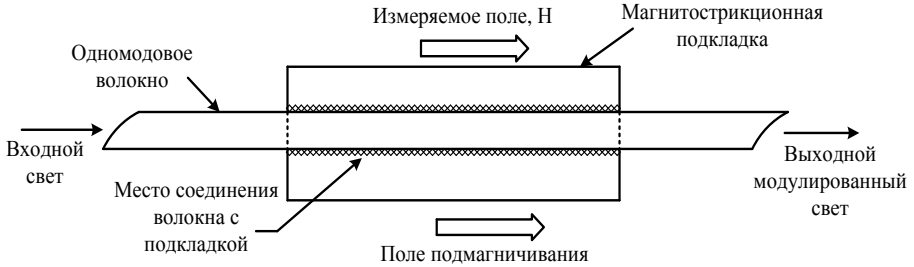


Рис. 7.37. Волоконнооптический датчик магнитного поля

Для получения электрического выходного сигнала, пропорционального измеряемой величине, можно использованн интерферометр Маха - Зендера.

**Флуоресцентные датчики химических величин.** Знание величины парциального давления кислорода ( $PO_2$ ),  $pH$  и парциального давления углекислоты ( $PCO_2$ ) в артериальной крови очень важно в лечении критически больных пациентов. Чувствительные элементы со специфическими химическими реактивами для каждой из вышеупомянутых измеряемых величин добавляются к наконечникам из трех оптических волокон. Когда они используются в качестве внутрисосудистых преобразователей, три волокна размещаются в едином катетере, вводимом в артерию через надрез, и служащим для непрерывного мониторинга кровяных газов и  $pH$ .

Излучение лазерного диода определенной длины волны через оптоволокно попадает на чувствительный элемент, расположенный на периферийном конце волокна внутри артерии (рис. 7.38).

Чувствительный элемент содержит краситель с флуоресцентными молекулами, которые поглощают фотоны и переходят в высокоэнергетическое состояние (возбуждаются). В этом состоянии молекула находится короткое время (порядка 10 нс), после чего теряет часть энергии, переходя к основному состоянию. Фотоны, образуемые при обратном переходе, имеют меньшую энергию, чем энергия возбуждающих фотонов, поэтому длина волны флуоресцентного излучения больше длины волны возбуждающего излучения (правило Стокса), поскольку энергия фотона обратно пропорциональна длине волны излучения. Присутствие измеряемых газов изменяет интенсивность флуоресцентного излучения.

Интенсивность может быть измерена с помощью спектральночувствительных устройств и фотометрических детекторов, исходный сигнал которых пропорционален концентрации измеряемого вещества. Кислород, например, уменьшает интенсивность флуоресцентного излучения, и это используется в

ИП парциального давления кислорода. Внутрисосудистый преобразователь парциального давления кислорода в крови (см. рис. 7.38, а) основан на эффекте поглощения флуоресцентного излучения. Соотношение между  $PO_2$  и флуоресцентными характеристиками молекул красителя можно представить в виде уравнения Стерна – Волмера

$$PO_2 = (I_0/I - 1)K,$$

где  $I$  - интенсивность флуоресцентного излучения в присутствии кислорода;  $I_0$  - интенсивность флуоресцентного излучения при отсутствии кислорода;  $K$  - константа, определяемая наклоном функции  $PO_2(I_0/I)$ .

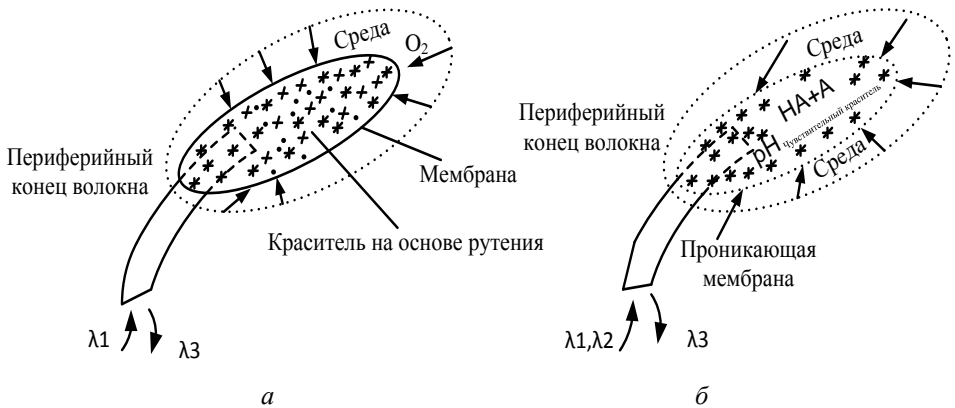


Рис.7.38. Волоконно-оптические флуоресцентные датчики: а – кислорода; б – рН

Измеряя  $I_0$  с длиной волны возбуждения  $\lambda_1$  и с длиной волны флуоресцентного излучения  $\lambda_3$ , можно определить парциальное давление кислорода. Аналогично создаются другие преобразователи этого типа.

### 7.3. Модель идеального операционного усилителя

Схемотехника измерительных преобразователей предусматривает широкое использование универсальных и оригинальных средств аналогового преобразования сигналов, выполненных на основе операционных усилителей.

*Операционный усилитель* (ОУ) – это дифференциальный усилитель напряжения с непосредственными связями, коэффициентом усиления свыше 1000 и возможностью формирования частотной характеристики введением отрицательной обратной связи (ООС). Для получения "идеального" (расчетного) значения коэффициента усиления схемы используют модель *идеального ОУ*, эквивалентная схема которого, его подключение к источникам входных сигналов  $U_{ВХ2}$ ,  $U_{ВХ1}$  и напряжений питания  $\pm E_n$  показаны на рис. 7.39.

ОУ формирует выходное напряжение с помощью управляемого источ-

ника напряжения  $e_{\text{ВЫХ}}$ , выход которого пропорционален разнице напряжений  $e_{\text{д}}$  на входах ОУ. Положительное напряжение  $U_{\text{ВХ1}}$ , поступающее на инвертирующий вход ОУ(-), дает отрицательный сигнал на выходе ОУ (при биполярном питании ОУ), в то время как положительный входной сигнал  $U_{\text{ВХ2}}$  на неинвертирующем входе ОУ(+) создает на выходе положительный сигнал. Коэффициент усиления ОУ по напряжению  $K_{\text{ОП}}$  определяется отношением выходного напряжения  $e_{\text{ВЫХ}}$  к дифференциальному входному  $e_{\text{д}} = U_{\text{ВХ2}} - U_{\text{ВХ1}}$ , т. е. как  $K_{\text{ОП}} = e_{\text{ВЫХ}} / e_{\text{д}}$ .

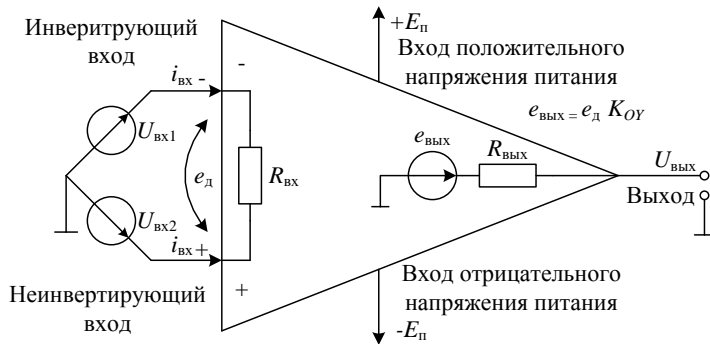


Рис. 7.39. Эквивалентная схема идеального ОУ

Идеальный ОУ имеет следующие параметры: входное сопротивление  $R_{\text{ВХ}} \rightarrow \infty$ ; выходное сопротивление  $R_{\text{ВХ}} = 0$ ; коэффициент усиления напряжения  $K_{\text{ОП}} \rightarrow \infty$ ; полоса рабочих частот (на уровне 3 дБ)  $\Delta f_{-3\text{дБ}} \rightarrow \infty$ ; нулевое начальное смещение нуля ОУ.

Эти характеристики позволяют сформулировать три аксиомы теории идеального ОУ: дифференциальное входное напряжение ОУ в линейном режиме всегда равно нулю, т. е.  $e_{\text{д}} = 0$  (так как  $K_{\text{ОП}} \rightarrow \infty$ ); входные токи ОУ равны нулю —  $i_{\text{ВХ}}^+ = i_{\text{ВХ}}^- = 0$  (поскольку  $R_{\text{ВХ}} \rightarrow \infty$ ); напряжение на инвертирующем входе ОУ равно напряжению на неинвертирующем входе при замкнутой ООС, поскольку начальное напряжение смещения нуля отсутствует.

Все разнообразие схем на ОУ можно свести к шести базовым схемам: инвертирующего усилителя; неинвертирующего усилителя; дифференциального усилителя; дифференциатора; интегратора; инвертирующего сумматора. Ниже приведен анализ характеристик этих схем для идеального ОУ.

**Инвертирующий усилитель** (рис. 7.40, а). В этой схеме неинвертирующий вход ОУ соединен с общей шиной, сигнал приходит на инвертирующий вход через резистор  $R_1$ , а ООС обеспечивается резистором  $R_2$ . Ввиду того, что  $e_{\text{д}} = 0$  и напряжение на неинвертирующем входе равно нулю, на-

пряжение на инвертирующем входе также равно нулю. Поскольку  $i_{\text{ВХ}}^+ = i_{\text{ВХ}}^- = 0$ , имеем  $i_1 = i_2$ . С учетом этого ток  $i_1$ , протекающий через резистор  $R_1$ , равен  $i_1 = U_{\text{ВХ}}/R_1$ , а ток  $i_2 - i_2 = -U_{\text{ВЫХ}}/R_2$  (знак минус появляется в результате инвертирования входного сигнала ОУ). На рис. 7.40, б изображены диаграммы входного и выходного напряжения инвертирующего усилителя при подаче на вход гармонического сигнала.

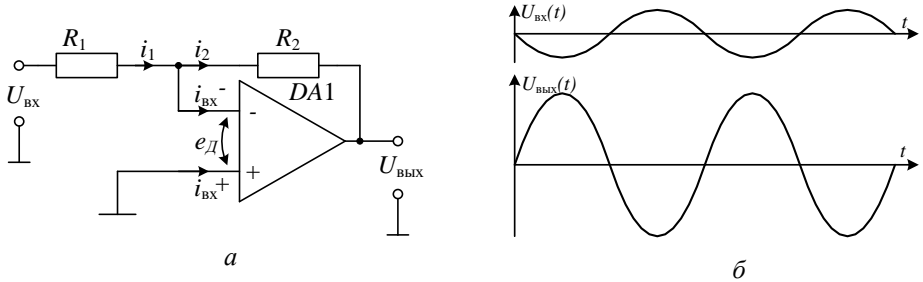


Рис. 7.40. Инвертирующий усилитель (а) и временные диаграммы его сигналов (б)

Приравнивая правые части выражений для токов  $i_1$  и  $i_2$ , получим выражение для выходного напряжения инвертирующего усилителя

$$U_{\text{ВЫХ}} = -R_2 U_{\text{ВХ}} / R_1 . \quad (7.30)$$

Характеристики идеального инвертирующего усилителя на ОУ:

коэффициент усиления по напряжению  $K_U = -R_2 / R_1$  ;

входное сопротивление  $R_{\text{ВХ}} = R_1$  ;

выходное сопротивление  $R_{\text{ВЫХ}} = 0$  .

**Неинвертирующий усилитель.** Схема приведена на рис.7.41, а.

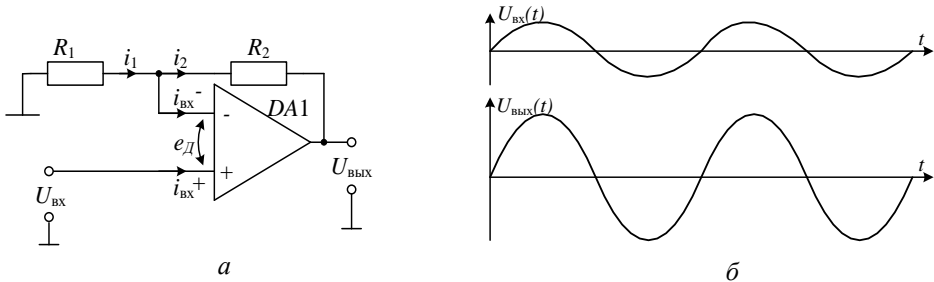


Рис. 7.41. Неинвертирующий усилитель (а) и временные диаграммы его сигналов (б)

Входное напряжение поступает на неинвертирующий вход ОУ, а часть выходного через резистивный делитель напряжения  $R_1, R_2$  подается на инвертирующий вход ОУ. Ввиду того, что  $i_{\text{ВХ}}^+ = i_{\text{ВХ}}^- = 0$ , имеем  $i_1 = i_2$ . В соответствии с третьей аксиомой идеального ОУ напряжение на инвертирующем входе ОУ равно  $U_{\text{ВХ}}$ , поэтому ток через резистор  $R_1$  определяется как



$i_1 = U_{\text{ВХ}}/R_1$ , а выходное напряжение –  $U_{\text{ВЫХ}} = i_2 R_2 + U_{\text{ВХ}}$ . Учитывая, что  $i_1 = i_2$ , выходное напряжение неинвертирующего усилителя равно

$$U_{\text{ВЫХ}} = (R_1 + R_2)U_{\text{ВХ}}/R_1. \quad (7.31)$$

Характеристики идеального неинвертирующего усилителя:  
коэффициент усиления по напряжению:

$$K_U = 1 + R_2/R_1; \quad (7.32)$$

входное сопротивление  $R_{\text{ВХ}} \rightarrow \infty$ ;

выходное сопротивление  $R_{\text{ВЫХ}} = 0$ .

На рис. 7.41, б изображены диаграммы напряжений неинвертирующего усилителя в случае подключения на его вход гармонического сигнала.

**Дифференциальный усилитель** – третья базовая схема на ОУ, является комбинацией двух предыдущих схем. Схема дифференциального усилителя изображена на рис. 7.42, а, а диаграммы напряжений – на рис. 7.42, б.

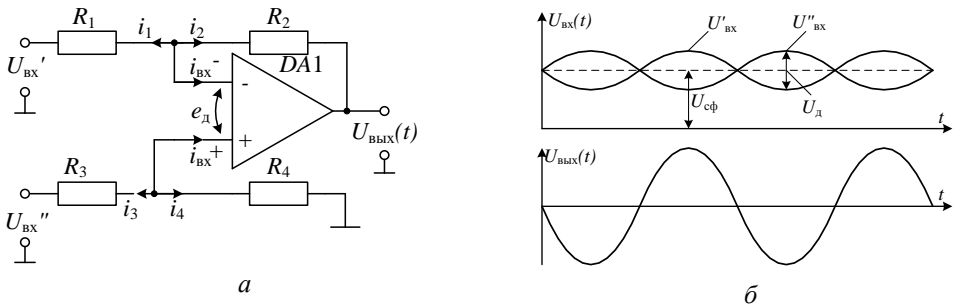


Рис. 7.42. Дифференциальный усилитель (а) и временные диаграммы его сигналов (б)

Входные гармонические сигналы  $U'_{\text{ВХ}}$  и  $U''_{\text{ВХ}}$  можно представить синфазной  $U_{\text{СФ}} = (U'_{\text{ВХ}} + U''_{\text{ВХ}})/2$  и дифференциальной  $U_{\text{Д}} = U'_{\text{ВХ}} - U''_{\text{ВХ}}$  составляющими. Тогда  $U'_{\text{ВХ}} = U_{\text{СФ}} + 0,5U_{\text{Д}}$ , а  $U''_{\text{ВХ}} = U_{\text{СФ}} - 0,5U_{\text{Д}}$ .

Дифференциальный усилитель получил название благодаря тому, что он усиливает дифференциальную составляющую входных напряжений ОУ и подавляет синфазную составляющую. В общем виде его выходное напряжение представляется в виде

$$U_{\text{ВЫХ}} = K_{\text{Д}}U_{\text{Д}} + K_{\text{СФ}}U_{\text{СФ}}, \quad (7.33)$$

где  $K_{\text{Д}}$  - коэффициент усиления дифференциального сигнала;  $K_{\text{СФ}}$  - коэффициент передачи синфазного сигнала. Определим при каких условиях коэффициент  $K_{\text{СФ}}$  равен нулю. С учетом того, что  $e_{\text{Д}} = 0$ , и  $i_{\text{ВХ}}^+ = i_{\text{ВХ}}^- = 0$ , имеем  $i_1 = i_2$ ,  $i_3 = i_4$  и, используя метод наложения, выразим  $U_{\text{ВЫХ}}$  через  $U'_{\text{ВХ}}$  и  $U''_{\text{ВХ}}$ :

$$U_{\text{ВЫХ}} = U''_{\text{ВХ}} R_4/(R_3 + R_4) \cdot (R_1 + R_2)/R_1 - U'_{\text{ВХ}} R_2/R_1. \quad (7.34)$$

Обозначив  $R_4/(R_3 + R_4) \cdot (R_1 + R_2)/R_1 = A_2$ ,  $-R_2/R_1 = A_1$  и принимая во внимание, что  $U_{\text{сф}} = (U'_{\text{вх}} + U''_{\text{вх}})/2$ , а  $U_{\text{д}} = U'_{\text{вх}} - U''_{\text{вх}}$ , получим

$$U_{\text{вых}} = U''_{\text{вх}} A_2 + U'_{\text{вх}} A_1 = U_{\text{сф}} (A_1 + A_2) + 0,5 \cdot U_{\text{д}} (A_1 - A_2).$$

Сопоставляя полученное выражение с (7.33), отметим, что  $K_{\text{сф}} = A_1 + A_2$ , а  $K_{\text{д}} = (A_1 - A_2)/2$ . Подставив в эти формулы значение  $A_1$ ,  $A_2$  и получим:

$$K_{\text{сф}} = (R_1 R_4 - R_2 R_3) / [R_1 (R_3 + R_4)]; \quad (7.35)$$

$$K_{\text{д}} = -(R_2 R_3 + 2R_4 R_2 + R_1 R_4) / [2R_1 (R_3 + R_4)]. \quad (7.36)$$

В случае  $R_2/R_1 = R_4/R_3$  имеем  $K_{\text{сф}} = 0$  и  $K_{\text{д}} = -R_2/R_1$ .

Характеристики идеального дифференциального усилителя:

коэффициент усиления дифференциального сигнала  $K_{\text{д}} = -R_2/R_1$ ;

коэффициент усиления синфазного сигнала  $K_{\text{сф}} = 0$ ;

входное сопротивление инвертирующего входа  $R_{\text{вх}}^- = R_1$ ;

входное сопротивление неинвертирующего входа  $R_{\text{вх}}^+ = R_3 + R_4$ ;

входное сопротивление для дифференциального сигнала  $R_{\text{вх,д}} = R_1 + R_3$ ;

входное сопротивление для синфазного сигнала

$$R_{\text{вх,сф}} = (R_1 + R_2)(R_3 + R_4) / (R_1 + R_2 + R_3 + R_4); \quad (7.37)$$

выходное сопротивление  $R_{\text{вых}} = 0$ .

**Инвертирующий сумматор**, схема которого изображена на рис. 7.43, использует свойство инвертирующего входа ОУ – равенство потенциалов инвертирующего входа потенциалу второго входа, соединенного с общей шиной. Это позволяет применять схему для суммирования токов. Ввиду того, что  $e_{\text{д}} = 0$ ,  $i_{\text{вх}}^+ = i_{\text{вх}}^- = 0$ , имеют место следующие выражения для входных токов:

$$i_i = U_{\text{вх}_i} / R_i \Big|_{i=1,2,\dots,n}, \quad i_0 = \sum_1^n i_i.$$

Принимая во внимание, что  $i_0 = -U_{\text{вых}}/R_0$ , имеем:

$$U_{\text{вых}} = -(U_{\text{вх}_1} R_0 / R_1 + U_{\text{вх}_2} R_0 / R_2 + \dots + U_{\text{вх}_n} R_0 / R_n) = -\sum_1^n k_i \cdot U_{\text{вх}_i},$$

где  $k_i = R_0 / R_i \Big|_{i=1,\dots,n}$  – коэффициент передачи напряжения по  $i$ -му входу.

Преимуществом инвертирующего сумматора по сравнению с пассивным резистивным сумматором является взаимонезависимость коэффициентов  $k_i$ : для изменения коэффициента передачи по одному из входов в инвертирующем сумматоре достаточно изменить один резистор, в то время как в пассивном резистивном сумматоре для этого необходимо изменить все резисторы.

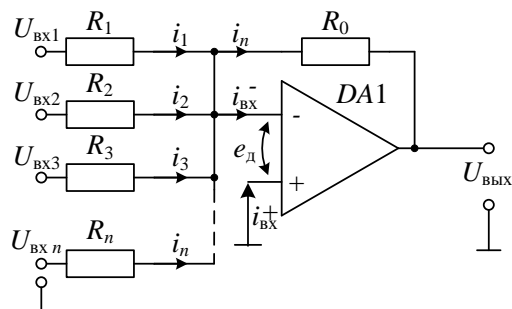


Рис. 7.43. Инвертирующий сумматор

Характеристики идеального инвертирующего сумматора:  
 коэффициент усиления  $i$ -го входного напряжения  $k_i = R_0/R_i$  ;  
 входное сопротивление по  $i$ -му входу  $R_{\text{ВХ}i} = R_i$  ;  
 выходное сопротивление  $R_{\text{ВЫХ}} = 0$  ;  
 количество входных сигналов неограниченно, т. е.  $n \rightarrow \infty$  .

**Интегратор.** Схема интегратора (рис. 7.44, а) представляет модификацию инвертирующего усилителя (рис. 7.40, а) с конденсатором в контуре ООС вместо резистора. Ввиду того, что  $e_d = 0$ ,  $i_{\text{ВХ}^+} = i_{\text{ВХ}^-} = 0$ , имеем  $i_1 = i_2$  . Подставляя в это уравнение значение  $i_1(t) = U_{\text{ВХ}}(t)/R$  и  $i_2(t) = -C dU_{\text{ВЫХ}}(t)/dt$  (так как напряжение на конденсаторе  $U_C(t) = U_{\text{ВЫХ}}(t)$ ), получим

$$U_{\text{ВХ}}(t)/R = -C dU_{\text{ВЫХ}}/dt . \quad (7.38)$$

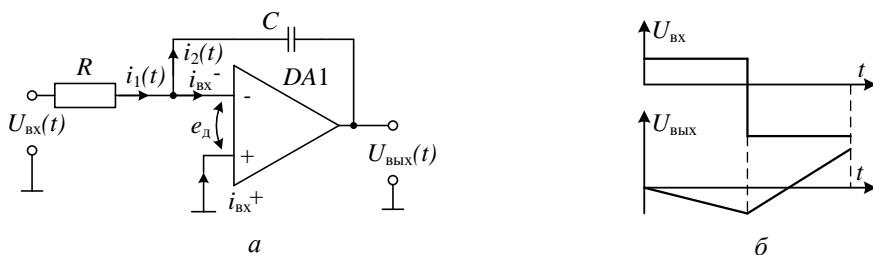


Рис. 7.44. Интегратор (а) и временные диаграммы его сигналов (б)

Интегрируя левую и правую части уравнения (7.38) во времени, имеем

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t U_{\text{ВХ}}(\tau) d\tau . \quad (7.39)$$

На рис. 7.44, б показана реакция интегратора на скачок входного напряжения. На линейном участке выходное напряжение определяется как

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = -U_{\text{ВХ}}(t)/RC . \quad (7.40)$$

Если на вход интегратора приходит синусоидальное напряжение  $U_{\text{вх}}(t) = U_M \sin \omega t$ , где  $U_M$  - амплитудное значение напряжения;  $\omega$  - круговая частота, то напряжение на его выходе равно

$$U_{\text{вых}}(t) = U_M \cos \omega t / \omega RC. \quad (7.41)$$

Из (7.41) следует, что с увеличением частоты модуль коэффициента передачи идеального интегратора стремится к нулю, а фазовый сдвиг относительно входного сигнала на любой частоте равен  $90^\circ$ . Диаграммы Бode для идеального интегратора изображены на рис. 7.45, где  $a$  - амплитудно-частотная характеристика (АЧХ),  $b$  - фазочастотная характеристика (ФЧХ).

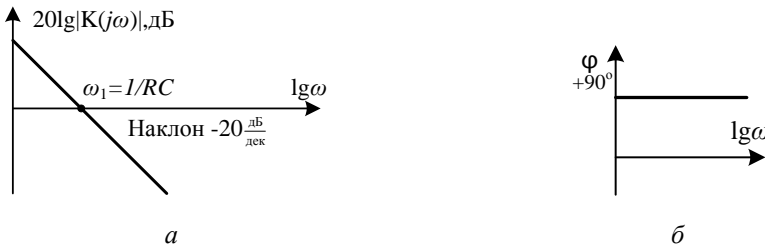


Рис. 7.45. Частотные характеристики интегратора:  $a$  – АЧХ,  $b$  – ФЧХ

Характеристики идеального интегратора: зависимость  $U_{\text{вых}}(t) = F(U_{\text{вх}}(t))$  задается уравнением (7.39); входное сопротивление интегратора  $R_{\text{вх}} = R$ ; выходное сопротивление  $R_{\text{вых}} = 0$ .

**Дифференциатор.** Базовая схема дифференциатора на основе ОУ изображена на рис. 7.46,  $a$ , а его временные диаграммы, поясняющие его работу – на рис. 7.46,  $b$ . Он также представляет собой разновидность инвертирующего усилителя (см. рис. 7.40), но вместо резистора  $R_1$  в схему включен конденсатор  $C$ . Применив аксиомы идеального ОУ ( $e_{\text{д}} = 0$ ,  $i_{\text{вх}}^+ = i_{\text{вх}}^- = 0$ ), получим  $i_1 = i_2$ . Учитывая, что  $i_1(t) = C dU_{\text{вх}}(t)/dt$  (поскольку напряжение на конденсаторе равняется входному) и  $i_2(t) = -U_{\text{вых}}(t)/R$ , получим уравнение для выходного напряжения

$$U_{\text{вых}}(t) = -RC dU_{\text{вх}}(t)/dt. \quad (7.42)$$

На рис. 7.46,  $b$  показаны графики выходного напряжения для линейно изменяющихся и импульсных входных сигналов. Для синусоидального входного напряжения  $U_{\text{вх}}(t) = U_M \sin \omega t$  выходное напряжение определяется как

$$U_{\text{вых}} = -RC\omega U_M \cos \omega t. \quad (7.43)$$

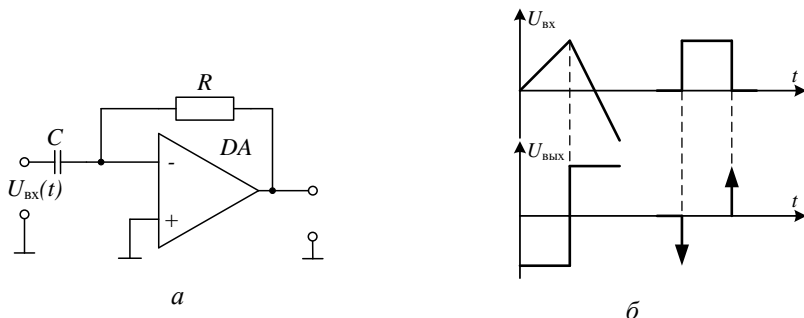


Рис. 7.46. Дифференциатор (а) и временные диаграммы его сигналов (б)

Из уравнения (7.43) следует, что модуль коэффициента передачи по напряжению идеального дифференциатора увеличивается вместе с увеличением частоты сигнала. Сдвиг фазы между входным и выходным напряжениями равен минус  $90^\circ$  на любой частоте. Диаграммы Боде для идеального дифференциатора показаны на рис. 7.47.

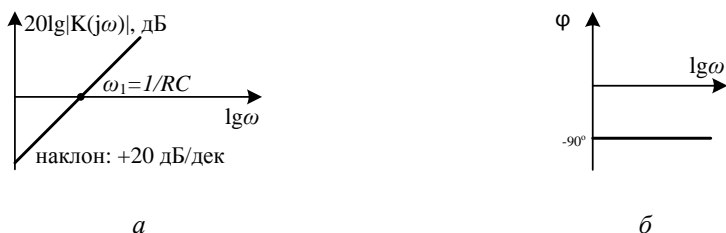


Рис. 7.47. Частотные характеристики дифференциатора: а – АЧХ, б – ФЧХ

Характеристики идеального дифференциатора: зависимость  $U_{\text{ВЫХ}}(t) = F(U_{\text{ВХ}}(t))$  задается уравнением (7.42); входная емкость равняется  $C_{\text{ВХ}} = C$ ; выходное сопротивление  $R_{\text{ВЫХ}} = 0$ .

#### 7.4. Модель реального операционного усилителя

Модель идеального ОУ необходима для определения номинальной (идеальной) функции преобразования ИП. С помощью эквивалентной схемы реального ОУ и ее параметров, приведенных в паспортных данных на конкретный тип ОУ, рассчитывают статические, динамические и случайные погрешности преобразования сигнала, т. е. определяют отклонение реальной функции преобразования от идеальной. Различие между основными параметрами реального и идеального ОУ согласно их моделям заключается в следующем: значение коэффициента усиления  $K_{\text{оп}}$  ( $K_U$ ) по напряжению реального ОУ не является бесконечным; полоса пропускания реального ОУ не является бесконечной; входное сопротивление реального ОУ  $R_{\text{ВХ}}$  не является беско-

нечным; входной ток реального ОУ не равен нулю, т. е.  $i_{\text{ВХ}} \neq 0$ ; напряжение между входами реального ОУ  $e_{\text{д}} \neq 0$ ; выходное сопротивление реального ОУ  $R_{\text{ВЫХ}} \neq 0$ .

**Эквивалентная схема и параметры реального ОУ.** На рис. 7.48 изображена эквивалентная электрическая схема, определяемая характеристикам реального ОУ. В отличие от эквивалентной электрической схемы идеального ОУ (см. рис. 7.39) в этой схеме присутствуют дополнительные элементы, которые собственно и характеризуют отличия реального ОУ от идеального.

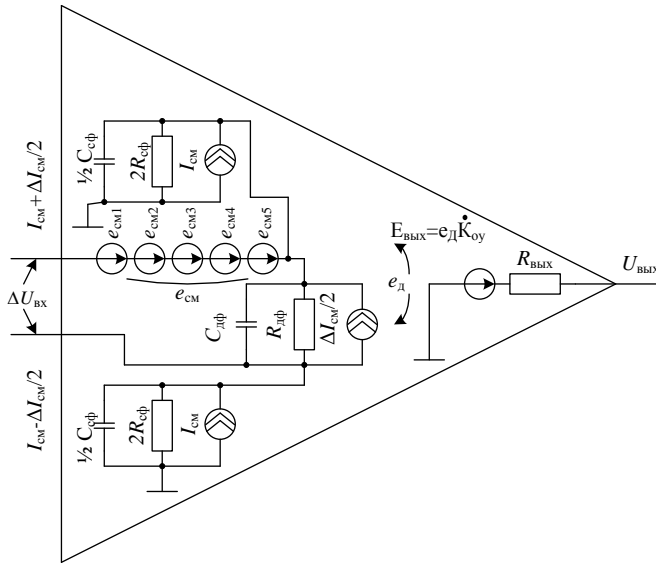


Рис. 7.48. Эквивалентная схема реального ОУ

Характеристики реального ОУ подразделяются на две группы: границы допустимых параметров; электрические характеристики.

**Границы допустимых параметров** описывают значения пределов эксплуатационных параметров, при которых ОУ сохраняет способность нормально функционировать. К их числу относятся следующие.

**Максимально разрешенное напряжение питания** – это напряжение, при котором ОУ не выходит из строя. Типичные значения: +15 В, –15 В (некоторые типы ОУ имеют более широкий диапазон, например +150 В, –150 В).

**Максимальная мощность рассеивания** – это такая электрическая мощность, которую может рассеивать ОУ в течение большого промежутка времени в эксплуатационном температурном диапазоне. Параметр зависит от типа корпуса ОУ. Наибольшую мощность рассеивает керамический корпус, наименьшую – пластмассовый (приблизительно 0,5 Вт). Металлический корпус занимает промежуточное место (от милливатт до нескольких ватт).

*Диапазон эксплуатационных температур (рабочий диапазон температур)* – это такой диапазон температур, в котором ОУ сохраняет способность нормально функционировать согласно его электрическим характеристикам.

Различают три основных диапазона:

Military (военный) от минус 55 до плюс 125 °С ;

Industry (промышленный) – от минус 25 до плюс 85 °С ;

Commercial (общего применения) – от 0 до плюс 70 °С .

*Максимальное дифференциальное (входное) напряжение* – это максимально возможная разница потенциалов, которая прилагается к дифференциальным входам ОУ и не приведет к его выходу из строя. Она не должна быть больше, чем напряжение между разнополярными входами питания ОУ. Типичные значения: +30 В, – 30 В.

*Максимальное синфазное (входное) напряжение* – это максимально возможная разница потенциалов между входами ОУ и корпусом, которая не приводит к выходу ОУ из строя. Она не должна превышать напряжения питания (+ $E_{П}$ , – $E_{П}$ ). Типичные значения: +15 В, –15 В.

*Максимальное время действия защиты по выходу в режиме короткого замыкания* – это время, в течение которого ОУ не выходит из строя, если его выход будет непосредственно соединен с корпусом (общей шиной) или одним из контактов питания.

*Максимальная температура перегрева выводов ОУ* – это максимальная удерживаемая в течение одной минуты температура выводов ОУ, которая не приведет к изменению его параметров.

*Электрические характеристики* реального ОУ позволяют рассчитывать погрешности преобразования сигналов в схемах на ОУ, что необходимо для оптимизации принципиальной схемы ИП. Эти характеристики подразделяются на входные, выходные и динамические.

*Входные характеристики ОУ*

*Напряжение смещения нуля  $e_{см}$*  определяется при разорванной цепи обратной связи. Это напряжение, которое надо подать на вход ОУ, чтобы иметь на выходе ОУ 0 В. Этот параметр отвечает ситуации, когда оба напряжения, подключенные к входам ОУ, имеют равные значения (рис. 7.49).

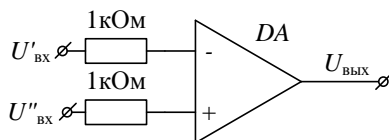


Рис. 7.49. Схема для измерения напряжения смещения

Прецизионные ОУ имеют  $e_{см}$  меньше сотых долей милливольт, а ОУ общего назначения – нескольких десятков милливольт. Для входного дифференциального напряжения имеем  $\Delta U_{ВХ} = e_{см.сум} + e_d$ , где  $e_d$  - управляющая

(полезная) разность потенциалов (недоступная для контроля);  $e_{\text{см.сум}}$  - эквивалентное "паразитное" суммарное напряжение смещения, которое складывается из пяти составляющих:

$$e_{\text{см.сум}} = e_{\text{см.1}} + e_{\text{см.2}} + e_{\text{см.3}} + e_{\text{см.4}} + e_{\text{см.5}}, \quad (7.44)$$

где  $e_{\text{см.1}} = e_{\text{см.0}} + e_{\text{др}}$  ( $e_{\text{см.0}}$  - начальное напряжение смещения 0) - напряжение смещения, определяемое нескомпенсированным начальным смещением и температурным дрейфом смещения;  $e_{\text{см.2}}$  - напряжение смещения, связанное с падением напряжения на входных резисторах и цепях обратной связи через входные токи;  $e_{\text{см.3}}$  - напряжение смещения, связанное с коэффициентом ослабления синфазного сигнала;  $e_{\text{см.4}}$  - составляющая, связанная с изменением напряжений питания ОУ;  $e_{\text{см.5}}$  - составляющая, связанная с наличием электрических шумов.

*Температурный дрейф смещения ( $e_{\text{см.1}}$ ), мкВ*

$$e_{\text{др}} = \Delta T \cdot e_T, \quad (7.45)$$

где  $e_{\text{др}}$  - изменение напряжения смещения под воздействием температуры;  $\Delta T$  - изменение температуры.

*Температурный коэффициент напряжения смещения  $e_T$  (мкВ/°С)*

$$e_T = [e_{\text{см}}(T_1) - e_{\text{см}}(T_2)] / \Delta T. \quad (7.46)$$

где  $T_1, T_2$  - конечная и начальная температура ОУ, °С;  $\Delta T = T_2 - T_1$  - изменение температуры;  $e_{\text{см}}(T_2), e_{\text{см}}(T_1)$  - напряжение смещения для температур  $T_2, T_1$  соответственно, мкВ. Это отношение изменения напряжения смещения к изменению температуры внешней среды, которая привела к этому изменению, при условии, что напряжение на выходе ОУ остается неизменным. Коэффициент является средним значением, действительным для всего рабочего диапазона ОУ. В прецизионных ОУ этот коэффициент не превышает десятых долей микровольт на градус, в ОУ общего назначения – десятков микровольт на градус.

*Средний входной ток смещения* – это среднее арифметическое входных токов ОУ, которые измеряются при таком входном дифференциальном напряжении, которое приводит к нулевому выходному напряжению

$$I_{\text{см}} = 0,5(I_{\text{см}}^+ + I_{\text{см}}^-), \quad (7.47)$$

где  $I_{\text{см}}^+, I_{\text{см}}^-$  - средние входные токи смещения для неинвертирующего и инвертирующего входов ОУ соответственно. Благодаря  $I_{\text{см}}^+, I_{\text{см}}^-$  ОУ работает в линейном режиме. Эти токи не зависят от сопротивлений  $R_1, R_2$ . ОУ имеют такие токи смещения: ОУ общего назначения – сотни наноампер; прецизионные ОУ – десятки наноампер; ОУ с униполярными транзисторами на входе – от долей наноампер до  $10^{-15}$  А.



*Температурный дрейф входного тока*,  $\text{мкА}/^\circ\text{C}$  – это отношение значения изменения входного тока ОУ к изменению температуры внешней среды, которая привела к этому изменению,

$$\Delta I_{\text{см}} = [I_{\text{см}}(T_1) - I_{\text{см}}(T_2)] / \Delta T, \quad (7.48)$$

где  $\Delta T = T_2 - T_1$  - изменение температуры,  $T_1, T_2$  - конечная и начальная температура ОУ,  $^\circ\text{C}$ ,  $I_{\text{см}}(T_1), I_{\text{см}}(T_2)$  - входные токи при этих температурах,  $\text{мкА}$ .

Этот параметр является средним для всего рабочего диапазона температур и существенно зависит от типа их входных транзисторов:

входные токи ОУ с полевыми транзисторами на входе удваиваются на каждые  $10^\circ\text{C}$  и имеют позитивный температурный коэффициент;

входные токи ОУ с биполярными транзисторами на входе уменьшаются с повышением температуры.

*Разница входных токов смещения* – это разница между входными токами ОУ в случае, когда напряжение на выходе ОУ равно нулю,

$$\Delta I_{\text{см}} = I_{\text{см}}^+ - I_{\text{см}}^-,$$

где  $I_{\text{см}}^+, I_{\text{см}}^-$  – средние входные токи смещения для неинвертирующего и инвертирующего входов ОУ соответственно.

Этот параметр характеризует неидентичность входов ОУ. В ОУ с биполярными транзисторами на входе, может равняться  $\Delta I_{\text{см}} \approx 0, I_{\text{см}}$ . В ОУ с полевыми транзисторами на входе  $\Delta I_{\text{см}} \approx I_{\text{см}}$  благодаря большому разбросу параметров этого типа транзисторов.

*Температурный дрейф разницы входных токов смещения* – это отношение приращения  $\Delta I_{\text{см}}$  к вызвавшему его изменению температуры ОУ при  $U_{\text{ВЫХ}} = \text{const}$ , т. е.  $\Delta_{\Delta I_{\text{см}}} / \Delta T$ ,  $(\text{нА}/^\circ\text{C})$ . Этот параметр является средним для рабочего диапазона температур.

*Выходные характеристики ОУ.*

*Диапазон изменения выходного напряжения.* Эта характеристика определяет предел допустимого значения реального  $K_{\text{ООС}}$  ОУ при заданном диапазоне входного сигнала  $U_{\text{ВХ}}$ . Увеличение реального  $K_{\text{ООС}}$  без учета этой характеристики может привести к ограничению сигнала по амплитуде, следовательно, к погрешности преобразования.

Наиболее распространенные схемы выходных каскадов ОУ (комплементарный эмиттерный повторитель) имеют максимально разрешенное напряжение  $U_{\text{ВЫХ}}$  на несколько вольт меньше напряжения питания  $U_{\text{П}}$ . Если выходной каскад ОУ выполнен по схеме Rail-to-Rail, диапазон изменения выходного напряжения  $U_{\text{ВЫХ}}$  всего на несколько милливольт меньше, чем  $U_{\text{П}}$ .

*Выходное сопротивление  $R_{\text{ВЫХ}}$ .* Этот параметр определяется отношением изменения  $U_{\text{ВЫХ}}$  к изменению  $I_{\text{ВЫХ}}$  при  $U_{\text{ВЫХ}} = 0$  и разорванной цепи

ООС в режиме малого сигнала и на низких частотах. Значение выходного сопротивления следует учитывать при согласовании входных и выходных сопротивлений каскадов, что в свою очередь влияет на погрешность преобразования сигналов. Типичное значение –  $R_{\text{ВЫХ}} = 100 \text{ Ом}$ .

Ток короткого замыкания выхода  $I_{\text{КЗ}}$  показывает, какой выходной ток может выдержать ОУ в течение длительного времени в аварийном режиме в случае замыкания выхода на общую шину или на один из контактов питания.

Входное дифференциальное сопротивление  $R_{\text{дф}}$  – это значение сопротивления одного из входов ОУ при "заземленном" втором входе (рис. 7.50, а). Если входной каскад ОУ выполнен на биполярных транзисторах, то  $R_{\text{дф}} \approx 1 \text{ МОм}$ , а если на полевых –  $R_{\text{дф}} \approx 10^{12} \text{ Ом}$ .

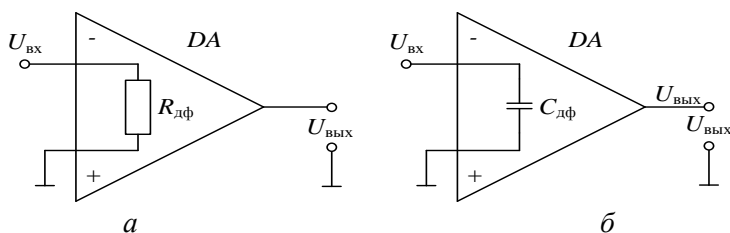


Рис. 7.50. Схемы для определения: а - дифференциального входного сопротивления; б - дифференциальной входной емкости

Входная дифференциальная емкость  $C_{\text{дф}}$  – это значение емкости одного из входов ОУ при "заземленном" втором входе. Этот параметр особенно важен для анализа электрических схем на ОУ на переменном токе, поскольку он определяет изменение входного импеданса (комплексного сопротивления) ОУ при вариации частоты сигнала. При больших значениях входного дифференциального сопротивления наличие дифференциальной емкости приводит к фазовым искажениям сигнала и влияет на устойчивость ОУ к самовозбуждению.

Входное синфазное сопротивление  $R_{\text{сф}}$  – это значение сопротивления объединенных входов ОУ относительно корпусной шины ("земли") (рис. 7.51, а). Значение  $R_{\text{сф}}$  в 10...100 раз больше, чем  $R_{\text{дф}}$ .

7. Входная синфазная емкость  $C_{\text{сф}}$  – это значение емкости объединенных входов ОУ относительно корпусной шины ("земли") (см. рис. 7.51, б). Этот параметр, как и  $C_{\text{дф}}$ , существенно влияет на фазовые искажения сигнала.

8. Коэффициент ослабления синфазного сигнала  $K_{\text{ОСС}}$  – это отношение изменения синфазного сигнала  $\Delta U_{\text{сф}}$  к вызванному им изменению напряжения смещения  $\Delta e_{\text{см}}$

$$K_{\text{ОСС}} = \Delta U_{\text{сф}} / \Delta e_{\text{см}}, \quad (7.49)$$

или в децибелах (дБ) –  $K_{\text{ОСС}} = 20 \lg |\dot{K}_{\text{ОСС}}|$ .

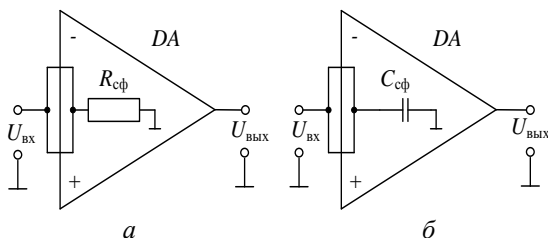


Рис. 7.51. Схемы для измерения: *а* - синфазного входного сопротивления, *б* - синфазной входной емкости

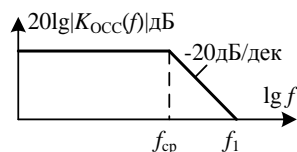


Рис. 7.52. Зависимость коэффициента подавления синфазного сигнала от частоты

$K_{\text{ОСС}}$  можно определить как отношение коэффициента усиления дифференциального сигнала  $K_{\text{д}}$  к коэффициенту усиления синфазного сигнала  $K_{\text{сф}}$ . На рис. 7.52 показана зависимость  $|K_{\text{ОСС}}|$  от частоты. Для прецизионных ОУ на постоянном токе  $K_{\text{ОСС}}$  составляет 110...120 дБ.

*Коэффициент влияния пульсаций по цепям питания  $K_{\text{ПЦП}}$ , мкВ/В* – это отношение изменения напряжения смещения к вызвавшему его изменению напряжения питания ОУ. Для прецизионных ОУ этот коэффициент имеет значение единицы мкВ/В, для ОУ общего использования – сотни мкВ/В. Иногда этот коэффициент выражают в децибелах (дБ):  $K_{\text{ПЦП}}^* = 20 \lg |K_{\text{ПЦП}}^{-1}|$ .

*Диапазон изменения синфазного напряжения* зависит от схемной реализации ОУ. Если выходной каскад ОУ выполнен по схеме дифференциального усилителя, то амплитудное значение входного синфазного напряжения на несколько вольт меньше  $U_{\text{П}}$ ; если этот каскад выполнен по схеме Rail-to-Rail – амплитудное значение входного синфазного напряжения может превышать напряжение питания на несколько десятых вольт (по модулю).

*Динамические характеристики ОУ.*

*Коэффициент усиления ОУ при разорванной цепи обратной связи*

$$K_{\text{ОП}} = \Delta U_{\text{ВЫХ,макс}} / \Delta e_{\text{д}}. \quad (7.50)$$

Это отношение изменения выходного напряжения ОУ в диапазоне от нулевого до максимального значения  $U_{\text{макс}}$  к изменению входного напряжения. Для быстродействующих ОУ этот параметр не превышает нескольких тысяч, для прецизионных ОУ – несколько миллионов (~130 дБ).

*Малосигнальная полоса единичного усиления ОУ.* Это частота, при которой коэффициент усиления ОУ по напряжению в малосигнальном диапазоне

( $U_{\text{вых}}$  не превышает 0,5 В) при разомкнутой цепи ООС равняется единице, т. е.  $K_{\text{оп}}(f_1) = 1$ . Коэффициент усиления ОУ в комплексном виде –  $\dot{K}_{\text{оп}}(f) = K_{\text{оп}}(0) / (1 + jf/f_{\text{cp}})$ , где  $f_{\text{cp}}$  – частота среза. Модуль коэффициента усиления ОУ (АЧХ) –  $|\dot{K}_{\text{оп}}| = K_{\text{оп}}(0) / \sqrt{1 + (f/f_{\text{cp}})^2}$ . Фазовая характеристика (ФЧХ) ОУ –  $\varphi(f) = -\arctg(f/f_{\text{cp}})$ .

На рис. 7.53, а изображена типичная АЧХ ОУ, а на рис. 7.53, б – ФЧХ ОУ. В интервале  $f_{\text{cp}} - f_1$  имеет место ее спад со скоростью 20 дБ на декаду. Точка пересечения графика АЧХ с осью частот является частотой единичного усиления  $f_1$ . Для ОУ общего назначения  $f_1 \approx 1$  МГц, для быстродействующих ОУ  $f_1$  достигает сотен мегагерц.

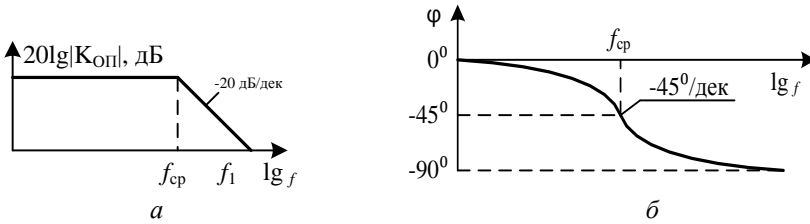


Рис. 7.53. Частотные характеристики ОУ: а – АЧХ, б – ФЧХ

Произведение коэффициента усиления на частоту  $|\dot{K}_{\text{оп}}|f$ . Результатом умножения координат графика функции  $|\dot{K}_{\text{оп}}|$  будет постоянная величина, равная значению предела малосигнальной полосы  $f_1$  в том случае, когда ОУ имеет внутреннюю частотную коррекцию. Этот параметр характеризует устойчивость ОУ к самовозбуждению в малосигнальной полосе.

Максимальная скорость изменения выходного напряжения в режиме большого сигнала синусоидальной формы при замкнутой цепи ООС

$$SR = \Delta U_{\text{вых max}} / \Delta t = 2\pi U_{\text{max}} f_{\text{max}}, \quad (7.51)$$

тогда выражение для вычисления максимально разрешенной частоты

$$f_{\text{max}} = SR / 2\pi U_{\text{max}}. \quad (7.52)$$

От этого параметра зависит граница полосы максимальной мощности  $f_{\text{max}}$  – частота, на которой ОУ передает максимальную амплитуду сигнала с искажениями меньше 1 %. Для прецизионных ОУ  $SR < 1$  В/мкс, что отвечает частоте 16 кГц для амплитуды выходного сигнала  $U_{\text{max}} \approx 10$  В. Для быстродействующих ОУ  $SR > 0,5$  кВ/мкс ( $f_{\text{max}} = 8$  МГц).

Эквивалентная постоянная времени  $\tau_{\text{ОУ}}$  в режиме малого сигнала при замкнутом контуре ООС определяет время фронта  $t_{\phi}$ , в пределах которого

уровень выходного напряжения ОУ увеличится от 10 до 90 % номинального значения (реакция на ступенчатое возбуждение по входу, глубина ООС 100 %,  $U_{\text{ВЫХ}} = 0,5 \text{ В}$ ) (рис. 7.54). Если глубина ООС уменьшается, постоянная времени пропорционально увеличивается.

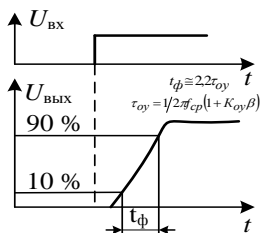


Рис. 7.54. Переходная характеристика ОУ

Время полного успокоения ОУ  $t_{\text{уст}}$  – это временной интервал, в течение которого выходное напряжение ОУ в режиме большого сигнала ( $U_{\text{ВЫХ}}$  в пределах 5 –10 В) стабильно достигает номинального значения с отклонением меньше, чем 0,1 % (реакция на ступенчатое возбуждение по входу при глубине ООС 100 % , рис. 7.55).

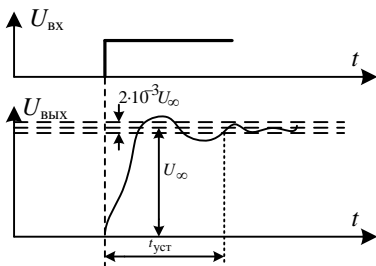


Рис. 7.55. Определение времени полного успокоения

Этот параметр следует учитывать при проектировании схем ИП на ОУ, где имеет место коммутация сигналов с разными уровнями напряжения на входе АЦП (он определяет время задержки до следующего цикла измерения).

### 7.5. Погрешности преобразователей на операционных усилителях

**Аддитивные погрешности.** Расчет аддитивных составных погрешностей схем на ОУ проводят в масштабе выходной величины, поскольку расчетные формулы остаются действительными для всех способов включения ОУ. Это объясняется тем, что коэффициент усиления напряжения смещения не зависит от способов включения ОУ (в отличие от коэффициента усиления полезного сигнала). Коэффициент усиления напряжения смещения, в соот-

ветствии с эквивалентной схемой, равен  $\beta^{-1}$  и называется *коэффициентом шума*. Здесь  $\beta$  – коэффициент передачи цепи ООС. Например, для схемы инвертирующего усилителя (см. рис. 7.40, а) имеем  $\beta = R_1 / (R_2 + R_1)$ .

Абсолютная аддитивная погрешность схемы на ОУ:

$$\Delta U_{\text{ВЫХ}} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^5 e_{\text{см},i} \cdot \quad (7.53)$$

Относительная аддитивная погрешность вычисляется как

$$\delta = \Delta U_{\text{ВЫХ}} / U_{\text{ВЫХ}}, \quad (7.54)$$

а приведенная аддитивная погрешность –

$$\delta_{\text{ПР}} = \Delta U_{\text{ВЫХ}} / U_{\text{ВЫХНОМ}}, \quad (7.55)$$

где  $U_{\text{ВЫХНОМ}}$  – номинальное выходное напряжение (обычно  $U_{\text{ВЫХНОМ}} = 10 \text{ В}$ ).

Суммарное напряжения смещения ОУ имеет пять составляющих, определяемых такими факторами: начальным напряжением смещения и температурным дрейфом; токами смещения; неоптимальным ослаблением синфазного сигнала; пульсациями в цепях питания; шумовыми свойствами входных цепей ОУ.

*Начальное напряжение смещения и температурный дрейф.* Эта составляющая обусловлена начальным напряжением смещения нуля ОУ, которая может быть эффективно скомпенсирована, и температурным дрейфом напряжения смещения

$$e_{\text{см},1} = e_{\text{см},0} + e_{\text{др}} \quad , \quad (7.56)$$

где  $e_{\text{см},0}$  – начальное смещение нуля;  $e_{\text{др}}$  – температурный дрейф смещения нуля.

Составляющая  $e_{\text{см},0}$  учитывает технологическое смещение нуля и компенсируется с помощью либо переменного сопротивления, подключенного к корректирующим выходам ОУ, либо специальными схемами коррекции. Эта компонента погрешности трактуется как основная.

Составляющая  $e_{\text{др}}$  учитывается как основная при нормальных условиях эксплуатации и как дополнительная погрешность при рабочих условиях.

Если в результате анализа окажется, что эта составляющая вносит существенный вклад в общую погрешность, следует использовать специальные схемы автоматической коррекции или термостабилизацию измерительного преобразователя.

*Токи смещения* вызывают смещение напряжения

$$e_{\text{см},2} = R_1 R_2 I_{\text{см}}^- / (R_1 + R_2) - R_3 I_{\text{см}}^+ \cdot \quad (7.57)$$

Если резисторы подбирать из условия  $R_3 = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ , то для ОУ на биполярных транзисторах ( $\Delta I_{\text{см}} \ll I_{\text{см}}$ )  $e_{\text{см},2}$  заметно снижается:  $e_{\text{см},2} = R_3 \Delta I_{\text{см}}$ .

Для оценки влияния температуры на  $\Delta I_{\text{см}}$  используют зависимость

$$e_{\text{см.2}} = (\Delta I_{3\text{М}} + \Delta_{\Delta I_{\text{см}}} \Delta T) R_3. \quad (7.58)$$

Из формулы (7.58) следует, что при наличии резистора  $R_3$  в схеме инвертирующего усилителя смещение  $e_{\text{см.2}}$  зависит от неидентичности входных неуправляемых токов смещения и их изменения при изменении температуры. Первое слагаемое суммы (7.58) связано с основной погрешностью преобразования и может быть скомпенсовано, а второе – с дополнительной и основной (аналогично  $e_{\text{см.1}}$ ).

*Неидеальность ослабления синфазного сигнала* обусловлена неполным подавлением синфазного сигнала и вычисляется по формуле

$$e_{\text{см.3}} = U^+ / K_{\text{ОСС}}, \quad (7.59)$$

где  $U^+$  - напряжение на неинвертирующем входе.

В инвертирующих каскадах  $e_{\text{см.3}} = 0$ , а в неинвертирующих является мультипликативной составляющей со значением  $\gamma_{\text{см.3}} = K_{\text{ОСС}}^{-1}$ .

В дифференциальных каскадах необходимо выполнять дополнительные расчеты для определения напряжения  $U^+$ .

*Пульсации по цепям питания приводят к напряжению смещения*

$$e_{\text{см.4}} = K_{\text{ПЦП}} \Delta U_{\text{п}}, \text{ мкВ}, \quad (7.60)$$

где  $\Delta U_{\text{п}}$ , В - изменение напряжения питания;  $K_{\text{ПЦП}}$ , мкВ/В - коэффициент влияния пульсаций по цепям питания ОУ. Если в документации приведен коэффициент подавления пульсаций по цепям питания  $K_{\text{ПЦП}}^*$  в дБ, то  $e_{\text{см.4}}$

рассчитывают как  $e_{\text{см.4}} = 10^{-\frac{K_{\text{ПЦП}}^*}{20}} \Delta U_{\text{п}}$ , В.

Частотные зависимости коэффициентов  $K_{\text{ОУ}}$ ,  $K_{\text{ОСС}}$ ,  $K_{\text{ПЦП}}^*$  имеют одинаковые частоты среза и спада АЧХ, но отличаются значением коэффициентов на постоянном токе (рис. 7.56, а). Для компенсации увеличения  $K_{\text{ПЦП}}$  с ростом частоты, которое приводит к увеличению погрешности  $e_{\text{см.4}}$ , в звенья питания ОУ включают RC-фильтры (рис. 7.56, б).

Постоянную времени фильтра  $\tau_{\text{ф}}$  цепи питания определяют с учетом частоты среза  $f_{\text{ср}}$  ОУ:  $\tau_{\text{ф}} = (2\pi f_{\text{ср}})^{-1}$ . Емкость  $C_{\text{ф}}$  конденсатора фильтра рассчитывают из соотношения  $\tau_{\text{ф}} = R_{\text{ф}} C_{\text{ф}}$ . Значение  $R_{\text{ф}}$  выбирают из диапазона 10 - 100 Ом таким образом, чтобы падение напряжения на этом резисторе от токов питания ОУ не превышало 200 - 500 мВ.

Для обеспечения необходимого импеданса фильтра в полосе частот до 100 кГц рекомендуется применять танталовые емкости  $C_{\text{ф}}$ . Если использу-

ются электролитические конденсаторы, для компенсации их паразитной индуктивности необходимо шунтировать их керамическими или пленочными конденсаторами ограниченных номиналов.

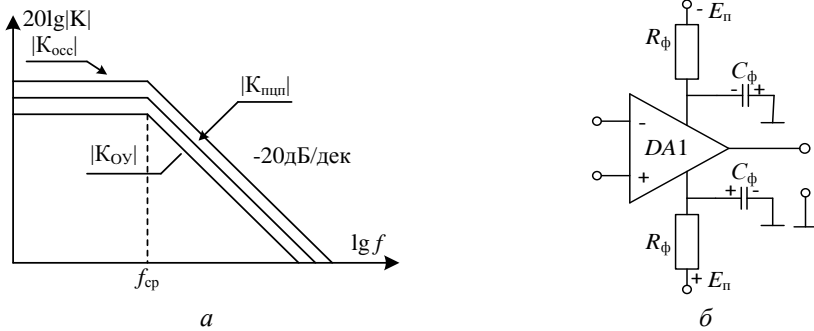


Рис. 7.56. Операционный усилитель: а – АЧХ; б - использование RC- фильтров в цепях питания ОУ

*Шумовые свойства входных цепей ОУ.* Шумовая составляющая  $e_{см.5}$  имеет особенность: она является случайной и всегда знакопеременной. Для подсчета  $e_{см.5}$  используется среднеквадратическое значение шума

$$e_{ш} = \sqrt{\left[ G_{ш}^2 + 2(J_{ш}R_3)^2 + 8kTR_3 \right] \Delta f_{ш}} , \quad (7.61)$$

где  $J_{ш} \left[ A/\sqrt{\Gamma\Omega} \right]$  - спектральная плотность эквивалентного входного шумового тока (в документации на ОУ приводится график  $J_{ш}(f)$  (рис. 7.57) или промежуточные точки этого графика);  $G_{ш} \left[ B/\sqrt{\Gamma\Omega} \right]$  - спектральная плотность эквивалентного входного шумового напряжения (в документации на ОУ приводится график  $G_{ш}(f)$  (рис. 7.58) или промежуточные точки этого графика);  $\Delta f_{ш} = f_{ср} \pi/2$  - эквивалентная шумовая полоса ОУ;  $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К - постоянная Больцмана;  $T$  - температура, К.

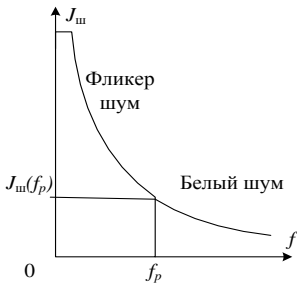


Рис. 7.57. Зависимость  $J_{ш}(f)$  и ее использование на фиксированной частоте

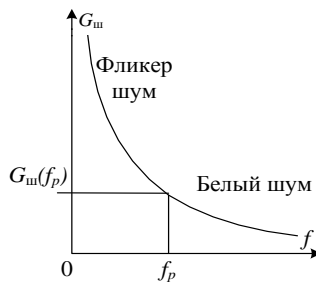


Рис. 7.58. Зависимость  $G_{ш}(f)$  и ее использование на фиксированной частоте

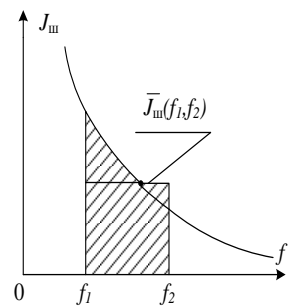


Рис. 7.59. Зависимость  $J_{ш}(f)$  и ее использование в диапазоне частот



Если расчет выполняется на фиксированной частоте  $f_p \in [f_1, f_2]$ , значения  $J_{\text{ш}}$  и  $G_{\text{ш}}$  оцениваются по графикам  $J_{\text{ш}}(f)$  и  $G_{\text{ш}}(f)$  (см. рис. 7.57, рис. 7.58). Если в полосе частот, то вычисляют площадь фигуры под кривой  $J_{\text{ш}}(f)$  (см. рис. 7.59); в пределах  $f_1, f_2$  строят прямоугольник такой же площади; ордината прямоугольника принимается за эквивалентное значение шума  $J_{\text{ш}}(G_{\text{ш}})$ .

**Мультипликативные погрешности.** Эти погрешности имеют пять составляющих, обусловленных такими факторами: ограниченностью  $K_{\text{ОУ}}$  и его изменением; шунтирующим действием на цепь ООС входных импедансов ОУ; ограниченностью  $R_{\text{ВЫХ}}$  ОУ; нестабильностью цепи ООС; соотношением входного и выходного сопротивлений (погрешность согласования).

*Ограниченность  $K_{\text{ОУ}}$  и его изменение* – составляющая, определяемая конечным значением  $K_{\text{ОУ}}$  и его зависимостью от частоты, температуры и изменения напряжения питания.

Коэффициент усиления ОУ с ООС в общем случае имеет вид

$$K_{\text{ООС}} = K_{\text{ОУ}} / (1 + K_{\text{ОУ}}\beta) = (1/\beta) / (1 + 1/K_{\text{ОУ}}\beta) = (1 - 1/K_{\text{ОУ}}\beta) / \beta, \quad (7.62)$$

где  $K_{\text{ОУ}}$ ,  $\beta$  – коэффициенты усиления ОУ и передачи цепи ООС соответственно. Графики АЧХ и ФЧХ для ОУ ( $|K_{\text{ОУ}}|$  и  $\varphi_{\text{ОУ}}$  соответственно) и АЧХ ОУ с цепью ООС ( $|K_{\text{ООС}}|$ ) изображены на рис. 7.60, а.

Элемент  $1/\beta$  в формуле (7.62) показывает расчетное или идеальное значение коэффициента усиления ОУ с ООС последовательного типа (для ООС параллельного типа идеальное значение коэффициента усиления ОУ с ООС равно  $(1 - 1/\beta)$ ), а другой элемент –  $(1 - 1/K_{\text{ОУ}}\beta)$  – содержит значение первой составляющей мультипликативной погрешности –  $\gamma_1 = |1/K_{\text{ОУ}}\beta|$ . Это выражение действительно на частотах, меньших  $f_{\text{cp}}$ , когда  $\varphi_{\text{ОУ}} \approx 0$  а значение  $K_{\text{ОП}}$  практически не изменяется. На высоких частотах ( $f \gg f_{\text{cp}}$ )  $K_{\text{ОУ}}$  приобретает  $90^\circ$  сдвиг (см. рис. 7.60, б). В этом случае формула (7.62) представляется в виде

$$|K_{\text{ООС}}| = \left| \frac{jK_{\text{ОУ}}(f)}{1 + jK_{\text{ОУ}}(f)\beta} \right| = \left| \frac{1/\beta}{1 - j/K_{\text{ОУ}}(f)\beta} \right| = \frac{1}{\beta} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{|K_{\text{ОУ}}(f)\beta|} \right)^2 \right]. \quad (7.63)$$

Значение первой составляющей мультипликативной погрешности  $\tilde{\gamma}_1$  на высоких частотах равно

$$\tilde{\gamma}_1 = (1/|K_{\text{ОУ}}(f)\beta|)^2 / 2. \quad (7.64)$$

При повышении частоты петлевое усиление  $K_{OY}(f)\beta$  уменьшается, что приводит к увеличению погрешности  $\tilde{\gamma}_1$ .

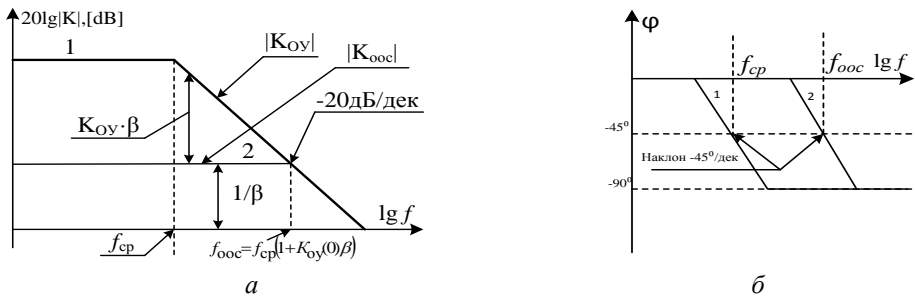


Рис. 7.60. Определение петлевого усиления по частотным характеристикам:  
 а, 1 - АЧХ для ОУ; а, 2 - АЧХ ОУ с цепью ООС ( $|K_{OOC}|$ ); б - ФЧХ

Для учета температурного фактора и зависимости  $K_{OY}$  от напряжения питания обозначим относительное изменение  $K_{OY}$ , вызванное этими факторами, как  $\gamma_k = \Delta K_{OY} / K_{OY}$ . Выражение для расчета погрешности схемы с ООС, обусловленной нестабильностью  $K_{OY}$ , имеет вид

$$\gamma_1(K_{OY}) = \Delta K_{OY} \partial K_{OY} / K_{OOC} \partial K_{OY} = \gamma_k / (1 + K_{OY} \beta). \quad (7.65)$$

Учитывая, что  $K_{OY} \beta \gg 1$ , а  $\gamma_k \leq 0,2$  в рабочих условиях, эта погрешность в большинстве случаев не превышает 0,1 %.

*Шунтирующее действие входных импедансов ОУ на цепь ООС.* Значения входных сопротивлений ОУ не являются бесконечными, а значения входных емкостей не равняются нулю. Рассмотрим влияние этих факторов в двух основных вариантах включения ОУ. Для инвертирующего включения ОУ комплексные входные сопротивления ОУ дифференциальному и синфазному сигналам (рис. 7.61) соответственно равны

$$\dot{Z}_{дф} = R_{дф} \parallel 1 / j\omega C_{дф}, \quad \dot{Z}_{сф} = R_{сф} \parallel 1 / j\omega C_{сф}.$$

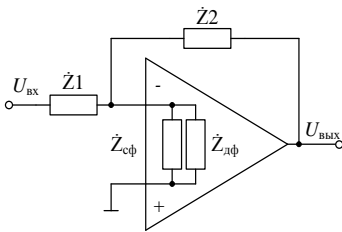


Рис. 7.61. Эквивалентная схема для учета влияния входных сопротивлений в инвертирующем включении ОУ

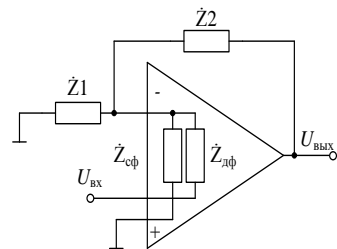


Рис. 7.62. Эквивалентная схема для учета влияния входных сопротивлений в неинвертирующем включении ОУ

Коэффициент усиления схемы на ОУ с ООС (рис. 7.62) с учетом  $\dot{Z}_{\text{сф}}$ ,  $\dot{Z}_{\text{дф}}$ , определится как

$$K_{\text{оос}}(j\omega) = (\dot{Z}_2 / \dot{Z}_1) / \left( 1 + (K_{\text{оу}} \dot{\beta}')^{-1} \right), \quad (7.66)$$

где  $\dot{\beta}'$  - коэффициент преобразования цепи ООС

$$\dot{\beta}' = 1 / \left( 1 + \dot{Z}_2 / \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 / \dot{Z}_{\text{дф}} + \dot{Z}_2 / \dot{Z}_{\text{сф}} \right). \quad (7.67)$$

Из формулы (7.67) следует, что влияние входных импедансов при инвертирующем включении ОУ мало, поскольку составляющие  $\dot{Z}_2 / \dot{Z}_{\text{дф}}$ ,  $\dot{Z}_2 / \dot{Z}_{\text{сф}}$  оказывают влияние лишь на погрешность в выражении (7.66).

Для неинвертирующего включения ОУ коэффициент усиления ОУ с ООС (см. рис. 7.62) определяется выражением

$$K_{\text{оос}}(f) = \left( 1 + \dot{Z}_2 / \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 / \dot{Z}_{\text{дф}} + \dot{Z}_2 / \dot{Z}_{\text{сф}} \right) / \left[ 1 + (K_{\text{оу}} \dot{\beta}')^{-1} \right], \quad (7.68)$$

где  $\dot{\beta}'$  задается аналогично выражению (7.67).

Как следует из формулы (7.68), влияние входных импедансов в этом случае значительно больше, поскольку составляющая  $\dot{Z}_2 / \dot{Z}_{\text{дф}}$ ,  $\dot{Z}_2 / \dot{Z}_{\text{сф}}$  находятся в числителе, и с  $\dot{K}_{\text{оос}}$  связаны непосредственно.

*Влияние ограниченности выходного сопротивления ОУ.* Типичное значение выходного сопротивления ОУ составляет 300÷500 Ом. Коэффициент усиления ОУ (рис. 7.63) с учетом сопротивления  $R_{\text{ВЫХ}}$

$$K'_{\text{оп}} = K_{\text{оп}} / \left( 1 + R_{\text{ВЫХ}} / R_{\text{н}} \parallel R_2 \right), \quad (7.69)$$

где  $R_2$  - сопротивление цепи ООС;  $R_{\text{н}}$  - эквивалентное сопротивление нагрузки.

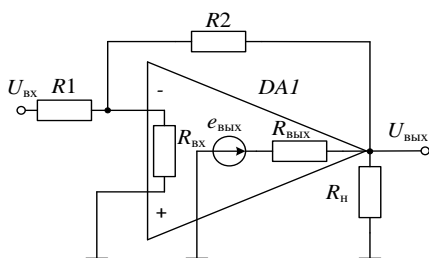


Рис. 7.63. Эквивалентная схема влияния выходного сопротивления ОУ

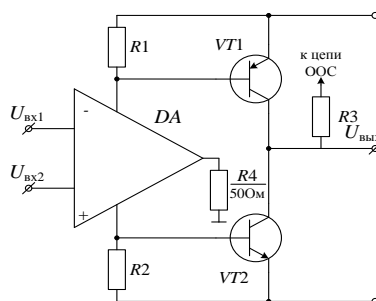


Рис. 7.64. Внешний выходной каскад ОУ типа Rail-to-Rail

Если входное сопротивление следующего каскада превышает 2 кОм, выходным сопротивлением ОУ можно пренебречь.

Рассмотрим работу ОУ с внешней выходной цепью, выполненной по схеме Rail-to-Rail (рис. 7.64), с сопротивлением нагрузки ОУ  $R_n \approx 50 \text{ Ом}$ . Управление  $p$ - $n$ -переходами транзисторов  $VT1$  и  $VT2$  происходит благодаря падению напряжения на резисторах  $R_1$  и  $R_2$  в цепях питания ОУ. Выходной каскад на  $VT1$  и  $VT2$  позволяет отдавать в нагрузку сигнал значительно большей мощности и с большей амплитудой, чем типичный выходной каскад на ОУ.

*Влияние нестабильности цепи ООС.* Эта составляющая чаще всего является наиболее значимой при анализе погрешностей схем на ОУ. Проанализируем ее для трех схем включения ОУ. Рассмотрим сначала схему инвертирующего усилителя (см. рис. 7.40, *a*). Для этой схемы коэффициент усиления равен  $K_{\text{оос}} = -R_2/R_1$ , а относительная погрешность преобразования определяется

$$\gamma_4 = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial K_{\text{оос}}}{\partial R_i} \frac{\Delta R_i}{K_{\text{оос}}} = \gamma_{R_2} - \gamma_{R_1}, \quad (7.70)$$

где  $\gamma_{R_1} = \Delta R_1/R_1$ ,  $\gamma_{R_2} = \Delta R_2/R_2$  - относительные отклонения значения сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$  от их номинальных значений (класс точности резисторов). Если резисторы  $R_1$ ,  $R_2$  неидентичны, то  $\Delta R_1$ ,  $\Delta R_2$  могут иметь разные знаки, и максимальное значение этой погрешности равно  $\gamma_4 = |\gamma_{R_1}| + |\gamma_{R_2}|$ , если они идентичны, то погрешность будет меньше (см. (7.70)).

Рассмотрим схему неинвертирующего усилителя на ОУ (см. рис. 7.41, *a*). Коэффициент усиления ОУ с ООС в этом случае равен  $K_{\text{ноос}} = 1 + R_2/R_1$ , а относительная погрешность преобразования для этой схемы

$$\gamma_4 = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial K_{\text{оос}}}{\partial R_i} \frac{\Delta R_i}{K_{\text{оос}}} = (\gamma_{R_2} - \gamma_{R_1}) \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (7.71)$$

Для третьей схемы – дифференциального усилителя (см. рис. 7.42, *a*) – коэффициент передачи для синфазного и дифференциального сигналов определяются соответственно, выражениями (7.35) и (7.36). Для того чтобы оценить вклад нестабильности сопротивлений  $R_1 - R_4$  на значение этих коэффициентов, подставим в эти выражения соотношение

$$R_2/R_1 = R_4(1 + \delta)/R_3, \quad (7.72)$$

где  $\delta = 4\gamma_R$ ;  $\gamma_R$  - класс точности резисторов  $R_1 - R_4$ . Тогда выражение (7.35) и (7.36) примут вид

$$K_{\text{сф}} = \delta R_4 / (R_3 + R_4), \quad (7.73)$$

$$K_{\text{д}} = -R_2(1 - \delta\beta/2)/R_1, \quad (7.74)$$

где  $\beta = R_1/(R_1 + R_2)$  - коэффициент передачи цепи ООС.

Влияние  $\delta$  на значение коэффициента  $K_{сф}$  весьма существенно, что является основным недостатком этой схемы. На практике его минимизируют, применяя измерительные усилители. Наиболее распространенным вариантом такого усилителя является схема "на трех ОУ".

*Влияние соотношения входного и выходного сопротивлений (погрешность согласования).* Эта составляющая определяется соотношением выходного сопротивления  $R_{ВЫХ}$  предыдущего каскада и входного сопротивления следующего каскада  $R_{ВХ}$ . Согласование каскадов может происходить по напряжению ( $R_{ВЫХ} \ll R_{ВХ}$ ) или по току ( $R_{ВЫХ} \gg R_{ВХ}$ ).

Сначала рассмотрим соединение со следующим каскадом по критерию *согласования по напряжению*. На рис. 7.65 изображена эквивалентная схема выходного каскада ОУ для низких частот и входного каскада следующего блока с передачей сигнала между каскадами через разделительный конденсатор  $C_p$ . Относительная погрешность согласования определяется как

$$\gamma_c = |(U_x - E_x)/E_x| = 1/2(\omega R_{ВХ} C_p)^2, \quad (7.75)$$

где  $C_p$  - емкость разделительного конденсатора;  $R_{ВХ}$  - входное сопротивление следующего блока;  $\bar{E}$  - источник паразитной синфазной (постоянной) составляющей напряжения, обусловленной токами смещения нуля ОУ;  $E_x$  - источник полезного сигнала ОУ;  $U_x$  - входное напряжение следующего каскада.

На рис. 7.66 показана эквивалентная схема, аналогичная схеме на рис. 7.65, но для диапазона высоких частот (при непосредственных связках между каскадами). Относительная погрешность согласования определяется как

$$\gamma_c = |(U_x - E_x)/E_x| = R_{ВЫХ} \sqrt{1 + (\omega \tau_{ВХ})^2} / R_{ВХ}, \quad (7.76)$$

где  $\tau_{ВХ}$  - постоянная времени входной цепи следующего каскада. Выражение (7.76) при  $(\omega \tau_{ВХ})^2 \gg 1$  имеет вид  $\gamma_c = \omega R_{ВЫХ} C_{ВХ}$ .

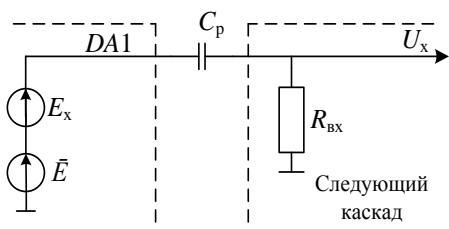


Рис. 7.65. Определение погрешности согласования на низких частотах

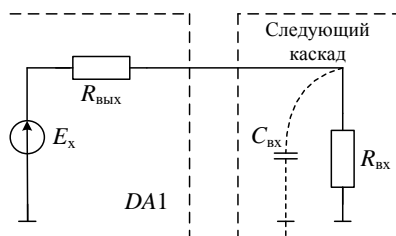


Рис. 7.66. Определение погрешности согласования на высоких частотах

Погрешность  $\bar{\gamma}_c$  согласования по напряжению на постоянном токе из выражения (7.76) определяется выражением  $\bar{\gamma}_c = R_{\text{ВЫХ}}/R_{\text{ВХ}}$ .

Рассмотрим второй вариант – *согласование по току* (рис. 7.67). Для выполнения условия  $R_{\text{ВЫХ}} \gg R_{\text{ВХ}}$  выходной каскад ОУ должен работать в режиме источника тока, а для входного желательной является схема преобразователя «ток - напряжение» (рис. 7.68).

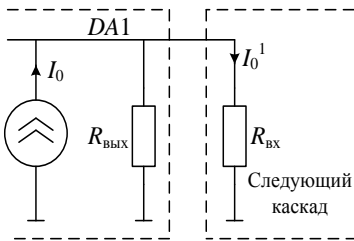


Рис. 7.67. Согласование по току

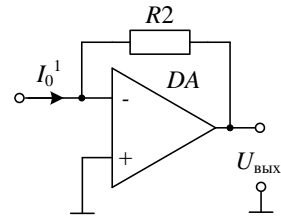


Рис. 7.68. Преобразователь ток-напряжение

Погрешность согласования определяется как

$$\gamma_c = (I_0' - I_0)/I_0 = R_{\text{ВХ}}/R_{\text{ВЫХ}}, \quad (7.77)$$

где  $R_{\text{ВЫХ}}$  - выходное сопротивление предыдущего каскада;  $R_{\text{ВХ}}$  - входное сопротивление следующего каскада.

Для преобразователя «ток - напряжение» значение выходного напряжения равно  $U_{\text{ВЫХ}} = I_0' R_2$ , а коэффициент преобразования цепи ООС, учитывая  $R_{\text{ВЫХ}} \gg R_2$ , равен  $\beta = R_{\text{ВЫХ}}/(R_{\text{ВЫХ}} + R_2) \approx 1$ .

Входное сопротивление этой схемы определяется выражением

$$R_{\text{ВХ}} = R/(1 + K_{\text{ОУ}}\beta). \quad (7.78)$$

Входные сопротивления для инвертирующего (см. рис. 7.40, а) и неинвертирующего (см. рис. 7.41, а) усилителей определяются соответственно

$$R_{\text{ВХ}} \approx R_1 + R_2/(1 + K_{\text{ОУ}}\beta), \quad (7.79)$$

$$R_{\text{ВХ}} = R_{\text{диф}} \left(1 + K_{\text{ОУ}}\beta\right) \parallel R_{\text{сф}}. \quad (7.80)$$

Для этих схем выходное сопротивление одинаково и равно

$$R'_{\text{ВЫХ}} = R'_{\text{ВЫХ}_{\text{ОУ}}}/(1 + K_{\text{ОУ}}\beta). \quad (7.81)$$

---

*Основные выводы*

---

Под измерительным преобразователем (ИП) понимают устройство с нормированными метрологическими характеристиками, служащее для преобразования измеряемой величины в другую величину или измерительный сигнал, удобный для обработки, хранения, последующих преобразований, индикации или передачи.

Метрологические характеристики (МХ) – это технические характеристики ИП, описывающие их свойства, необходимые для выполнения ими функционального назначения и оказывающие влияние на результаты и погрешности измерений. В документации на ИП указывают следующие МХ: номинальная функция преобразования, чувствительность, порог чувствительности, погрешность, диапазон измерений, динамические характеристики (импульсная переходная характеристика, комплексная частотная характеристика, амплитудно-частотная характеристика, фазо-частотная характеристика, время реакции средства измерений, граничные значения частот), импеданс.

К наиболее часто употребляемым типам датчиков относятся: емкостные, индуктивные, электромагнитные, резистивные (потенциметрические, тензодатчики, терморезистивные, термисторные), преобразователи Холла и Гаусса, датчики на основе химических полевых транзисторов, пьезоэлектрические, преобразователи на эффекте Доплера, преобразователи перемещения на туннельном эффекте, термодинамические, фотометрические преобразователи (фотоэмиссионные, фоторезистивные и фотодиодные детекторы), акустооптические, волоконнооптические и флуоресцентные датчики химических величин.

Схемотехника вторичных ИП предусматривает широкое использование универсальных и оригинальных средств аналогового преобразования сигналов, выполненных на основе операционных усилителей (ОУ).

ОУ – это дифференциальный усилитель напряжения с непосредственными связями, коэффициентом усиления свыше 1000 и возможностью формирования частотной характеристики с помощью введения отрицательной обратной связи (ООС).

Для получения расчетного значения коэффициента усиления ИП пользуются моделью идеального ОУ, для которого имеют место такие аксиомы: дифференциальное входное напряжение ОУ в линейном режиме всегда равно нулю; входные токи ОУ равны нулю; напряжение на инвертирующем входе ОУ равно напряжению на неинвертирующем входе при замкнутой ООС.

Все схемы на ОУ сводятся к шести базовым схемам: инвертирующего усилителя; неинвертирующего усилителя; дифференциального усилителя; дифференциатора; интегратора; инвертирующего сумматора.

С помощью эквивалентной схемы реального ОУ и ее параметров рассчитывают статические, динамические и случайные погрешности преобразования сигнала, т. е. определяют отклонение реальной функции преобразования от идеальной.

Характеристики реальных ОУ подразделяются на две группы: границы допустимых параметров и электрические характеристики. Первые определяют пределы эксплуатационных параметров, при которых ОУ сохраняет способность нормально функционировать. Электрические характеристики позволяют рассчитать погрешности преобразования сигналов в схемах на ОУ.

Аддитивная погрешность ИП определяется напряжением смещения, которое имеет пять составляющих, обусловленных такими факторами: начальным напряжением смещения и температурным дрейфом; токами смещения; конечным ослаблением синфазного сигнала; пульсациями в цепях питания; шумовыми свойствами входных цепей ОУ.

Мультипликативные погрешности также имеют пять составляющих, определяемых такими факторами: ограниченностью  $K_{\text{ОУ}}$  и его изменением; шунтирующим действием входных импедансов ОУ на цепь ООС; ограниченностью выходного сопротивления ОУ; нестабильностью цепи ООС; соотношением входного и выходного сопротивлений (погрешность согласования).

---

### ***Вопросы для самоконтроля***

---

- 1. Дайте определение и приведите обобщенную модель ИП.*
- 2. Дайте общую характеристику датчиков генераторного типа.*
- 3. Назовите основные метрологические характеристики датчиков.*
- 4. Приведите примеры датчиков физических величин параметрического типа.*
- 5. Приведите разновидности активных преобразователей и их общую характеристику.*
- 6. Приведите примеры физических явлений или эффектов, которые используются для построения датчиков.*
- 7. Раскройте принцип действия, особенности работы и основные характеристики емкостных датчиков.*
- 8. Приведите принцип действия, особенности работы и основные характеристики индуктивных датчиков.*
- 9. Объясните принцип действия и приведите особенности работы и основные характеристики электромагнитных датчиков.*
- 10. Объясните принцип действия и приведите особенности работы, схемы включения и основные характеристики тензодатчиков.*
- 11. Объясните принцип действия и приведите особенности работы и основные характеристики терморезистивных датчиков.*



12. Раскройте принцип действия, особенности работы и основные характеристики датчиков на основе эффекта Холла.
13. Раскройте принцип действия, особенности работы и основные характеристики датчиков на основе химических полевых транзисторов.
14. Раскройте принцип действия, особенности применения и основные характеристики пьезоэлектрических датчиков.
15. Объясните физическую сущность эффекта Доплера и примеры его приложения в измерительной технике.
16. Раскройте принцип действия, особенности применения и основные характеристики термопар.
17. Приведите принцип действия термоэлектрических преобразователей на основе кварцевых генераторов.
18. Дайте сжатую общую характеристику термодинамических датчиков и примеры их применения.
19. Раскройте принцип действия, особенности применения и основные характеристики фотометрических датчиков.
20. Дайте общую характеристику волоконнооптических датчиков.
21. Объясните принцип действия ячейки Брегга.
22. В каких случаях целесообразно использовать модель идеального ОУ?
23. Назовите параметры идеального ОУ.
24. Дайте общее описание основных базовых схем на ОУ.
25. Приведите идеальные характеристики инвертирующего усилителя на ОУ. Дайте необходимые пояснения.
26. Приведите идеальные характеристики неинвертирующего усилителя на ОУ. Дайте необходимые пояснения.
27. Приведите идеальные характеристики инвертирующего сумматора. Дайте необходимые пояснения.
28. Назовите характеристики идеального интегратора и дифференциатора. Дайте необходимые пояснения.
29. Для чего целесообразно использовать модель реального ОУ?
30. Определите различие между параметрами реального и идеального ОУ.
31. Объясните элементы эквивалентной электрической схемы реального ОУ.
32. Выполните анализ границ допустимых параметров ОУ.
33. Выполните анализ входных характеристик.
34. Выполните анализ выходных характеристик.
35. Выполните анализ динамических характеристик.
36. Назовите составляющие, входящие в состав мультипликативной погрешности ОУ?
37. Какие составляющие входят в аддитивную погрешность ОУ?
38. Объясните разницу согласования по току и по напряжению между входными и выходными сопротивлениями схем на ОУ.

39. Как влияет ограниченность входного сопротивления ОУ на погрешность преобразования?

---

### *Conclusions*

---

Measuring transducer (MT) is a device with normalized metrological characteristics serving to convert measuring quantity to other quantity or measurement signal, convenient for processing, storage, subsequent conversions, indication or transmission.

Metrological characteristics (MC) are technical characteristics of sensors that describe their properties needed to perform their functionality mission and that have an impact on measurement results and errors. MT documentation indicate following MCs: nominal conversion function, sensitivity, sensitivity threshold, accuracy, measurement range, dynamic characteristics (unit-impulse response, complex frequency response, amplitude-frequency response, measurement mean response time, frequency boundary values) impedance.

Most commonly used types of MT are: capacitive, inductive, electromagnetic, resistive (potentiometric, strain gauges, thermoresistive, thermistor), Hall and Gauss converters, sensors based on chemical field effect transistors, piezoelectric converters on Doppler effect, displacement transducer on tunnel effect, thermodynamic, photometric converters (photoemissive, photoresistive and photodiode detectors), acousto-optic, fiber-optic and fluorescent sensors of chemical quantities.

Circuit technique of secondary MT provides extensive use of universal and original means of analog signal conversion performed on the basis of operational amplifiers.

Operational amplifier (OA) is a differential voltage amplifier with direct coupling, amplifying coefficient over 1000 and possibility to generate frequency response by introducing a negative feedback (NFB).

To obtain the estimated amplifying coefficient value of MT the model of an ideal OA is used, where following axioms are true: differential input voltage of OA in linear regime is always equal to zero; OA input currents equal to zero; voltage at inverting input of OA equals to voltage at non-inverting input with closed NFB.

All of the schemes at OA are reduced to six basic schemes: inverting amplifier; non-inverting amplifier; differential amplifier; differentiator; integrator; inverting adder.

With the help of equivalent circuit of real OA and its parameters static, dynamic and random errors of signal conversion are calculated, that is, deviation of real conversion function from ideal is determined.

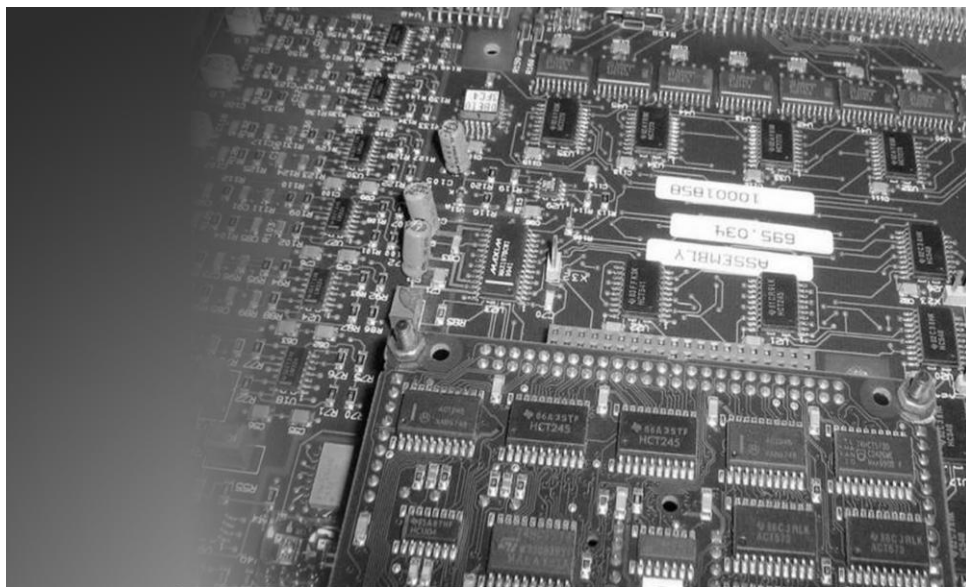
Characteristics of real OA are divided into two groups: limits of permissible parameters and electrical characteristics. At first, defined operating parameters limits at which OA retains the ability to function normally. Electrical characteristics allow calculating signal conversion error in circuits at OA.

On direct current MT' additive error is determined by voltage bias, which has five components caused by such factors: initial offset voltage and temperature drift; displacement currents; finite common mode rejection; pulsations in power circuits; noise properties of MT input circuits.

Multiplicative errors also have five components, determined by such factors: limitation of  $K_{\text{оп}}$  and its change; shunting effect of OA input impedance on NFB circuit; OA output impedance; NFB circuit instability; input and output impedances ratio (matching error).

***Ключевые слова***

измерительный преобразователь	measuring transducer
датчик	sensor
метрологические характеристики	metrological characteristics
мост Уитстона	wheatstone bridge
коэффициент усиления	amplifier gain
операционный усилитель	operational amplifier
аддитивная погрешность	additive error
мультипликативная погрешность	multiplication error
коэффициент усиления	amplifying coefficient



## АНАЛОГОВЫЕ ИНТЕРФЕЙСЫ

8

- 8.1. Основные термины и определения
- 8.2. Разновидности аналоговых интерфейсов
- 8.3. Метрологические характеристики аналоговых интерфейсов

### 8.1. Основные термины и определения

**Аналоговый интерфейс (АИ)** – это совокупность средств измерительной техники, являющихся составной частью измерительного канала между датчиком и АЦП, находящимися в системе сбора данных. Обобщенная структурная схема АИ приведена на рис. 8.1.

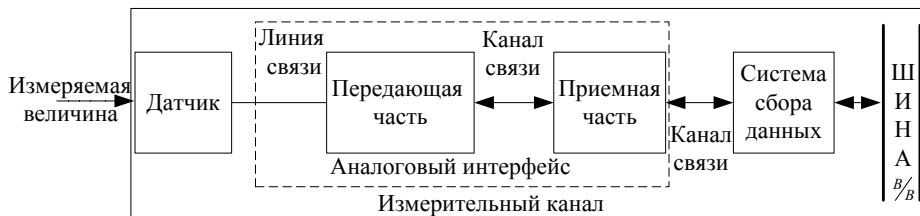


Рис. 8.1. Структура измерительного канала с АИ

АИ являются одной из наиболее важных составных частей ИИС с точки зрения определения их метрологических характеристик.

АИ в ИИС выполняют следующие функции.

**Масштабное преобразование** – обеспечивает повышение отношения сигнал/шум на входе АЦП при наличии линии связи между передающей и приемной составляющими АИ. Усиление сигнала происходит в передающей части АИ в непосредственной близости от ПИП.

**Фильтрация** необходима для ограничения полосы частот помех и подавления нежелательных частотных составляющих в полосе измерительного сигнала, в первую очередь сетевых наводок, а также для уменьшения влияния эффекта наложения спектров во время дискретизации аналоговых сигналов.

**Изолирование АИ** достигается с помощью трансформаторных, емкостных или оптических гальванически развязывающих устройств и обеспечивает разрыв паразитных контуров заземления, возможность работы при значительных по величине синфазных составляющих сигнала.

**Компенсация температуры холодных спаев термопар** необходима для уменьшения методической погрешности термопары как ПИП разницы температур ее спаев в напряжение.

**Линеаризация характеристик датчиков.** В большинстве случаев функция преобразования ПИП является нелинейной. Для уменьшения влияния аддитивных погрешностей последующих звеньев измерительного канала ее линеаризуют, что достигается включением в передающую часть АИ программно-управляемых усилителей или функциональных преобразователей.

**Инициализация пассивных датчиков.** Большинство ПИП (например, термометры сопротивления, тензорезистивные, индуктивные, емкостные преобразователи) требуют дополнительной энергии в виде напряжения или тока для получения активного выходного электрического сигнала.

**Мультиплексирование.** Эта процедура заключается в поочередном считывании всех сигналов в ИИС путем их поочередного подключения. приме-

няется для повышения эффективности использования цифровых процессоров и других компонент ИИС, сокращения времени их простаивания и уменьшения аппаратных затрат и стоимости ИИС. Реализуется введением в структуру АИ *мультиплексов* или *коммутаторов*. Многоканальные ИИС разрабатывают, как правило, на 10...100 каналов.

Мультиплексоры строятся на основе электронных ключей. В простейшем случае мультиплексор содержит  $k$  ключей, подключающих один из  $k$  входов системы к одному выходу. Для предотвращения короткого замыкания между двумя входами эти ключи действуют по принципу переключения: сначала размыкается одна цепь, потом замыкается другая. В простом мультиплексоре переключение происходит только тогда, когда он получает команду от системного блока синхронизации. Такой мультиплексор называют *последовательным*: в нем  $k$  каналов подключаются к выходу в порядке, в котором они присоединены ко входам. В мультиплексорах с *произвольным доступом* центральный процессор определяет, какой из каналов должен быть подключен, указывая его адрес. С помощью таких мультиплексоров реализуют адаптивное мультиплексирование, что позволяет обращаться к узкополосным входным сигналам реже и получать выборки сигнала с меньшей частотой, чем для широкополосных сигналов. Этот метод позволяет экономить ресурсы ИИС, если спектры входных сигналов существенно различны.

В мультиплексорах возможны три вида коммутации: *непосредственная коммутация*, *сверхкоммутация* и *подкоммутация*. Непосредственная коммутация (рис. 8.2, *а*) реализуется с помощью одного переключателя, соединяющего один из  $k$  входов с выходом. В мультиплексоре, у которого один входной сигнал подан на несколько входов, осуществляется "сверхкоммутация". При сверхкоммутации число входов, на которые подается сигнал, определяется необходимой частотой получения выборок для этого сигнала. Такой метод представляет вариант аппаратного решения проблемы обработки широкополосных входных сигналов, что достигается за счет уменьшения общего числа каналов. В приведенном на рис. 8.2, *б* примере частота выборок в первых двух каналах в четыре раза выше, чем в других; общее число каналов уменьшается на шесть.

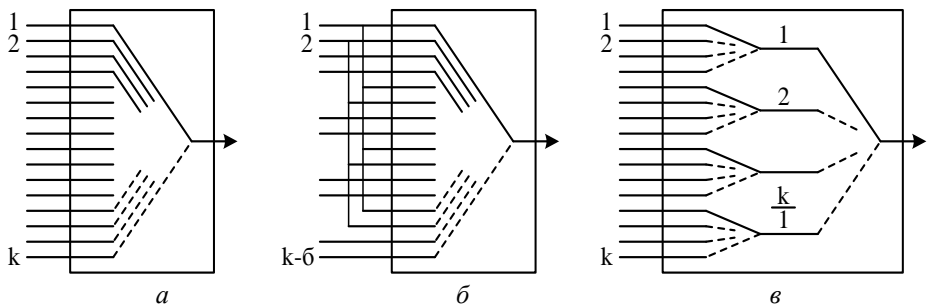


Рис. 8.2. Условное обозначение коммутаторов с непосредственной коммутацией  $k$  каналов (*а*), сверхкоммутацией каналов 1 и 2 (*б*), подкоммутацией  $k$  каналов по 4 (*в*)

При реализации непосредственной коммутации каналов в случае мультиплексирования значительного числа каналов возникают перекрестные помехи и имеет место частичное прохождение на выход коммутатора сигналов из отключенных каналов. Это связано с тем, что полевые транзисторы, на которых строятся схемы электронных ключей, не являются идеальными. Если большое число ключей включить параллельно, уровни шумов и эффекты, связанные с нагрузкой, могут оказаться недопустимыми. Поэтому в мультиплексорах со значительным числом каналов применяется подкоммутация (см. рис. 8.2, в). В приведенном примере, на один канал мультиплексора с непосредственной коммутацией (см. рис. 8.2, а) действуют перекрестные помехи со стороны 15 других каналов, тогда как в схеме на рис. 8.2, в число каналов для перекрестных помех ограничено 3 каналами и 3 подканалами.

В случае коммутации малых по величине сигналов в присутствии шумов особенно важно обеспечить защиту от них. На рис. 8.3, а показано как обычно передают значительные по уровню сигналы. Даже в случае, когда источник сигнала  $V_v$  находится на некотором расстоянии от усилителя  $A$ , напряжение между "землями" усилителя и источника  $V_g \ll V_v$ . В этом случае оказывается достаточным применение мультиплексора с *асимметричной* (по отношению к земле) структурой. Если эти требования не выполнены, необходимо применить *симметричный* мультиплексор (см. рис. 8.3, б, обозначено:  $V_g$  - напряжение помехи между землей усилителя  $A$  и источника сигнала  $V_v$ , которое возникает из-за протекающих по земляной шине паразитных токов).

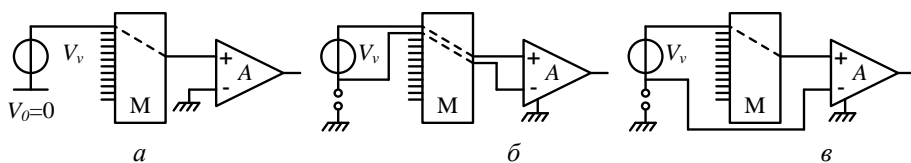


Рис. 8.3. Мультиплексоры: асимметричный (а), симметричный (б) и псевдосимметричный (в)

В симметричном мультиплексоре происходит одновременное переключение двух входов для каждого канала. В этом случае важно, чтобы усилитель  $A$  имел большой коэффициент ослабления синфазного сигнала. Более простое, но менее эффективное техническое решение приведено на рис. 8.3, в. Применяя *псевдосимметричный* мультиплексор, допускают, что для всех источников входных сигналов напряжения помех  $V_g$  одинаковы. Обычно это предположение выполняется приближенно. Такой метод мультиплексирования не предусматривает выполнения жестких требований относительно нечувствительности усилителя к синфазному сигналу. При необходимости прецизионного измерения малых по уровню сигналов необходимо применять экранирование. В таких случаях мультиплексирования предусматривается отключение и экранов, поэтому для одного канала необходимо три ключа.

Центральный цифровой процессор системы сбора данных способен вос-

принимать информацию только в дискретные моменты времени. При необходимости общей обработки нескольких входных сигналов предполагается, что выборки сигналов берутся в одни и те же моменты времени. На практике выборки разных сигналов берутся последовательно, что обуславливает их определенный сдвиг во времени. Задержка между выборками нескольких параллельно обрабатываемых сигналов известна как *разнесение*. Его можно минимизировать применением *синхронного* мультиплексирования, реализуемого с помощью устройств выборки/хранения (УВХ, рис. 8.4, а). Каждый из входных сигналов мультиплексора (М) приходит через свои УВХ и фильтр нижних частот. Блок синхронизации (БС) одновременно переключает все УВХ в режим "хранения" в каждом цикле сканирования. Мультиплексор считывает и передает "удерживаемые" УВХ напряжения в АЦП для их преобразования в цифровые коды. С целью обеспечения высокого уровня синхронности выборок важно обеспечить идентичность фильтров в каждом канале. Для сравнения на рис. 8.4, б изображен обычный мультиплексор с одним УВХ.

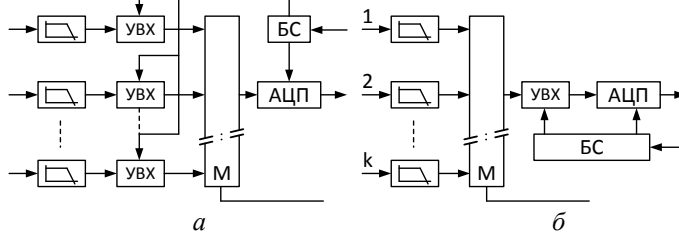


Рис. 8.4. Мультиплексоры: синхронный (а) и обычный (б)

Важной характеристикой мультиплексора является *максимальная скорость сканирования* (опроса) каналов. Она определяется наибольшим количеством каналов, которые можно подключить к выходу мультиплексора за одну секунду. Ограничение скорости сканирования обусловлено конечным временем, необходимым для окончания переходных процессов, возникающих во время подключения нового канала. Время, которое должно пройти, прежде чем выходной сигнал войдет в допустимые пределы отклонения от конечного значения, называют *временем установления*.

Электронный мультиплексор не является идеальным устройством: он не обеспечивает нулевое сопротивление между входом и выходом в режиме "включено", вносит небольшую ошибку смещения нуля и не обеспечивает полную изоляцию выключенных каналов (в состоянии "выключено" некоторая часть входного сигнала проходит на выход мультиплексора). Это является причиной дополнительных погрешностей, сопровождающих процесс мультиплексирования.

*Передача измерительной информации.* Во многих случаях исследуемый объект находится на значительном расстоянии от потребителя измерительной информации. Ее передача осуществляется с помощью разного вида сигналов с использованием модуляции, дискретизации (квантования) и кодирования.



Поданная в определенной форме измерительная информация представляет собой сообщение. Сигнал является материальным носителем сообщения и так же как сообщение может быть непрерывным или дискретным. В случае передачи информации непрерывными сигналами тот или иной параметр носителя информации изменяется как непрерывная функция времени. При использовании дискретных сигналов информация передается в виде отдельных, кратковременных изменений параметров носителя (импульсов). Независимо от способа передачи сигналы должны обеспечивать однозначность представления сообщений и стойкость к искажениям в канале передачи.

Под модуляцией понимает процесс изменения во времени одного или нескольких параметров сигнала-носителя в соответствии с переданными сообщениями. Рациональное применение модуляции позволяет повысить надежность передачи измерительной информации, обеспечить эффективное использование каналов связи и устройств передачи, приема и хранения измерительной информации. Использование процессов модуляции и демодуляции позволяет создавать ИИС с большим числом различных датчиков и единым каналом передачи измерительной информации. Разные способы модуляции позволяют осуществить или одновременную передачу информации от всех датчиков (с последующим частотным или корреляционным разделением каналов), или поочередную передачу (с временным разделением каналов).

Дискретизация непрерывных сообщений позволяет повысить эффективность использования средств измерений и каналов связи. Во многих случаях после дискретизации непрерывных сообщений применяют их кодирование с целью обеспечения высокой помехозащищенности передачи, хранения и обработки измерительной информации. Применение некоторых кодов позволяет не только обнаруживать, но и исправлять ошибки в полученных кодовых комбинациях.

Интенсивное внедрение средств вычислительной техники в измерительную технику определяет стойкую тенденцию к *интеллектуализации* АИ, что придает им следующие дополнительные функции: автокалибровка; самодиагностика; информационные функции; управление параметрами измерительного канала. Это значительно расширяют возможности датчиков и улучшает их технические характеристики.

*Функция коррекции.* Интеллектуальный датчик/интерфейс преобразует электрическую величину на выходе сенсора (обычно, представленную низковольтным сигналом) и выполняет ее подготовку к преобразованию в код. Коррекция выходного значения сигнала обычно выполняется по сопутствующим текущим параметрам окружающей среды (например, температурой и/или атмосферным давлением) в случае, если результаты преобразования зависят и от них.

*Функция самодиагностики.* В процессе функционирования интеллектуальные датчики/интерфейсы выполняют анализ своей работы: при возникновении сбоев, нарушений и неисправностей локализуют их место возникнове-

ния и возможную причину, фиксируют выход погрешности за установленное значение, анализируют работу базы данных датчика, рассматривают правильность учета факторов, по которым корректируют выходные показания датчика. Последний может выдавать оператору до 30-ти различных сообщений, конкретизирующих текущие особенности его работы и значительно облегчающих и ускоряющих его обслуживание. Обычно информация, которая выдается датчиком о его неисправностях, подразделяется на два типа: *некритическая информация*, когда датчик требует определенного обслуживания, но измеряемые им значения могут использоваться для управления; *критическая информация*, когда выходные данные датчика неправильные, что требует вмешательства оператора и приостановки использования его показаний, необходимости его срочного обслуживания.

*Информационные функции.* Интеллектуальные датчики/интерфейсы хранят в памяти и по дистанционным запросам пользователя выдают данные, определяющие его свойства, характеристики и параметры (тип, заводской номер, технические показатели, диапазоны измерения, установленную шкалу, параметры настройки, версию программного обеспечения, архив проведенных метрологических поверок, срок проведения следующей поверки и т. п.).

*Управление параметрами измерительного канала* позволяет дистанционно формировать или модифицировать пользователем основные регулируемые параметры АИ: установку нуля, выбор диапазона измерения, параметров фильтрации, наименования единиц измерения и т. п.

В последнее время интеллектуальные датчики/интерфейсы выполняют все большее количество дополнительных функций, связанных с управлением технологическим процессом. Для их реализации в память микропроцессора датчика заносится соответствующий набор типичных программных модулей, инициация и параметризация которых проводится дистанционно. В качестве типичных программных модулей используются простые арифметические и логические операции, таймер, элемент задержки, интегратор, варианты регуляторов, другие функции, из которых набираются конкретные алгоритмы регулирования и управления технологическими процессами. например, *автоматический анализ изменений измеряемой величины и текущего состояния измерительной среды* заключается в определении выходов значений измеряемой величины за значение нормы, выдаче служебных сообщений об изменении значений измеряемой величины, проверке нахождения в допустимых диапазонах параметров измерительной среды.

## 8.2. Разновидности аналоговых интерфейсов

**Классификация АИ по типу электрических сигналов** (типу информативного параметра или модуляции) представлена на рис. 8.5. Постоянный ток, благодаря высокой помехозащищенности и отсутствию в значительной степени влияния паразитных параметров линии связи, используется в качестве сигнала измерительной информации для распределенных в

пространстве систем в случаях, когда расстояние между системой сбора данных и объектом измерений находится в пределах от нескольких метров до сотен метров. В случаях непосредственной близости датчика и системы сбора данных (менее нескольких метров) в качестве сигнала измерительной информации используют напряжение. Частота, как информативный параметр измерительного сигнала, пока еще не нашла широкого применения несмотря на известные преимущества из-за ограничений помехозащищенности и быстродействия, присущих используемым сегодня широкополосным частотным демодуляторам.



Рис. 8.5. Классификация способов передачи информации в АИ по типу сигнала

*Классификация АИ по типу средств связи.* По этому признаку различают следующие АИ:

АИ с проводными линиями связи (используются при дистанционных измерениях) подразделяются на:

*двухпроводные*, в которых по линиям связи передаются как измерительные, так и сигналы инициализации резидентной части АИ; наиболее распространен токовый унифицированный сигнал в диапазоне 4–20 мА;

*трехпроводные*, в которых ток питания резидентной части и выходной ток датчика передаются в линиях связи по отдельным проводам;

*четырёхпроводные*, в которых контуры питания и выходного сигнала изолированы друг от друга;

*оптические;*

*радиоволновые* (используют электромагнитные колебания  $f > 30$  кГц);

*акустические.*

Последние три способа используются с одним из методов модуляции и применяются в телеизмерительных системах.

Наиболее распространенными в ИИС являются АИ с проводными линиями связи. Оптические АИ более помехозащищенные, но дороже. Радиоволны в АИ используют, как правило, совместно с кодоимпульсной модуляцией. АИ на акустических волнах применяются в специальных условиях, например на подводных лодках.

Реализация двухпроводных и трехпроводных АИ существенно упрощается благодаря тому, что ряд универсальных приемопередающих измерительных преобразователей для унифицированных измерительных сигналов постоянного тока выпускаются в виде интегральных микросхем.

АИ с четырехпроводными линиями связи используются, как правило, совместно с датчиками общего применения и потенциальными выходными сигналами (0–5 В, 0–10 В).

В связи с устойчивой тенденцией интеллектуализации удаленных датчиков, необходимостью поддержания большого количества служебных функций они все чаще снабжаются средствами передачи цифровой информации. Этот процесс идет по двум направлениям: оснащение датчиков встроенными цифровыми контроллерами для согласования с универсальными сетевыми интерфейсами, а также объединение технологий передачи аналоговой и цифровой информации в одной линии связи.

В первом случае для взаимодействия датчика и контроллеров систем ввода-вывода используют протоколы CAN, PROFIBUS-PA, Foundation Fieldbus H1, Interbus, Devicenet, LON, As-i.

Во втором случае обеспечивается возможность обмена цифровой информацией на основе использования стандартной сети с HART-протоколом. Этот протокол реализует интеллектуализацию интерфейса (т.е. сочетание передачи аналоговой и цифровой информации одной линией связи). Для передачи цифровой информации в HART-протоколе использован принцип частотной манипуляции: логическая единица соответствует одному полному периоду частоты 1200 Гц, а логический ноль - двум периодам синусоиды 2200 Гц. Цифровой и аналоговый сигналы передаются по одной паре проводов путем наложения HART на токовую петлю. Поскольку среднее значение синусоиды за период равно нулю, то HART сигнал никак не влияет на аналоговый сигнал 4–20 мА. Прием сигнала о параметре и настройка датчика осуществляется с помощью HART-модема или HART-коммуникатора.

Недостатками таких систем являются: ограничение полосы аналоговых сигналов значением  $\sim 10$  Гц в связи с необходимостью частотного разделения аналоговых и цифровых сигналов; ограничения, накладываемые на топологию сети (используется топология типа «звезда» или «точка на точку»).

*HART-протокол (HighwayAddressableRemoteTransducer).* Этот протокол занимает промежуточное место между аналоговой и цифровой передачей данных и широко известен как промышленный стандарт для усовершенствования токовой петли 4...20 мА с целью обеспечения возможности цифровой коммуникации. При этом сохраняется полная совместимость и надежность существующих аналоговых линий 4...20 мА.

HART построен по принципу «ведущий/ведомый» – удаленное устройство отвечает на запрос системы. Существует два режима работы датчиков, поддерживающих обмен данными по HART-протоколу.

*Режим передачи цифровой информации одновременно с аналоговым сигналом* представлен на рис. 8.6. В этом режиме, например, работают датчики в аналоговых автоматических системах управления технологическими процессами (АСУТП); обмен по HART-протоколу выполняется с помощью портативного контроллера – HART-коммуникатора (например, Метран-650) или компьютера (например, с использованием конфигурационной программы H-Master через HART/RS232 модем Метран-681). В этом случае полная настройка и конфигурирование датчика осуществляется дистанционно.

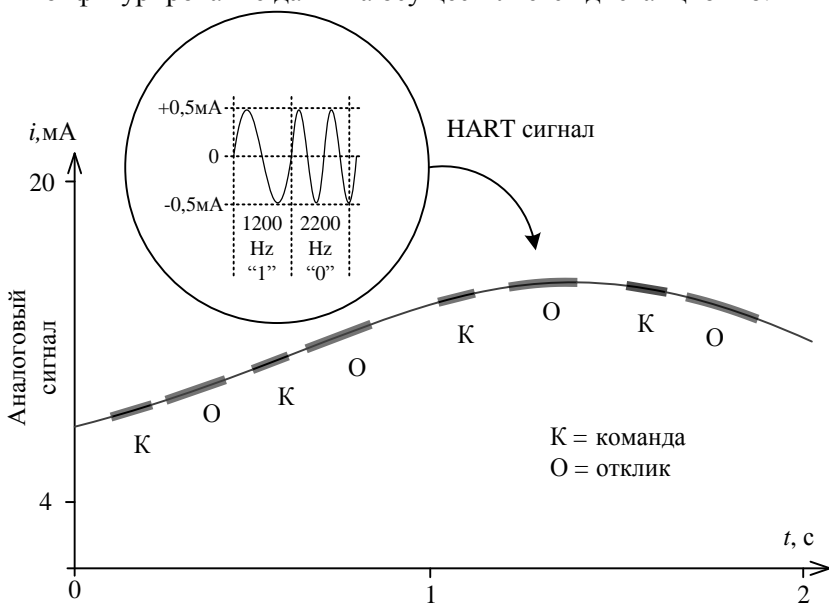


Рис. 8.6. Обмен данными через HART-протокол

В *многоточечном режиме* датчик передает и получает информацию только в цифровом виде. Аналоговый выход автоматически фиксируется на минимальном значении 4 мА (только для питания устройства) и не содержит информации об измеряемой величине. Информация о переменных во времени процессах считывается по HART-протоколу.

К одной паре проводов может быть подключено до 15 датчиков. В многоточечном режиме каждый прибор имеет свой адрес (от 1 до 15), по кото-

рому идет обращение к нему. Коммуникатор или система управления определяет все подключенные к линии датчики и может работать с любым из них.

В качестве среды передачи сигнала используется кабель типа экранированная витая пара. В опасных зонах могут быть использованы пропускающие HART-сигналы барьеры искробезопасности. Для HART-протокола максимальная длина кабеля связана с эквивалентным сопротивлением сети и максимально допустимой емкостью системы. В табл. 8.1 представлена информация о максимальной длине кабеля как функции от числа приборов, подключенных к цепи и удельной емкости кабеля (максимальная длина кабеля приведена для сечения токопроводящей жилы 1,02 мм<sup>2</sup>).

Таблица 8.1

Число приборов	Максимальная длина кабеля, км, при удельной емкости кабеля			
	65 нФ/км	95 нФ/км	160 нФ/км	225 нФ/км
1	2,8	2,0	1,3	1,0
5	2,5	1,8	1,1	0,9
10	2,2	1,6	1,0	0,8
15	1,8	1,4	0,9	0,7

Часто аналоговые АСУТП содержат в своем составе много интеллектуальных отдаленных приборов, которые работают в режиме совместимости с токовой петлей 4...20 мА. В этом случае отдаленная настройка и конфигурация датчиков с помощью HART-коммуникатора или HART-модема требует последовательного подключения коммуникационного устройства к каждой линии 4...20 мА. Для этого используют HART-мультиплексор (например, Метран-670). В этом случае приборы продолжают передавать измерительную информацию в систему через токовый выход 4...20 мА, а их конфигурирование осуществляется с одного цифрового выхода управляющей системы. В этом случае можно объединить в сеть около 500 приборов (например, 30 мультиплексоров, соединенных через RS-485, по 16 каналов каждый).

Согласно семиуровневой модели взаимодействие открытых систем (модель OSI), HART-протокол реализует следующие три уровня: физический, канальный и прикладной.

*Физический уровень* описывает характеристики сигнала и среды передачи данных. Для передачи цифровой информации HART-протокол использует метод частотной манипуляции. В режиме тока высокочастотная HART-составляющая накладывается на аналоговый измерительный сигнал 4...20 мА. Двоичные значения передаются со скоростью обмена данными 1200 Бод. Логическая «1» представлена единичным циклом гармонического сигнала частотой 1200 Гц, а логический «0» примерно двумя циклами частоты 2200 Гц. Такой выбор частот соответствует телефонному стандарту BELL 202 в полудуплексном формате. HART-сигнал обеспечивает двустороннюю цифровую коммуникацию и позволяет управляющей системе получить от отдаленного устройства до двух–четырех цифровых сообщений в секунду.

HART-сообщение кодируется как последовательность байтов, переда-

ваемых с использованием стандартного UART (Universal Asynchronous Receiver/Transmitter – универсального асинхронного приемника/передатчика). К каждому байту данных добавляется стартовый бит, бит четности и стоп-бит. Это позволяет принимающему устройству UART распознавать начало каждого символа и выявлять ошибки в разрядах числа. В HART-протоколе предусмотрена проверка на четность. Одиночный 8-разрядный байт пересылается в виде такой последовательности битов: начальный бит (0), 8 бит информации, бит четности и конечный бит (1). Бит четности верный (1), если количество единиц в информационном байте парное.

*Канальный уровень* разделен на два подуровня:

логический контроль связи позволяет принимать сообщения;

контроль доступа к среде определяет время обращения соответствующего устройства к каналу для передачи сообщения.

Обмен информацией между HART-объектами выполняется в форме *кадров*. Кадр ограничен комбинацией символов преамбулы и ограничителя, которые определяют начало кадра, и полем счетчика байт, которое определяет конец кадра. Всем кадрам предшествует определенный набор шестнадцатиричных символов. Эти символы называются *преамбулой* и обусловлены задачами физического уровня для синхронизации приемника.

*На прикладном уровне* осуществляется взаимодействие с пользователем. Этот уровень предполагает описание команд HART-протокола, которые используются для работы с первичными HART-устройствами. Существует три типа HART команд: универсальные, общие и специальные.

*Универсальные команды* поддерживают все отдаленные HART-приборы. Эти команды обеспечивают *интероперабельность* (способность различных программ, систем и сетей к эффективной совместной работе и обмену информацией) между продуктами разных производителей и доступ к более общей операции, одинаковой для всех отдаленных устройств.

*Общие команды* представляют функции, которые выполняют большее число отдаленных устройств. Эти команды являются необязательными. Они включают изменение диапазона, выбор единиц измерения и самотестирование. Отдаленное HART-устройство поддерживает 12–15 общих команд.

*Специальные команды* различны для каждого преобразователя. Эти команды представляют уникальные функции устройства или способы доступа к данным и определяются производителем.

Без подробного технического описания каждого отдаленного устройства трудно создавать программное обеспечение, использующее функции прибора в полном объеме. Эту возможность обеспечивает язык описания устройства – Device Description Language. DDL-совместимая система может использовать все возможности устройства, включая поддержку специальных команд. Центральная база данных всех описаний устройств поддерживается базой HART-коммуникации (HART Communication Foundation). Таким образом, приборы от разных производителей становятся полностью совместимыми.

**Особенности АИ в ИИС различных топологий.** Классификация ИИС по типу общей структуры (топологии) приведена на рис. 8.7, на котором обозначено: ПК - персональный компьютер; ССД - система сбора данных; ЛАШ - локальная аналоговая шина; ШВВ - шина ввода-вывода; ШУ - шина управления; Д - датчик;  $\mu$ С - микроконтроллер.

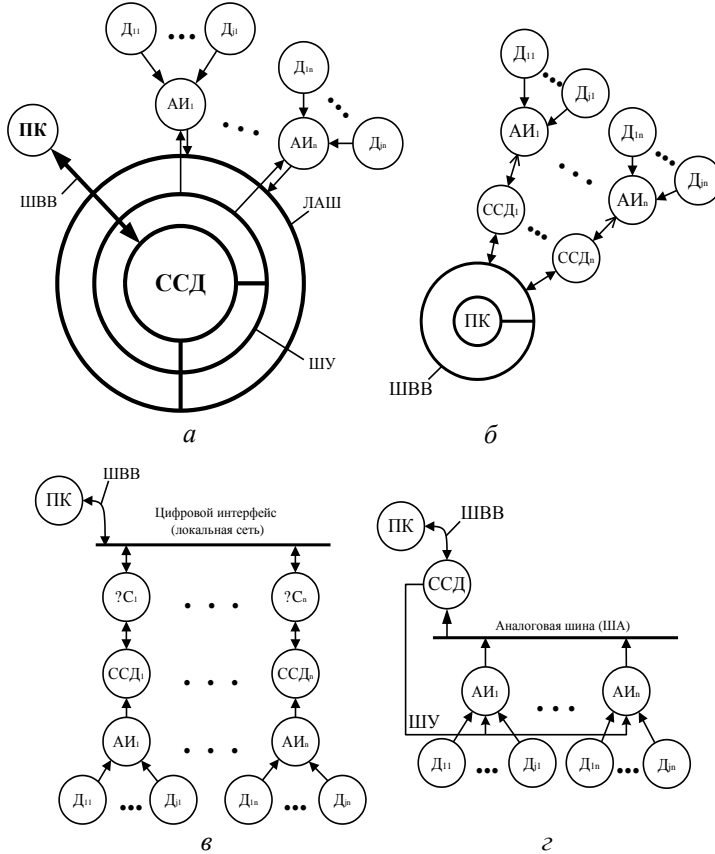


Рис. 8.7. Топологические схемы ИИС: централизованного типа (а), децентрализованного типа (б), с цифровой шиной (в), с аналоговой шиной (г)

По структуре ИИС делятся на четыре типа.

*ИИС централизованного типа* (рис. 8.7, а) является одной из наиболее распространенных измерительных систем, для которой характерно использование многоступенчатых аналоговых мультиплексов, ЛАШ для увеличения количества измерительных каналов. При увеличении количества каналов возможности стандартной системы сбора данных, имеющей 16 дифференциальных или 32 униполярных входов, могут быть расширены с помощью внешнего мультиплексора. Коммутаторы на электромеханических реле или герконах обладают отличными остаточными параметрами коммутации, но низким быстродействием. Аналоговые коммутаторы на интегральных микросхемах обладают значительными остаточными параметрами коммутации, ко-



торые требуют коррекции, однако обладают высоким быстродействием.

Связь системы сбора данных с ПК реализуется с помощью одной из основных ШБВ: ISA (EISA), PCI, PCMCIA, FireWire, USB. В случае полномасштабных версий таких систем в качестве ШБВ используются первые две, а в портативных вариантах - одна из последних трех.

Преимуществами систем централизованного типа является возможность реализации многофункциональных многоканальных (до 3000 каналов) систем для лабораторных исследований с высокими метрологическими характеристиками (класс точности 0,05...0,1). Уменьшение случайной составляющей погрешности достигается использованием операционных усилителей с МДМ-каналом и набором фильтров нижних частот с разными частотами среза и аппроксимации. К недостаткам относятся громоздкость (наращивание ИИС происходит путем подключения к системе сбора данных аналоговой шины и шины управления дополнительными АИ), конфликт между быстродействием и точностью, сложность реализации работы с удаленными объектами. Такая топология находит применение при построении многофункциональных многоканальных прецизионных систем для лабораторных исследований, например систем SCXI, фирмы National Instruments.

В ИИС *децентрализованного типа* (рис. 8.7, б) для каждого датчика реализуется отдельный измерительный канал со своим АЦП, подключенным к цифровому мультиплексору. Это обеспечивает возможность одновременного опроса многих каналов с большой скоростью. Такие системы также называют *параллельными*. По такой схеме строят, как правило, многофункциональные многоканальные ИИС для лабораторных исследований с высокими метрологическими характеристиками. Например, система типа SC фирмы National Instruments – это система, в которой АИ и система сбора данных объединяются на одной плате. В этом случае несколько упрощаются требования к метрологическим характеристикам АИ в связи с тем, что для каждого из них существует свой собственный АЦП. Основным преимуществом таких систем является быстродействие и возможность одновременного опроса многих каналов, а недостатками – несколько меньшая плотность измерительных каналов и сложность работы с удаленными объектами.

*Многоточечные ИИС с цифровой локальной сетью* (рис. 8.7, в) являются системами распределенного типа. Передача измерительной информации в них реализуется с помощью кодоимпульсной модуляции (что значительно сужает полосу частот полезного сигнала) в цифровых интерфейсах сетевого типа, т.е. используются отдельные измерительные каналы со своими АЦП, выходы которых объединены с помощью цифрового интерфейса, образующего локальную сеть. В такой системе требования к метрологическим характеристикам отдельных измерительных каналов существенно уменьшаются в связи с отсутствием конфликта между точностью и быстродействием.

Топология ИИС с цифровой локальной сетью в последнее время находит применение при построении многоточечных ИИС, когда расстояние до

датчиков значительно превышает 10 м. Примеры таких системы – системы распределенного ввода-вывода FieldPoint, 6В (фирмы National Instruments), I-7000, I-8000 (фирмы ICPDAS).

Главным преимуществом таких систем над предыдущими является их способность работать на больших расстояниях, а основным недостатком – низкое быстродействие обмена данными с ПК, обусловленное проблемами арбитража и временной избыточностью кодоимпульсной модуляции.

*Многоточечные ИИС с аналоговой шиной* (рис. 8.7, з) используются для большого количества аналоговых сигналов – от нескольких десятков до нескольких тысяч каналов. Аналоговая шина подключает один из аналоговых каналов к единой системе сбора данных (ССД) с помощью пространственно распределенного шагового переключателя, реализованного на управляемых кодом переключателях с последовательным кодовым управлением. Это позволяет использовать от 2 до 5 линий управления для переключения неограниченного количества датчиков.

Преимуществом является возможность наращивания аналоговых измерительных каналов без значительных аппаратных затрат. Недостатком таких систем является: значительное влияние сопротивлений изоляции разъемов, кабелей, коммутаторов, так как они подсоединяются параллельно, что ограничивает точность таких систем при использовании в качестве сигналов-носителей постоянных напряжений и токов; значительные паразитные параметры линии связи ограничивают использование модулированных сигналов частотно-модулированными, распространение которых сдерживается отсутствием широкополосных помехозащищенных частотных демодуляторов НЧ-диапазона. Поэтому эта топология используется сегодня в варианте «точка на точку» или ЛАШ.

**Базовые структуры АИ.** Известны три основные структурные схемы построения АИ ИИС, которые можно представить как комбинацию функционального преобразователя (ФП) и формирователя унифицированного выходного сигнала. Разница между ними заключается в способе коррекции погрешности.

На рис. 8.8 показана наиболее распространенная *структура АИ с ручной коррекцией аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности*.

При коррекции датчик заменяется калибратором измеряемой физической величины (образцовой мерой) с соответствующими параметрами выходного сигнала в точках калибровки. Оператор с помощью ручных регулировок компенсирует аддитивную и мультипликативную погрешности АИ. Кроме калибратора для такой процедуры необходим прецизионный измеритель унифицированного сигнала. Некоторые фирмы выпускают оба прибора в одном устройстве, например фирма BurtBrown выпускает преобразователь ХТR108, в котором реализуется автоматизация процесса калибровки с помощью микро-ЭВМ, но это возможно только для одного типа датчика – платинового датчика температуры, который можно заменить в нескольких точках

температурного диапазона прецизионными резисторами.

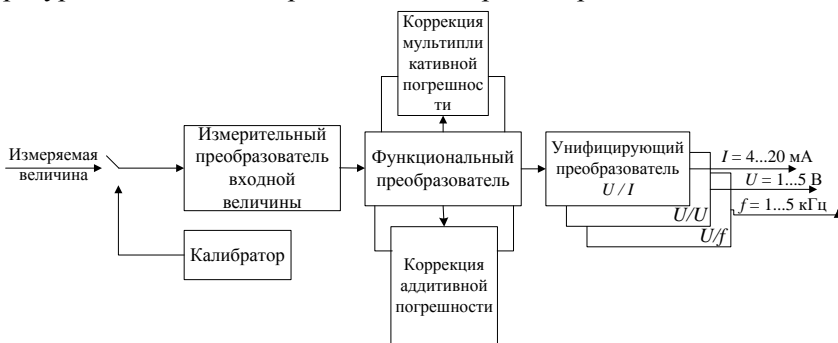


Рис. 8.8. Структурная схема АИ с ручной коррекцией погрешности

На рис. 8.9 представлена структурная схема *АИ с автоматической коррекцией погрешностей в аналого-цифровой форме*. Коррекция реализуется методом вспомогательных измерений, суть которого заключается в том, что с помощью дополнительного измерительного канала определяется значение основной дестабилизирующей величины, чаще всего – температуры.

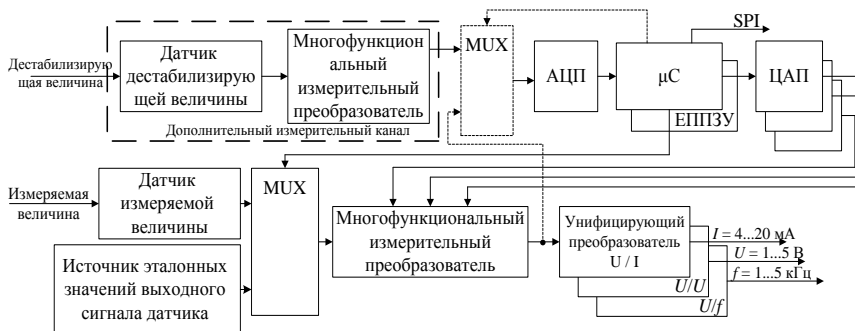


Рис. 8.9. Структурная схема АИ с аналого-цифровой коррекцией

Двухпроводные интерфейсы используются, как правило, для построения АИ без средств автоматической коррекции класса точности 0,5 - 1,0. Им свойственно однополярное питание и, как следствие, значительные погрешности при работе из-за значительного синфазного сигнала и ограниченности коэффициента подавления синфазного сигнала ( 60...80 дБ). В реальных условиях эта погрешность может достигать нескольких процентов. Для ее уменьшения, а также уменьшения температурных погрешностей и погрешностей нелинейности полупроводниковых тензодатчиков широкое применение получил метод *вспомогательных измерений* с предварительной индивидуальной градуировкой и аналого-цифровой коррекцией. Например, фирма BurrBrown выпускает передающую часть АИ для работы с тензодатчиками типа PGA309. Суть такой коррекции заключается в том, что на этапе градуировки в ЕППЗУ записываются управляющие коды для ЦАП, вносящие по-

правки на аддитивную  $\Delta$ , мультипликативную  $\gamma$  и нелинейную  $\gamma_{\text{нел}}$  составляющие погрешности при определенных температурах. Функции влияния температуры на эти составляющие погрешности записаны в ЕППЗУ в виде таблиц с линейной интерполяцией. Если функция преобразования датчика линейна, достаточно занести в ЕППЗУ четыре градуировочные величины: аддитивную погрешность датчика (начальное смещение «нуля»); температурный коэффициент аддитивной погрешности; чувствительность датчика; температурный коэффициент чувствительности.

Если функция преобразования датчика нелинейна, используется кусочно-линейная аппроксимация под «управлением» выходного напряжения функционального преобразователя.

Недостатками такой коррекции является наличие остаточной погрешности от временного дрейфа параметров датчика, погрешности из-за связи между каналами измерения и погрешности ЦАП.

Для работы с PGA309 фирма BurrBrown выпускает измерительный преобразователь «напряжение – ток» в интегральном исполнении XTR115, который преобразует выходное напряжение PGA309 0,5...4,5 В в выходной ток 4...20 мА и обеспечивает стабильное напряжение +5 В для питания PGA309.

На рис. 8.10 представлена структурная схема АИ с автоматической коррекцией в цифровой форме. С помощью мультиплексора и АЦП значения основной и дестабилизирующей величин вводятся в микро-ЭВМ, где с помощью известных функций влияния рассчитывается скорректированный результат, который с помощью ЦАП и унифицирующего выходного преобразователя формирует выходной сигнал. Устройство оснащено последовательным и параллельным кабельным интерфейсом.

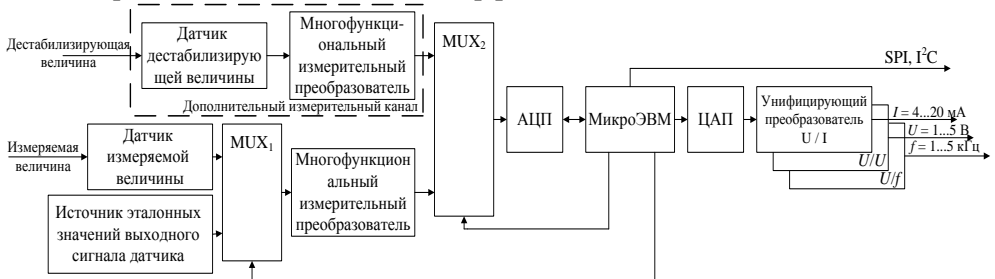


Рис. 8.10. Структурная схема АИ с цифровой коррекцией погрешностей

Такая схема применяется, как правило, в трехпроводных АИ благодаря большим возможностям по току питания резидентной части (до 10 мА вместо 4 мА). Благодаря тому, что микро-ЭВМ имеет программируемый таймер, АЦП может быть реализован виде АЦП интегрирующего типа с промежуточным преобразованием «напряжение – частота». Коррекция измерительного канала может быть выполнена по методу образцовых мер.

Алгоритм коррекции предполагает на этапе предварительной градуировки запись в память микро-ЭВМ, как правило, шести функциональных зависимостей в виде полиномов третьего порядка. Определение одного значе-

ния измеряемой величины, кроме линейной аппроксимации, при этом, требует выполнения пяти операций интерполяции кубических уравнений. Для этого стандартному микроконтроллеру понадобится интервал времени около 200 мс, что однако существенно снижает полосу полезного сигнала.

Наличие микро-ЭВМ дает возможность строить по этой схеме АИ с коммуникационными цифровыми интерфейсами, т.е. использовать для передачи аналоговых сигналов кодоимпульсную модуляцию, что существенно сокращает полосу частот полезных сигналов, уменьшая ее до долей герц.

В четырехпроводных интерфейсах используются внешние сетевые изолированные блоки питания, которые позволяют, благодаря симметричному мощному биполярному питанию мостовых схем, работать с металлическими тензорезисторами и избежать в значительной степени влияния на точность измерения ограничения коэффициента подавления синфазных напряжений в измерительном усилителе.

Обобщенная структурная схема АИ с унифицированными сигналами напряжения представлена на рис. 8.11. Для каждого датчика предусмотрен отдельный функциональный преобразователь, содержащий измерительный усилитель с программно управляемым коэффициентом усиления по напряжению и смещением нуля, программно-управляемый ФНЧ, средства первичной обработки сигнала (ФЧВ, УВХ). На входе каждого функционального преобразователя предусмотрен мультиплексор для подключения программно-управляемого источника образцовых напряжений  $U_0$ , а также программно-управляемый генератор  $U_d$  для инициализации датчиков.

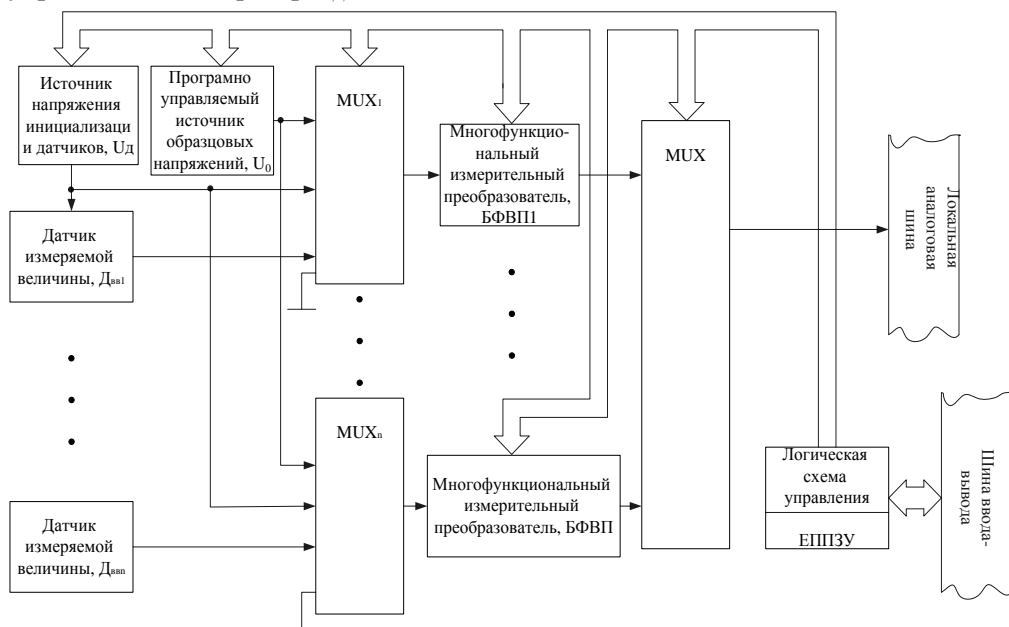


Рис. 8.11. Обобщенная структура АИ с унифицированными сигналами напряжения

Изолирующий усилитель обеспечивает гальваническую развязку измерительных сигналов. Коррекция систематических составляющих погрешности электрического тракта АИ происходит под управлением программного обеспечения ССД с использованием методов аддитивной и мультипликативной коррекции, тестовых методов. Коррекция погрешностей датчика выполняется традиционным методом на основе предварительной градуировки.

Такие АИ предназначены для работы с измерительным оборудованием расположенным в непосредственной близости от ПК (до 10 м). Такие АИ реализованы, например, в системах типа SCXI, которые отличаются лучшими метрологическими характеристиками, многофункциональностью, высокой плотностью каналов и предназначены для лабораторных исследований.

Особенностью таких систем является использование аналогового мультиплексора на входе ССД для увеличения количества измерительных каналов. Для каждого удаленного датчика используется отдельный АИ (4...20 мА) с изолированным питанием и выходным сигналом. При небольших расстояниях до объекта измерения аналоговый мультиплексор может использоваться на входе каждого АИ. По такой схеме построена система SCXI фирмы National Instruments и портативные версии этой системы SCC и 5B. Особенностью последних является отсутствие аналогового мультиплексора на входе АИ, что уменьшает количество каналов (до 8...16 на один крейт).

Если рассмотренные средства коррекции реализуются на одном чипе с сенсором, т.е. выполняются в одном технологическом процессе, то такой преобразователь называется *интеллектуальным датчиком*. Если компоненты структурной схемы АИ являются физически отдельными изделиями, то такой преобразователь называется *интеллектуальным интерфейсом*.

АИ по схеме на рис. 8.8 преимущественно используются в ИИС централизованного типа невысокого класса точности (0,5...1,0). АИ с аналого-цифровой коррекцией (см. рис. 8.9) применяются в интеллектуальных интерфейсах с использованием последовательного периферийного интерфейса SPI для передачи электронных таблиц TEDS (Transducer Electronic Data Sheet). TEDS представляет собой стандартизированный метод хранения идентификационных данных преобразователей, калибровочных и коррекционных данных и сопутствующей информации от производителя. Форматы TEDS определены в комплексе стандартов относительно интерфейса интеллектуального преобразователя IEEE 1451, который разработан Техническим комитетом IEEE «Измерение и измерительная техника».

АИ с цифровой коррекцией (см. рис. 8.10) используются в интеллектуальных интерфейсах с HART-протоколом.

**Физические пределы интеграции микроэлектронного интеллекта и элементов сенсора.** Для создания сигнала, который мог бы быть использован для оценки некоторого физического состояния, сенсорные технологии часто используют новые малоизученные физические явления и эффекты. Физические, химические и электронные процессы, лежащие в их основе, позволяют

создавать надежные и предсказуемые сенсорные элементы, однако те же процессы часто несовместимы с микроэлектронными технологиями. Кроме того, материалы, процессы изготовления или отдельные операции этих сенсорных технологий могут оказаться несовместимыми с материалами, процессами производства или эксплуатационными требованиями технологий, обеспечивающих «интеллектуальные» способности датчика.

Характерным примером подобной технологической несовместимости является термопара, рассчитанная на работу в температурном диапазоне 300...500 °С. Не говоря уже о том, что большинство микроэлектронных устройств не могут работать при температурах выше 150 °С, материалы, используемые для создания термопар, как правило, несовместимы с материалами высокой чистоты, используемыми в кремниевой микроэлектронике. Сверхмалые количества металлов, которые обычно используются в термопарах (хром, никель, железо, платина, медь и алюминий) могут сыграть роль легирующих примесей в полупроводниках. Присутствие микроскопических количеств этих металлов на некоторых стадиях изготовления компонентов микроэлектроники может свести на нет весь процесс изготовления датчика.

### 8.3. Метрологические характеристики аналоговых интерфейсов

**Погрешности АИ.** Классификация погрешностей АИ на примере ИИС механических величин представлена на рис. 8.12.

Методика их анализа и суммирования не отличаются от соответствующих методик для других средств измерительной техники.

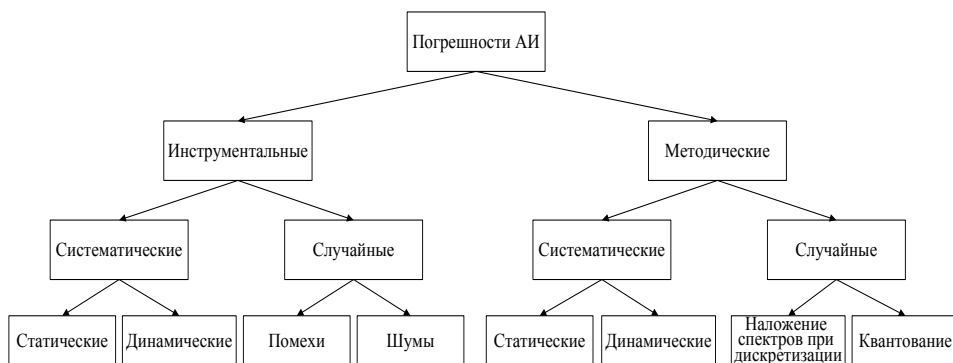


Рис. 8.12. Классификация погрешностей АИ

**Метрологические характеристики АИ.** Нормирование метрологических характеристик АИ приведено в табл. 8.2.

**Шумы в АИ.** Обычно шум занимает широкую полосу частот. Как правило, мощность шума, заключенного в заданном узком интервале частот  $\Delta f$ , не остается одной и той же в различных точках диапазона частот.

Таблица 8.2

Группа	Подгруппа	Способ нормирования
Характеристики функции преобразования		Номинальная функция преобразования
		Выходной код
		Количество разрядов кода
		Номинальная цена единицы наименьшего разряда кода
Характеристики погрешности	Характеристики погрешности с разделением на составляющие	<p>Характеристики систематической составляющей погрешности:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- границы (доверительные границы) допустимой систематической составляющей погрешности;</li> <li>- математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение систематической составляющей погрешности</li> </ul>
		<p>Характеристики случайной составляющей погрешности:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- граница допустимого среднеквадратического отклонения (СКО) случайной составляющей погрешности;</li> <li>- граница допустимой составляющей СКО случайной составляющей погрешности, номинальная нормализованная (в долях дисперсии) автокорреляционная функция случайной составляющей погрешности АИ и граница допустимого отклонения от нее;</li> <li>- граница допустимого СКО случайной составляющей погрешности, номинальная спектральная плотность случайной составляющей погрешности АИ и граница допустимого отклонения от нее;</li> <li>- граница допустимой вариации выходного аналогового сигнала АИ или цифрового сигнала АИ;</li> </ul>
	Характеристики погрешности без разделения на составляющие	<p>Границы допустимой погрешности</p> <p>Математическое ожидание и СКО погрешности</p> <p>Границы (доверительные границы) допустимой погрешности, границы (доверительные границы) допустимого изменения погрешности заданный интервал времени</p>
Характеристики чувствительности к влияющей величине		Номинальная функция влияния или границы (доверительные границы) допустимых отклонений от нее
		Границы допустимых изменений МХ АИ от номинальных значений, вызванные отклонением влияющих внешних величин и неинформативных параметров входного сигнала
		<p>Динамические характеристики влияния:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- номинальная функция связи между влияющей переменной во времени величиной и входным сигналом АИ и граница допустимого отклонения от нее;</li> <li>- время установления показаний или входного сигнала АИ при заданном характере изменений во времени влияющей величины</li> </ul>
Динамические характеристики	Полные динамические характеристики	Переходная характеристика
		Импульсная переходная характеристика
		Амплитудно-фазовая характеристика
		Совокупность амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик
	Частичные динамические	Передаточная характеристика
		Время измерения (установления сигнала) АИ
	Время задержки выдачи результата	



	характеристики	Погрешность временной привязки отсчетов
		Максимальная частота (скорость) измерений
Характеристики взаимодействия с объектом		Входной и/или выходной импеданс АИ
Характеристики линии связи		Параметры линии связи, при которых гарантируются МХ АИ
		Параметры линии связи, которые позволяют учесть их влияние на МХ АИ

**Пример** спектрального распределения шума и помех в реальной измерительной системе приведен на рис. 8.13. В центральной части спектрограммы шум является «белым», так как его спектр распределен по частоте равномерно. В левой части графика мощность, приходящаяся на единичную полосу частот, падает с увеличением частоты, т.е. шум является «розовым» (фликкер-шум или шум  $1/f$ ).

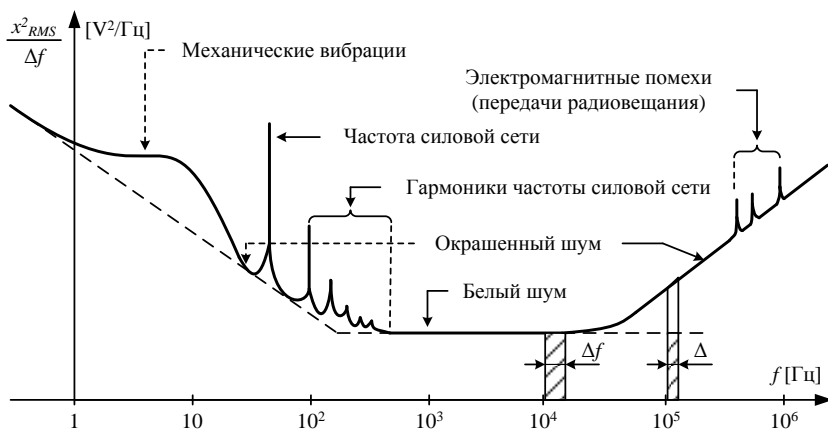


Рис. 8.13. Пример спектрального распределения шума и помех в реальной измерительной системе

Классификация шумов в аналоговых интерфейсах ИИС представлена на рис. 8.14. Под шумом подразумевается любой электрический сигнал, искажающий полезный сигнал.



Рис. 8.14. Классификация шумов в АИ

Уровень шума определяет предельную возможность АИ правильно передавать информацию, которая переносится информационными сигналами. Источники шумов целесообразно сгруппировать в три группы.

*Внешние шумы (помехи).* Эта группа включает все сигналы, которые в данном случае мешают приему полезного сигнала. Примером может служить излучения любого источника в то время, когда интересуется сигнал другого источника. Примером помех этой категории является наводка на частоте 50Гц и ее гармониках, возникающая между силовыми сетями и измерительной аппаратурой либо между большим электрооборудованием (мощными трансформаторами, электродвигателями) и аппаратурой.

*Дрейф.* Даже самые высококачественные средства измерений имеют ограниченную стабильность. Усилители, источники тока, температура образца и т. д. - все имеет тенденцию быть нестабильными во времени. Нестабильность может быть случайной и непредсказуемой или иметь характер медленных периодических флуктуаций. Если при измерении некоторой величины в определенных условиях характеристики измерительной аппаратуры меняются, в результате измерения входит некоторая неопределенность за счет дрейфа и нестабильности.

*Приборный шум.* В эту категорию входят шумы, внутренне присущие любому электронному прибору: резистору, диоду, операционному усилителю и т. п. Они обусловлены дискретностью заряда электрона. Напряжения и токи в любом сигнале являются средними величинами, которые отображают в действительности поведение статистического ансамбля электронов. Флуктуации совокупности электронов вызывают появление шумов, т.е. случайных составляющих тока и напряжения. Приборный шум имеет явно выраженный статистический характер и требует наибольшего внимания при оценке шумов электронных устройств.

*Основные способы уменьшения влияния шумов:*

1. Для уменьшения влияния электромагнитных помех используется экранирование (пассивное, активное).
2. Для уменьшения медленного дрейфа используются способы автоматической коррекции систематических составляющих погрешностей.
3. Для уменьшения шума электронных приборов используются различные способы обработки сигналов.

***Способы обработки сигналов для ослабления шума.*** Все способы обработки сигналов основываются на уменьшении полосы частот сигнала для улучшения отношения сигнал/шум. В общем случае они могут быть разделены на способы предварительной обработки (pre-acquisition) и вторичной обработки (post-acquisition). Примерами методов предварительной обработки являются разные типы фильтрации (ФНЧ, ФВЧ или полосовые) для уменьшения внеполосного шума в сигнале. Ширина полосы частот сигнала не должна превышать диапазон частот преобразователя. Способы вторичной обработки могут быть представлены как цифровая фильтрация. Простейшим

из этих методов является усреднение, которое особенно эффективно для исключения определенных частот, например 50 Гц.

---

### *Основные выводы*

---

Аналоговый интерфейс – это совокупность средств измерительной техники, являющихся составной частью измерительного канала между датчиком и АЦП. АИ в ИИС выполняют следующие функции: масштабное преобразование измерительных сигналов; фильтрация измерительных сигналов; компенсация температуры холодных спаев термопар; гальваническая развязка передаточной и приемной частей; линеаризация характеристик датчика; инициализация пассивных датчиков; мультиплексирование измерительных сигналов; передача измерительной и служебной информации.

В многоканальных ИИС считывание всех сигналов осуществляется путем их поочередного подключения с помощью мультиплексоров. В последовательном мультиплексоре переключение сигналов происходит по команде от блока синхронизации. В мультиплексорах с произвольным доступом подключение сигналов осуществляется по указанному центральному процессором адресу. В мультиплексорах возможны три вида коммутации: непосредственная коммутация, сверхкоммутация и подкоммутация. При сверхкоммутации число входов, на которые подается сигнал, определяется необходимой частотой получения выборок для этого сигнала. Важной характеристикой мультиплексора является максимальная скорость опроса каналов, определяемая наибольшим количеством каналов, которые можно подключить к выходу мультиплексора за одну секунду.

По типу линии связи АИ подразделяются на проводные и беспроводные (радиоволновые, акустические, оптические); по типу информационных сигналов – на АИ с передачей на постоянном токе, гармоническими и импульсными сигналами; по информативному параметру – на АИ с передачей напряжением, током, параметрами и характеристиками модулированных сигналов. Постоянный ток используется в АИ в случаях, когда расстояние между системой сбора данных и объектом измерений находится в пределах от нескольких метров до сотен метров. При непосредственной близости датчика к системам сбора данных (менее нескольких метров) в качестве сигнала измерительной информации используют напряжение.

Интеллектуальные датчики снабжаются средствами передачи цифровой информации путем их оснащения встроенными цифровыми контроллерами для согласования с универсальными сетевыми интерфейсами или путем объединения технологий передачи аналоговой и цифровой информации в одной линии связи. В последнем случае обмен цифровой информацией осуществляется на основе использования стандартной сети с HART-протоколом. Для передачи цифровой информации в HART-протоколе использован принцип частотной манипуляции. Цифровой и аналоговый сигналы передаются по одной паре проводов путем наложения HART на токовую петлю.

Все ИИС по структуре делятся на четыре типа: ИИС централизованного типа, децентрализованного типа, с цифровой шиной, с аналоговой шиной. По способу введения коррекции различают АИ ИИС с ручной коррекцией погрешности, с автоматической коррекцией погрешностей в аналого-цифровой форме и с цифровой коррекцией погрешностей. АИ с ручной коррекцией преимущественно используются в ИИС централизованного типа невысокого класса точности (0,5...1,0). АИ с аналого-цифровой коррекцией применяются в интеллектуальных интерфейсах с использова-

нием последовательного периферийного интерфейса SPI для передачи электронных таблиц TEDS. АИ с цифровой коррекцией используются в интеллектуальных интерфейсах с HART-протоколом.

Если средства коррекции реализуются на одном чипе с сенсором (выполняются в одном технологическом процессе), преобразователь называется интеллектуальным датчиком. Если компоненты структурной схемы АИ являются физически отдельными изделиями, преобразователь называется интеллектуальным интерфейсом.

Для АИ нормируются следующие метрологические характеристики: функция преобразования, погрешность, чувствительность, динамические характеристики, импеданс, характеристики линии связи. Уровень шума определяет предельную возможность АИ правильно передавать измерительную информацию. К основным способам уменьшения влияния шумов относятся: экранирование, коррекция систематических составляющих погрешностей (для уменьшения медленного дрейфа), различные способы предварительной и вторичной обработки сигналов.

---

### **Вопросы для самоконтроля**

---

1. Укажите место и функции АИ в ИИС.
2. Перечислите виды коммутации сигналов в мультиплексорах.
3. С какой целью в мультиплексорах применяют подкоммутацию?
4. В чем состоит особенность коммутации сигналов низкого уровня?
5. Укажите особенности передачи сигналов в асимметричном, симметричном и псевдосимметричном мультиплексорах.
6. В чем заключается смысл синхронного мультиплексирования?
7. Чем определяется максимальная скорость сканирования каналов?
8. Перечислите основные функции интеллектуальных интерфейсов.
9. Перечислите основные функции самодиагностики интеллектуальных интерфейсов.
10. В чем состоит различие между интеллектуальным датчиком и интеллектуальным интерфейсом?
11. Приведите примеры различных способов передачи информации в АИ в зависимости от типа сигнала.
12. Как классифицируются АИ по типу средств связи?
13. Охарактеризуйте различные режимы работы датчиков, поддерживающих обмен данными по HART-протоколу.
14. Какие уровни взаимодействия реализует HART-протокол в соответствии с моделью OSI?
15. Охарактеризуйте различные типы HART команд.
16. Дайте общую характеристику различных топологий интерфейсов.
17. Дайте сравнительную характеристику базовых структур АИ.
18. Обоснуйте необходимость гальванической развязки для АИ.
19. Охарактеризуйте различные типы шумов, возникающих в АИ.

---

### **Conclusions**

---

AI is a set of measuring instruments that are an integral part of measuring channel between primary measuring transducer and ADC. AI in IMS perform the following functions: scale transformation of measurement signals; filtering of measurement signals; temperature

compensation of thermocouples cold junctions; galvanic separation of transferring and receiving parts; linearization of PMT characteristics; passive sensors initialization; measurement signals multiplexing; measurement and service information transmission.

In multichannel IMS reading of all signals is carried by connecting them alternately using multiplexers. In sequential multiplexer signals switching occurs as a result of order from synchronization block. In random access multiplexers signals connection is performed to CPU' specified address. An important multiplexer characteristic is channel polling maximum speed defined by the highest number of channels that can be connected to multiplexer output in one second.

By type of communication line AI are divided into wired and wireless (radiowave, acoustic, optical); by information signals type: AI with DC transmission, harmonic and pulse signals; by informative parameters - AI with transmission of voltage, current, parameters and characteristics of modulated signals. Direct current is used in AI when the distance between data collection system and object of measurement is in range from few meters to hundreds of meters. With close proximity of PMT to data collection systems (less than a few meters) voltage is used as a measurement information signal.

Intelligent sensors are supplied with digital information transmission means by equipping them with built-in digital controllers to match the universal network interfaces or by combining technology of analog and digital information transmission in a single communication line. In the last case digital information exchange is carried out by using a standard network with HART-protocol. For digital information transmission in HART-protocol frequency modulation principle is used. Digital and analog signals are transmitted over a single pair of wires by overlaying HART-protocol on current loop.

By structure all IMS are divided into four types: IMS of centralized and decentralized type, with digital and analog bus. By correction method AI of IMS are divided into the following groups: with manual error correction, with automatic correction of errors in analog - digital form and digital correction of errors. AI with manual correction is mainly used in centralized type IMS of low accuracy class (0.5...1.0). AI with analogue-digital correction is used in intelligent interfaces with serial peripheral interface SPI for transmission of TEDS spread sheets. AI with digital correction is used in intelligent interfaces with HART-Protocol.

If correction means are implemented on a single chip with sensor (performed in a single technological process), converter is called an intelligent sensor. If AI structural scheme components are physically separate hardware, converter is called an intelligent interface. Following metrological characteristics are rationed for AI: conversion function, accuracy, sensitivity, dynamic characteristics, impedance and characteristics of communication line. Noise level determines the limited possibility of AI to correctly transmit measurement information. Basic ways to reduce noise influence are: shielding, systematic error components correction (to reduce slow drift), different ways of pre-processing and secondary processing of signals.

**Ключевые слова**

аналоговый интерфейс	analogue interface
мультиплексор	multiplexer
самодиагностика	self-diagnostic
интеллектуальный интерфейс	intellectual interface
коррекция погрешностей	error correction



## **АНАЛОГО-ЦИФРОВЫЕ И ЦИФРО- АНАЛОГОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ**

9

- 9.1. Дискретизация, квантование и цифровое кодирование измерительных сигналов
- 9.2. Средства аналого-цифрового преобразования
- 9.3. Цифро-аналоговые преобразователи

### 9.1. Дискретизация, квантование и цифровое кодирование измерительных сигналов

В измерительных каналах ИИС исследуемые физические величины преобразуются первичными измерительными преобразователями в аналоговые измерительные сигналы. Наиболее рациональным является преобразование различных по физической природе величин в функционально связанные с ними электрические сигналы с последующим их представлением цифровыми кодами. В компьютеризированных ИИС широко используется и обратное преобразование – цифрового кода в аналоговый сигнал (электрический ток или напряжение). Такие операции выполняются соответственно аналого-цифровыми и цифро-аналоговыми преобразователями (АЦП и ЦАП).

Основными операциями, выполняемыми во время аналого-цифрового преобразования, являются дискретизация сигналов во времени, их квантование по уровню и цифровое кодирование.

*Дискретизация* сигналов – это преобразование сигнала, вследствие чего он отображается конечной совокупностью своих значений в дискретные моменты времени. Полученные в результате дискретизации значения сигнала в фиксированные моменты времени называются *отсчетами*. Интервал времени между соседними отсчетами при равномерной дискретизации сигнала называется *периодом дискретизации*  $T_d$ , а величина обратная  $T_d$  – *частотой дискретизации*,  $F_d = 1/T_d$ . В результате этой операции аналоговый сигнал  $s(t)$ ,  $t \in [0, T_n]$ , наблюдаемый на временном интервале  $T_n$ , представляется конечным множеством отсчетов  $\{s(kT_d, k = \overline{0, K})\}$ , где  $K = [T_n/T_d]^+$ ,  $[\cdot]^+$  – обозначение операции выделения целой части числа. Предполагается, что при получении одного отсчета дискретизация осуществляется с помощью бесконечно коротких импульсов (импульсов Дирака), совокупность которых образует гребенчатую функцию  $Ш(t)$ .

Рассмотрим процесс образования дискретного сигнала из непрерывного. Пусть для сигнала  $s(t)$  существует преобразование Фурье  $S(f)$ , т. е.  $s(t) \leftrightarrow S(f)$ . Дискретизация  $s(t)$  с частотой  $F_d$  рассматривается как результат умножения  $s(t)$  на гребенчатую функцию – сумму импульсов Дирака, разделенных промежутками времени  $T_d$ ,

$$Ш_{F_d}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k/F_d). \quad (9.1)$$

Преобразование Фурье функции (9.1) имеет вид

$$\mathbf{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k/F_d) \right\} = F_d \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nF_d) = F_d Ш_{T_d}(f), \quad (9.2)$$

где  $\mathbf{F}(\cdot)$  - обозначение оператора преобразования Фурье.

Обозначим через  $s_d(t)$  дискретизированный сигнал

$$s_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k/F_d) \delta(t - k/F_d) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k/F_d). \quad (9.3)$$

Используя известную теорему о спектрах получим

$$s_d(t) \leftrightarrow S(f) * F_d \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nF_d), \quad (9.4)$$

где  $*$  - обозначение операции свертки двух функций.

Из выражения (9.4) следует, что спектр сигнала  $s_d(t)$  составляет периодическую функцию с периодом  $F_d$ . Пусть Фурье-образ  $S(f)$  равен нулю для  $|f| \geq f_g$ , т. е. спектр сигнала  $s(t)$  полностью расположен в частотном интервале  $(-f_g, f_g)$  величиной  $2f_g$ . Тогда справедлива теорема дискретизации (теорема Шеннона): для того чтобы вызванное дискретизацией сигнала периодическое повторение спектра не приводило к его искажению (отсутствовало наложение смежных спектров), необходимо и достаточно выполнить условие  $F_d \geq 2f_g$ .

Умножим спектр сигнала на прямоугольную функцию частоты  $\Pi_{F_d/2}(f)$ , равную нулю за пределами интервала  $(-F_d/2, F_d/2)$  и равную единице в пределах интервала, и применим к полученному произведению обратное преобразование Фурье. Используя соотношение  $\Pi_{F_d/2} \leftrightarrow F_d \sin \pi F_d t / \pi F_d t$ , получим  $s_d(t) * F_d \sin \pi F_d t / \pi F_d t = s(t) F_d$ . (9.5)

Подставим в формулу (9.5) выражение для  $s_d(t)$  из формулы (9.3)

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k/F_d) \delta(t - k/F_d) * \sin \pi F_d t / \pi F_d t. \quad (9.6)$$

Поскольку  $\delta(t - k/F_d) * \sin \pi F_d t / \pi F_d t = \sin \pi F_d [t - (k/F_d)] / \pi F_d [t - (k/F_d)]$ ,

$$\text{имеем} \quad s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k/F_d) \sin \pi F_d [t - (k/F_d)] / \pi F_d [t - (k/F_d)]. \quad (9.7)$$

Это соотношение является важной теоремой, известной как теорема восстановления (теорема Шеннона - Котельникова): если для частоты дискретизации  $F_d$  справедливо неравенство  $F_d \geq 2f_g$ , где  $f_g$  - наибольшая частота спектра функции  $s(t)$ , то функция  $s(t)$  однозначно восстанавливается по дискретным значениям  $s(k/F_d), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Функция  $\sin \pi F_d [t - (k/F_d)] / \pi F_d [t - (k/F_d)]$  называется *интерполяционной функцией Шеннона*.

Такая дискретизация сигнала может рассматриваться как теоретическая идеализация, поскольку невозможно получить отсчеты сигнала за беско-



нечно малые промежутки времени. Фактически дискретизация аналогового измерительного сигнала во времени является амплитудно-импульсной модуляцией (АИМ). Спектр АИМ сигнала (рис. 9.1) в общем случае имеет гармоники частоты дискретизации, в окрестности которых находятся верхние и нижние боковые полосы частот. Амплитуды гармоник частоты дискретизации изменяются пропорционально спектральной плотности импульсов переносчика на частоте данной гармоники.

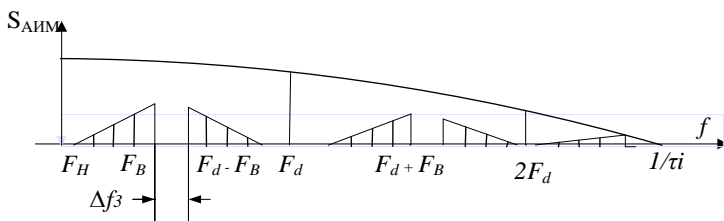


Рис. 9.1. Спектр АИМ сигнала:  $F_H$ ,  $F_B$  – нижняя и верхняя граничные частоты в спектре аналогового сигнала;  $\tau_i$  – длительность импульсов дискретизации

Поскольку спектры аналоговых измерительных сигналов не имеют четко выраженной верхней граничной частоты, то перед аналого-цифровым преобразованием *предварительно ограничивают спектр сигнала с помощью фильтра низкой частоты (ФНЧ)*.

Вследствие неидеальности амплитудно-частотных характеристик реальных ФНЧ спектр измерительного сигнала и спектры боковых полос могут частично перекрываться, что ведет к неминуемым искажениям сигнала. Для уменьшения степени перекрытия спектров применяют защитную полосу частот  $\Delta f_з$  (см.рис. 9.1). Например, при  $F_d = 8$  кГц ( $T_d = 125$  мкс),  $F_B = 3,4$  кГц защитный интервал равен  $\Delta f_з = F_d - 2F_B = 1,2$  кГц. Следовательно, увеличение частоты дискретизации позволяет снизить требования к ФНЧ.

*Квантование сигналов* – это процесс разделения непрерывного диапазона значений преобразуемой величины на определенное конечное число смежных неперекрывающихся интервалов и представления любого значения из данного интервала одним принадлежащим этому же интервалу значением. В результате этой операции бесконечному числу значений измеряемого сигнала в некотором ограниченном диапазоне ставится в соответствие конечное множество допустимых значений – *уровней квантования*.

Динамический диапазон сигнала делится на отдельные интервалы – шаги (ступени) квантования величиной  $\delta$ . При попадании значения сигнала в пределы того или иного шага осуществляется его округление до уровня, соответствующего этому шагу, например до середины каждого шага квантования. В моменты времени  $kT_d$  при выполнении условия  $s(kT_d) \in [c_{квi}, c_{кв(i+1)})$  (рис. 9.2), первичный сигнал отображается значением  $c_{квi} + 0,5\delta$ , причем отражается не точно, а с погрешностью квантования

$$\Delta_{\text{кв}}(kT_d) = a(kT_d) - c_{\text{кв}i} - 0,5\delta, \quad (9.8)$$

По характеру погрешность  $\Delta_{\text{кв}}(kT_d)$  является случайной величиной.

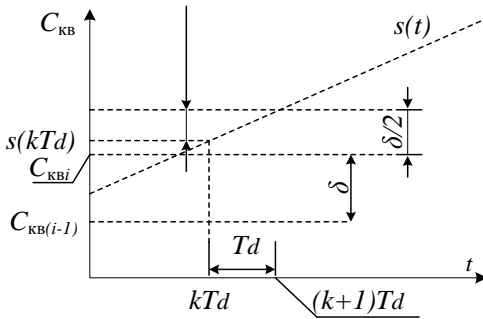


Рис. 9.2. Образование погрешности квантования

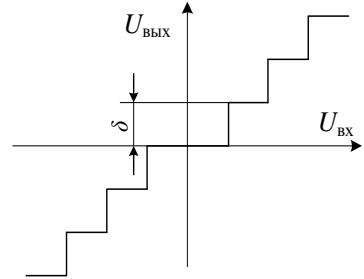


Рис. 9.3. Амплитудная характеристика квантователя

При *равномерном квантовании* шаги квантования выбирают одинаковыми, то есть  $\delta = c_{\text{кв}i} - c_{\text{кв}(i-1)} = \text{const}$ . Амплитудная характеристика равномерного квантователя изображена на рис. 9.3.

Замена непрерывного бесконечного множества значений сигнала конечным приводит к потере определенной части информации. Разница между мгновенными значениями сигнала и разрешенными уровнями рассматривается как специфическая помеха – *шум квантования*. Влияние шума квантования на качество измерения оценивается отношением средней мощности сигнала  $P_c$  к средней мощности шума квантования  $P_{\text{шкв}}$

$$h_{\text{кв}} = P_c / P_{\text{шкв}}. \quad (9.9)$$

Определим мощность шума квантования. Ошибка квантования изменяется в пределах  $\pm 0,5\delta$  и имеет равномерное распределение вероятностей с плотностью  $p(\Delta_{\text{кв}}) = 1/\delta$  (рис. 9.4).

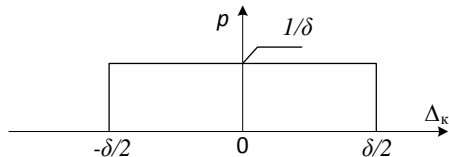


Рис. 9.4. Распределение плотности вероятности погрешности квантования

Мощность шума квантования равна среднему квадрату (дисперсии) погрешности квантования

$$P_{\text{шкв}} = \overline{\Delta_{\text{кв}}^2} = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \Delta_{\text{кв}}^2 d\Delta_{\text{кв}} = \delta^2/12. \quad (9.10)$$

Из выражения (9.10) следует, что величина  $P_{\text{шкв}}$  тем больше, чем больше шаг квантования  $\delta$ . Однако с увеличением  $\delta$  уменьшается влияние аддитивных помех. Поэтому шаг квантования следует определять из условий достижения компромисса между влиянием внешних помех и шума квантования. Общее число уровней квантования

$$M = (s_{\text{max}} - s_{\text{min}}) / \delta + 1, \quad (9.11)$$

где  $s_{\text{max}}, s_{\text{min}}$  - максимальное и минимальное значения сигнала.

Определим среднюю мощность отсчетов сигнала на выходе квантователя. Значение максимального отсчета (положительного или отрицательного) равно  $s_{\text{max}} = 0,5\delta(M - 1)$ . Для больших значений  $M$  имеем  $s_{\text{max}} \approx 0,5\delta M$ , а мощность максимального отсчета  $P_{\text{max}} \approx 0,25\delta^2 M^2$ .

С учетом пик-фактора сигнала  $\Pi = 10 \lg P_{\text{max}} / P_{\text{cp}}$ , средняя мощность отсчетов равна

$$P_{\text{cp}} = M^2 \delta^2 / 4 \cdot 10^{0,1\Pi}. \quad (9.13)$$

С учетом (9.10) и (9.13) значение  $h_{\text{кв}}$  составляет

$$h_{\text{кв}} = P_{\text{cp}} / P_{\text{шкв}} = 3M^2 / 10^{0,1\Pi}. \quad (9.14)$$

Восстановление непрерывного измерительного сигнала по его отсчетам осуществляется с помощью ФНЧ с частотой среза  $F_0 = F_B$ . ФНЧ ограничивает также и спектр шумов квантования. В полосе частот от 0 до  $0,5F_d$  отношение мощности сигнала к мощности шумов квантования определяется формулой (9.14). На выходе ФНЧ мощность сигнала не изменится, а мощность шума квантования уменьшится в  $F_d / 2F_B$  раз. Поэтому отношение мощностей сигнала и шума квантования на выходе ФНЧ определяется как

$$h_{\text{кв}} = 3 \cdot M^2 F_d / 2 \cdot 10^{0,1\Pi} F_B. \quad (9.15)$$

Формула (9.15) позволяет определить необходимое число уровней квантования АЦП

$$M = 0,816 \cdot 10^{0,05\Pi} \sqrt{h_{\text{кв}} F_B / F_d}. \quad (9.16)$$

**Пример.** Во время аналого-цифрового преобразования информационного сигнала необходимо обеспечить  $h_{\text{кв}} \approx 500$ . Исходные данные:  $\Pi = 30 - 35$  дБ,  $F_B = 3,4$  кГц,  $F_d = 8$  кГц. По формуле (9.16) находим:  $M = 1100 - 2000$ .

**Кодирование сигналов.** Квантованные отсчеты можно передавать различными способами. Для этого чаще всего используют кодовые комбинации, каждая из которых соответствует определенному уровню квантования.

**Цифровое кодирование** – это выполняемая без потери информации операция отображения размера квантованного сигнала цифровым кодом. Код – это совокупность символов и правил их применения для представления, передачи, обработки и хранения информации. Кодирование выполняется с целью повышения эффективности информационных процессов, а также для за-

щиты информации от искажения и повреждения ее целостности при передаче, обработке и хранении.

По сути кодирование - это правило, устанавливающее соответствие между элементами двух различных множеств. Множество квантованных уровней информационного параметра является конечным и количество его элементов (мощность множества) равна  $M$ . Все элементы этого множества можно расположить в определенном порядке и каждому из них можно приписать номер - число из множества натурального ряда чисел от 0 до  $M-1$ . Для чего же необходимо такое дополнительное преобразование, ставящее в соответствие множеству состояний информационного сигнала множество чисел?

Дело в том, что помехи и шумы в каналах передачи изменяют значение информационного параметра передаваемого сигнала, образуя в окрестности этого значения область неопределенности. Чтобы надежно различить соседние значения параметра, необходимо, чтобы области неопределенности этих значений не пересекались. Кодирование и применяют для выполнения этого условия. Кроме того, переход к числовым множествам позволяет применить методы цифровой обработки сигналов и существенно расширить функциональные возможности и повысить метрологические характеристики ИИС за счет применения более совершенных методов обработки информации.

Чем больше разнесены между собой передаваемые значения информационного параметра, тем с большей вероятностью они будут правильно определены при приеме. Поэтому при одинаковой мощности импульса и скорости передачи символов целесообразно использовать сигналы с минимальным значением  $m$ , т.е. двоичные и троичные. Для передачи  $M$  чисел с помощью  $m$ -ичных сигналов необходимо сформировать множество  $n$ -разрядных кодовых комбинаций, где  $n$  определяется из неравенства

$$m^{(n-1)} < M \leq m^n .$$

При выборе основания кода  $m$  учитывается в первую очередь простота, экономичность и удобство реализации кодового преобразования. Поэтому наибольшее распространение получили двоичные натуральные равномерные коды ( $m=2$ ), в которых каждая кодовая группа (кодовая комбинация) состоит из  $n$  кодовых символов, каждый из которых принимает одно из двух значений - "1" или "0". Кодовая группа соответствует записи номера передаваемого квантованного уровня в двоичной системе счисления. Структура кодовой группы определяется выражением

$$A = \sum_{i=1}^N a_i 2^{i-1} , \quad (9.17)$$

где  $a_i$  - кодовый символ ( $a_i = 1; 0$ ).

Количество необходимых элементов в кодовой комбинации определяется количеством  $M = 2^N$  уровней квантования, тогда

$$N \geq [\log_2 M]^+ . \quad (9.18)$$

В АЦП чаще используют двоичный натуральный код и код Грея.

*Код Грея* отличается двумя особенностями, которые способствуют повышению быстродействия кодирующих устройств по сравнению с двоичным натуральным кодом: любые две кодовые комбинации, соответствующие соседним уровням квантования, отличаются друг от друга только в одном двоичном разряде, а изменение значений элементов в каждом разряде при переходе от одной кодовой комбинации к другой происходит вдвое реже.

## 9.2. Средства аналого-цифрового преобразования

Свойства АЦП, возможности их использования в измерительных каналах ИИС определяются рядом параметров, основными из которых являются: разрядность, время преобразования (частота преобразования), число каналов для подключения аналоговых сигналов, тип интерфейса, с помощью которого цифровые данные передаются получателю информации, а также характеристики точности преобразования. При последовательном росте значений входного аналогового сигнала  $U_{вх}(t)$  от 0 до номинального значения  $U_{н}$ , соответствующего полной шкале АЦП, выходной цифровой сигнал  $D(iT_d)$  образует ступенчатую функцию (рис. 9.5).

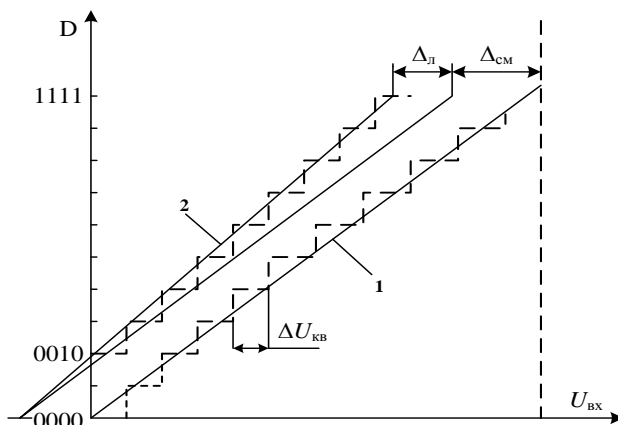


Рис. 9.5. Статическая характеристика преобразования АЦП

Такую зависимость называют характеристикой преобразования АЦП. При отсутствии аппаратных погрешностей преобразования средние точки ступенек располагаются на идеальной прямой (линия 1 на рис. 9.5). Такая характеристика является идеальной характеристикой преобразования. Реальная характеристика может отличаться от идеальной размерами и формой ступенек, а также расположением в плоскости координат. Для количественного описания различий применяют статические и динамические параметры.

**Статические параметры АЦП.** *Разрешающая способность* – величина, обратная максимальному числу кодовых комбинаций на выходе АЦП. Этот параметр принято выражать в процентах, разрядах или децибелах. Он харак-

теризует потенциально возможную точность преобразования АЦП. Например, 12-разрядный АЦП ( $N = 12$ ) имеет разрешающую способность  $1/4096$ , или  $0,0245\%$  от полной шкалы, или  $20 \lg(4096)^{-1} = 72,25$  дБ.

Разрешающей способности соответствует увеличение входного напряжения АЦП при изменении исходного кода  $D_j$ , где  $j$ -номер ступени,  $j \in [0, 2^N]$ , на единицу младшего разряда (ЕМР). Это приращение является шагом квантования. Номинальное значение шага квантования составляет

$$\Delta U_{\text{кв}} = U_{\text{н}} / (2^N - 1). \quad (9.19)$$

Чем больше разрядность АЦП, тем выше его разрешающая способность.

*Погрешность полной шкалы* – относительная разность между реальным и идеальным значениями предела шкалы преобразования при отсутствии смещения нуля

$$\delta_{\text{пш}} = (\Delta_{\text{пш}} / U_{\text{н}}) 100\% . \quad (9.20)$$

Эта погрешность по характеру является мультипликативной. Иногда выражается значением ЕМР.

*Погрешность смещения нуля* – значение  $U_{\text{вх}}$ , соответствующее нулевому исходному коду АЦП. Эта погрешность по характеру является аддитивной составляющей полной погрешности преобразования и выражается формулой

$$\Delta_{\text{см}} = U_{\text{вх.01}} - 0,5 \Delta U_{\text{кв}} , \quad (9.21)$$

где  $U_{\text{вх.01}}$  – значение входного напряжения, при котором происходит переход выходного кода из 0 в 1. Погрешность смещения нуля может приводиться и в относительных единицах – в процентах от полной шкалы

$$\delta_{\text{см}} = (\Delta_{\text{см}} / U_{\text{н}}) 100\% . \quad (9.22)$$

Погрешности полной шкалы и смещения нуля АЦП могут быть уменьшены путем подстройки аналоговой части схемы или коррекцией алгоритма вычислений цифровой части устройства.

*Нелинейность* – максимальное отклонение реальной характеристики преобразования  $D(U_{\text{вх}})$  от оптимальной (линия 2 на рис. 9.6). Оптимальная характеристика находится эмпирически из условия минимизации погрешности нелинейности. Нелинейность обычно определяется в относительных единицах. Для приведенной на рис. 9.6 характеристики имеем

$$\delta_{\text{л}} = (\Delta_j / U_{\text{н}}) 100\% . \quad (9.23)$$

*Дифференциальной нелинейностью* АЦП в определенной точке  $k$  характеристики преобразования называется разность между значением кванта преобразования  $\Delta U_{\text{кв}}^k$  и средним значением кванта преобразования  $\Delta U_{\text{кв}}$ . Значение дифференциальной нелинейности приводятся в долях ЕМР или процентах от полной шкалы. Для приведенной на рис. 9.6 характеристики этот параметр определяется по формуле

$$\delta_{\text{дл}} = \left[ \frac{(\Delta U_{\text{кв}}^k - \Delta U_{\text{кв}})}{U_{\text{н}}} \right] 100 \% . \quad (9.24)$$

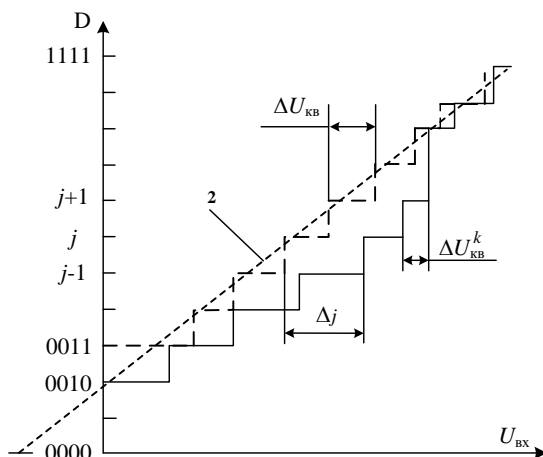


Рис. 9.6. Погрешность линейности характеристики преобразования АЦП

*Погрешность дифференциальной линейности* определяет два важных свойства АЦП: отсутствие пропуска кодов и монотонность характеристики преобразования. Первое свойство заключается в способности АЦП выдавать все возможные выходные коды при изменении входного напряжения от 0 до  $U_{\text{н}}$ . Пример пропуска  $j$ -го кода приведен на рис. 9.6. При нормировании этой погрешности не указывают эквивалентную разрядность АЦП — максимальное количество разрядов АЦП, для которых отсутствуют пропуски кодовых комбинаций.

*Монотонность характеристики преобразования* — это неизменность знака увеличения исходного кода  $D_j$  при монотонном изменении входного преобразуемого сигнала. Монотонность еще не гарантирует малых значений дифференциальной нелинейности и отсутствия пропуска кодов.

*Температурная нестабильность АЦП* характеризуется температурными коэффициентами погрешности полной шкалы и погрешности смещения нуля.

**Динамические параметры АЦП.** Возникновение динамических погрешностей связано с дискретизацией изменяющихся во времени сигналов. Для характеристики динамической точности АЦП применяют следующие параметры.

*Максимальная частота дискретизации* — это наибольшая частота, с которой может выполняться преобразование выборочных значений сигнала при сохранении параметров АЦП в заданных границах. Этот параметр измеряется количеством выборок в секунду.

*Время преобразования* — это временной интервал, ограниченный началом импульса дискретизации или началом преобразования и моментом появления на выходе АЦП устойчивого кода, соответствующего данной выборке. Для

одних АЦП (например, АЦП последовательного счета) эта величина является переменной, зависящей от значения входного сигнала. Для других АЦП (например, параллельных или последовательно-параллельных) это время не зависит от входного сигнала. При работе АЦП без устройства выборки-хранения (УВХ) время преобразования является апертурным временем.

*Время выборки (стробирования)* – временной интервал, в течение которого происходит образование одного выборочного значения. При работе без УВХ оно равно времени преобразования АЦП.

*Апертурная неопределенность аналого-цифрового преобразования.* В АЦП объединены операции дискретизации сигналов во времени и их квантования по уровням. За счет конечного времени одного преобразования и неопределенности момента его окончания не удается получить однозначное соответствие между значениями отсчетов и моментами времени, к которым они относятся. Поэтому при работе с изменяющимися во времени сигналами возникает динамическая погрешность. Для ее оценки введено понятие *апертурной неопределенности*, которое характеризуется апертурным временем.

*Апертурным временем*  $t_a$  называют временной интервал, в течение которого сохраняется неопределенность между значением отсчета и моментом времени к которому он приписывается. Эффект апертурной неопределенности проявляется либо как погрешность мгновенного значения сигнала при заданных моментах измерения, либо как погрешность момента времени, в который осуществляется измерение при заданном мгновенном значении сигнала. При равномерной дискретизации следствием апертурной неопределенности является возникновение апертурной погрешности, численно равной увеличению сигнала в течение апертурного времени.

Эффект апертурной неопределенности можно представить, как "дрожание" моментов времени, в которые берутся отсчеты сигнала относительно равноудаленных моментов времени. Вследствие этого вместо равномерной дискретизации с периодом  $T_d$  осуществляется дискретизация с флуктуирующим периодом. Это приводит к нарушению условий теоремы отсчетов и появлению в системах апертурной погрешностей.

Для определения аналитического выражения апертурной погрешности разложим выражение для выходного сигнала в ряд Тейлора в окрестности точек отсчетов. Для  $j$ -й точки имеем

$$s(t) = s(t_j) + t_a s'(t_j) + (t_a^2/2) s''(t_j) + \dots, \quad (9.25)$$

что дает в первом приближении апертурную погрешность

$$\Delta s_a(t_j) \approx t_a s'(t_j). \quad (9.26)$$

Для оценки апертурных погрешностей используют синусоидальный тестовый сигнал  $U(t) = U_m \sin \omega t$ , для которого максимальное относительное значение апертурной погрешности (рис. 9.7) оценивается по формуле



$$\Delta U_a / U_m = \omega t_a . \quad (9.27)$$

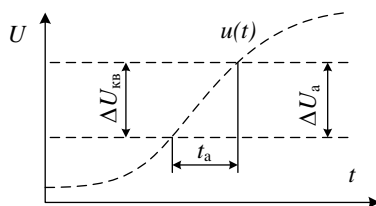


Рис. 9.7. Образование апертурной погрешности в случае ее равенства шагу квантования

Если принять, что для  $N$ -разрядного АЦП относительная апертурная погрешность  $\gamma_a$  не должна превышать шаг квантования, то между частотой сигнала  $f$ , апертурным временем  $t_a$  и  $\gamma_a$  имеет место соотношение

$$\gamma_a = 0,5N = ft_a . \quad (9.28)$$

Для обеспечения дискретизации с погрешностью 1 % синусоидального сигнала частотой 100 кГц, время преобразования АЦП не должно превышать 25 нс. В то же время с помощью такого быстродействующего АЦП принципиально возможно дискретизировать сигналы, имеющие ширину спектра порядка 20 МГц. Таким образом, дискретизация сигналов в АЦП приводит к противоречивым требованиям по быстродействию АЦП и периоду дискретизации. Это расхождение может достигать  $10^2 \dots 10^3$  раз и существенно усложняет и удорожает процесс дискретизации, поскольку преобразование даже сравнительно узкополосных сигналов требует весьма быстродействующих АЦП. Для устранения этого противоречия в состав АЦП включаются устройства выборки и хранения (УВХ), имеющие малое апертурное время.

**Классификация АЦП.** Известно большое количество различных способов и устройств АЦП, отличающихся точностью, скоростью преобразования и сложностью аппаратной реализации и интерфейсами. На рис. 9.8 дана классификация АЦП по способам преобразования.

Операции квантования и кодирования могут осуществляться с помощью последовательной, параллельной, последовательно-параллельной процедур приближения цифрового эквивалента к значению аналоговой преобразуемой величины. В соответствии с этим различают три группы АЦП.

*Параллельные АЦП* осуществляют квантование сигнала одновременно с помощью набора компараторов, включенных параллельно источнику входного сигнала. На рис. 9.9 показан пример структуры параллельного АЦП для преобразования напряжения в 3-разрядный выходной двоичный код. С помощью трех двоичных разрядов можно представить восемь различных чисел с нулем включительно. Следовательно, необходимо семь компараторов и семь соответствующих эквидистантных опорных напряжений. Последние

образуются с помощью резистивного делителя напряжения, подключенного к источнику опорного напряжения  $U_{оп}$ .

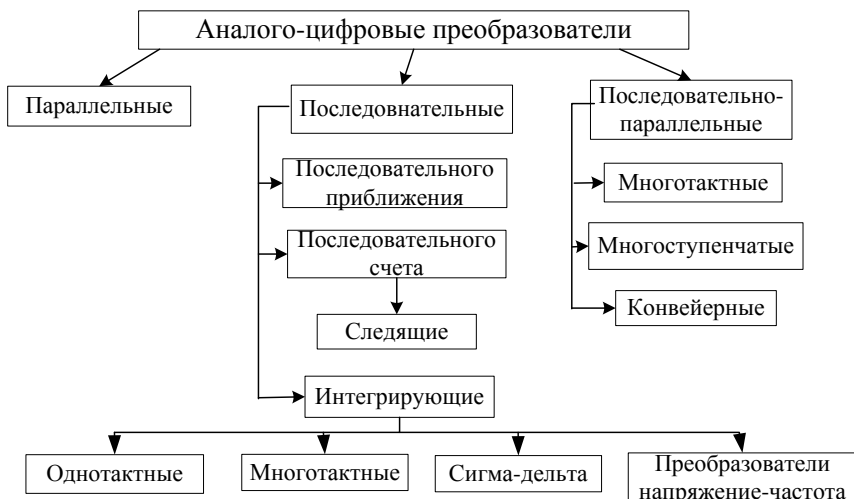


Рис. 9.8. Классификация АЦП по способам преобразования

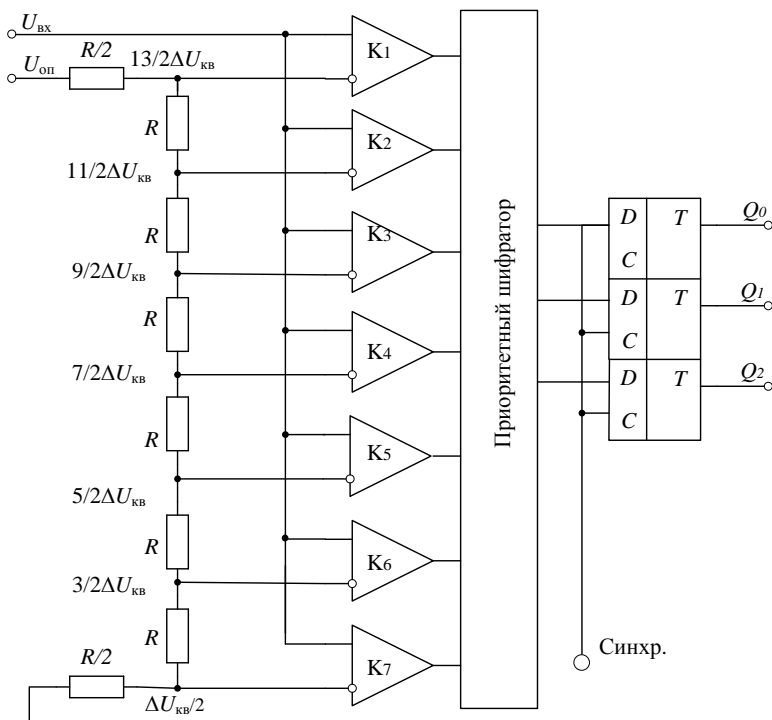


Рис. 9.9. Схема параллельного 3-разрядного АЦП

Если приложенное входное напряжение не выходит за пределы диапазона от  $5/2$  до  $7/2 \Delta U_{\text{кв}}$ , где  $\Delta U_{\text{кв}} = U_{\text{оп}}/7$  – квант напряжения, соответствующий ЕМР АЦП, то компараторы с 1-го по 3-й устанавливаются в состояние 1, а компараторы с 4-го по 7-й – в состояние 0. Преобразование этой группы кодов в трехзначное двоичное число выполняет логическое устройство, называемое *приоритетным шифратором*. Диаграмма состояний приоритетного шифратора приведена в табл. 9.1.

При увеличении входного напряжения компараторы устанавливаются в состояние 1 по очереди – снизу вверх. Такая очередность не гарантируется при быстром нарастании входного сигнала, так как из-за различия во времени задержки компараторы могут сработать в другом порядке.

Приоритетное кодирование позволяет избежать возможной ошибки благодаря тому, что единицы в младших разрядах не принимаются во внимание приоритетным шифратором. Подключение приоритетного шифратора непосредственно к выходу АЦП может привести к ошибочному результату при считывании выходного кода вследствие разного времени задержки выходных сигналов. Для исключения такого исхода в состав АЦП включен выходной регистр на  $D$ -триггерах.

Таблица 9.1

Входное напряжение	Состояние компараторов							Выходы			
	$U_{\text{вх}} / \Delta U_{\text{кв}}$	K <sub>7</sub>	K <sub>6</sub>	K <sub>5</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>1</sub>	Q <sub>0</sub>
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
2	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
4	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
6	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Для уменьшения апертурного времени на входе параллельных АЦП применяют УВХ, обеспечивающие время выборки порядка 0,1 нс. Другой путь решения этой проблемы заключается в использовании кода Грея.

Благодаря одновременной работе компараторов параллельные АЦП являются самыми быстрыми. Недостатком таких АЦП является высокая сложность. Действительно,  $N$ -разрядный АЦП содержит в своем составе  $2^{N-1}$  компараторов и  $2^N$  прецизионных резисторов. Следствием этого является высокая потребляемая мощность.

*Последовательные АЦП* осуществляют преобразование аналогового входного сигнала последовательно бит за битом. Наиболее распространенным представителем последовательных АЦП является АЦП последователь-

ного приближения (другое название – АЦП с порозрядным уравниванием). Структурная схема таких преобразователей приведена на рис. 9.10, а, на рис. 9.10, б диаграмма, поясняющая принцип действия 4-разрядного АЦП.

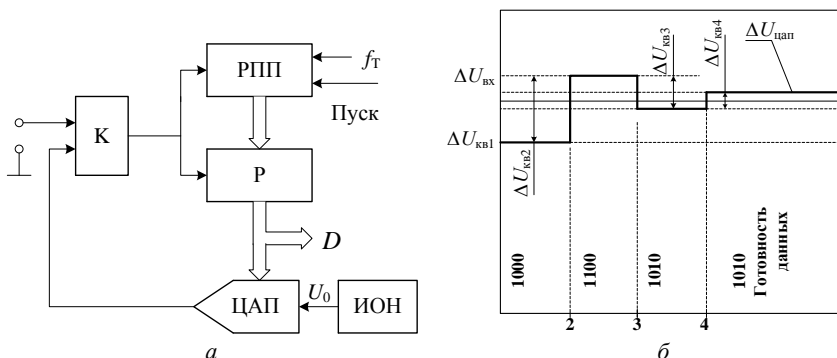


Рис. 9.10. Структурная схема АЦП последовательного приближения (а) и диаграмма процесса уравнивания (б)

В основе работы последовательных АЦП лежит принцип дихотомии, т.е. последовательного сравнения измеряемой величины с  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$  и т.п. частями возможного максимального значения. Это позволяет для  $N$ -разрядного АЦП выполнить весь процесс преобразования за  $N$  последовательных шагов (итераций) вместо  $2^{N-1}$  шагов при использовании последовательного счета.

После подачи команды "Пуск" с приходом первого тактового импульса регистр последовательного приближения (РПП) принудительно подает на вход ЦАП код, равный половине его шкалы (для 4-разрядного ЦАП это код  $1000_2 = 8_{10}$ ). Выходное напряжение ЦАП на первом шаге приближения (см. рис. 9.10,б) составляет  $U_{ЦАП}(1) = \Delta U_{кв1} = 2^3 \Delta U_{кв4}$ , где  $\Delta U_{квi}$  – ступень квантования на  $i$ -м шаге приближения,  $\Delta U_{кв4}$  соответствует ЕМР. Величина  $\Delta U_{кв1}$  составляет половину диапазона преобразуемых напряжений. Если  $U_{вх} > U_{ЦАП}(1)$ , на выходе компаратора устанавливается 1, в противном случае 0. При нулевом значении РПП возвращает старший разряд  $a_3$  в состояние нуля. Затем остаток  $U_{вх} - a_3 2^3 \Delta U_{кв4}$  таким же образом сравнивается с ближайшим младшим разрядом и т.д. После четырех подобных шагов РПП формирует двоичное число, из которого после цифро-аналогового преобразования получают напряжение, соответствующее с точностью до  $\pm 0,5 \Delta U_{кв4}$  напряжению  $U_{вх}$ . Для временного хранения результата в схеме АЦП предусмотрен регистр Р.

Быстродействие АЦП этого типа определяется суммой времени установки ЦАП до установившегося значения с погрешностью, не превышающей

$0,5\Delta U_{\text{кв4}}$ , времени переключения компаратора и задержки распространения сигнала в РПП.

Для уменьшения апертурного времени в состав АЦП последовательного приближения может быть включено УВХ. Статическая погрешность АЦП обусловлена погрешностями использованного в его составе ЦАП и может быть значительно уменьшена, что позволяет обеспечить разрешающую способность до 18 двоичных разрядов при частоте выборок до 200 кГц.

Второй тип последовательных АЦП – это преобразователи *последовательного счета*, типичным представителем которых является *следящий АЦП*. Его структурная схема приведена на рис. 9.11.

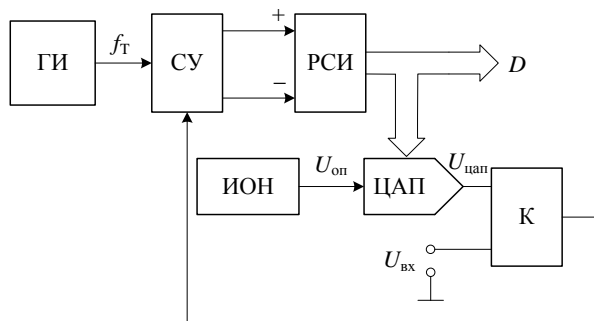


Рис. 9.11. Структурная схема следящего АЦП

Генератор импульсов (ГИ) формирует последовательность тактовых импульсов частотой  $f_T$ . Эти импульсы схемой управления (СУ) направляются на входы реверсивного счетчика импульсов (РСИ). Каждый тактовый импульс изменяет текущее состояние РСИ на +1 или -1. Знак направления счета определяет компаратор (К): если  $U_{\text{вх}} > U_{\text{ЦАП}}$ , то содержание РСИ увеличивается, если  $U_{\text{вх}} < U_{\text{ЦАП}}$ , то содержание РСИ уменьшается. Выходной код РСИ преобразуется ЦАП в напряжение, которое непрерывно отслеживает изменение входного напряжения с точностью до половины ступени квантования. Уравнение преобразования такого АЦП задается выражением

$$U_{\text{вх}} = U_{\text{ЦАП}} = U_{\text{оп}} D / 2^N, \quad (9.29)$$

где  $N$  - разрядность ЦАП.

Недостатком последовательных АЦП является низкая помехоустойчивость. Действительно, выборка мгновенного значения входного напряжения обычно включает слагаемое в виде мгновенного значения помехи.

Этот недостаток в значительной степени устранен в *интегрирующих АЦП*, в которых входной сигнал интегрируется непрерывно или на определенном временном интервале, продолжительность которого выбирается

кратной периоду помехи. Это позволяет подавить помеху еще на этапе преобразования.

*АЦП многотактного интегрирования.* Примером является АЦП двухтактного интегрирования, упрощенная схема которого приведена на рис. 9.12.

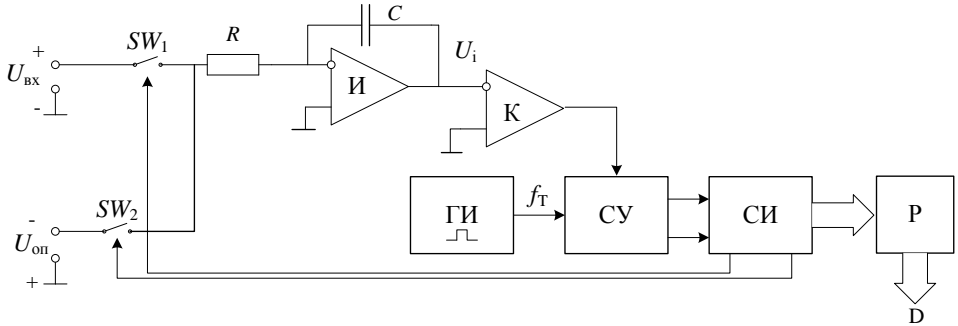


Рис. 9.12. Структурная схема АЦП двухтактного интегрирования

Преобразование осуществляется в два этапа – интегрирование и счет. На этапе интегрирования переключатель  $SW_1$  замкнут, а ключ  $SW_2$  разомкнут. Интегратор (И) интегрирует входное напряжение  $U_{вх}$ . Время интегрирования  $T_{И} \in [0, t_1]$  является постоянным. Счетчик (СИ) используется как таймер с коэффициентом пересчета  $K_{СИ}$ . В этом случае  $t_1 = K_{СИ} / f_T$ . К моменту окончания интегрирования выходное напряжение интегратора составляет

$$U_i(t_1) = (1/RC) \int_0^{t_1} U_{вх}(t) dt = -U_{вх,ср} K_{СИ} / f_T RC, \quad (9.30)$$

где  $U_{вх,ср}$  - среднее за время  $T_{И}$  входное напряжение.

На этапе счета переключатель  $SW_1$  размыкается, а  $SW_2$  замыкается и опорное напряжение  $U_{оп}$  (противоположное по знаку напряжению  $U_{вх}$ ) поступает на вход интегратора. Выходное напряжение интегратора линейно уменьшается по абсолютной величине (рис. 9.13).

Этап счета заканчивается в момент времени  $t_2$ , для которого выполняется условие  $U_i(t_2) = 0$ . Это событие фиксирует компаратор К и останавливает счет. Интервал времени, в течение которого продолжается этап счета, определяется из уравнения

$$U_i(t_1) + (1/RC) \int_{t_1}^{t_1+t_2} U_{оп} dt = 0. \quad (9.31)$$

В счетчике накапливается код числа. Подставив в формулу (9.31) значение  $U_i(t_1)$  из формулы (9.30) получим уравнение преобразования

$$D = U_{вх,ср} K_{СИ} / U_{оп}. \quad (9.32)$$

Из формулы (9.32) следует, что отличительной чертой метода много- тактного интегрирования является то, что ни тактовая частота, ни постоянная интегрирования  $RC$  не влияют на результат. Необходимо только обеспечить неизменность тактовой частоты в течение времени  $t_1 + t_2$ . В окончательный результат (9.32) входит не мгновенное напряжение, а его усредненное за время  $T_{И}$  значение. Поэтому переменное напряжение помехи ослабляется тем сильнее, чем выше его частота.

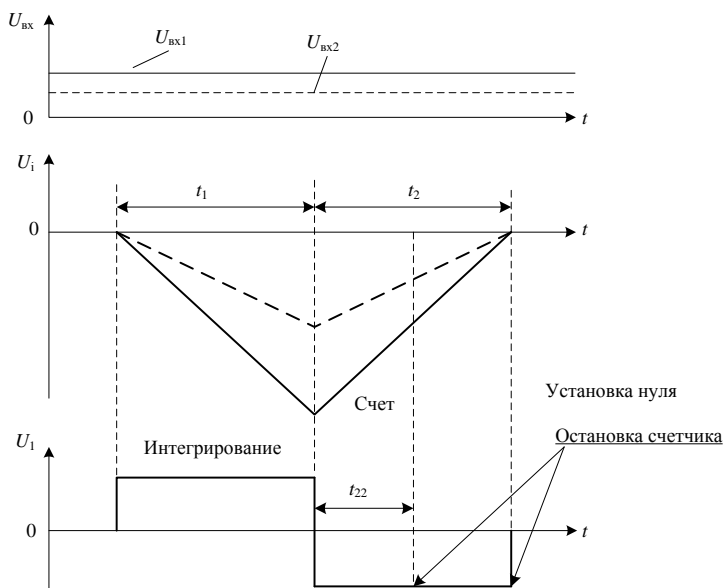


Рис. 9.13. Временные диаграммы работы АЦП двухтактного интегрирования

Определим коэффициент передачи помехи  $K_{П}$  для такого АЦП. Пусть на вход интегратора поступает гармонический сигнал единичной амплитуды частотой  $f$  с произвольной начальной фазой  $\Phi$ . Среднее значение этого сигнала за время интегрирования равно

$$U_{\text{вх.ср}} = (1/t_1) \int_0^{t_1} \sin(2\pi ft + \Phi) dt = \sin(\pi ft_1 + \Phi) \sin(\pi ft_1) / \pi ft_1 \quad (9.33)$$

и максимально по модулю при  $\Phi = \pm\pi k, k = 0, 1, 2, \dots$  В этом случае

$$K_{П} = |\sin^2 \pi ft_1 / \pi ft_1|. \quad (9.34)$$

Из формулы (9.34) следует, что переменное напряжение, период которого в целое число раз меньше  $t_1$ , подавляется полностью (рис. 9.14). При наличии априорных сведений о частоте помехи целесообразно выбирать тактовую частоту такой, чтобы произведение  $K_{СИ} f$  было равным или кратным периоду помехи.

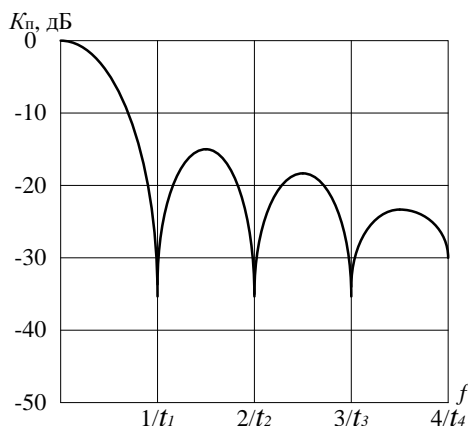


Рис. 9.14. Частотная характеристика коэффициента подавления помех в АЦП двухтактного интегрирования

Статическая точность АЦП многотактного интегрирования определяется только точностью ИОН и смещением нуля интегратора и компаратора. Смещение нуля можно устранить автоматической компенсацией.

АЦП многотактного интегрирования имеют ряд недостатков. Во-первых, нелинейность переходной статической характеристики операционного усилителя, на котором реализован интегратор, заметно влияет на интегральную нелинейность характеристики преобразования АЦП. Во-вторых, интегрирование входного сигнала занимает в цикле преобразования примерно третью часть, т. е. обращение к сигналу занимает только треть рабочего цикла. В-третьих, такие АЦП требуют большого количества внешних резисторов и конденсаторов, поэтому увеличивается зависимость от внешних помех.

Указанные недостатки АЦП многотактного интегрирования в значительной степени устранены в *сигма-дельта АЦП*. Своим названием эти преобразователи обязаны наличию в них двух блоков: сумматора (обозначение операции –  $\Sigma$ ) и интегратора (обозначение операции –  $\Delta$ ). Основным принципом, положенным в работу АЦП является усреднение результатов измерения на большом интервале времени, что позволяет уменьшить внесенную шумами погрешность преобразования и увеличить разрешающую способность АЦП.

Основные узлы АЦП – это сигма-дельта модулятор и цифровой фильтр. Схема сигма-дельта модулятора первого порядка приведена на рис. 9.15.

Работа этой схемы основана на вычитании из входного сигнала  $U_{вх}$  сигнала с выхода ЦАП, полученного в предыдущем такте работы. Эта разница интегрируется в интеграторе (И), а затем превращается в код параллельным АЦП невысокой разрядности. Последовательность кодов  $D$  поступает на цифровой фильтр нижних частот (на рисунке отсутствует).



Порядок модулятора определяется количеством в его схеме интеграторов и сумматоров. Сигма-дельта модуляторы  $n$ -го порядка содержат  $n$  сумматоров,  $n$  интеграторов и обеспечивают большее соотношение сигнал/шум по сравнению с модуляторами первого порядка при той же частоте отсчетов.

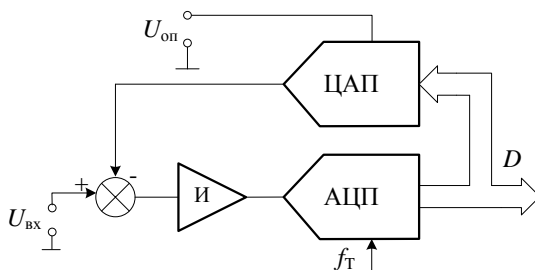


Рис. 9.15. Структура сигма-дельта модулятора

Структура однобитового сигма-дельта АЦП приведена на рис. 9.16, а принцип его работы поясняет табл. 9.2 на **примере** преобразования входного напряжения  $U_{вх} = 0,6 \text{ В}$  ( $0 \text{ В}$ ) при  $U_{оп} = 1 \text{ В}$ .

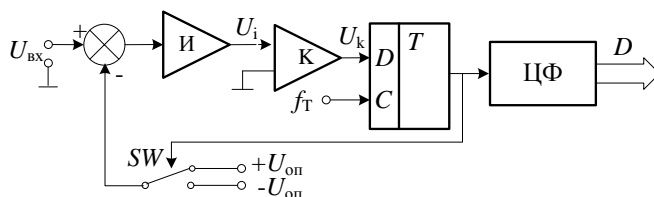


Рис. 9.16. Структурная схема однобитового сигма-дельта АЦП

Пусть постоянная времени интегрирования интегратора численно равна периоду тактовых импульсов. До начала преобразования выходное напряжение интегратора устанавливается в ноль. На выходе ключа  $SW$  – однобитового ЦАП – также устанавливается нулевое напряжение. Далее работа осуществляется как последовательность показанных в табл. 9.2 состояний.

Таблица 9.2

$U_{вх} = 0,6 \text{ В}$					$U_{вх} = 0 \text{ В}$				
№ такта	$U_{\Sigma}, \text{ В}$	$U_i, \text{ В}$	$U_k, \text{ бит}$	$U_{ЦАП}, \text{ В}$	№ такта	$U_{\Sigma}, \text{ В}$	$U_i, \text{ В}$	$U_k, \text{ бит}$	$U_{ЦАП}, \text{ В}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,6	0,6	1	1	1	1	1	1	1
2	-0,4	0,2	1	1	2	-1	0	0	-1
3	-0,4	-0,2	0	-1	3	1	1	1	1
4	1,6	1,4	1	1	4	-1	0	0	-1
5	-0,4	1,0	1	1	5	1	1	1	1
6	-0,4	0,6	1	1	6	-1	0	0	-1
7	-0,4	0,2	1	1	7	1	1	1	1
8	-0,4	-0,2	0	-1	8	-1	0	0	-1
9	1,6	1,4	1	1	9	1	1	1	1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	-0,4	1,0	1	1	10	-1	0	0	-1
11	-0,4	0,6	1	1	11	1	1	1	1
12	-0,4	0,2	1	1	12	-1	0	0	-1
13	-0,4	-0,2	0	-1	13	1	1	1	1
14	1,6	1,4	1	1	14	-1	0	0	-1
15	-0,4	1,0	1	1	15	1	1	1	1
16	-0,4	0,6	1	1	16	-1	0	0	-1

Во 2 и 7 тактах состояния системы идентичны, поскольку при неизменном входном сигнале  $U_{вх} = 0,6$  В цикл работы занимает пять тактовых периодов. Усреднение выходного сигнала ЦАП за цикл действительно дает величину напряжения равную 0,6 В:  $(1+1-1+1+1)/5 = 0,6$ . Для формирования выходного кода АЦП необходимо преобразовать последовательность бит на выходе компаратора в последовательный или параллельный двоичный код. В простейшем случае это можно сделать с помощью двоичного реверсивного счетчика. В рассмотренном примере использован 4-разрядный счетчик. Подсчет бит на выходе компаратора за 16-тактный цикл дает число 13. Нетрудно убедиться в том, что при  $U_{вх} = 1$  В на выходе компаратора всегда будет единица, что дает за полный цикл преобразования (16 тактов) число 16, т.е. переполнение счетчика. Напротив, при  $U_{вх} = -1$  В на выходе компаратора всегда будет ноль, что дает нулевое число в конце цикла. Если  $U_{вх} = 0$  то, как видно из табл. 9.2, результат счета за цикл составит  $8_{10}$  или  $1000_2$ . Это означает, что число на выходе АЦП представлено в смещенном коде. В рассматриваемом примере верхняя граница полной шкалы составит  $1111_2$  или  $+7_{10}$ , а нижняя –  $0000_2$  или  $-8_{10}$ . При  $U_{вх} = 0,6$  В содержимое счетчика составит  $13_{10}$  в смещенном коде, что соответствует числу  $+5_{10}$  в прямом коде. Учитывая, что  $+8_{10}$  соответствует  $U_{вх} = 1$  В, результат преобразования  $-5 \times 1/8 = 0,625$  В  $> 0,6$  В.

При использовании двоичного счетчика для преобразования потока битов с выхода компаратора необходимо выделять фиксированный цикл преобразования продолжительностью  $K_{СИ} f_T$ , где  $K_{СИ}$  – коэффициент пересчета счетчика. После окончания цикла необходимо считать результат, например с помощью регистра-защелки, и обнулить счетчик – подготовить к новому циклу преобразования. Сигма-дельта АЦП, по своим свойствам подавлять действие помех, близкие к АЦП многотактного интегрирования.

В сигма-дельта АЦП обычно применяются цифровые фильтры с амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) вида  $(\sin x/x)^3$ . Передаточная функция такого фильтра в z-области определяется выражением

$$W(z) = \left[ \frac{(1 - z^{-M})}{M(1 - z^{-1})} \right]^3, \quad (9.35)$$

где  $M$  - целое число, задаваемое программно и равное отношению тактовой частоты модулятора к частоте отсчетов фильтра (т.е. частоте обновления данных). В частотной области модуль передаточной функции фильтра равен

$$H(f) = \left[ \frac{\sin(M\pi f/f_T)}{M \sin(\pi f/f_T)} \right]^3. \quad (9.36)$$

На рис. 9.17 приведен график амплитудно-частотной характеристики цифрового фильтра согласно выражению (9.36) при  $f_T = 38,4$  кГц и  $M = 192$ , что дает значение частоты отсчетов, совпадающее с основной частотой режекции фильтра АЦП, равной 50 Гц. Сравнение этой АЧХ с частотной характеристикой коэффициента подавления помех АЦП с двухтактным интегрированием (см. рис. 9.14) свидетельствует о лучших свойствах сигма-дельта АЦП в части подавления помех.

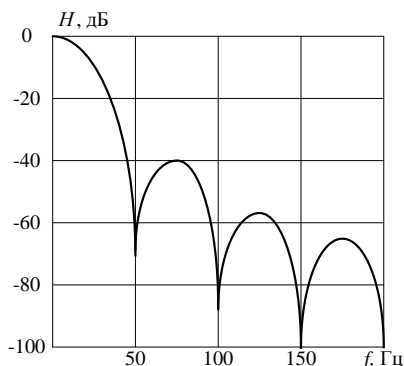


Рис. 9.17. АЧХ цифрового фильтра сигма-дельта АЦП

В целом сравнение сигма-дельта АЦП с АЦП многотактного интегрирования показывает значительные преимущества первых. Прежде всего, сигма-дельта АЦП обеспечивают лучшую линейность характеристики преобразования. Это объясняется тем, что, во-первых, интегратор сигма-дельта АЦП работает в более узком динамическом диапазоне и нелинейность переходной характеристики использованного в интеграторе ОУ сказывается значительно меньше на характеристике всего АЦП. Во-вторых, емкость конденсатора интегратора в сигма-дельта АЦП значительно меньше (десятки пикофарад), поэтому конденсатор может быть изготовлен на одном кристалле вместе с другими элементами АЦП, что существенно уменьшает занимаемую им площадь на плате и снижает уровень шумов.

Применение в составе сигма-дельта АЦП цифрового ФНЧ вместо счетчика вызывает переходные процессы при изменении входного напряжения. Время установления цифровых фильтров с конечной длительностью переходных процессов вида  $(\sin x/x)^3$  составляет четыре периода частоты отсчетов, а при начальной установке в ноль фильтра — три периода. Это снижает быстродействие сигма-дельта АЦП.

Другой тип интегрирующих АЦП может быть выполнен на базе *преобразователей напряжение-частота* (ПНЧ). Такие АЦП обеспечивают относительно высокую точность преобразования при низкой стоимости. Существует несколько видов ПНЧ. Наиболее известны ПНЧ с заданной продолжительностью выходного импульса. Структура такого ПНЧ приведена на рис. 9.18.

Под действием положительного входного сигнала  $U_{вх}$  напряжение  $U_i$  на выходе интегратора (И) уменьшается. При этом ключ SW разомкнут. Когда напряжение  $U_i$  уменьшится до нуля, компаратор (К) переключается и запускает одновибратор (ОВ). Последний формирует импульс стабильной длительности для управления ключом. Последовательность этих импульсов является выходным сигналом ПНЧ. Ключ замыкается, и ток в течение времени интегрирования  $T_{и}$  поступает на вход интегратора, вызывая увеличение его выходного напряжения. Далее описанный процесс повторяется.

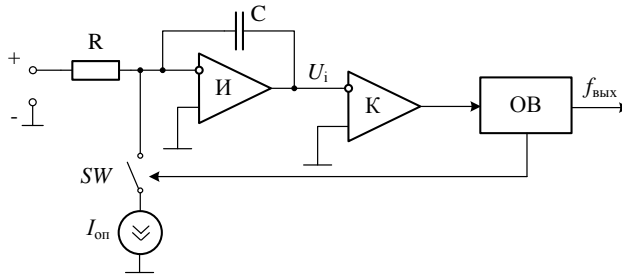


Рис. 9.18. Структурная схема ПНЧ

Импульсы тока  $I_{оп}$  уравнивают ток, вызванный входным напряжением  $U_{вх}$ . В установившемся режиме выполняется условие

$$-(1/RC) \int_0^T U_{вх}(t) dt + (1/C) \int_0^{T_{и}} I_{оп} dt = 0, \quad (9.37)$$

откуда следует

$$f_{вых} = 1/T = \bar{U}_{вх.ср} / RI_{оп} T_{и}, \quad (9.38)$$

где  $\bar{U}_{вх.ср}$  - среднее значение входного напряжения за период  $T$ .

Выражение (9.38) показывает, что погрешность преобразования определяется погрешностями установки опорного тока  $I_{оп}$ , формирования длительности импульса одновибратора  $T_i$  и сопротивления резистора  $R$ . Емкость конденсатора  $C$  интегратора не влияет на частоту ПНЧ.

Таким образом, ПНЧ преобразует входное напряжение в унитарный код. Для его представления двоичным позиционным кодом используют счетчик. Схема интегрирующего АЦП на базе ПНЧ приведена на рис. 9.19. Двоичный счетчик подсчитывает число импульсов, поступивших с ПНЧ за время счета  $T_{сч} = 1/f_{сч}$ , задаваемое счетными импульсами. Этими же импульсами содержимое счетчика заносится в выходной регистр-защелку (Р). После этого счетчик (СИ) устанавливается в ноль.

Число  $n$  подсчитанных счетчиком за время  $T_{сч}$  импульсов равно

$$n = T_{сч} \bar{U}_{вх.ср} / T_i RI_{оп}, \quad (9.39)$$

где  $\bar{U}_{вх.ср}$  - среднее за время  $T_{сч}$  значение входного напряжения. Точность ПНЧ можно повысить, если в схему АЦП вместо одновибратора включить

тактируемый импульсами стабильной частоты  $D$ -триггер.

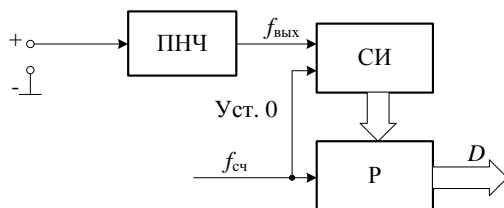


Рис. 9.19. Структура АЦП на основе ПНЧ

*Последовательно-параллельные АЦП* являются компромиссом между высоким быстродействием и меньшей ценой устройства. Такие АЦП занимают промежуточное положение по разрешающей способности и быстродействию между параллельными АЦП и АЦП последовательного приближения. Последовательно-параллельные АЦП делятся на многоступенчатые, многотактные и конвейерные. В многоступенчатом АЦП процесс преобразования входного сигнала разделен в пространстве. На рис. 9.20 представлена схема двухступенчатого 8-разрядного АЦП.

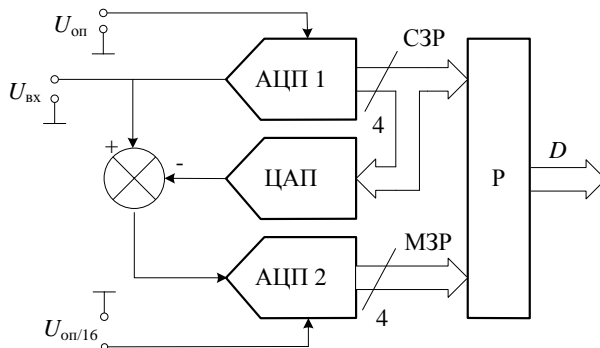


Рис. 9.20. Структурная схема двухступенчатого 8-разрядного последовательно-параллельного АЦП

АЦП 1 осуществляет грубое преобразование сигнала в четыре старших разряда выходного кода. Цифровой код с выхода АЦП 1 поступает на выходной регистр  $P$  и одновременно на вход 4-разрядного быстродействующего ЦАП. Остаток напряжения после вычитания выходного напряжения ЦАП из входного поступает на вход АЦП 2, опорное напряжение которого в 16 раз меньше, чем у АЦП 1. Как следствие, квант АЦП 2 в 16 раз меньше кванта АЦП 1. Преобразованный АЦП 2 в цифровую форму остаток напряжения представляется четырьмя младшими разрядами выходного кода.

Различие между АЦП 1 и АЦП 2 заключается в требовании к точности: точность АЦП 1 должна быть такой же как у 8-разрядного преобразователя, в то время как АЦП 2 может иметь точность 4-разрядного АЦП.

Кроме того, применение этого способа предполагает необходимость поддержания входного напряжения постоянным с помощью УВХ в течение времени преобразования напряжения на всех ступенях до получения конечного результата.

**Пример** 8-разрядного последовательно-параллельного многотактного АЦП приведен на рис. 9.21. Процесс преобразования напряжения в этом АЦП разделен во времени. Преобразователь состоит из 4-разрядного параллельного АЦП, квант которого определяется величиной опорного напряжения, 4-разрядного ЦАП и схемы управления СУ. Если максимальный входной сигнал равен 2,56 В, то в первом такте преобразователь работает с шагом квантования  $\Delta U_{\text{кв1}} = 0,16$  В. В это время входной код ЦАП равен нулю. СУ пересылает полученный в первом такте АЦП двоичный код в четыре старших разряда выходного регистра, одновременно подает этот код на вход ЦАП и уменьшает в 16 раз опорное напряжение АЦП. Во втором такте шаг квантования  $\Delta U_{\text{кв2}} = 0,01$  В и остаток, образовавшийся при вычитании напряжения ЦАП из входного напряжения, преобразуется в младший полубайт выходного кода.

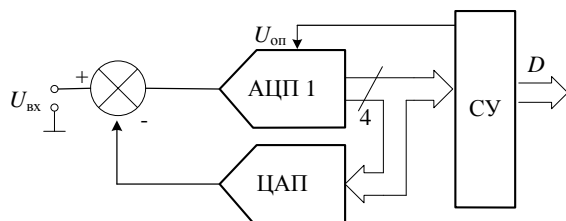


Рис. 9.21. Структурная схема двутактного 8-разрядного АЦП

Используемые в этой схеме 4-разрядные АЦП и ЦАП должны иметь точность 8-разрядных преобразователей. В противном случае возможен пропуск кодов. Как и в рассмотренном выше АЦП, входное напряжение должно оставаться неизменным в течение времени преобразования, для чего на его входе включают УВХ.

Быстродействие рассмотренного многотактного АЦП определяется общим временем преобразования 4-разрядного АЦП (входит дважды в общее время преобразования), временем срабатывания цифровой СУ, временем установления ЦАП с погрешностью, не превышающей 0,2...0,3 кванта 8-разрядного АЦП. При прочих равных условиях преобразователь такого типа медленнее рассмотренного выше двуступенчатого АЦП (но быстрее АЦП последовательного приближения), однако проще и дешевле.

Быстродействие многоступенчатых АЦП можно повысить применив *конвейерный принцип* многоступенчатой обработки входного сигнала. В обычном многоступенчатом АЦП (см. рис. 9.20) сначала формируются старшие разряды выходного кода в АЦП 1, после чего имеет место период установления выходного сигнала ЦАП. На этом интервале АЦП 2 простаивает. На втором этапе при преобразовании остатка в АЦП 2 простаивает АЦП 1. Введя элементы задержки аналогового и цифрового сигналов между ступенями преобразователя, получим конвейерный АЦП. Схема 8-разрядного ва-

рианта такого АЦП приведена на рис. 9.22. Роль аналогового элемента задержки выполняет УВХ 2, а цифрового – регистр P1. Регистр задерживает передачу старшего полубайта в регистр P2 на один период тактового сигнала  $CLK$ .

Сигналы выборки формируются из тактового сигнала и поступают на УВХ 1 и УВХ 2 в разные моменты времени: УВХ 2 переводится в режим хранения позже УВХ 1 на время, равное суммарной задержке распространения сигнала через АЦП 1 и ЦАП. Задний фронт тактового сигнала управляет записью кодов в P1 и P2. Полная обработка входного сигнала занимает около двух периодов сигнала  $CLK$ , но выходной код обновляется с частотой  $f_T$ .

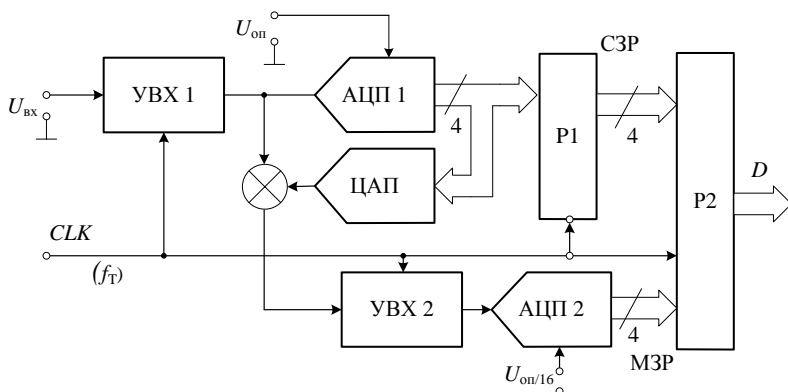


Рис. 9.22. Структурная схема конвейерного 8-разрядного АЦП

Конвейерная архитектура позволяет в несколько раз повысить максимальную частоту выборок многоступенчатого АЦП. Хотя при этом и сохраняется суммарная задержка сигнала, свойственная обычным многоступенчатым АЦП с тем же числом ступеней, это не имеет существенного значения, поскольку время последующей цифровой обработки сигналов, как правило, многократно превышает эту задержку. За счет этого можно, без проигрыша в быстродействии, нарастить число ступеней АЦП одновременно уменьшив разрядность каждой ступени и снизить сложность АЦП.

**Например**, для построения 12-разрядного АЦП из четырех 3-разрядных нужно 28 компараторов, а его реализация на двух 6-разрядных требует 126 компараторов.

**Сопряжение АЦП с цифровыми процессорами.** Важную часть АЦП составляет цифровой интерфейс, т.е. схемы, обеспечивающие связь АЦП с приемниками цифровых кодов. Структура цифрового интерфейса определяет способ подключения АЦП к приемнику – микропроцессору, микроконтроллеру, цифровому процессору сигналов или ПК. Свойства цифрового интерфейса влияют на уровень верхней границы частоты преобразования АЦП.

Чаще применяют способ связи, при котором АЦП представляет для процессора одну ячейку памяти. Для этого АЦП снабжается необходимым числом адресных входов, дешифратором адреса и подключается непосредствен-

но к адресной шине и шине данных процессора. Для этого он должен иметь выходные каскады с тремя состояниями.

*АЦП с параллельным интерфейсом выходных данных.* В простейшем варианте параллельный интерфейс АЦП реализуется с помощью  $N$ -разрядного регистра хранения, имеющего три устойчивых состояния выхода. На рис. 9.23, а, б представлены соответственно структурная схема такого АЦП и временные диаграммы работы интерфейса.

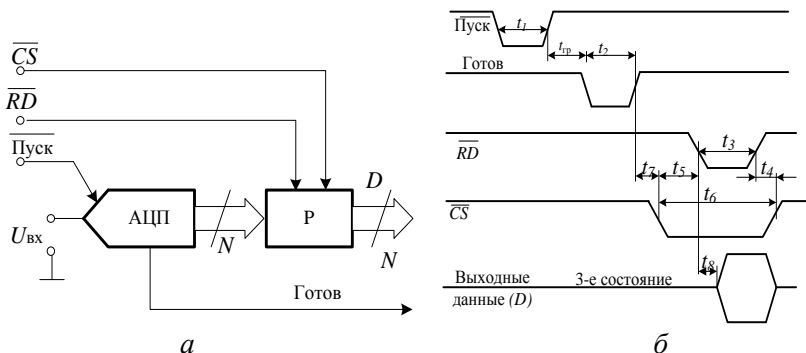


Рис. 9.23. АЦП с параллельным интерфейсом: структура (а), временные диаграммы (б)

По переднему фронту сигнала "Пуск" УВХ преобразователя переходит в режим хранения и инициирует процесс преобразования. После окончания преобразования на линию "Готов" выводится импульс, указывающий на наличие в выходном регистре АЦП нового результата. Сигналы "CS" (выбор кристалла, от английского *Chip Select*) и "RD" (чтение, от английского *Read*) управляют выводом данных в регистр (P) для приема/передачи.

*АЦП с последовательным интерфейсом выходных данных.* В АЦП последовательного приближения выходные данные могут быть получены в виде последовательного кода непосредственно с компаратора или РПП. На рис. 9.24 приведена структура такого интерфейса (а) и диаграммы его работы (б).

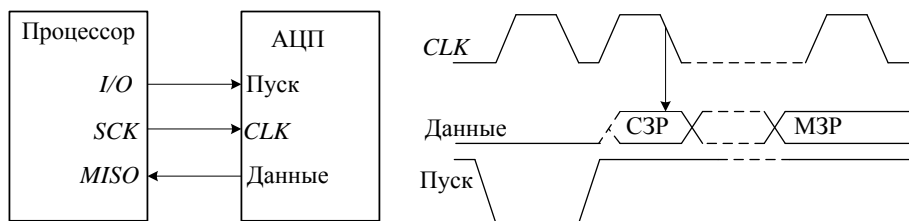


Рис. 9.24. Последовательный интерфейс (а) и временные диаграммы его работы (б)

В приведенной схеме процессор является главным (master). Он инициирует начало процесса преобразования подачей сигнала "Пуск" с выхода I/O (Input/Output – вход/выход). С тактового выхода процессора SCK на синхро-



вход АЦП *CLK* (Склок – синхрогенератор) поступает последовательность тактовых импульсов. Начиная со второго такта после пуска, на выходе данных АЦП формируется последовательный выходной код старшими битами вперед, поступающий на вход *MISO* (master – input, slave – output) процессора.

Простейший интерфейс обеспечивает наименьшее время цикла "преобразование – передача данных". Однако он имеет два существенных недостатка. Во-первых, переключение выходных каскадов АЦП приносит импульсную помеху в аналоговую часть преобразователя, что вызывает уменьшение соотношения сигнал/шум. Во-вторых, если АЦП имеет значительное время преобразования, процессор будет занят приемом информации значительную часть вычислительного цикла. По этим причинам АЦП с последовательной передачей выходных данных оснащаются выходным сдвиговым регистром, в который загружается результат преобразования с РПП.

**Системы сбора данных.** Функциональное усложнение АЦП, выпуск АЦП многоканальных, со встроенными УВХ, со сложной цифровой частью привело к разработке однокристалльных системы сбора данных, обеспечивающих преобразование аналоговых сигналов в цифровой код от многих датчиков. Пример структуры системы сбора данных приведен на рис. 9.25.



Рис. 9.25. Структурная схема системы сбора данных

Основу системы составляет АЦП, обычно АЦП последовательного приближения. Для подключения к нескольким источникам входных аналоговых сигналов используется аналоговый мультиплексор. Чтобы уменьшить частоту прерываний главного процессора в систему сбора данных включено оперативное запоминающее устройство (ОЗУ) типа FIFO (First Input – First Output, т. е. первый вошел – первый вышел). Измерительный усилитель с программируемым коэффициентом усиления (ИУПК) изменяет коэффициент усиления по команде со схемы управления. Это позволяет выровнять диапазоны аналоговых сигналов с разных входов.

Схема управления включает оперативное запоминающее устройство, в которое загружается блок рабочих команд, содержащих сведения о режимах работы системы. Цифровой таймер определяет темп преобразования АЦП.

### 9.3. Цифро-аналоговые преобразователи

*Цифро-аналоговое преобразование* – это преобразование цифрового кода в аналоговую величину (ток, напряжение, частоту, временные интервалы, фазовые сдвиги сигналов и т.п.). Чаще всего используют преобразование цифровых кодов в электрический ток или напряжение, поэтому дальше под цифро-аналоговым будем понимать преобразование кода в напряжение или ток. Устройства, реализующие цифро-аналоговое преобразование, называются *цифро-аналоговыми преобразователями* (ЦАП). В общем виде ЦАП можно представить как управляемый цифровым кодом потенциометр. Если к управляемому  $N$ -разрядным двоичным кодом потенциометру подключить ИОН с напряжением  $U_{\text{оп}}$ , то на выходе ЦАП получим напряжение

$$U_{\text{вых}}(D) = U_{\text{оп}} D / 2^N, \quad D \in [0, 2^N - 1]. \quad (9.40)$$

Из формулы (9.40) следует: 1) ЦАП формирует выходное напряжение  $U_{\text{вых}}(D) \in [0, U_{\text{оп}})$  как долю  $U_{\text{оп}}$ , линейно связанную с управляющим кодом  $D$ ; 2) при монотонном увеличении  $D$  выходное напряжение ЦАП изменяется ступенчато с шагом  $2^{-N} U_{\text{оп}}$ ; 3) ЦАП реализует операцию перемножения напряжения на код –  $U_{\text{оп}} D$ .

**Параметры ЦАП.** При последовательном увеличении значений входного цифрового кода  $N$ -разрядного ЦАП от 0 до  $2^N - 1$  выходной сигнал образует ступенчатую кривую, называемую *характеристикой преобразования ЦАП*. При отсутствии аппаратурных погрешностей средние точки ступеней расположены на идеальной прямой (прямая 1 на рис. 9.2б). Реальная характеристика преобразования (кривая 2) существенно отличается от идеальной размерами и формой ступеней, а также смещением относительно нулевого кода. Количественное описание этих расхождений характеризуется рядом параметров.

**Статистические параметры ЦАП.** *Разрешающая способность* – приращение напряжения  $U_{\text{вых}}$  вследствие изменения входного кода на ЕМР. Это приращение равно шагу квантования. Для двоичных кодов номинальное значение шага квантования составляет

$$\Delta U_{\text{кв}} = U_{\text{н}} / (2^N - 1), \quad (9.41)$$

где  $U_{\text{н}}$  - номинальное (максимальное) выходное напряжение ЦАП (напряжение полной шкалы). Чем больше разрядность ЦАП, тем выше его разрешающая способность.

*Погрешность полной шкалы* – относительная разница между реальным и идеальным значениями границ шкалы преобразования при отсутствии смещения нуля

$$\gamma_{п.ш} = (\Delta_{п.ш}/U_n)100\%, \quad (9.42)$$

где  $\Delta_{п.ш}$  - абсолютная разница между реальными и идеальными значениями границ шкалы преобразования при отсутствии смещения нуля. Эта составляющая полной погрешности по характеру является мультипликативной.

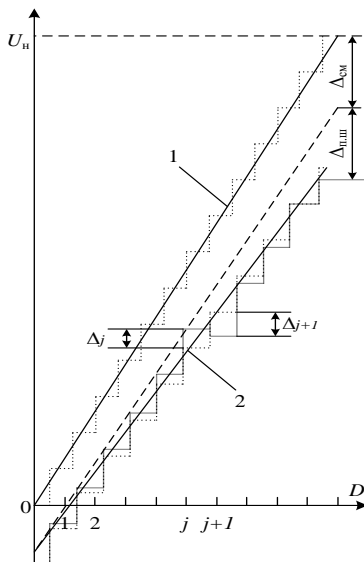


Рис. 9.26. Статистическая характеристика преобразования ЦАП

*Погрешность смещения нуля* – относительное значение  $U_{вых}$  при нулевом входном коде ЦАП

$$\delta_{см} = (\Delta_{см}/U_n)100\%, \quad (9.43)$$

где  $\Delta_{см}$  - абсолютное смещение нуля. Это аддитивная составляющая полной погрешности ЦАП.

*Нелинейность* – максимальное отклонение  $\Delta_j$  реальной характеристики преобразователя  $U_{вых}(D)$  от идеальной. Идеальная характеристика находится эмпирическим путем из условия минимизации значений погрешности нелинейности. Принято определять нелинейность в относительных единицах:

$$\gamma_n = (\Delta_j/U_n)100\%. \quad (9.44)$$

*Дифференциальная нелинейность* – это максимальное изменение (с учетом знака) отклонения реальной характеристики преобразования  $U_{вых}(D)$  от оптимальной при переходе от одного значения входного кода к другому,

смежному с ним. Эту погрешность принято определять в относительных единицах. Для приведенной на рис. 9.26 характеристики

$$\delta_{д.н} = \left[ (\Delta_j + \Delta_{j+1}) / U_n \right] 100 \% . \quad (9.45)$$

*Монотонность характеристики преобразования* – увеличение (уменьшение) выходного напряжения ЦАП  $U_{\text{вых}}(D)$  при увеличении (уменьшении) входного кода  $D$ . Если дифференциальная нелинейность больше относительного шага квантования  $\Delta U_{\text{кв}} / U_n$ , то характеристика ЦАП немонотонная.

*Температурная нестабильность ЦАП* характеризуется температурными коэффициентами погрешности полной шкалы и погрешности смещения нуля.

Погрешности полной шкалы и смещения нуля могут быть устранены калибровкой. Погрешность нелинейности не устраняется простыми способами.

*Динамические параметры ЦАП.* Эти параметры ЦАП определяются по результатам анализа функции  $U_{\text{вых}}(t)$  в случае максимального скачкообразного изменения кода  $D$  (обычно от 0 до  $2^N - 1$ ). Переходная характеристика ЦАП изображена на рис. 9.27.

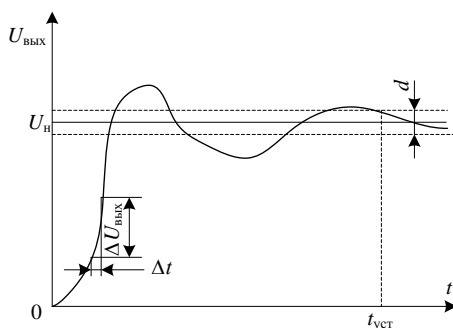


Рис. 9.27. Переходная характеристика ЦАП

*Время установления* – это интервал времени от момента  $t = 0$  при изменении входного кода до момента  $t_{\text{уст}}$ , когда в последний раз выполняется равенство  $|U_{\text{вых}} - U_n| = 0,5 \Delta U_{\text{кв}}$ .

*Скорость нарастания* – это максимальная скорость изменения  $U_{\text{вых}}(t)$  во время переходного процесса. Этот параметр определяется как отношение приращения  $\Delta U_{\text{вых}}$  к интервалу времени  $\Delta t$ , за который оно происходило. Как правило, этот параметр приводят для ЦАП с выходным сигналом в виде напряжения (для ЦАП с токовым выходом этот параметр зависит от типа внешнего для ЦАП выходного ОУ).

*Шумы ЦАП.* Шум на выходе ЦАП вызывают различные физические процессы, протекающие в полупроводниковых устройствах. Для оценки качества ЦАП используют среднеквадратическое значение шума. Этот параметр обычно измеряется в  $\text{нВ}/(\text{Гц})^{1/2}$  в заданной полосе частот.

*Выбросы* (импульсные помехи) – это короткие всплески или провалы в выходном напряжении, возникающие при изменении значений входного кода за счет несинхронности размыкания и замыкания аналоговых ключей в разных разрядах ЦАП. Например, если при переходе от значения кода 011...111 до значения 100...000 ключ самого старшего разряда ЦАП открывается позже, чем закроются ключи младших разрядов, то на выходе ЦАП некоторое время будет существовать сигнал, соответствующий коду 000...000. Это явление и вызывает появление выбросов.

Выбросы характерны для быстродействующих ЦАП, в которых сведены к минимуму емкости, которые могли бы сгладить эти выбросы. Радикальным способом подавления выбросов является использование устройств выборки-хранения. Выбросы оцениваются по их площади (в пВ с).

**Типы ЦАП.** На рис. 9.28 приведена классификация ЦАП, выполненная по схематехническим признакам.

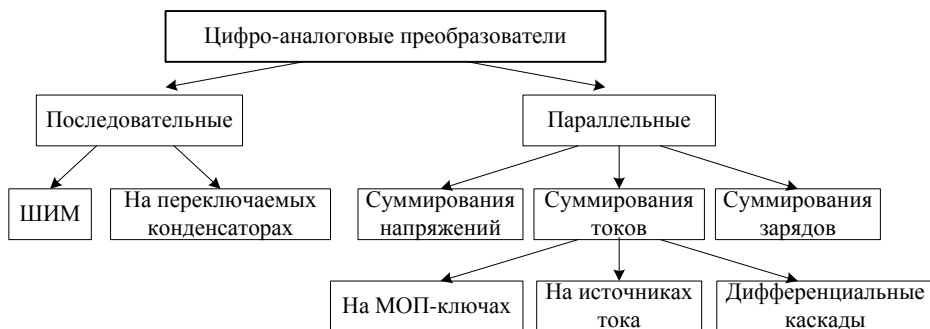


Рис. 9.28. Классификация ЦАП

*Последовательные ЦАП* можно разделить на ЦАП с *широтно-импульсной модуляцией* (ШИМ) и ЦАП на переключаемых конденсаторах. ЦАП с ШИМ просто реализуется, но имеет невысокое быстродействие. Структура ЦАП с ШИМ приведена на рис. 9.29.

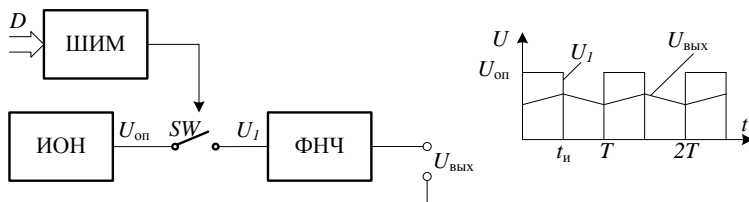


Рис. 9.29. Схема ЦАП с ШИМ (а) и график выходного напряжения (б)

Выход ШИМ управляет ключом  $SW$ , коммутирующим постоянное напряжение с выхода ИОН. В зависимости от разрядности кода  $D$  формируется последовательность импульсов с относительной длительностью

$$\gamma = T/t_{и} = D/2^N . \tag{9.46}$$

ФНЧ сглаживает импульсы и выделяет среднее значение напряжения

$$U_{\text{вых}} = \gamma U_{\text{оп}} = D U_{\text{оп}} / 2^N. \quad (9.47)$$

Рассмотренная структура ЦАП проста в реализации, имеет близкую к линейной функцию преобразования и невысокое быстродействие. Это объясняется тем, что вначале цифровой код преобразуется с помощью двоичного счетчика во временной интервал. В последовательном ЦАП на переключаемых конденсаторах цифро-аналоговое преобразование выполняется за значительно меньшее время. Принцип работы ЦАП на переключаемых конденсаторах иллюстрирует рис. 9.30.

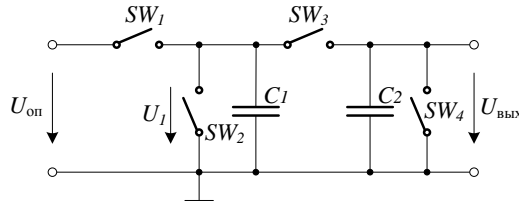


Рис. 9.30. Формирование выходного напряжения схемой на переключаемых конденсаторах

В этой схеме  $C_1 = C_2$ . Перед началом цикла преобразования конденсатор  $C_2$  разряжается ключом  $SW_4$ . Входные данные задаются в виде последовательного кода. Его преобразование осуществляется последовательно, начиная с младшего разряда  $d_0$ . Каждый такт преобразования состоит из двух полутактов. В первом полутакте конденсатор  $C_1$  заряжается до опорного напряжения  $U_{\text{оп}}$  при  $d_0 = 1$  посредством замыкания ключа  $SW_1$  или разряжается до нуля при  $d_0 = 0$  путем замыкания ключа  $SW_2$ . Во втором полутакте при разомкнутых ключах  $SW_1$ ,  $SW_2$  и  $SW_4$  замыкается ключ  $SW_3$ , что вызывает распределение заряда пополам между  $C_1$  и  $C_2$ . В результате имеем

$$U_1(0) = U_{\text{вых}}(0) = d_0 U_{\text{оп}} / 2. \quad (9.48)$$

Пока на конденсаторе  $C_2$  сохраняется заряд, процедура заряда конденсатора  $C_1$  должна быть повторена для следующего разряда  $d_1$  входного слова. После нового цикла перезарядки напряжение на конденсаторах составляет

$$U_{\text{вых}}(1) = U_1(1) = (d_1 + 0,5d_0) U_{\text{оп}} / 2 = (2d_1 + d_0) U_{\text{оп}} / 4. \quad (9.49)$$

Аналогично выполняется преобразование для остальных разрядов слова. В результате для  $N$ -разрядного ЦАП выходное напряжение равно

$$U_{\text{вых}}(N-1) = \left( U_{\text{оп}} / 2^N \right) \sum_{k=0}^{N-1} d_k 2^k = U_{\text{оп}} D / 2^N. \quad (9.50)$$

Если нужно сохранять результат преобразования в течение длительного времени, к выходу схемы необходимо подключить УВХ. После окончания цикла преобразования следует выполнить цикл выборки, перевести УВХ в режим хранения и начать новое преобразование.

Рассмотренная схема выполняет преобразование входного кода за  $2N$  шагов, что значительно меньше, чем в ЦАП с ШИМ. Этот способ требует то-

лько наличия двух подобранных конденсаторов небольшой емкости. Конфигурация аналоговой части схемы не зависит от разрядности кода  $D$ . В целом последовательные ЦАП значительно уступают параллельным ЦАП по быстродействию.

*Параллельные ЦАП.* Подавляющее большинство схем параллельных ЦАП реализует идею *суммирования весовых токов*, значение каждого из которых пропорционально весу цифрового двоичного разряда. Например, нужно преобразовать двоичный 4-разрядный код в ток. У четвертого старшего значащего разряда (СЗР) вес равен  $2^3 = 8$ , у третьего –  $2^2 = 4$ , у второго –  $2^1 = 2$  и у младшего (МЗР) –  $2^0 = 1$ . Если ток МЗР  $I_{МЗР} = 1$  мА, то  $I_{СЗР} = 8$  мА, а максимальный выходной ток преобразователя  $I_{ВЫХ.МАКС} = 15$  мА соответствует коду 1111<sub>2</sub>. Схема ЦАП, реализующая принцип суммирования весовых токов, приведена на рис. 9.31.

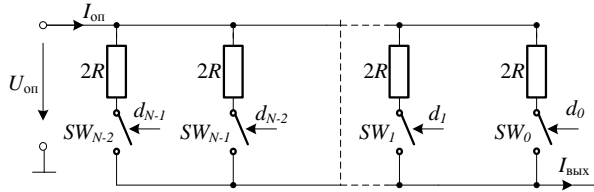


Рис. 9.31. ЦАП с суммированием весовых токов

Сопротивления резисторов выбирают таким образом, чтобы при замкнутых ключах через них протекал ток, соответствующий весу разряда. Ключ замыкается тогда, когда соответствующий ему бит кода  $D$  равен единице. Выходной ток определяется соотношением

$$I_{\text{ВЫХ}} = (U_{\text{оп}} / R) \sum_{k=0}^{N-1} d_k 2^k = U_{\text{оп}} D / R. \quad (9.51)$$

С повышением разрядности ЦАП растут требования к точности согласования токозадающих резисторов. Наиболее жесткие требования предъявляются к резисторам старших разрядов, поскольку разброс токов в них не должен превышать тока младшего разряда. Поэтому разброс сопротивления в  $k$ -м разряде не должен превышать величину  $\Delta R / R = 2^{-k}$ . Из этого условия следует, что разброс сопротивлений резистора, например, в четвертом разряде не должен превышать 3%, а в 10-м – 0,05% и т.п. Значения сопротивлений весовых резисторов могут различаться в тысячи раз, что затрудняет реализацию таких ЦАП в полупроводниковых ИМС. Среди других недостатков схемы следует указать следующие: 1) при различных входных кодах потребляемый от ИОН ток различен, что влияет на величину выходного напряжения ИОН; 2) сопротивления резисторов старших разрядов в многоразрядных ЦАП могут быть сопоставимы с сопротивлением замкнутого ключа, что приводит к дополнительным погрешностям преобразования; 3) к разомкнутым ключам прикладывается значительное напряжение, что усложняет их реализацию.

Указанные недостатки устранены в схеме ЦАП на матрицах резисторов типа  $R-2R$ . Схема такого ЦАП представлена на рис. 9.32.

В данной схеме формирование весовых коэффициентов ступеней преобразователя осуществляется путем последовательного деления опорного напряжения на резистивной матрице постоянного импеданса. Основным элементом матрицы является делитель напряжения, который должен удовлетворять следующему условию: если он нагружен на сопротивление  $R_H$ , то его входное сопротивление  $R_{вх}$  также должно равняться  $R_H$ . Коэффициент ослабления цепи  $\alpha = U_2/U_1$  для такой нагрузки должен иметь заданное значение. В случае выполнения этих условий выражения для последовательных ( $R_p$ ) и параллельных ( $R_s$ ) сопротивлений имеют вид

$$R_p = \alpha R_H / (1 - \alpha), \quad R_s = (1 - \alpha) R_H. \quad (9.52)$$

Значения сопротивлений резисторов на схеме рис. 9.32 получены для двоичного кодирования ( $\alpha = 0,5$ ) и  $R_H = 2R$ .

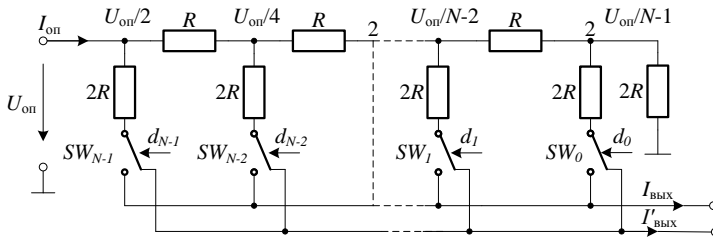


Рис. 9.32. Схема ЦАП на матрице резисторов типа  $R-2R$

Поскольку в любом положении переключателей  $SW_k$  они соединяют нижние выводы резисторов с общей шиной, ИОН (на схеме отсутствует) нагружен на постоянное входное сопротивление  $R_{вх} = R$ . Это гарантирует неизменность опорного напряжения при любом входном коде ЦАП.

Согласно рис. 9.32 выходные токи схемы определяются соотношениями

$$I_{\text{вых}} = \left( U_{\text{оп}} / 2^N R \right) \sum_{k=0}^{N-1} d_k 2^k = U_{\text{оп}} D / 2^N R, \quad I'_{\text{вых}} = \left( U_{\text{оп}} / 2^N R \right) \sum_{k=0}^{N-1} \bar{d}_k 2^k = U_{\text{оп}} \bar{D} / 2^N R, \quad (9.53)$$

а входной ток:

$$I_{\text{вх}} = I_{\text{вых}} + I'_{\text{вых}} + U_{\text{оп}} / 2^N R = U_{\text{оп}} / R. \quad (9.54)$$

Поскольку нижние контакты резисторов  $2R$  в любом состоянии переключателей  $SW_k$  соединены с общей шиной схемы через низкое сопротивление замкнутых ключей, напряжения на ключах всегда небольшое (в пределах нескольких милливольт). Это упрощает построение ключей, схем управления ими и позволяет использовать опорное напряжение различной полярности в широком диапазоне значений. Поскольку выходной ток ЦАП зависит линейно от  $U_{\text{оп}}$ , преобразователи такого типа можно использовать для *умножения аналогового сигнала* (подавая его на вход вместо опорного напряжения) на



цифровой код. Такие ЦАП называют *перемножающими* (MDAC – от английского Multiplying DAC).

Более высокую точность обеспечивают ЦАП на источниках тока. В отличие от ЦАП предыдущего типа, в котором весовые токи формируются резисторами сравнительно небольшого сопротивления и, как следствие, зависят от сопротивления ключей и нагрузки, в данном ЦАП весовые токи формируют источники тока, имеющие высокие динамические сопротивления. Упрощенная схема ЦАП на источниках тока приведена на рис. 9.33.

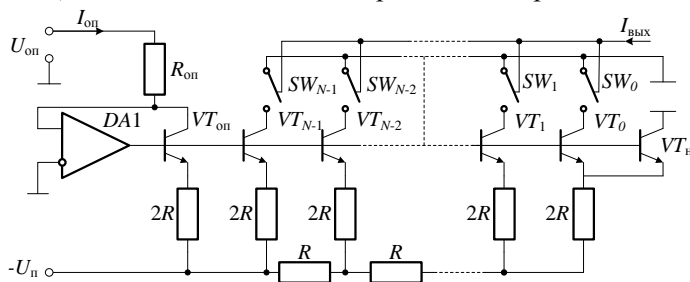


Рис. 9.33. ЦАП на источниках тока

Весовые токи формируются с помощью резистивной матрицы. Потенциалы баз транзисторов одинаковы, а чтобы были равны и потенциалы эмиттеров всех транзисторов, площади их эмиттеров делают различными в соответствии с весовыми коэффициентами. Правый резистор матрицы подключен к двум параллельно включенным одинаковым транзисторам  $VT_0$  и  $VT_N$ , в результате чего ток через  $VT_0$  равен половине тока через  $VT_1$ . Входное напряжение для резистивной матрицы создается опорным транзистором  $VT_{оп}$  и ОУ, выходное напряжение которого устанавливается таким, чтобы коллекторный ток  $VT_{оп}$  принимал значение  $I_{оп}$ . Выходной ток  $N$ -разрядного ЦАП составляет

$$I_{\text{вых}} = I_{\text{оп}} D / 2^N . \quad (9.55)$$

Рассмотренные ЦАП имеют токовые выходные сигналы. В ИИС часто возникает потребность формирования выходного сигнала в виде напряжения. Существует несколько способов формирования выходного напряжения ЦАП с суммированием весовых токов, два из которых приведены на рис. 9.34.

На рис. 9.34, а приведена схема с преобразователем тока в напряжение на операционном усилителе  $DA1$ . Эта схема приемлема для всех ЦАП с токовым выходом. Поскольку резисторы, определяющие весовые токи ЦАП имеют значительный температурный коэффициент сопротивления, резистор обратной связи  $R_{oc}$  изготавливают на кристалле ЦАП в одном технологическом цикле, что позволяет повысить его температурную стабильность.

Большинство ЦАП характеризуются значительной выходной емкостью (20...120 пФ). Эта емкость вместе с выходным сопротивлением ЦАП и резистором  $R_{oc}$  создает дополнительный полюс частотной характеристики петли обратной связи ОУ, что может привести к его самовозбуждению. Если  $R_{oc} =$

10 кОм частота второго полюса составит величину, близкую к 100 кГц при 100 %-ной глубине обратной связи. В таком случае усилитель с частотой единичного усиления  $f_1 > 500$  кГц не будет иметь достаточного запаса устойчивости. Для сохранения устойчивости параллельно резистору  $R_{oc}$  включают конденсатор  $C_k$ , емкость которого в первом приближении равна  $C_{вых}$ . Но такая мера существенно ухудшает быстродействие схемы.

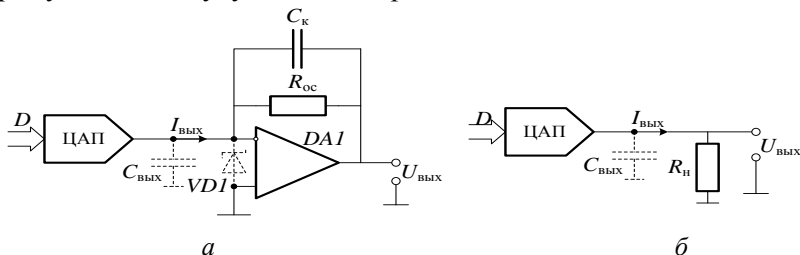


Рис. 9.34. Варианты формирования напряжения по токовому выходу ЦАП: *а* – с активным преобразователем ток-напряжение; *б* – с пассивным преобразователем ток-напряжение

С учетом формулы (9.55) выходное напряжение этой схемы составляет

$$U_{\text{вых}} = -R_{33} I_{\text{вых}} = -R_{33} U_{\text{оп}} D / R \cdot 2^N. \quad (9.56)$$

Обычно выбирают  $R_{oc}=R$ , тогда  $U_{\text{вых}} = -2^{-N} U_{\text{оп}} D$ .

ЦАП с МОП-ключами допускают отрицательное напряжение на ключах не меньше  $-0,7$  В. Для защиты ключей между выходами ЦАП включают диод Шоттки, как это показано на рис. 9.34, *а* ( $VD1$ ).

Преобразование выходного тока в напряжение может быть осуществлено и с помощью обычного резистора  $R_n$  (см. рис. 9.34, *б*). В этой схеме невозможно самовозбуждение и сохранено быстродействие, однако амплитуда выходного напряжения остается небольшой, так как в противном случае транзисторы источников тока могут выйти из линейного режима. Линейный режим обеспечивается при  $R_n < 1$  кОм. Для увеличения амплитуды выходного сигнала ЦАП к выходу схемы подключают усилитель.

Получить выходной сигнал в виде напряжения в ЦАП с МОП-ключами можно, используя инверсное включение резистивной матрицы (рис. 9.35).

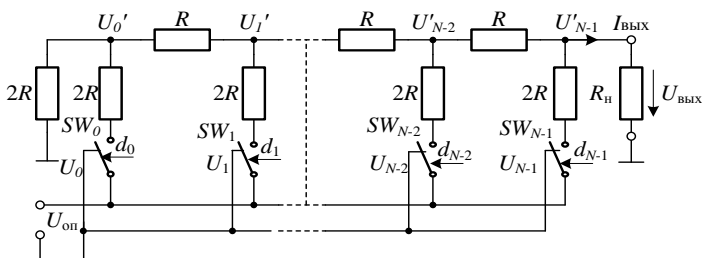


Рис. 9.35. Инверсное включение ЦАП с МОП-ключами

Для расчета выходного напряжения найдем связь между напряжением  $U_i$  на ключе  $SW_i$  и узловым напряжением  $U_i'$ . Воспользуемся принципом суперпозиции. Будем считать равными нулю все напряжения на ключах, кроме напряжения  $U_i$ . Если  $R_n=2R$  к каждому узлу подключены справа и слева нагрузки одинакового сопротивления величиной  $2R$ , тогда

$$U_i' = (U_i/2R)/(1/2R + 1/2R + 1/2R) = U_i/3. \quad (9.57)$$

Найдем выходное напряжение ЦАП как общее напряжение на крайнем правом узле, вызванное суммарным действием всех напряжений  $U_i$ . С учетом того, что напряжения узлов суммируются с весами, соответствующими коэффициентам распределения резистивной матрицы  $R-2R$ , получим

$$U_{\text{вых}} = (1/3 \cdot 2^{N-1}) \sum_{k=0}^{N-1} U_k 2^k = U_{\text{оп}} D/3 \cdot 2^{N-1}. \quad (9.58)$$

Для определения выходного напряжения на нагрузке  $R_n$  воспользуемся теоремой эквивалентного генератора. Из эквивалентной схемы ЦАП, представленной на рис. 9.36, следует, что

$$U_{\text{вых}} = E_e R_n / (R_e + R_n), \quad (9.59)$$

откуда электродвижущая сила эквивалентного генератора составляет

$$E_e = U_{\text{вых}} (1 + R_e/R_n). \quad (9.60)$$

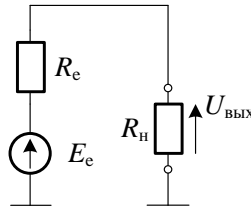


Рис. 9.36. Эквивалентная схема ЦАП

Эквивалентное сопротивление генератора  $R_e$  совпадает с входным сопротивлением матрицы  $R-2R$ , т.е.  $R_e = R$ . При  $R_n = 2R$  из формулы (9.60) имеем

$$E_e = U_{\text{оп}} D/2^N. \quad (9.61)$$

Подставив формулу (9.61) в (9.59), для произвольной нагрузки получим

$$U_{\text{вых}} = R_n U_{\text{оп}} D / (R + R_n) 2^N. \quad (9.62)$$

В частности, при  $R_n \gg R$  имеем  $U_{\text{вых}} = U_{\text{оп}} D/2^N$ .

Недостатками схемы ЦАП на рис. 9.35 являются: значительное падение напряжения на ключах, переменная нагрузка ИОН и значительное выходное сопротивление.

*Параллельный ЦАП* можно реализовать и на переключаемых конденсаторах. Основой ЦАП этого типа является матрица конденсаторов, емкости которых относятся как целые степени двойки. Схема простого варианта такого ЦАП приведена на рис. 9.37.

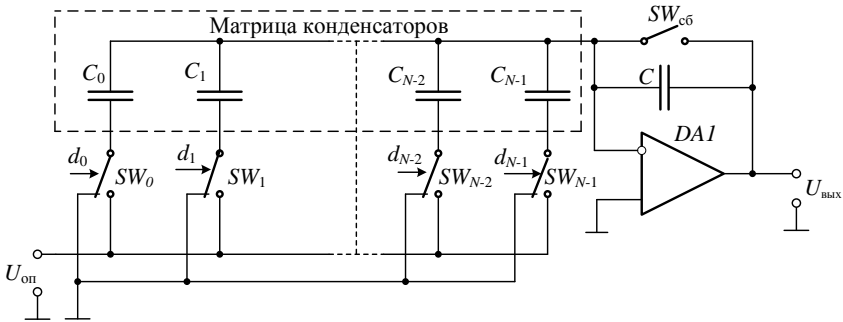


Рис. 9.37. Параллельный ЦАП на коммутирующихся конденсаторах

Емкость  $k$ -го конденсатора матрицы определяется соотношением

$$C_k = 2^k C_0. \quad (9.63)$$

Цикл преобразования состоит из двух фаз. В первой фазе ключи  $SW_0 \dots SW_{N-1}$  находятся в левой позиции. Ключ сброса  $SW_{сб}$  замкнут. Все конденсаторы разряжены. Во второй фазе ключ  $SW_{сб}$  размыкается. Если  $k$ -й бит входного  $N$ -разрядного слова  $d_k = 1$ , то соответствующий ключ  $SW_k$  переключается в правую позицию, подключая нижнюю обкладку конденсатора к ИОН, или остается в левой позиции, если  $d_k = 0$ . Суммарный заряд конденсаторов матрицы, с учетом формулы (9.63), составляет

$$q = U_{оп} \sum_{k=0}^{N-1} C_k d_k = U_{оп} C_0 \sum_{k=0}^{N-1} 2^k d_k = U_{оп} C_0 D. \quad (9.64)$$

Равный заряд получает и конденсатор  $C$  в цепи обратной связи ОУ DAI. Выходное напряжение равно

$$U_{вых} = -q/C. \quad (9.65)$$

Подставив формулу (9.64) в (9.65), получим

$$U_{вых} = -U_{оп} C_0 D/C. \quad (9.66)$$

Для сохранения результата преобразования (постоянного напряжения) в течение длительного времени к выходу ЦАП подключают УВХ.

Следующий тип ЦАП – это преобразователи с суммированием напряжений. Схема 8-разрядного ЦАП такого типа приведена на рис. 9.38.

Основу преобразователя составляет цепь из 256 соединенных последовательно резисторов равного сопротивления. Выход преобразователя  $W$  через ключи  $SW_0 \dots SW_{255}$  может подключаться к любой точке этой цепи в зависимости от входного кода  $D$ . Входной двоичный код хранится в регистре (Р) и преобразуется дешифратором (Д) в унитарный позиционный код, пригодный для непосредственного управления ключами. Если приложить напряжение  $U_{AB}$  между выводами  $A$  и  $B$ , то напряжение между выводами  $W$  и  $B$  составит

$U_{WB} = U_{AB}D$ . Преимуществом данной схемы является незначительная дифференциальная нелинейность и гарантированная монотонность характеристики ЦАП. Ее можно использовать как управляемый цифровым кодом резистор.

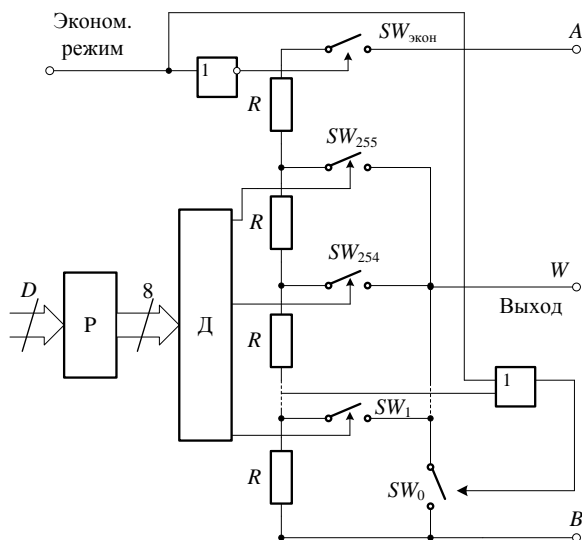


Рис. 9.38. Схема ЦАП с суммированием напряжений

**Примеры применения ЦАП.** Кроме обычного преобразования последовательности двоичных кодов в аналоговую величину ЦАП широко используются в ЦОС для выполнения широкого круга различных операций: синтеза сигналов заданной формы, модуляции и демодуляции сигналов, функционального преобразования сигналов, программного управления параметрами сигналов, выполнения арифметических операций и т.п.

*Регулирование уровня сигналов.* Регуляторы уровня сигналов (аттенюаторы) с цифровым управлением являются более надежными и долговечными, чем традиционные, которые реализуются на переменных резисторах. На рис. 9.39 приведены (для сравнения) схемы делителей напряжения на переменном резисторе  $R$  и на ЦАП с перемножением. В этих схемах ОУ выполняют функцию буферного каскада.

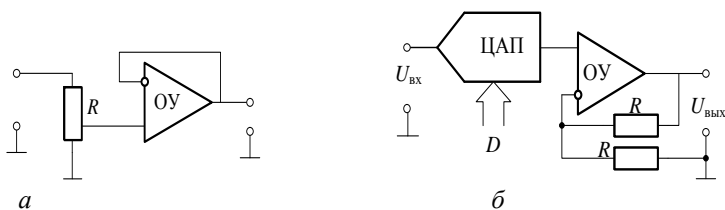


Рис. 9.39. Регуляторы уровня сигналов: *а* – на переменном резисторе; *б* – на ЦАП с перемножением

В схеме на рис. 9.39,б входное напряжение  $U_{\text{вх}}$  подключено к аналоговому входу ЦАП вместо ИОН. Отсутствие внутреннего ИОН или возможность его отключения и подключения внешнего источника напряжения собственно и является признаком *перемножающего* ЦАП. В случае использования  $N$ -разрядного ЦАП выходное напряжение  $U_{\text{вых}}(D) = 2^{-N} U_{\text{вх}} D$ , т.е. регулируется по уровню кодом  $D$ .

*Перемножение функций.* Из формулы (9.40) следует, что выходное напряжение ЦАП пропорционально произведению  $U_{\text{оп}} D$ . Это свойство позволяет использовать ЦАП для умножения аналогового сигнала на сигнал, представленный цифровым кодом. Реализованный структурой рис. 9.40 способ перемножения сигналов предусматривает преобразование сигнала  $U_x$  в код при помощи АЦП и перемножение в ЦАП полученного кода на другой, аналоговый сигнал  $U_y$ . На выходе ЦАП образуется напряжение, пропорциональное произведению  $U_x U_y$  с некоторым постоянным коэффициентом преобразования  $k$ .

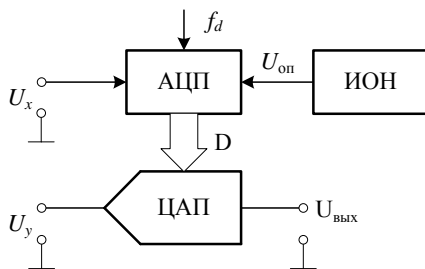


Рис. 9.40. Умножение двух сигналов на ЦАП

*Синтез сигналов.* Цифровой синтез сигналов позволяет значительно увеличить точность и стабильность воспроизведения сигналов, расширить функциональные возможности средств измерения. Структура генератора прямого цифрового синтеза сигналов (синусоидальной формы) приведена на рис. 9.41.

Рассмотрим формирование сигналов синусоидальной формы с регулируемой начальной фазой. Схема имеет три основных блока: генератор фазы сигнала (ГФС), память и ЦАП. ГФС представляет накапливающий  $M$ -разрядный сумматор. ГФС формирует коды текущей фазы сигнала по модулю  $2\pi$  (величине  $2\pi$  соответствует код  $2^M$ ). Код  $D_j$  загружается в один из входных регистров. Ему соответствует шаг изменения фазы  $2\pi D_j / 2^M$ . Выходной код ГФС с частотой дискретизации  $f_d$  увеличивается на величину  $D_j$ . Его текущее значение на  $k$ -м шаге составляет  $(D_j k) \bmod 2^M$ , где  $(a) \bmod b$  – операция выделения остатка от деления числа  $a$  на число  $b, k=0, 1, 2, 3, \dots$

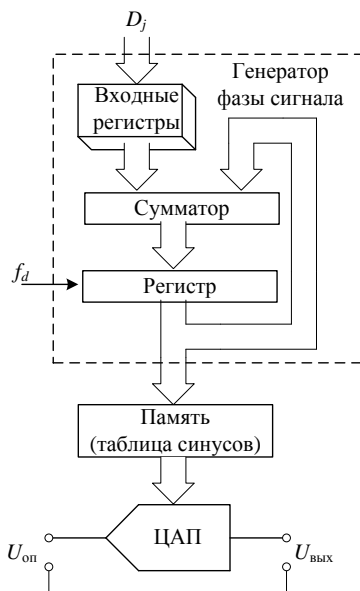


Рис. 9.41. Схема генератора прямого цифрового синтеза сигналов

Заранее рассчитанные  $2^M$  значений функции (в данном случае синусоиды) хранятся в памяти. Коды текущей фазы сигнала поступают на адресные входы памяти, а с ее выхода считываются коды соответствующих текущих значений функции, т.е. коды  $N(k) = \sin(2\pi k D_j / 2^M)$ , изменяющиеся с частотой  $2^{-M} D_j f_d$ .  $N$ -разрядный ЦАП превращает эти коды в аналоговый сигнал вида  $U(k) = (U_{\text{оп}} / 2^N) \sin(2^{1-M} \pi N_j k)$ .

### Основные выводы

В компьютеризированных ИИС используется преобразование аналогового измерительного сигнала в цифровой код и цифрового кода в аналоговый сигнал. Такие преобразования выполняются аналого-цифровыми и цифро-аналоговыми преобразователями (АЦП и ЦАП).

Основными операциями аналого-цифрового преобразования являются дискретизация сигналов во времени, их квантование по уровню и цифровое кодирование. Дискретизация сигнала – это преобразование сигнала, вследствие которого он отображается конечной совокупностью своих значений – отсчетов – в дискретные моменты времени. Интервал времени между соседними отсчетами при равномерной дискретизации сигнала называется периодом дискретизации.

Условия однозначного восстановления аналогового сигнала по его отсчетам дают теоремы дискретизации (теорема Шеннона) и восстановления (теорема Шеннона - Котельникова).

Квантование сигналов – это процесс деления непрерывного диапазона значений преобразуемой величины на конечное число смежных непрерывных интервалов и представления любого значения из данного интервала одним принадлежащим этому же интервалу значением. Замена непрерывного бесконечного множества значений сигнала конечным приводит к потере части информации. Разница между мгновенными значениями сигнала и разрешенными уровнями называется шумом квантования.

Цифровое кодирование – это выполняемая без потери информации операция отображения размера квантованного сигнала цифровым кодом. Код – это совокупность символов и правил их применения для представления, передачи, обработки и хранения информации. Кодирование выполняется с целью повышения эффективности информационных процессов, а также для защиты информации от искажения и повреждения ее целостности при передаче, обработке и хранении.

АЦП чаще используют двоичный натуральный код и код Грея.

Код Грея отличается двумя особенностями, которые способствуют повышению быстродействия и помехозащищенности кодирующих устройств по сравнению с двоичным натуральным кодом: любые две кодовые комбинации, соответствующие соседним уровням квантования, отличаются друг от друга только в одном двоичном разряде; изменение значений элементов в каждом разряде при переходе от одной кодовой комбинации к другой происходит вдвое реже.

Основными параметрами АЦП являются: разрядность, время преобразования (частота преобразования), число каналов для подключения аналоговых сигналов, тип интерфейса, характеристики точности преобразования, а также статические и динамические параметры. К статическим относятся: разрешающая способность, погрешность полной шкалы, погрешность смещения нуля, нелинейность, дифференциальная нелинейность, погрешность дифференциальной линейности, монотонность характеристики преобразования, температурная нестабильность. Динамическими параметрами АЦП являются: максимальная частота дискретизации, время преобразования, время выборки и апертурное время. Апертурным временем называют временной интервал, в течение которого сохраняется неопределенность между значением отсчета и моментом времени, к которому он приписывается. Для уменьшения апертурного времени в состав АЦП включаются устройства выборки и хранения.

Операции квантования и кодирования осуществляются с помощью последовательной, параллельной, последовательно-параллельной процедур.

Параллельные АЦП осуществляют квантования сигнала одновременно с помощью набора компараторов, включенных параллельно источнику входного сигнала, что приводит к ограничению разрядности, однако такие АЦП



имеют самое высокое быстродействие. Последовательные АЦП преобразуют аналоговый входной сигнал последовательно бит за битом, поэтому процесс преобразования требует большего времени, но существенно упрощает схему преобразователя.

Интегрирующие АЦП позволяют повысить помехоустойчивость за счет того, что входной сигнал интегрируется на временном интервале, продолжительность которого выбирается кратной периоду помехи.

Основным принципом, положенным в основу работы сигма-дельта АЦП, является усреднение результатов измерения на большом интервале времени. Он позволяет уменьшить внесенную шумами погрешность преобразования и увеличить разрешающую способность АЦП, обеспечивает лучшую линейность характеристики преобразования.

Интегрирующие АЦП на базе преобразователей напряжение–частота обеспечивают относительно высокую точность преобразования при низкой стоимости.

Последовательно-параллельные АЦП являются компромиссом между высоким быстродействием и простотой схемотехнического решения. Такие АЦП занимают промежуточное положение по разрешающей способности и быстродействию между параллельными и последовательными АЦП и делятся на многоступенчатые, многотактные и конвейерные.

Важной частью АЦП является цифровой интерфейс, обеспечивающий связь АЦП с цифровыми каналами ИИС. Чаще применяют способ связи, при котором АЦП представляет для приемника кода одну ячейку памяти. Для этого АЦП имеет необходимое число адресных входов, дешифратор адреса и подключается непосредственно к адресной шине и шине данных процессора.

АЦП с параллельным интерфейсом выходных данных реализуется с помощью многоразрядного регистра хранения, имеющего три устойчивых состояния выхода. АЦП с последовательным интерфейсом выходных данных выдает их в виде последовательного кода непосредственно с компаратора или регистра последовательного приближения.

Цифро-аналоговое преобразование – это преобразование цифрового кода в аналоговую величину, чаще всего в электрический ток или напряжение.

Характеристикой преобразования ЦАП называется функциональная зависимость значений выходного напряжения (тока) от цифрового кода.

Основными статическими параметрами ЦАП являются: разрешающая способность, погрешность полной шкалы, погрешность смещения нуля, нелинейность, дифференциальная нелинейность, монотонность характеристики преобразования, температурная нестабильность. Динамические свойства ЦАП характеризуются временем установления и скоростью нарастания выходного сигнала.

По принципу работы ЦАП делятся на последовательные и параллельные. Параллельные ЦАП реализуют идею суммирования весовых токов (на-

пряжений или зарядов), значение каждого из которых пропорционально весу цифрового двоичного разряда.

С повышением разрядности ЦАП на весовых резисторах растут требования и к точности токозадающих резисторов, что ограничивает разрядность ЦАП. Этот недостаток устранен в схеме ЦАП на матрицах резисторов типа  $R-2R$ . В таких ЦАП формирование весовых коэффициентов ступеней преобразователя осуществляется путем последовательного деления опорного напряжения на резистивной матрице постоянного импеданса.

ЦАП, допускающие подключение внешних источников опорного напряжения, позволяют умножать аналоговые сигналы на цифровой код и называются перемножающими ЦАП.

---

### **Вопросы для самоконтроля**

---

1. *Какие основные операции выполняются при преобразовании аналоговых сигналов в цифровые?*
2. *В чем заключается смысл теоремы дискретизации?*
3. *Изложите содержание теоремы Шеннона-Котельникова, запишите формулу восстановленного из дискретных отсчетов сигнала.*
4. *В чем состоит сущность процесса квантования сигналов?*
5. *Раскройте механизм возникновения шумов квантования, приведите их основные характеристики.*
6. *Приведите уравнения преобразования ЦАП.*
7. *В чем заключается смысл цифро-аналогового преобразования?*
8. *Приведите примеры применения ЦАП.*
9. *Назовите и раскройте содержание основных статических параметров АЦП.*
10. *Какие параметры применяют для характеристики динамической точности АЦП?*
11. *Раскройте содержание понятия «апертурная неопределенность аналого-цифрового преобразования».*
12. *Назовите основные типы АЦП.*
13. *В чем заключается идея параллельных АЦП?*
14. *Начертите структурные схемы последовательных АЦП и объясните их работу.*
15. *В чем заключается основное преимущество интегрирующих АЦП?*
16. *Каким надо выбирать соотношение времени интегрирования и периода вероятной помехи для наиболее эффективного ее подавления? Обоснуйте свои выводы.*
17. *В чем заключается принцип работы сигма-дельта АЦП?*
18. *Сравните фильтрующие свойства интегрирующих и сигма-дельта АЦП.*

19. Начертите схему интегрирующего АЦП на базе ПНЧ, объясните принцип действия и охарактеризуйте его основные особенности.
20. В чем заключается идея последовательно-параллельных АЦП?
21. Назовите варианты сопряжения АЦП с цифровыми устройствами.
22. Какие основные узлы входят в состав схем сбора данных?
23. Назовите и раскройте содержание основных параметров ЦАП.
24. Дайте сравнительную характеристику различных типов ЦАП.
25. Приведите варианты реализации последовательных ЦАП.
26. В чем заключается основная идея параллельных ЦАП?
27. Изложите принцип работы ЦАП на матрицах типа R-2R..
28. Проанализируйте работу параллельного ЦАП на переключаемых конденсаторах.
29. Какие функции выполняет интерфейс в схемах ЦАП?
30. Приведите схемы ЦАП с параллельным интерфейсом и объясните их работу по временным диаграммам.

---

### **Conclusions**

---

In computerized IMS conversion from analog measurement signal into digital code and from digital code into analog signal is used. Such conversions are performed by analog-to-digital and digital-to-analog converters (ADCs and DACs).

Amongst main operations of analog-to-digital signals conversion are sampling by time, quantization by level and digital coding. Signal sampling is a signal conversion, as a result of which it is displayed as a finite set of its values - counts at discrete points in time. Time interval between adjacent counts, when uniform signal sampling, is called sampling period.

Terms of unambiguous reconstruction of analog signal by its counts are given in sampling theorem (Shannon's theorem) and recovery theorem (Shannon-Kotelnikov theorem).

Quantization of signals is the process of separating of a continuous values range of transforming quantity into a finite number of adjacent non-overlapping intervals and presenting of any value from given interval by single value belonging to the same interval. Substitution of continuous infinite set of values by finite one leads to a partial loss of information. The difference between instantaneous values of signal and permitted levels is called quantization noise.

Digital coding is, when performed without information loss, operation of quantized signal size presenting as a digital code. Code is a set of symbols and their application rules for presenting, transmitting, processing and storage of information. Coding is performed in order to increase information processes effectiveness, and also to protect information from distortion and integrity damage while

transmitting, processing and storing.

ADCs more often use binary natural code and Grey code.

Grey code differs by two features that facilitate the increase in performance and interference immunity of coding devices in comparison with binary natural code: any two code combinations that match adjacent quantization levels differ from each other only in one bit; elements value change in every digit while transferring from one code combination to another occur half as much.

Basic parameters of ADC are: bitness, conversion time (conversion rate), number of channels to connect analog signals, interface type, conversion accuracy characteristics, as well as static and dynamic parameters. Static parameters are: resolution, full scale error, zero offset error, nonlinearity, differential nonlinearity, differential linearity error, monotony of conversion characteristic, temperature instability. ADC dynamic parameters are: maximum sampling rate, conversion time, sampling time and aperture time. Aperture time is time interval during which there is still uncertainty between count value and time moment to which it is attributed. To reduce aperture time ADC has sampling and storage devices.

Quantization and encoding operations are carried out by serial, parallel, serial-parallel procedures.

Parallel ADCs perform signal quantization simultaneously with a set of comparators connected in parallel with signal input source, which leads to limitation of bitness, however, such ADC have the highest performance. Sequential ADCs convert the analog input signal sequentially bit by bit, so conversion process takes more time, but greatly simplifies converter scheme.

Integrating ADCs can improve interference immunity due to the fact that input signal is integrated over a time interval, the duration of which is selected to be aliquot to interference period.

Basic principle put in a basis of sigma-delta ADC is measurement results averaging over large time interval. It allows to reduce conversion error introduced by noise and increase ADC resolution and provides better linearity of conversion characteristic.

Integrating ADCs based on voltage-frequency converters provide relatively high conversion accuracy at low cost.

Serial-parallel ADCs are a compromise between high performance and simplicity of scheme solution. Such ADCs are in intermediate position by resolution and performance between parallel and sequential ADCs and are divided into multistage, multicycle and conveyor.

An important part of ADC is digital interface that provides connectivity between ADC and IMS digital channels. Often is used communication method, wherein ADC gives to code receiver one memory cell. To do this, ADC has required number of address inputs, address decoder and connects directly to address bus and processor data bus.

ADC with parallel output data interface is implemented using multi-bit storage register having three stable output states. ADC with sequential output data

interface outputs them as a sequential code directly from comparator or successive approximation register.

Digital-to-analog conversion is a conversion of digital code into analog value, usually into electric current or voltage.

Functional dependence of output voltage (current) values from digital code is called DAC conversional characteristic.

Basic DAC static parameters are: resolution, full scale error, zero offset error, nonlinearity, differential nonlinearity, transformation characteristics monotony, temperature instability. DAC dynamic properties are characterized by setting time and slew rate of the output signal.

By operational principle DACs are divided into serial and parallel. Parallel DACs realize the idea of summation of weighted currents (voltages or charges), value of which is proportional to the weight of digital binary bit.

With increasing of DAC bitness on weight resistors demands for voltage driving resistor precision are growing that limits DAC bitness. This disadvantage eliminated in DAC scheme on resistors type  $R-2R$  matrixes. In such DACs forming of inverter stages weighting coefficients provided by sequential dividing reference voltage by permanent impedance resistive matrix.

DACs, that admit connection of external reference voltage source, allow to multiply analog signals on digital code and are called multiplying DACs

**Ключевые слова**

аналого-цифровой преобразователь	analog-to-digital converter
цифро-аналоговый преобразователь	digital-to-analog converter
квантование	quantization
дискретизация	sampling
цифровое кодирование	digital coding
апертурное время	aperture time



## ЦИФРОВЫЕ ИНТЕРФЕЙСЫ

10

- 10.1. Вычислительные ресурсы компьютеризированных систем
- 10.2. Классификация цифровых интерфейсов
- 10.3. Параллельный интерфейс
- 10.4. Последовательный интерфейс
- 10.5. Интерфейс USB

## 10.1. Вычислительные ресурсы компьютеризированных систем

Увеличение потоков измерительной информации, усложнение алгоритмов ее получения и обработки, развитие информационно-измерительных технологий обусловили возможность построения ИИС на базе компьютерных систем, что предполагает знание их структуры, принципов функционирования и ввода цифровой информации.

**Факты из истории создания и развития компьютерных систем.** *Компьютерная система* (КС) – это единый комплекс, состоящий из электронных модулей и пакета программ, предназначенный для решения универсальных или специализированных задач. История создания КС, идеология их построения тесно связаны с историей математики и электроники.

Первое счетное устройство – арифметическая машина - было изобретено в 1642 г. французским ученым Блезом Паскалем. Хотя известно, что в неопубликованных рукописях гениального Леонардо да Винчи еще в 1492 г. был приведен эскиз 13-разрядного устройства для нахождения суммы чисел с 10-зубчатыми колесами. Однако именно Блез Паскаль первым довел свою разработку до практической реализации и в 1645 г. разработал восьмиразрядный суммирующий механизм, а в 1675 г. создал машину, выполняющую все четыре арифметических действия. Почти одновременно с Паскалем в 1673 г. сконструировал счетную машину немецкий математик Готфрид Лейбниц.

В 1833 г. английский ученый Чарлз Бэббидж разработал проект «аналитической машины», в которой были предусмотрены арифметические и запоминающие устройства. Его машина стала прообразом будущих компьютеров. Но в ней использовались далеко не совершенные узлы, например для запоминания разрядов десятичного числа применялись зубчатые колеса.

Появление электронных вычислительных машин стало возможным благодаря открытиям электричества, радиосвязи и термоэлектронной эмиссии, которые позволили создать электронную лампу. На базе этого электронного устройства в 1927 г. в Массачусетском технологическом институте был разработан аналоговый компьютер.

Возможность построения цифровой вычислительной машины была доказана английским математиком Аланом Тьюрингом в 1936 г. Он показал, что любой алгоритм реализуется с помощью дискретного автомата, который был назван *машиной Тьюринга*. В 1942 - 1943 гг. в Англии с участием Алана Тьюринга была создана вычислительная машина «Колосс». В ней было около 2000 электронных ламп. Машина предназначалась для расшифровки радиogramм германского вермахта. «Колосс» впервые в мире хранил и обрабатывал данные с помощью только электронных устройств.

Первой электронной вычислительной машиной принято считать машину ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer – электронный числовой интегратор и вычислитель), разработанную в США в 1946 г..

Развитие электронных вычислительных машин (ЭВМ) в СССР связано с

именем выдающегося ученого Сергея Александровича Лебедева. Независимо от Джона фон Неймана Лебедев выдвинул, обосновал и реализовал принципы построения ЭВМ с хранимой в памяти программой. Малая электронная счетная машина Лебедева содержала более 6000 электронных ламп.

Элементная база компьютеров первого поколения – электронные лампы - определяла их большие габариты, значительное энергопотребление, низкую надежность. В них команды выполнялись одна за другой, арифметико-логическое устройство (АЛУ) простаивало в процессе обмена данными с внешними устройствами. Программирование выполнялось в машинных кодах.

Открытие полупроводникового эффекта и появление транзисторов определило разработку компьютеров второго поколения. Они имели меньшие габариты и потребляли меньше электроэнергии. Для хранения оперативной информации применялись магнитные сердечники, а для длительного хранения – магнитная лента.

Третье поколение компьютеров (начало 60-х годов прошлого столетия) создавалось на интегральных схемах. Компьютеры имели модульную структуру, позволяющую создавать ЭВМ разного назначения, отличающиеся быстродействием и объемом периферийного оборудования. Как основное устройство хранения информации используется магнитный диск. Программное обеспечение становится универсальным, появляются первые операционные системы.

Разработка и серийный выпуск больших интегральных схем и микропроцессоров со середины 70-х годов ознаменовали появление компьютеров четвертого поколения. В это время на базе микропроцессора INTEL-8080 был разработан первый ПК ALTAIR, периферийное оборудование пополняется флоппи-дисками. В 1970 году выпущена первая версия операционной системы UNIX и MS-DOS. Разработаны языки программирования C, SmallTalk, Prolog и Pascal. Запускается первый сетевой военный проект ARPANet, который позже трансформировался в INTERNET. ЭВМ четвертого поколения стали машинами массового применения и начинают активно ис-



**Блез Паскаль**  
(Blaise Pascal,  
1623 - 1662),

выдающийся французский физик, математик, механик, литератор и философ. Классик французской литературы, один из основателей математического анализа, теории вероятностей и проективной геометрии, гидростатики. Работы по арифметике, теории чисел, алгебре. Создатель первых образцов счетной техники, автор основного закона гидростатики.



Счетная машина  
Паскаля





**Готфрид Вильгельм Лейбниц**  
(**Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 - 1716**),

выдающийся немецкий философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Основатель и первый президент Берлинской академии наук, иностранный член Французской академии наук. Описал двоичную систему счисления с цифрами 0 и 1, на которой основана современная компьютерная техника



Копия механического калькулятора Лейбница

пользоваться и в измерительной технике.

Пятое поколение компьютеров зародилось в 80-х годах XX столетия. Эти компьютеры не имеют значительных отличий в элементной базе. При их создании применяют новые технологии, за счет которых уменьшаются габариты и стоимость компьютерных модулей. Эти факторы обусловили более активное продвижения компьютерных технологий в сферу измерений. Современные микроконтроллеры – это по сути однокристалльные компьютеры, содержащие модули памяти и АЦП и способные выполнять сложные задачи обработки измерительной информации. По своим вычислительными возможностями и техническим характеристикам они не уступают компьютерам второго и третьего поколений. Микроконтроллеры имеют свой собственный машинный язык, в чем-то схожий с ассемблером, но для их программирования обычно используются компиляторы с языков высокого уровня.

#### **Принципы построения компьютерных систем.**

Структура компьютерной системы была предложена в 1833 г. английским математиком Чарльзом Бэббиджем в проекте "The Difference Engine", где было описано два основных узла КС: "мельница" – устройство для выполнения вычислений и "склад" – устройство, где хранятся исходные данные и результаты вычислений.

В 1944 г. американский математик Джон фон Нейман высказал новые продуктивные идеи по организации структуры и вычислений в КС. Во-первых, он обосновал необходимость использования двоичной системы счисления для представления чисел в ЭВМ, во-вторых, предложил записывать программу вычислений в виде двоичных кодов в ту же память, где хранились данные. Архитектура ЭВМ, в которой реализованы принципы Джона фон Неймана изображена на рис. 10.1.

*Архитектура компьютера* – это совокупность основных устройств, блоков и их взаимодействие по обработке информации. Основными блоками КС по Нейману являются устройство управления и АЛУ (обычно объединены в центральный процессор), память, внешняя память, устройства ввода и вывода. Непрерывные линии со стрелками на рис. 10.1 указывают

направление потоков информации, пунктирные – управляющих сигналов

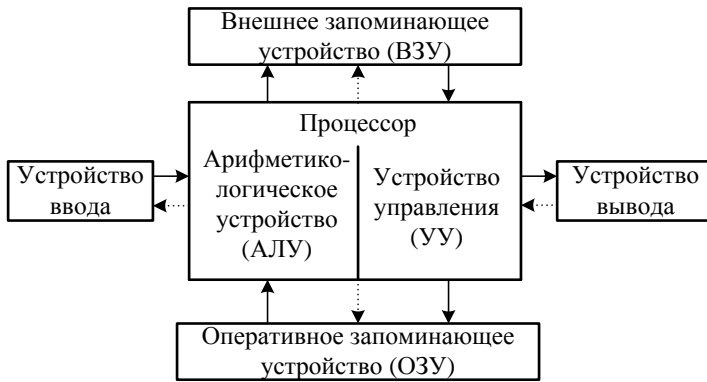


Рис. 10.1. Архитектура ЭВМ на принципах фон Неймана

Архитектура современных КС определяется следующими принципами.

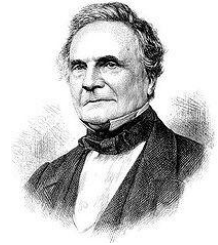
Принцип программного управления, который обеспечивает автоматизацию процесса вычислений на ЭВМ. Согласно этому принципу для решения каждой задачи составляется программа, определяющая последовательность действий компьютера.

Принцип сохраняемой в памяти программы, согласно которому команды программы подаются и обрабатываются как данные, в виде чисел, а сама программа перед выполнением загружается в ОЗУ, что ускоряет процесс ее выполнения.

Принцип произвольного доступа к памяти, согласно которому элементы программ и данных могут записываться в произвольное место ОЗУ, что позволяет обращаться в любой из них по заданному адресу без просмотра предыдущих адресов.

Современный компьютер – это техническое устройство (HardWare), которое после введения в память начальных данных и программы (SoftWare) их обработки в виде цифровых кодов способно автоматически осуществить вычислительный процесс и выдать пригодные для восприятия человеком готовые результаты решения задачи.

Программированию задачи всегда предшествует разработка способа ее решения в виде последовательности действий, т.е. разработка алгоритма решения за-



**Чарльз Бэббидж**  
(Charles Babbage,  
17017 - 1871),

выдающийся английский математик, изобретатель первой аналитической вычислительной машины. Иностраный член-корреспондент Императорской академии наук в Санкт-Петербурге. Труды по теории функций, механизации счета в экономике.



Модель вычислительной части разностной машины Чарльза Бэббиджа



Джон фон Нейман  
(John von Neumann,  
1903 - 1957),

венгерско-американский математик еврейского происхождения, сделавший важный вклад в квантовую физику, функциональный анализ, теорию множеств, информатику, экономику и другие отрасли науки. Наиболее известен как человек, с именем которого связывают архитектуру современных компьютеров (т. н. архитектура фон Неймана), применение теории операторов к квантовой механике (алгебра фон Неймана), а также как участник Манхэттенского проекта и как создатель теории игр и концепции клеточных автоматов.

дачи. Для обозначения части информатики, связанной с разработкой алгоритмов и изучением методов и приемов их построения, применяют термин Brainware (от английского brain – интеллект).

Архитектура современных персональных компьютеров (ПК) основана на магистрально-модульном принципе (рис. 10.2), согласно которому информационная связь между устройствами компьютера осуществляется через *системную шину* (другое название – системная магистраль).



Рис. 10.2. Структура КС, реализующая магистрально-модульный принцип

Обмен данными между отдельными структурными элементами КС осуществляется через системную магистраль, состоящую из нескольких шин, по которым передаются адреса, данные и сигналы управления. *Шиной* называется набор проводов, по которым передается информация. Передача информации в системной магистрали осуществляется в соответствии с параллельно-последовательным принципом, т.е. последовательно во времени в виде блоков, причем каждый блок состоит из битов, поступающих одновременно и параллельно по всем разрядам шин. Скорость обмена информацией через системную магистраль зависит как от размера блоков, так и от скорости их передачи. Первая составляющая определяется разрядностью шин, а вторая – тактовой частотой шины. Важной характеристикой КС является *пропускная способность* системной магистрали, она определяется как произведение разрядности шин на тактовую частоту.

Поскольку к системной шине подключаются устройства с различными скоростями обработки информации, в современных КС применяют принцип двойной независимой системной шины. Он заключается в том, что все структурные элементы КС делятся на "быстрые" и "медленные", а обмен информацией внутри каждой группы выполняется с помощью собственной системной шины. К первой группе относится процессор и ОЗУ, ко второй – остальные устройства. Исключение составляет видеоподсистема, для подключения которой используют собственную шину – AGP (Acceleration Graphic Port).

Шину для соединения процессора и ОЗУ назвали *внутренней системной шиной*, ее рабочая частота связана с частотой работы процессорного ядра: или равна ей, или меньше в определенное число раз. Эта шина не позволяет пользователю подключать к ней любые дополнительные устройства.

Для второй группы устройств используется внешняя системная шина, ее частота является фиксированной и не зависит от рабочей частоты процессора. Именно за счет этой шины КС открыта для модернизации и использования в составе ИИС.

КС характеризуется различными показателями. Это набор команд, которые компьютер способен понимать, быстродействие центрального процессора, количество периферийных устройств ввода/вывода, присоединяемых к компьютеру одновременно и т.д. На практике пользователя больше интересует производительность компьютера. Под *производительностью* компьютера понимают количество операций, которые он выполняет в единицу времени. Различают пиковую и реальную производительность. Под *пиковой* понимают производительность при условии, что все устройства компьютера работают в максимально продуктивном режиме. Пиковая производительность есть величина теоретическая и недостижима при запуске конкретного приложения. *Реальная* производительность, достигаемая для данного приложения, зависит от взаимодействия программной модели, в которой реализовано приложение. На нее влияют аппаратно-программные особенности компьютера (структура процессора, система команд, состав функциональных устройств, реализация ввода/вывода, эффективность работы компиляторов).

Существует два способа оценки пиковой производительности компьютера. Один из них использует число команд, выполняемых компьютером за единицу времени – MIPS (Million Instructions Per Second). Производительность в MIPS, говорит о скорости выполнения компьютером своих инструкций. Поскольку заранее неизвестно, каким количеством инструкций будет реализована конкретная программа, данная характеристика дает лишь общее представление о производительности компьютера. Другой способ оценки производительности заключается в определении числа операций с плавающей запятой, выполняемых компьютером за одну секунду – Flops (Floating point operations per second). Такой способ более приемлем для пользователя, которому известна вычислительная сложность программы. Пользуясь этой характеристикой можно получить нижнюю границу времени ее выполнения.



**Алан Мэтисон  
Тьюринг**  
(Alan Mathison Turing,  
1912 - 1954),

английский математик, логик, криптограф, оказавший существенное влияние на развитие информатики. Кавалер Ордена Британской империи (1945), член Лондонского королевского общества (1951). Предложил абстрактную вычислительную «Машину Тьюринга» (1936), которая считается моделью компьютера общего назначения и используется во множестве теоретических и практических исследований. Общепринято считать Алана Тьюринга отцом информатики и теории искусственного интеллекта.

Пути повышения производительности КС заключаются в применении более совершенных и быстродействующих микроэлектронных модулей, совершенствовании архитектуры КС и оптимизации взаимодействия составляющих КС.

Первый заключается в принципиальном совершенствовании элементной базы компьютеров, создании новых, более быстрых и надежных микропроцессоров (МП), запоминающих устройств, устройств ввода/вывода и т.п. Однако скорость работы элементов невозможно увеличивать беспредельно (существуют технологические ограничения и ограничения, обусловленные физическими законами).

Второй путь связан с увеличением разрядности шин и оптимизацией вычислений, что дает возможность одновременно обрабатывать большие массивы информации. Более перспективным является путь оптимизации вычислений на микропрограммном уровне. Компьютерные программы преобразуются в МП в последовательность микрокоманд. Каждый тип МП характеризуется своим набором микрокоманд, но все они делятся на CISC и RISC архитектуры.

Архитектура CISC (Complex Instruction Set Computer) характеризуется большим набором микрокоманд, упрощает написание программ, однако затрудняет реализацию каждой микрокоманды в виде микроопераций или микроинструкций. Для CISC-процессоров характерно небольшое число регистров общего назначения (РОН), большое количество машинных команд, выполняемых за много тактов, большое количество методов адресации и форматов команд различной разрядности, преобладание двухадресного формата команд, наличие команд обработки типа регистр-память.

Основой архитектуры современных процессоров является архитектура компьютера с сокращенным набором команд – RISC (Reduced Instruction Set Computer). RISC-процессор характеризуется небольшим (50 – 100) набором микрокоманд, фиксированной длиной машинных команд, специализированными командами чтения или записи в память, обилием РОН. В результате требования к наличию доступных объемов памяти стали выше, создание программ усложнилось,

но структура RICS-процессоров стала более гибкой, что существенно повлияло на их производительность. В обеих архитектурах используется параллельное выполнение микроинструкций, которое обеспечивается на аппаратном уровне в МП и известно как *конвейерная обработка*. Принцип конвейерной обработки заключается в том, что в каждый момент времени процессор работает одновременно с различными микроинструкциями нескольких команд. Архитектура процессоров, имеющих в своем составе более одного конвейера, называется *суперскалярной*. Выигрыш тем существеннее, чем больше длина конвейера.

Другим способом параллельного выполнения микроинструкций является векторная обработка, предусматривающая применение одной операции к элементам вектора. Главный принцип вычислений на векторной машине состоит в выполнении определенной элементарной операции или комбинации нескольких элементарных операций повторно к некоторому блоку данных.

Известны компьютеры с многопроцессорной архитектурой, в которой одновременно работает несколько процессоров. Производительность такого компьютера равняется сумме производительности всех процессоров. При рассмотрении многопроцессорных КС используют классификацию, в основу которой положен способ обработки команд и потоков данных. В зависимости от этого различают четыре типа КС.

SISD (single instruction stream/single data stream) – одиночный поток команд и одиночный поток данных. В таких машинах есть только один поток команд, все команды обрабатываются последовательно одна за другой, каждая команда инициирует одну операцию с одним потоком данных.

SIMD (single instruction stream/multiple data stream) – одиночный поток команд и множественный поток данных. В архитектуре подобного рода сохраняется один поток команд, включающий векторные команды, что позволяет выполнять одну арифметическую операцию сразу над многими данными – элементами вектора.

MISD (multiple instruction stream/single data stream) – множественный поток команд и одиночный поток данных. Примером может служить массив процессоров, каждый из которых получает команду от одного соседа



**Сергей Алексеевич Лебедев (1927 - 1974),**

основоположник вычислительной техники в СССР, директор ИТ-МиВТ, академик АН СССР и АН УССР, Герой Социалистического Труда. Лауреат Сталинской премии третьей степени, Ленинской премии и Государственной премии СССР. Под его руководством были созданы 15 типов ЭВМ, начиная с ламповых (БЭСМ-1, БЭСМ-2, М-20) и заканчивая современными суперкомпьютерами на интегральных схмах.

и после ее выполнения передает другому.

MIMD (multiple instruction stream / multiple data stream) – множественный поток команд и множественный поток данных. Этот класс предполагает существование в КС нескольких устройств обработки команд, объединенных в единый комплекс, каждое из которых работает со своим потоком команд и данных. Эти многопроцессорные системы, в свою очередь, можно разделить на типы в зависимости от способа организации оперативной памяти (рис. 10.3). Рассмотрим некоторые виды многопроцессорных систем.

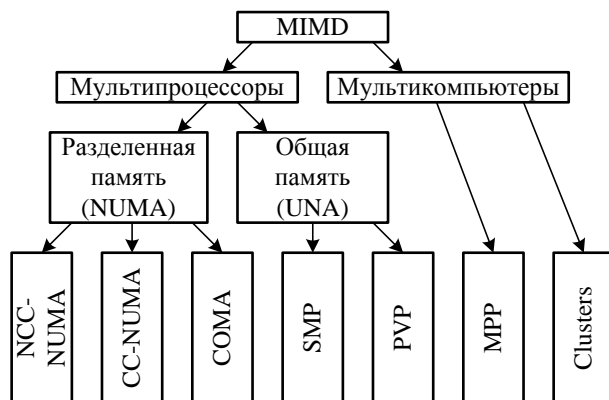


Рис. 10.3. Типы многопроцессорных КС

SMP (symmetric multiprocessing) – симметричная многопроцессорная архитектура. Главной особенностью SMP-систем является наличие общей физической памяти, распределенной между всеми процессорами. Основные преимущества SMP-систем: простота и универсальность программирования, простота эксплуатации и относительно невысокая стоимость. SMP-системы имеют существенный недостаток: системы с общей памятью плохо наращиваются, т.е. при одновременном подключении нескольких процессоров они могут одновременно обращаться к одним и тем же областям общей физической памяти, вследствие чего возникают конфликты.

MPP (massive parallel processing) – массивно-параллельная архитектура. Главная ее особенность состоит в том, что память физически разделена. В этом случае система строится из отдельных модулей, являющихся полнофункциональными компьютерами. В состав каждого модуля входит процессор, локальный банк оперативной памяти (ОП), коммуникационные процессоры (роутеры) или сетевые адаптеры, иногда – жесткие диски и/или другие устройства ввода/вывода. Главным преимуществом таких систем является способность к наращиванию. В отличие от SMP-систем, в машинах с раздельной памятью каждый процессор имеет доступ только к своей локальной памяти. MPP-системам свойственны недостатки: отсутствие общей памяти заметно снижает скорость межпроцессорного обмена, а каждый процессор может использовать только ограниченный объем локального банка памяти.

Гибридная архитектура NUMA (nonuniform memory access – неоднородный доступ к памяти) совмещает преимущества систем с общей памятью и относительно малую стоимость систем с раздельной памятью. Суть этой архитектуры заключается в особой организации памяти: память физически распределена по различным частям системы, но логически является общей, поэтому пользователь видит единое адресное пространство. Система построена из однородных базовых модулей, которые состоят из небольшого числа процессоров и блока памяти. Модули объединены с помощью высокоскоростного коммутатора.

PVP (Parallel Vector Process) – параллельная архитектура с векторными процессорами, в которых предусмотрены команды однотипной обработки векторов независимых данных, эффективно выполняются на конвейерных функциональных устройствах. Как правило, несколько таких процессоров работают одновременно с общей памятью в многопроцессорных системах.

Перспективное направление разработки принципиально новой архитектуры вычислительных систем связано с созданием компьютеров нового поколения на основе принципов обработки информации, заложенной в искусственных нейронных сетях. Под *нейронной сетью* понимают совокупность элементарных преобразователей информации, называемых «нейронами», которые определенным образом соединены друг с другом каналами обмена информации – «синаптическими связями». Состояния нейронов изменяются в процессе функционирования и составляют кратковременную память нейросети. Каждый нейрон вычисляет взвешенную сумму пришедших к нему по синапсам сигналов и осуществляет над ней нелинейное преобразование.

**Управление памятью компьютерных систем.** Объем памяти компьютера и ее быстродействие является важнейшей характеристикой КС. Устройства, предназначенные для хранения информации в компьютере, неоднородны и нуждаются в систематизации.

Запоминающие устройства (ЗУ) классифицируют по ряду параметров и признаков. По типу обращения ЗУ делятся на устройства, допускающие как чтение, так и запись информации – RAM (random access memory), и постоянные запоминающие устройства (ПЗУ), предназначенные только для чтения записанных в них данных – ROM (read only memory). ЗУ первого типа используются в работе процессора для хранения выполняемых программ, исходных данных, промежуточных и окончательных результатов. В ПЗУ, как правило, хранятся системные программы, необходимые для запуска компьютера, в частности – BIOS (Basic Input/Output System, базовая система ввода/вывода). В некоторых специализированных компьютерах, предназначенных для работы по одному неизменному алгоритму, все программное обеспечение хранится в ПЗУ.

Основные характеристики ЗУ – емкость и быстродействие. Идеальное ЗУ должно иметь бесконечно большую емкость и бесконечно малое время обращения. На практике эти параметры находятся в противоречии: в рамках



одного типа ЗУ улучшение одного из них ведет к ухудшению другого. Кроме того, использование ЗУ с улучшенными характеристиками ограничено экономической целесообразностью. В настоящее время память компьютера строится по иерархическому принципу (рис. 10.4).

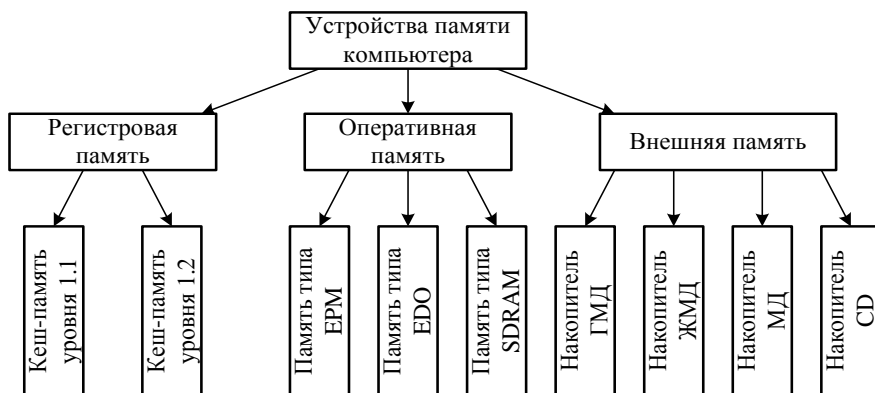


Рис.10.4. Иерархия типов памяти компьютера

На нижнем уровне иерархии находится регистровая память – набор регистров, в которых основным элементом хранения информации является триггер. *Триггер* – это элемент цифровой схемотехники с двумя устойчивыми состояниями. Один триггер хранит один бит информации – "0" или "1". Для хранения одного байта нужно 8 триггеров, одного килобайта – 8192 триггеров и т.д. Поскольку управление записью и чтением каждого бита осуществляется отдельно для каждого триггера, объем регистровой памяти не бывает большим и ограничен несколькими десятками килобайт. Время доступа к такой памяти минимально и сравнимо с периодом тактовой частоты процессора, поэтому регистровая память применяется для хранения промежуточных результатов вычислений и называется *сверхоперативным запоминающим устройством* (СОЗУ) или кэш-памятью. В современных компьютерах кэш-память имеет два уровня: первый уровень (L1) размещается непосредственно в микрочипе процессора (внутренняя кэш), а второй (L2) – на материнской плате (внешняя кэш). Поскольку кэш-память небольшая по объему, она играет роль буфера между ОП и процессором. В ней хранятся копии тех данных, к которым процессор обращается чаще.

ОП выполняет основную роль по хранению данных в компьютере. В качестве элементов хранения информации используются микроконденсаторы, способные некоторое время сохранять электрический заряд. Со временем за счет токов утечки конденсаторы разряжаются, и без дополнительной подзарядки информация может быть утеряна. Поэтому необходима периодическая подзарядка конденсаторов – *регенерация* памяти. Эта память может работать только в динамическом режиме, т.е. при непрерывной подзарядке конденсаторов, поэтому она называется *динамической* – DRAM. Динамическая память

довольно проста, намного дешевле регистровой, но проигрывает ей в быстродействии. Именно объем DRAM определяет характеристики КС.

Для ускорения процесса записи/считывания ячейки динамической памяти располагают в виде матрицы – обращение происходит сразу к одной строке матрицы. Такой режим называется режимом *быстрого постраничного обмена* – FPM (fast page mode). Следующей модификацией динамической памяти, направленной на повышение ее производительности при той же производительности запоминающих элементов, является EDO-DRAM (enhanced data out). Эта память содержит регист-защелку, что позволяет выполнять одновременно считывание из ячеек и запись в них новой информации.

Дальнейшее повышение быстродействия памяти возможно за счет синхронизации чтения и записи с тактовой частотой. Такой вид памяти называется SDRAM – synchronous DRAM.

Для любого вида памяти производительность рассчитывается как произведение разрядности шины на частоту, с которой по этой шине считывается/записывается информация в память. Например, при разрядности шины 8 байт на частотах 100 и 133 МГц обеспечивается пиковая производительность 800 и 1064 Мбайт/с соответственно.

Динамическая память чаще всего применяется в виде модулей с разрядностью 1, 2, 4 или 8 байт, стандартизованных следующим образом:

SIPP и SIMM-30 – модули памяти с однобайтной организацией;

SIMM-72-pin – 4-байтные модули;

DIMM-168 – 8-байтные модули.

Современные модули памяти кроме самой информации сохраняют также и контрольные разряды (один или два на каждый байт), за счет чего их объем увеличен на 12,5 или 25 %. Внешняя память организуется, как правило, на магнитных и оптических дисках, магнитных лентах. Последняя вследствие малой производительности и большого объема используется только как устройство резервного копирования данных. Основным видом внешней памяти являются накопители на жестких магнитных дисках – "винчестеры". Объем дисковой памяти достигает десятков гигабайт при времени обращения менее 1 мкс. Оптические CD-диски позволяют хранить большие объемы информации вне компьютера. В последнее время наибольшую популярность получили устройства внешней памяти на основе ПЗС-структур (Flash-память, ПЗС – приборы с зарядовой связью) и внешние накопители на жестких магнитных дисках.

**Состав и роль BIOS в КС.** Подсистема BIOS – одна из важнейших составляющих КС. Это обусловлено рядом причин. Во-первых, без BIOS невозможно выполнить загрузку компьютера, поскольку после выключения питания это единственный вид компьютерной памяти, который не "забывает" хранящуюся в нем информацию. Винчестер или CD-диски тоже могут долго хранить информацию, однако эти устройства не имеют непосредственного подключения к процессору, их контроллеры требуют запуска (инициализа-

ции) каждый раз после включения питания компьютера. Во-вторых, в состав BIOS входит процедура POST (Power-On Self Test), выполняющая первичное тестирование компьютера после включения питания. В-третьих, в состав BIOS входит программа SETUP, предназначенная для "адаптации" процессора, оперативной памяти и других составляющих КС и их настройки для совместной работы. В-четвертых, BIOS играет важную роль в защите КС, поскольку с его помощью могут быть установлены пароли, препятствующие несанкционированному запуску компьютера. Кроме того, BIOS формирует систему векторов прерываний, обслуживающих аппаратные запросы отдельных устройств, а также прерывания, вызванные программным путем.

Программа BIOS имеет модульную структуру, что позволяет легко "наращивать" ее возможности путем добавления новых модулей. В тексте этой программы предусмотрено хранение специального пароля BIOS, который называется *инженерным*. Этот пароль является резервным и обеспечивает доступ в КС в случае, если основной пароль не может быть восстановлен или аннулирован. Инженерный пароль AWARD-BIOS можно найти во фрагменте BIOS, отображенном в памяти КС по адресу F000: EC60h.

**Управление обменом данными с внешними устройствами.** В состав КС входит большое количество различных периферийных устройств. Соединение этих устройств между собой осуществляется с помощью интерфейсов.

*Интерфейс* – это совокупность программных и аппаратных средств, предназначенных для передачи информации между компонентами КС, в том числе электронные схемы, линии, шины и сигналы адресов, данных и управления, алгоритмы их передачи и правила интерпретации устройствами.

Интерфейсы характеризуются следующими параметрами: пропускная способность – количество информации, которое может быть передано через интерфейс в единицу времени; максимальная частота передачи информации через интерфейс; максимальное расстояние между связываемыми устройствами; общее число проводов (линий) в интерфейсе; информационная ширина интерфейса – число битов или байт данных, передаваемых одновременно через интерфейс.

Интерфейс устройств ввода/вывода в КС должен удовлетворять следующим требованиям: модульность и возможность подключения к КС устройств различного типа, возможность выполнения периферийными устройствами процедур ввода/вывода без загрузки центрального процессора КС, универсальность программирования пользователем операций ввода/вывода независимо от особенностей периферийного устройства, а также возможность передачи в КС служебных сигналов от периферийных устройств для реализации аппаратных прерываний.

Основным путем реализации этих требований является магистрально-модульный способ организации КС, когда все устройства компьютера представляются в виде модулей, соединенных между собой общей магистралью, как показано на рис.10.5.

Обмен информацией по магистрали удовлетворяет требованиям общего интерфейса, установленного для магистрали данного типа. Каждый модуль (МП, ОЗУ, устройства ввода - УВ) подключается к магистрали с помощью специальных интерфейсных схем –  $I_{МП}$ ,  $I_{ОЗУ}$ ,  $I_{УВ1}$ , ... ,  $I_{УВn}$ . Интерфейсные схемы решают следующие задачи: обеспечение функциональной и электрической совместимости сигналов и протоколов обмена модуля и системной магистрали, преобразование внутреннего формата данных модуля в формат данных системной магистрали и наоборот, а также обеспечение восприятия единых команд обмена информацией и превращения их в последовательность управляющих внутренних сигналов. Интерфейсные схемы могут быть достаточно сложными и по своим возможностям соответствовать универсальным микропроцессорам. Такие схемы называют *контроллерами*.

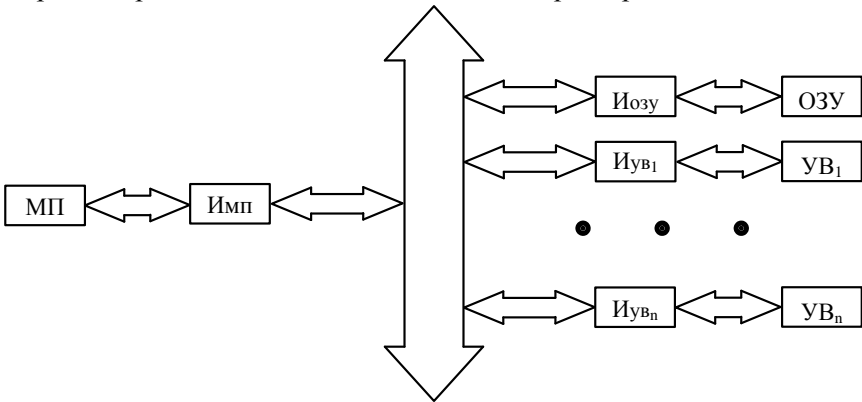


Рис. 10.5. Иллюстрация магистрально-модульного принципа построения КС

Недостатком магистрально-модульного способа организации КС является невозможность одновременного взаимодействия более двух модулей, что ограничивает производительность компьютера. Этот способ в основном используется в КС, к характеристикам которых не выдвигаются высокие требования по быстродействию.

Для организации обмена информацией между ОЗУ и периферийными устройствами в КС используются два основных способа: программно-управляемая передача и прямой доступ к памяти.

Программно-управляемая передача данных осуществляется при непосредственном участии и под управлением процессора, что существенно снижает его возможности одновременно выполнять вычислительные действия.

Прямой доступ к памяти предусматривает организацию специального канала обмена информацией между памятью и периферийным устройством без участия процессора. В этом случае функцию управления обменом принимает контроллер прямого доступа к памяти (КПДП). Однако даже при использовании КПДП процессор полностью не освобождается от управления операциями ввода/вывода. Это существенно сказывается на эффективности ра-

боты ЭВМ, особенно в тех случаях, когда в КС используется большое количество высокоскоростных внешних устройств. Для решения этой проблемы в состав высокопроизводительных компьютеров иногда включают специализированные процессоры ввода/вывода, способные полностью разгрузить основной процессор от управления операциями обмена с внешними устройствами.

*Дисциплина распределения ресурсов КС. Мультипрограммным режимом работы* (многозадачностью) называется способ организации работы КС, при котором в ее памяти одновременно содержатся программы и данные для выполнения нескольких процессов обработки информации. Как и конвейерная обработка команд, мультипрограммирование позволяет увеличить производительность КС за счет более эффективного использования ее ресурсов.

Способ управления доступом к ресурсам КС называется *дисциплинным распределением ресурсов* (ДРР). Согласно ДРР обслуживаются очереди запросов разных устройств КС на доступ к общим ресурсам. Все ДРР делятся на одноочередные и многоочередные. В первом случае все запросы образуют одну очередь и обслуживаются в соответствии с одной из таких ДРР:

FIFO (First In-First Out – первый пришел – первый обслуженный) – запросы обслуживаются в порядке их поступления;

LIFO (Last In-First Out – последний пришел – первый обслуженный) – формируется стек запросов, которые обслуживаются в порядке, обратном порядку их поступления;

круговой циклический алгоритм – запрос обслуживается в течение фиксированного интервала времени; если по истечении отведенного времени обработка запроса не завершена, запрос снова ставится в очередь и ждет следующего цикла доступа к ресурсу.

Многоочередный ДРР предусматривает наличие ряда параллельных очередей, в каждой из которых реализуется один из видов вышеупомянутых одноочередных ДРР. Запросы заранее сортируются по степени важности по разным очередям. Обработка очереди запросов низкого уровня важности начинается только по завершению обслуживания всех очередей запросов высших степеней важности.

Приоритет в обслуживании одних вычислительных процессов перед другими находит свое воплощение и в системе прерываний. Под *прерыванием* в КС понимается прекращение выполнения какой-либо последовательности команд или всей программы вследствие наступления определенного события, связанного с необходимостью выполнения более приоритетных команд или программ. В этом случае все промежуточные данные первой программы фиксируются в специальном стеке, чтобы иметь возможность продолжить расчеты после завершения обслуживания прерывания. В каждой КС формируется система прерываний с указанием их приоритета. Прерывания делятся на аппаратные и программные: первые инициируются внешними устройствами, а вторые – программами.

Система прерываний КС предназначена для отслеживания возникающих

конфликтных ситуаций и принятия по ним заранее подготовленных программных решений. Каждое прерывание вызывает программу, реализующую реакцию КС на соответствующую ситуацию. Это действие оформляется в виде таблицы векторов прерываний. Поскольку программа обслуживания прерываний также может быть прервана еще более важным событием, то система прерываний в каждой КС характеризуется глубиной прерывания – максимальным числом прерванных программ.

Наиболее типичным примером управления ресурсами КС является *система управления оперативной памятью*, выполняющая следующие задачи: отслеживание состояния свободных и уже распределенных областей ОП; распределение ОП для решения всех задач в мультипрограммном режиме; выделение программе ОП и освобождение ее в случае недостаточного объема для выполнения других программ.

Существуют две стратегии распределения ОП - *статическая и динамическая*. При статическом распределении вся необходимая ОП выделяется программе во время ее выполнения. Память выделяется единым блоком необходимой длины, начало которого определяется базовым адресом. Физический адрес команды или операнда при выполнении программы определяется суммированием базового адреса блока ОП с указанным в команде относительным смещением. При динамическом распределении памяти каждой программе в начальный момент выделяется лишь часть всей необходимой для нее памяти, а остальная выделяется по мере возникновения потребности.

В современных КС все программы делятся на системные и прикладные (программы пользователей). Первые входят в состав операционных систем и образуют операционную среду, в которой выполняются программы пользователей. Программы обоих типов одновременно присутствуют в ОП КС.

## 10.2. Классификация цифровых интерфейсов

Основное назначение интерфейса заключается в обеспечении возможности подключения к КС внешних устройств, для чего интерфейсы должны удовлетворять некоторым стандартам. Ниже рассмотрен ряд наиболее известных интерфейсов, которые находят применение в ИИС и поддерживаются большинством подключаемых к ПК измерительных устройств. Классификация интерфейсов КС приведена на рис.10.6.

По месту интерфейсов в структуре КС они делятся на внутренние и внешние. Первый тип интерфейсов обеспечивает функционирование самой КС, соединение ее отдельных модулей. В первую очередь это относится к интерфейсам внутренней системной шины (ISA, EISA, VLB, PCI), магистральным интерфейсам подключения графических адаптеров AGP, интерфейсам подключения устройств внешней памяти (IDE, EIDE, ATA, SCSI), интерфейсам расширения портативных компьютеров PCMCIA.

Внешние интерфейсы предназначены для подключения дополнительных устройств, расширяющих возможности КС. По способу передачи информа-

ции внешние интерфейсы подразделяются на последовательные, параллельные и специальные. В последовательных интерфейсах биты информации передаются последовательно друг за другом (RS-232, RS-422, RS-485, COM, "токовая петля", MIDI, IrDA, USB). В параллельных интерфейсах несколько бит передаются одновременно по параллельным линиям (LPT, ECC, IEEE 1284), что значительно увеличивает их пропускную способность. К специальным интерфейсам относятся интерфейсы подключения клавиатуры, манипулятора "мышь", аудиоустройств, видеомониторов и т.п.

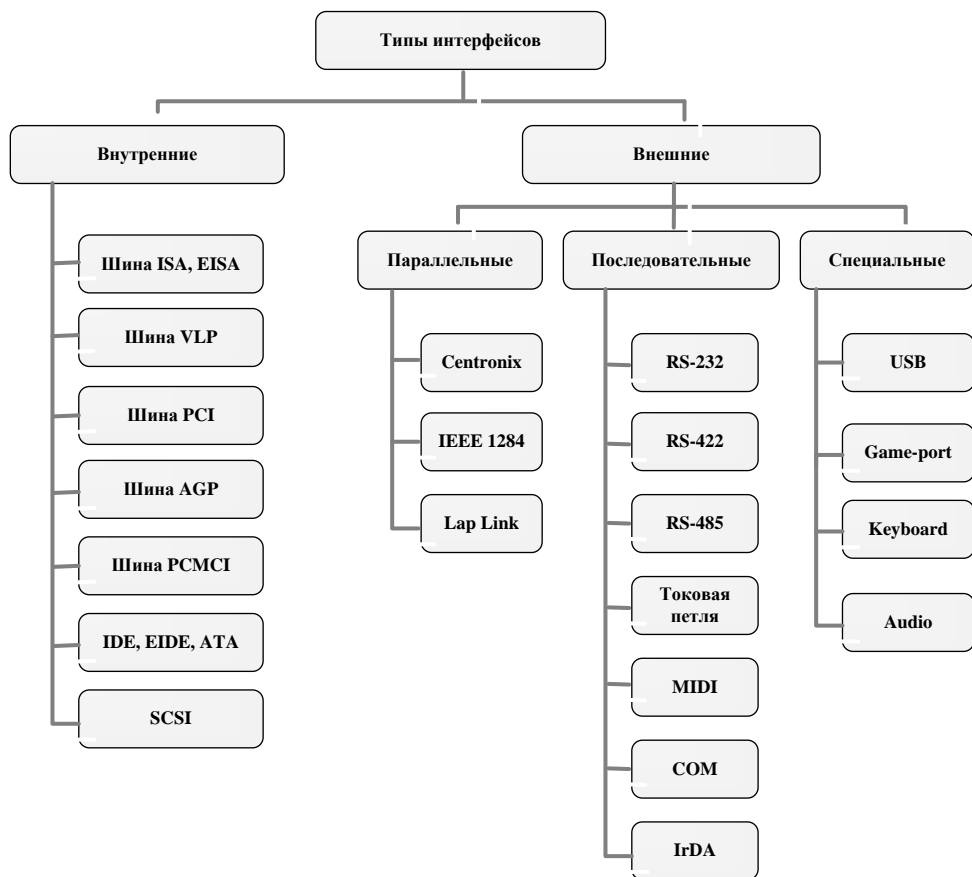


Рис. 10.6. Классификация интерфейсов КС

Для увеличения объемов передаваемой через интерфейсы информации необходимо повышать их пропускную способность. Однако такое повышение за счет увеличения тактовой частоты передачи данных ограничено волновыми свойствами кабелей: в случае параллельного интерфейса начинают сказываться задержки сигналов при их прохождении по линиям кабеля, которые в разных линиях интерфейса могут отличаться вследствие неоднородности проводов и контактов разъемов. Это сдерживает роста пропускной способно-

сти параллельных интерфейсов, поскольку для надежной передачи данных временные диаграммы обмена должны учитывать возможный разброс времени прохождения сигналов. В последовательных интерфейсах существуют свои проблемы повышения пропускной способности, но поскольку они используют меньшее число линий, такое повышение обходится дешевле.

Важным для интерфейса является контроль достоверности передачи данных. Шина ISA в этом плане беззащитна, как и ее «потомок» – интерфейс АТА, в котором контроль достоверности отсутствовал. Впервые контроль по четности введен в шине SCSI, а затем использовался в последовательных интерфейсах и в шине PCI.

Для интерфейсов различают три возможных режима обмена – дуплексный, полудуплексный и симплексный. *Дуплексный режим* позволяет по одному каналу связи одновременно передавать информацию в обоих направлениях. Он может быть асимметричным, если значение пропускной способности в направлениях передачи и приема существенно отличаются, или симметричным. *Полудуплексный режим* позволяет передавать и принимать информацию исключительно по очереди, при этом интерфейс имеет средства переключения направления канала. *Симплексный (односторонний) режим* предусматривает только одно направление передачи информации (по встречному направлению передаются только вспомогательные сигналы).

Другим важным параметром интерфейса является *предельное удаление соединяющихся устройств*. Оно ограничивается как частотными свойствами кабелей, так и помехозащищенностью интерфейсов. Часть помех вызвана соседними линиями интерфейса – это наведенные помехи, для защиты от которых применяют витые пары проводов для каждой линии. Другие помехи вызывают искажения уровней и формы сигналов, что связано с изменением волнового сопротивления линий связи.

Для шин USB и Fire Wire как характеристика интерфейса применяется *топология соединения*. Для интерфейсов RS-232C и Centronics практически всегда применялась двухточечная топология PC-устройство (или PC-PC). Интерфейсные шины USB и Fire Wire реализуют древовидную топологию, в которой внешние устройства могут быть как конечными, так и промежуточными (разветвителями). Такая топология позволяет подключать множество устройств к одному порту USB или Fire Wire.

Важным свойством интерфейса является наличие или отсутствие *гальванической развязки*. «Схемные земли» двух компьютеров, соединяемых интерфейсом с COM- или LPT-портом PC, оказываются также связанными. Если между ними до подключения интерфейса была определенная разность потенциалов, то по общему проводу интерфейса потечет электрический ток, что может привести к смещению логических уровней сигналов. К такому смещению особо чувствительны интерфейсы транзисторно-транзисторной логики (ТТЛ). Например, в интерфейсе RS-232C смещение в пределах 2 В поглощает зону нечувствительности. Кроме того, во время подключения/отключения



интерфейсов без выключения питания устройств возникает разность потенциалов, что приводит к выходу из строя электронных элементов интерфейса. Из рассмотренных интерфейсов гальваническую развязку устройств обеспечивают MIDI, «токовая петля», шина Fire Wire, сетевые интерфейсы Ethernet.

Важным свойством интерфейсов является возможность *«горячего» подключения/отключения* или замены устройств (Hot Swap). Во-первых, это обеспечивает безопасное переключение за счет гальванической развязки. Во-вторых, это позволяет использовать вновь подключенные устройства без перезагрузки КС и продолжить устойчивую работу КС при отключении устройств. Такое свойство поддерживают шины USB и Fire Wire.

Ряд интерфейсов поддерживает автоматическое конфигурирование – PnP (Plug and Play – включай и играй). В интерфейсах PCI, USB, Fire Wire, Bluetooth такая функция заложена изначально и легко реализуется.

При разработке собственных измерительных устройств возникает вопрос выбора подходящего интерфейса подключения. Его следует решать исходя из принципа разумной достаточности, по возможности отдавая предпочтение внешним интерфейсам. Следует помнить, что разработка аппаратной части устройства тесно связана с программной поддержкой устройств – как с модулями ПО, выполняемыми процессором компьютера (software), так и с программами встроенного микроконтроллера (firmware). Промышленностью выпускается множество моделей микроконтроллеров, имеющих популярные интерфейсы (USB, RS-232, PC и др.). Однако в ряде случаев приходится использовать и стандартизированные шины расширения ввода/вывода. Эти шины предоставляют более гибкие возможности взаимодействия процессора с аппаратурой. Однако за универсальность и производительность внутренних шин расширения приходится расплачиваться более сложной реализацией интерфейсных схем и проблемами обеспечения совместимости с другим установленным в компьютер оборудованием.

### 10.3 Параллельный интерфейс

Параллельные интерфейсы характеризуются тем, что в них для передачи каждого бита слова используется отдельная сигнальная линия, поэтому биты передаются одновременно. Эти интерфейсы используют логические уровни ТТЛ, ограничивающие длину кабеля из-за невысокой помехозащищенности ТТЛ-интерфейса. Гальваническая развязка отсутствует. Передача данных может быть как однонаправленной (Centronics), так и двунаправленной (Bitronics).

Изначально параллельный интерфейс предназначался для подключения к компьютеру принтера по интерфейсу Centronics, поэтому он получил название LPT-порт (Line Printer – порядковый принтер). Стандартный LPT-порт ориентирован на вывод данных, хотя с некоторыми ограничениями может работать и на ввод. Иногда параллельный интерфейс используют для связи между двумя компьютерами – реализуется простейшая сеть «сделанная

на коленке» (LapLink).

Существуют различные модификации LPT-порта – двунаправленный, EPP, ECP и другие, расширяющие его функциональные возможности, повышающие производительность и снижающие нагрузку на процессор. Поскольку изначально они были нестандартными техническими решениями отдельных производителей, позже для них был принят стандарт IEEE 1284.

**Интерфейс CENTRONICS.** Понятие Centronics относится как к набору сигналов и протоколов взаимодействия, так и к разъему на принтерах. Сигналы порта выводятся на разъем *DB-5S* (розетка) (рис. 10.7), установленный непосредственно на плате адаптера (или системной плате) или соединенный с ней плоским шлейфом.

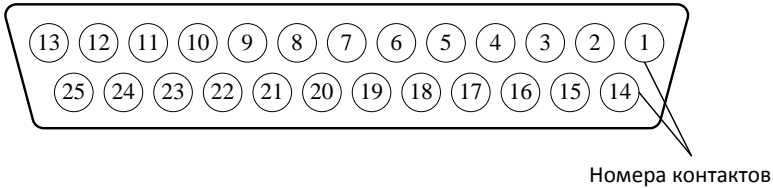


Рис. 10.7. Размещение и нумерация контактов LPT-порта

На рис. 10.8. представлены временные диаграммы обмена информацией с принтером.

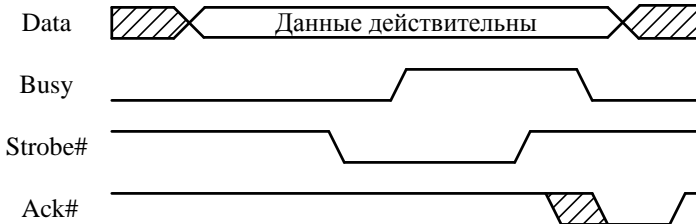


Рис. 10.8. Передача данных по протоколу CENTRONICS

Название и назначение сигналов порта приведены в табл. 10.1 (знаком # отмечены сигналы, имеющие инверсные (низкие) значения). Как видно из таблицы, LPT-порт имеет 8-битную шину данных, 5-битную шину сигналов состояния и 4-битную шину управляющих сигналов. Гальваническая развязка отсутствует, поэтому порт является уязвимым местом компьютера. При неправильном подключении и заземлении устройств может выйти из строя не только сам порт, но и электронные блоки из его ближайшего окружения.

Таблица 10.1

Номер контакта	Название сигнала	Направление сигнала	Назначение сигналов
1	2	3	4
1	Strobe#	Выход	Строб данных. Данные фиксируются по низкому уровню сигнала

1	2	3	4
2-9	Data [0:7]	Выход	Линии данных. Data 0 (контакт 2) – младший бит, Data 7 (контакт 9) – старший бит
10	ACK#	Вход	Acknowledge – импульс подтверждения приема байта (запрос на прием следующего). Используется также для формирования запроса на аппаратное прерывание
11	Busy	Вход	Занято. Получение данных возможно только при низком уровне сигнала
12	PaperEnd	Вход	Высокий уровень сигнализирует об окончании передачи
13	Select	Вход	Сигнализирует о включении принтера
14	Auto LF#	Выход	Автоматический перевод строки. При низком уровне принтер, получив символ CR (Carriage Return – возвращение каретки), автоматически исполняет и функцию LF (Line Feed - перевод строки)
15	Error#	Вход	Низкий уровень сигнала указывает на ошибку в принтере: отсутствие бумаги, состояние OFF-Line или внутренняя ошибка принтера
16	Initialize#	Выход	Установка стандартных настроек принтера, возвращение к началу строки
17	Select In#	Выход	Выбор принтера (низким уровнем). При высоком уровне принтер не воспринимает остальные сигналы интерфейса
18-25	GND	—	Общий провод интерфейса

**Логическая структура параллельного порта.** В КС параллельный порт рассматривается как устройство ввода/вывода и ассоциируется с определенным пространством. ПК может поддерживать до четырех портов LPT1 – LPT4, хотя часто присутствует единственный порт LPT1. При включении или перезагрузке компьютера BIOS проверяет наличие параллельных портов и для каждого порта формирует адресное пространство, определяемое базовым адресом.

Базовый адрес для LPT-портов зависит от текущей конфигурации оборудования компьютера. Существует два способа получения базового адреса: путем анализа конфигурации оборудования компьютера или определения адреса программным путем с помощью BIOS. Если LPT-порты обнаруживаются, их базовые адреса (двухбайтные слова) помещаются в следующие ячейки ОЗУ:

LPT1: 0000:0408 h - 0000:0409h (стандартное значение – 378h)

LPT2: 0000:040Ah - 0000:040Bh (стандартное значение – 278h)

LPT3: 0000:040Ch - 0000:040Dh (стандартное значение – 3BCh)

LPT4: 0000:040Eh - 0000:040Fh (стандартное значение – отсутствует)

Первая ячейка содержит младший, вторая – старший байт базового адреса соответствующего порта. Кроме того, еще одна ячейка памяти – 0000:4011 h - содержит сведения об общем количестве установленных на компьютере

параллельных портов. Эта информация хранится в битах 6 и 7:

- бит 7 = 0, бит 6 = 0      параллельные порты не установлены,
- бит 7 = 0, бит 6 = 1      установлен один параллельный порт,
- бит 7 = 1, бит 6 = 0      установлено два параллельных порта,
- бит 7 = 1, бит 6 = 1      установлено три параллельных порта.

Базовый адрес порта позволяет программным путем обеспечить ввод/вывод информации. Для понимания информационного обмена рассмотрим структуру LPT-порта как логического устройства (рис. 10.9).

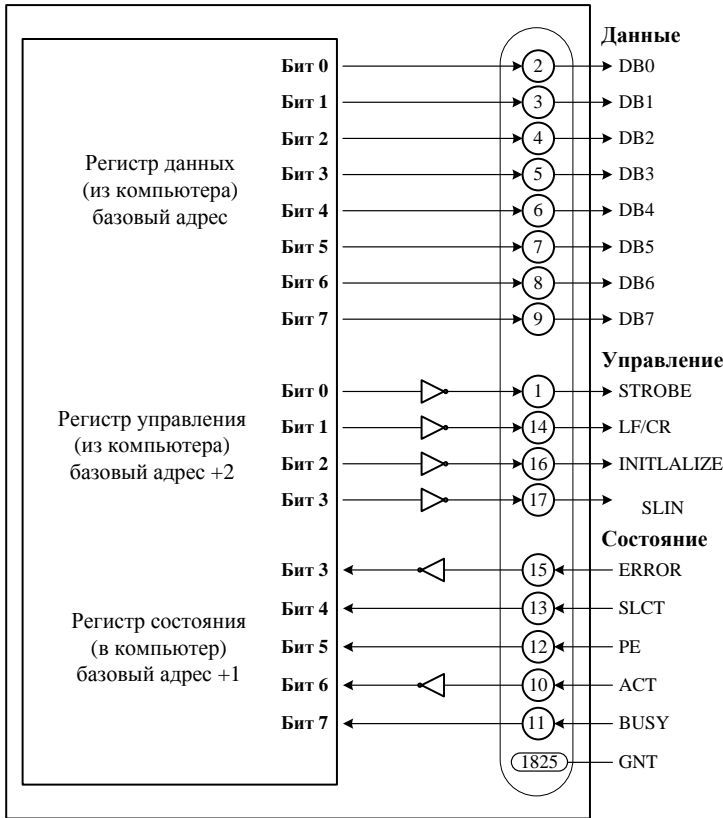


Рис. 10.9. Логическая структура LPT-порта

Три основные группы сигналов – данные (8 бит), сигналы состояния (5 бит), управляющие сигналы (4 бита) - распределены внутри порта между тремя соответствующими регистрами.

Для того чтобы посмотреть значение того или иного бита или изменить его значение, нужно обратиться к определенным разрядам регистров LPT-порта. **Например**, чтобы проверить готовность внешнего устройства (принтера) к работе, нужно прочесть состояние бита 7 (BUSY) регистра состояния и т.д.

**Программное управление параллельным портом.** Программа-драйвер

параллельного порта включает в свой состав модуль поиска параллельных портов и определения их базовых адресов, модули ввода и вывода данных, модуль чтения состояния порта и модуль записи информации в регистр управления портом.

Ниже приведены листинги программ, реализующих эти функции на языке Turbo Pascal .

**Пример.**

```
(* -Модуль определения базового адреса LPT -*)
Procedure Certronic_Address
{ * $000:$0408 содержит базовый адрес для LPT1
  $000:$040A содержит базовый адрес для LPT2
  $000:$040C содержит базовый адрес для LPT3
  $000:$040E содержит базовый адрес для LPT4
  $000:$0411 содержит количество параллельных портов * }
var
  lpt:array[1..4] of integer;
  number_of_lpt, LPT_number, code: integer;
  kbchar:char;
begin
  clrscr;
  LPT_number := 1;    (*Для установки принтера по умолчанию*)
  number_of_lpt := mem($0000:$0411);    (*Считывание количества
                                         установленных параллельных портов*)
  number_of_lpt := (number_of_lpt and (128+64)) shr 6; (*Битовые
                                                         преобразования*)
  lpt[1] := memw($0000:$0408);    (*Процедура считывания из памяти*)
  lpt[2] := memw($0000:$040A);
  lpt[3] := memw($0000:$040C);
  lpt[4] := memw($0000:$040E);
  writeln ("Number of LPT installed", number_of_lpt 2),
  writeln ("Addresses for LPT1 to LPT4", lpt[1] 3, ,lpt[2] 3, ,lpt[3] 3 lpt[4] 3);
  write ("Select LPT to be used (1,2,3,4)");
  delay(1000),
  if number_of_lpt>1 then begin (*Выбор порта, если установлено несколько *)
    repeat
  kbchar =readkey;    (*Считывание значения с вводимой клавиши*)
  val (kbchar, LPT_number, code);    (*Преобразование символа в число *)
    until (LPT_number>=1) and (LPT_number<=4) and (lpt[LPT_number]<>0);
    end;
  P_address := lpt[LPT_number];
  writeln ("Your selected printer interface LPT", LPT_number 1); end.
```

В этом фрагменте программы пользователь вводит с клавиатуры номер нужного ему LPT-порта, после чего программа проверяет содержимое ячеек памяти, в которых хранится базовый адрес выбранного порта и выводит его номер при условии, что этот порт существует.

**Пример.**

(\*-Модуль чтения байта состояния порта - \*)

```

Function Read_status_port (P_address:integer):byte;
var
byte1: byte;
begin
    byte1 := port(P_address+1),      (*Считывание байта с регистра состояния *)
    byte1 := byte1 and 120,          (*Выделение из байта состояния битов с
                                     номерами 3,4,5 и 6*)
    Read_status_port := byte1 shr 3, (*Сдвиг байта состояния на 3 бита вправо *)
end;

```

В данном модуле сначала считывается байт из регистра состояния, адрес которого на 1 больше номера базового адреса порта. Потом из этого байта "вырезаются" четыре бита с номерами 3, 4, 5 и 6. Последнее преобразование заключается в смещении этой информации на три разряда вправо, так что перечисленные биты занимают места с порядковыми номерами 0, 1, 2 и 3.

**Пример.**

(\*Модуль записи данных в регистр данных компьютера - \*)

```

Procedure Write_data_port(P_address: integer, port_data: byte),
begin
port(P_address) := port_data;      (*Введение байта в регистр данных*)
end;

```

**Пример.**

(\*Модуль записи данных в регистр управления-\*)

```

Procedure Write_control_port(P_address: integer; port_data: byte);
begin
if port_data and 1 =1 then port_data:=port_data and (255-1)
else port_data:=port_data or 1;
if port_data and 2 =2 then port_data:=port_data and (255-2)
else port_data:=port_data or 2;
if port_data and 4 =4 then port_data:=port_data and (255-4)
else port_data:=port_data or 4;
if port_data and 8 =8 then port_data:=port_data and (255-8)
else port_data:=port_data or 8;
port(P_address+2):=port_data;      (*Введение байта данных в регистр управления*)
end;

```

В последнем примере показана запись информации в регистр управления с предыдущей инверсией содержания бит с номерами 0, 1, 2 и 3.

**Применение прерывания Int17h BIOS.** Порт LPT имеет поддержку на уровне BIOS – поиск установленных портов во время теста POST и использование механизма обслуживания прерываний. Сервисы Int17h обеспечивают вывод символа, инициализацию интерфейса и принтера, а также опрос состояния принтера. Сервисы BIOS Int 17h обеспечивают инициализацию порта, вывод байт данных и опрос состояния подключенного к LPT-порту принтера. Перед вызовом прерывания в регистре АН должен быть указан номер функции, а в регистре DX – номер LPT-порта. Ниже приведен перечень функций:

АН = 00h – *вывод байта* из регистра AL по протоколу Centronics, дан-

ные размещают в выходной регистр, и, дождавшись готовности принтера (снятия сигнала Busy), формируется строб.

АН = 01h – *инициализация* интерфейса и принтера (установка выходных уровней управляющих сигналов, формирования импульса Init #, запрет аппаратных прерываний и переключение на вывод двунаправленного интерфейса).

АН = 02h – *опрос состояния* принтера (чтение регистра состояния порта). При возвращении регистр АН содержит *байт состояния*, который получают из битов регистра состояния SR [7:3] и программно формируемого флажка тайм-аута. Биты 6 и 3 считанного из регистра состояния байта инвертированы. Назначение бит байта состояния следующее:

бит 7 – не занят (сигнал Busy), нулевое значение означает, что принтер занят (буфер заполнен или состояние Off-Line, или ошибка);

бит 6 – подтверждение (сигнал Ack #), единичное значение означает, что принтер подключен;

бит 5 – окончание бумаги (сигнал PaperEnd);

бит 4 – принтер готов (сигнал Select), нулевое значение означает, что принтер в состоянии Off-Line;

бит 3 – ошибка принтера (сигнал Error \*), единичное значение соответствует ошибке;

биты 2:1 = 00 (не используются);

бит 0 – флажок тайм-аута, устанавливается при неудачной попытке вывода символа, если сигнал Busy не снимается в течение времени, определенного для данного порта в ячейках тайм-аута (в BIOS Data Area), в этом случае согласно протоколу Centronics строб данных не производится.

Перехват прерывания Int 17h является удобным способом внедрения собственных драйверов принтера. Потребность в них может возникать в случае подключения к порту принтера IPNP или при перекодировке символов.

**Стандарт IEEE 1284.** Стандарт на параллельный интерфейс IEEE 1284 описывает порты SPP, EPP и ECP. Стандарт определяет 5 режимов обмена данными, метод согласования режима, физический и электрический интерфейсы. Согласно IEEE 1284 возможны следующие режимы обмена данными.

Режим совместимости (Compatibility Mode) – однонаправленный вывод по протоколу Centronics; режим соответствует SPP-порту.

Полубайтный режим (Nibble Mode) – введение байта в два цикла по 4 бита, используя для приема линии состояния; режим обмена подходит для любых адаптеров, т.к. задействует только возможности стандартного порта.

Байтный режим (Byte Mode) – введение байта целиком, используя для приема линии данных; режим работает на портах, допускающих чтение выходных данных (Bi-Directional или PS/2 Type 1).

Режим EPP (EPP Mode) – двунаправленный обмен данными (EPP означает Enhanced Parallel Port – модернизированный параллельный порт). Управляющие сигналы интерфейса генерируются аппаратно в цикле обраще-

ния к порту. Режим эффективен при работе с устройствами внешней памяти и адаптерами локальных сетей.

Режим ECP (ECP Mode) – двунаправленный обмен данными с возможностью аппаратного сжатия данных методом RLE (Run Length Encoding – кодирование продолжительности последовательности) и использования FIFO-буферов и DMA (ECP - Extended Capability Port – порт с расширенными возможностями). Управляющие сигналы интерфейса генерируются аппаратно.

Стандарт определяет способ, в соответствии с которым программное обеспечение может определить режим, доступный и компьютеру, и периферийным устройствам. Режимы нестандартных портов, реализующих протокол обмена Centronics аппаратно (Fast Centronics, Parallel Port FIFO Mode), могут и не иметь режимов IEEE 1284.

Стандарт IEEE 1284 определяет физические характеристики приемников и передатчиков сигналов, совместимых по уровням с TTL. IEEE 1284 определяет два уровня интерфейсной совместимости.

*Первый уровень (Level I)* определен для устройств медленных, но использующих изменение направления передачи данных.

*Второй уровень (Level II)* определен для устройств, которые работают в расширенных режимах и с высокими скоростями передачи данных и длинными кабелями.

К передатчику выдвигаются следующие требования:

уровни сигналов должны быть в пределах интервала  $-0,5 \dots +5,5$  В;

уровни сигналов при токе нагрузки 14 мА должны быть не ниже +2,4 В для высокого уровня (VOH) и не выше +0,4 В для низкого уровня (VOL) на постоянном токе;

выходной импеданс, измеренный на разъеме, должен составлять  $50 \pm \pm 5$  Ом на уровне VOH - VOL. Согласование импеданса передатчика и кабеля снижает уровень импульсных помех; для обеспечения заданного импеданса используют последовательные резисторы в выходных цепях передатчика;

скорость нарастания (спада) импульса должна находиться в пределах 0,05 - 0,4 В/нс.

Ниже перечислены требования к приемникам:

допустимые пиковые значения сигналов составляют  $-2, 0 \dots +7,0$  В;

пороги срабатывания должны быть не выше 2,0 В для высокого уровня и не ниже 0,8 В для низкого;

приемник должен иметь гистерезис в пределах 0,2 - 1,2 В (гистерезис обеспечивают триггеры Шмитта);

входной ток микросхемы не должен превышать 20 мкА, входные линии соединяются с шиной питания +5 В через резистор 1,2 кОм;

входная емкость не должна превышать 50 пФ.

Рекомендуемые схемы входных, выходных и двунаправленных цепей приведены на рис. 10.10.

Стандарт IEEE 1284 определяет три типа используемых разъемов. Типы



A (DB-25) и B (Centronics-36) характерны для традиционных кабелей подключения принтера, тип C – малогабаритный 36-контактный разъем.

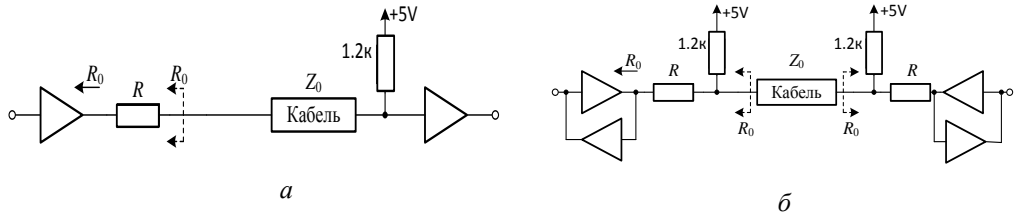


Рис. 10.10. Оконечные цепи линий интерфейса IEEE 1284:  
 а – однонаправленная линия; б – двунаправленная линия

Интерфейсные кабели имеют от 18 до 25 проводов в зависимости от числа проводников цепи GND. Эти проводники могут быть витыми или невитыми. Такие кабели работают ненадежно на скорости передачи 2 Мбайт/с при длине более 2 м. Стандарт IEEE 1284 регламентирует следующие свойства кабелей: все сигнальные линии должны быть перевиты с отдельными обратными (общими) проводами; все пары должны иметь импеданс  $62 \pm 6$  Ом в диапазоне частот 4 - 16 МГц; уровень перекрестных помех между парами не должен превышать 10 %; кабель должен иметь экран (фольгу), покрывающий не менее 85 % внешней поверхности, на концах кабеля экран должен быть окольцован и соединен с контактом разъема.

#### 10.4. Последовательный интерфейс

Последовательные интерфейсы используют одну сигнальную линию, по которой информационные биты передаются последовательно во времени. Отсюда английское название интерфейса и порта – *Serial Interface* и *Serial Port*. Последовательная передача позволяет сократить количество сигнальных линий и увеличить дальность связи. Характерной особенностью является применение сигналов с уровнями, отличными от уровней ТТЛ. В ряде последовательных интерфейсов применяется гальваническая развязка внешних сигналов от схемной земли устройства, что позволяет соединять устройства, находящиеся под разными потенциалами.

Последовательная передача данных может осуществляться в асинхронном или синхронном режимах.

При *асинхронной* передаче каждому байту предшествует старт-бит, сигнализирующий приемнику о начале посылки, за которым следуют биты данных и, возможно, контрольный бит паритета (четности). Завершает посылку стоп-бит, гарантирующий паузу между посылками (рис. 10.11). Старт-бит следующего байта посылается в любой момент после стоп-бита, то есть между передачами возможны интервалы произвольной длительности.

Внутри посылки между битами существует жесткая синхронизация, поддерживаемая за счет того, что приемник и передатчик используют син-

хрогенераторы одной и той же частоты. Старт-бит задает начало отсчета, относительно которого определяется временное положение битов данных. Синхροгенератор приемника использует счетчик-делитель опорной частоты обнуляемый в момент приема старт-бита. Этот счетчик генерирует внутренние стробы, по которым приемник фиксирует следующие получаемые биты.



Рис. 10.11. Формат асинхронной передачи

Стробы располагаются в середине битовых интервалов, что позволяет принимать данные при незначительном рассогласовании синхрочастот приемника и передатчика. В случае передачи посылки с 10 битами (8 бит данных, одного контрольного и одного стоп-бита) предельно допустимая несогласованность синхрочастот приемника и передатчика не должна превышать 5 %, иначе информация не будет правильно распознана.

Формат асинхронной посылки позволяет выявлять следующие возможные ошибки передачи:

если принят перепад, сигнализирующий о начале посылки, а по стробу старт-бита зафиксирован уровень логической единицы, старт-бит считается ложным и приемник переходит в состояние ожидания;

если в отведенный под стоп-бит интервал времени обнаружен уровень логического нуля, фиксируется ошибка стоп-бита;

если применяется контроль четности, то после посылки бит данных передается *контрольный бит*, дополняющий количество бит данных с единицами до четного или нечетного в зависимости от принятого алгоритма контроля; нарушение контроля фиксируется как ошибка.

Контроль формата позволяет обнаруживать обрыв линии. В этом случае принимается логический ноль, который сначала трактуется как старт-бит, и нулевые биты данных, потом срабатывает контроль стоп-бита.

Для асинхронного режима принят ряд *стандартных скоростей обмена*: 50, 75, 110, 150, 300, 600, 1200, 2400, 4800, 9600, 19200, 38400, 57600 и 115200 бит/с. Иногда используют другую единицу измерения скорости – «бод» (baud) – число изменений состояния линии (от 0 к 1 и наоборот) за одну секунду. В бодах принято измерять частоту изменения состояния линии.

Разрядность данных в одной посылке может составлять 5, 6, 7 или 8 бит, а количество стоп-бит – 1, 1,5 или 2. Асинхронный обмен в ПК реализуется с помощью COM-портов с использованием протокола RS-232C.

*Синхронный* режим передачи предполагает постоянную активность кана-

ла связи. Посылка начинается с синхробайта, за которым идет поток информационных битов. Если у передатчика отсутствуют данные для передачи, он заполняет паузу посылкой байтов непрерывной синхронизации. Очевидно, что при передаче больших массивов данных в синхронном режиме соотношение информационной и служебной составляющих посылки значительно выше, чем в асинхронном. Однако в синхронном режиме необходима внешняя синхронизация приемника с передатчиком, поскольку даже малое рассогласование их рабочих частот приводит к искажению принимаемых данных. Внешняя синхронизация возможна либо с помощью отдельной линии передачи синхросигнала, либо с использованием самосинхронизирующего кодирования данных, для которого на стороне приемника из принятого сигнала могут быть выделены импульсы синхронизации. Синхронный режим требует дорогих линий связи или оконечного оборудования.

На *физическом уровне* последовательный интерфейс имеет различные реализации, различающиеся способом передачи электрических сигналов и регламентированные рядом родственных международных стандартов: RS-232C, RS-423A, RS-422A и RS-485. На рис. 10.12 приведены схемы соединения приемников и передатчиков, ограничения на длину линии ( $L$ ) и максимальную скорость передачи данных ( $V$ ).

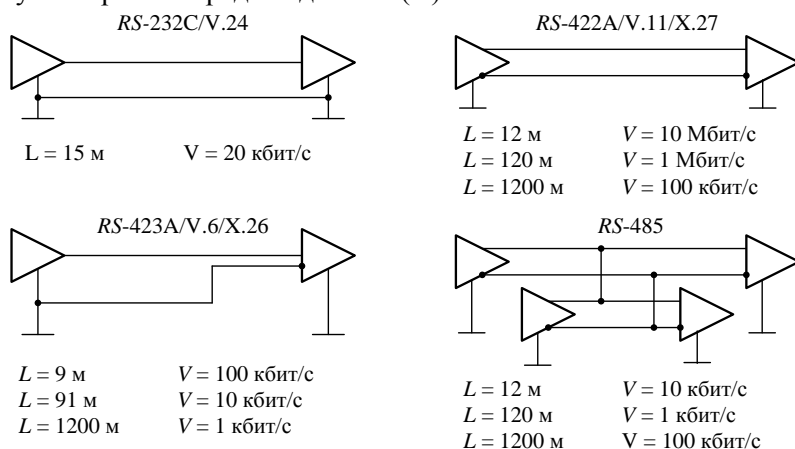


Рис. 10.12. Стандарты последовательных интерфейсов

**Протокол RS-232.** Последовательный интерфейс RS-232 – это промышленный стандарт для последовательной двунаправленной асинхронной передачи данных. Он используется в компьютерах для подключения принтеров, модемов, мыши, а также для соединения двух компьютеров (нуль-модемное соединение). Расстояние, на котором можно организовать связь, не превышает 20 м. Официальное название стандарта – "Interface Between Data Terminal Equipment (DTE) and Data Circuit-Termination Equipment (DCE) Employing Serial Binary Data Interchange". В роли DTE может выступать компьютер, принтер, плоттер и другое периферийное оборудование. В роли DCE обычно

выступает модем. Стандарт описывает управляющие сигналы интерфейса, пересылку данных, электрический интерфейс и типы разъемов. Согласно RS-232 последовательность битов передается напряжением. Передатчик и приемник являются *несимметричными*: сигналы передаются относительно общего провода (в отличие от симметричной передачи протокола RS-485 или RS-422). Логическому нулю на входе приемника соответствует диапазон напряжений  $+3...+12$  В, а логической единице – диапазон  $-12...-3$  В. Диапазон  $-3...+3$  В – зона нечувствительности, обеспечивающая гистерезис приемника (передатчика). Интерфейс не обеспечивает гальванической развязки устройств. Подключение и отключение интерфейсных кабелей устройств с независимым питанием должно производиться при отключенном питании. Одним из самых "неприятных" недостатков стандарта RS-232 является низкая помехозащищенность и ограниченная длина линии передачи.

*Протокол RS-422A*. Стандарт RS-422A (другое название ITU-T V.11) определяет электрические характеристики симметричного цифрового интерфейса. Он предусматривает работу на более высоких скоростях (до 10 Мбит/с) и больших расстояниях (до 1000 м) в интерфейсе DTE-DCE. Для его практической реализации, в отличие от RS-232, нужны два физических провода на каждый сигнал. Реализация симметричных цепей обеспечивает наилучшие выходные характеристики. Данный стандарт является простым описанием электрических характеристик интерфейса и не определяет параметры сигналов, типы разъемов и протоколы управления передачей данных. Стандарт RS-422A был разработан совместно с RS-423A и позволяет размещать линии этих интерфейсов в одном кабеле. Он несовместим с RS-232, а взаимодействие между RS-422A и RS-232 обеспечивается с помощью специального интерфейсного конвертера.

*Протокол RS-423A*. Стандарт RS-423A (другое название V.6) определяет электрические характеристики несимметричного цифрового интерфейса. "Несимметричность" означает, что данный стандарт, подобно RS-232, для каждой линии интерфейса использует только один провод и для всех линий используется единый общий провод. Стандарт RS-423A предусматривает максимальную скорость передачи 100 кбит/с. Этот стандарт не определяет сигналы, конфигурацию выводов или разъемы. Он содержит только описание электрических характеристик интерфейса.

*Протокол RS-485*. Полное название этого стандарта TIA/EIA-485A. "Приложение А" этого стандарта описывает принципы работы устройств на основе RS-485. В дополнение к описанию стандарта был опубликован документ TSB89, который называется "Application Guidelines for TIA/EIA-485A" и разъясняет применения устройств, определяемых стандартом TIA/EIA-485A для физических сетей. Принципиальное отличие передатчиков RS-485 – возможность их перевода в третье состояние. Передатчики RS-422/485 совместимы с приемниками RS-423.

*Протокол RS-499*. Стандарт RS-449, в отличие от RS-422A и RS-423A,

содержит информацию о параметрах сигналов, типах разъемов, расположении контактов и т. п. В этом отношении RS-449 является дополнением к стандартам RS-422A и RS-423A. Стандарту RS-449 соответствует международный стандарт V.36. Стандарт RS-449 определяет 30 сигналов интерфейса, большинство из которых имеют эквиваленты в RS-232. Десять сигналов RS-449 определены как *линии первой категории*. Это такие сигналы как "Передаваемые данные", "Получаемые данные", "Синхронизация терминала". Скорость их передачи существенно зависит от длины кабеля. Для линий этой категории на скоростях до 20 кбит/с могут использоваться стандарты RS-422A или RS-423A, на скоростях от 20 кбит/с до 2 Мбит/с – только RS-422A. Оставшиеся 20 линий классифицируются как *линии второй категории* и используются стандартом RS-423A. К ним относятся такие управляющие линии, как "Качество сигнала", "Выбор скорости передачи" и др. Стандарт RS-449 определяет тип разъема и, в отличие от RS-232, распределение контактов разъема. Разъемы имеют 37 контактов для прямого и 9 контактов для обратного канала.

*Протокол RS-562.* Протокол RS-562 представляет собой низковольтную реализацию RS-232 с максимальным уровнем сигналов 3,5 В.

*Протокол V.24.* Рекомендация V.24 содержит описание линий и набора сигналов обмена между DTE и DCE. В RS-232 используются другие обозначения линий, однако линии интерфейса RS-232 и рекомендации V.24 выполняют одинаковые функции. V.24 определяет большее количество линий, чем RS-232, поскольку стандарт V.24 используется и в других интерфейсах. Рекомендация V.24 не определяет электрические характеристики или другие физические аспекты реализации (тип разъема, расположение контактов, длину кабеля, скорость обмена). Технические вопросы реализации интерфейса подробно изложены в стандарте V.28.

*Протокол V.28.* Рекомендация V.28 определяет только электрические характеристики интерфейса V.24, обеспечивающие работу по несимметричным двуполярным линиям на скоростях до 20 кбит/с. К таким характеристикам относятся уровни используемых сигналов, емкостное сопротивление и т. д. Эта рекомендация не содержит требований к длине кабеля, типу разъемов и расположению их контактов.

*Протокол V.35.* Стандарт V.35 разработан для подключения синхронных модемов. Он обеспечивает только синхронный режим обмена между DTE и DCE на скорости до 168 кбит/с по аналоговым широкополосным каналам с полосой пропускания 60 – 108 кГц. Для синхронизации обмена используются специальные тактирующие линии. Максимальное расстояние между DTE и DCE не превышает 15 м.

*Протокол X.21.* Стандарт X.21 определяет физические характеристики и процедуры управления для интерфейса DTE-DCE в режиме синхронной передачи данных и может применяться как в сетях с коммутацией каналов, так и в сетях на выделенных линиях. Стандарт предусматривает дуплексную ра-

боту при условии связи устройств через цифровые линии. Функциональные процедуры X.21 формализованы в виде диаграмм состояний.

*Рекомендация ITU-T X.21* определяет формат передаваемых символов, которые предоставляются в коде МТК-5 (международный телеграфный код № 5). Данный интерфейс рассчитан на сквозную цифровую передачу. В нем процесс установления соединения и разъединения полностью автоматизирован с помощью набора сигналов о состоянии соединения и о его неисправности. Через интерфейс могут передаваться любые последовательности битов.

Соединения DTE с DCE требует существенно меньшего числа сигнальных линий, чем аналогичное подключение для интерфейса RS-232.

*Рекомендация X.21 bis* обеспечивает возможность подключения к сетям передачи данных общего пользования тех пользователей, которые используют для этого аналоговые выделенные или коммутируемые каналы и имеют синхронные модемы, работающие согласно рекомендациям серии V.

*Краткое сравнение RS-протоколов.* В табл. 10.2 приведены результаты сравнения четырех наиболее распространенных RS-протоколов.

Таблица 10.2

	RS-232CV.24	RS-422AV.11	RS-423AV.6	RS-485
Максимальная длина кабеля, м	15	1200	1200	1200
Число приемников	1	10	10	32
Число передатчиков	1	1	1	32
Максимальная скорость передачи, кбит/с	20	100	10	10

Несимметричные интерфейсы RS-232C и RS-423A имеют самую низкую защищенность от синфазной помехи, от которой не защищает даже дифференциальный вход приемника RS-423A. Лучшие параметры имеет двухточечный интерфейс RS-422A и его магистральный аналог RS-485, работающие на симметричных линиях связи. Они предполагают использование для передачи дифференциальных сигналов отдельной (витой) пары проводов.

В перечисленных стандартах сигнал представляется *потенциалом*. Существуют последовательные интерфейсы, в которых информативным параметром является электрический ток, протекающий по общей цепи, передатчик - приемник – «токовая петля» и MIDI. Для связи на короткие расстояния приняты стандарты беспроводной инфракрасной связи. Наибольшее распространение в ПК получил реализуемый COM-портами стандарт RS-232C. В измерительной технике широко применяются RS-485 и RS-422A.

Контакты разъема DB-25S определены стандартом EIA/TIA-232-E, разъем DB-9S - EIA/TIA-574 (рис. 10.13).

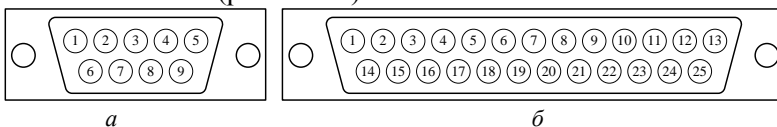


Рис. 10.13. Разъемы DB-9S (а) и DB-25S (б)

Электрический интерфейс RS-232C. Сигналы интерфейса RS-232 приведены в табл. 10.3.

Таблица 10.3

Номер контакта		Название сигнала	Направление сигнала	Назначение сигнала
DB-25S	DB-9			
1	—	PG		<i>Protected Ground</i> – защитное заземление
2	3	TD	Выход	<i>Transmit Data</i> – выход передатчика
3	2	RD	Вход	<i>Receive Data</i> – вход приемника
4	7	RTS	Выход	<i>Request To Send</i> – запрос передачи данных: состояние «включено» сообщает модему о наличии на терминале передаваемых данных. В полудуплексном режиме используется для управления направлением: служит сигналом модему на переключение в режим передачи
5	8	CTS	Вход	<i>Clear To Send</i> – вход разрешения терминалу передавать данные. Состояние «выключено» запрещает передачу данных. Используется для аппаратного управления потоками данных
6	6	DSR	Вход	<i>Data Set Ready</i> – вход сигнала готовности от аппаратуры передачи данных (модему)
7	5	GND		Сигнальное заземление
8	1	DCD	Вход	<i>Data Carrier Detected</i> – вход сигнала определения несущей удаленному модему
20	4	DTR	Выход	<i>Data Terminal Ready</i> – выход сигнала готовности терминала к обмену данными
22	9	RI	Вход	<i>Ring Indicator</i> – вход индикатора вызова (звонка). Этим сигналом модем сигнализирует о приеме вызова
23	—	DSR D	Вх/Вых	

Сигналы управления (рис. 10.14) предшествуют передаче информации и служат для обозначения начала и конца информационного блока.

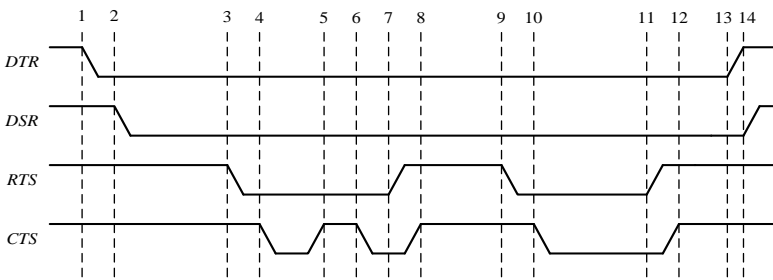


Рис. 10.14. Последовательность сигналов управления интерфейса RS-232





UART 16450, а с компьютерами IBM PC XT – UART 8250.

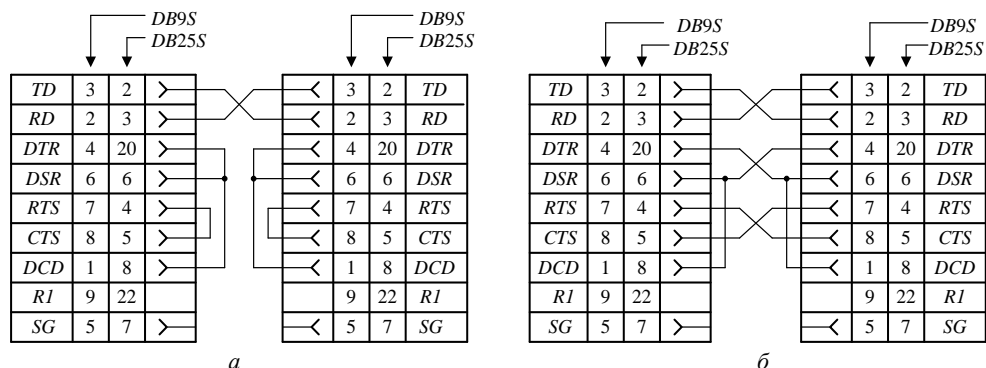


Рис. 10.16. Нуль-модемное соединение компьютеров через интерфейс RS-232: а - минимальное, б – полное

**Логическая структура последовательного порта.** Для понимания принципов программирования последовательного порта рассмотрим его логическую структуру (рис. 10.17). Для обращения к отдельным регистрам последовательного порта используются адресные смещения относительно базовых адресов подобно тому, как это выполнялось в программировании параллельных портов.

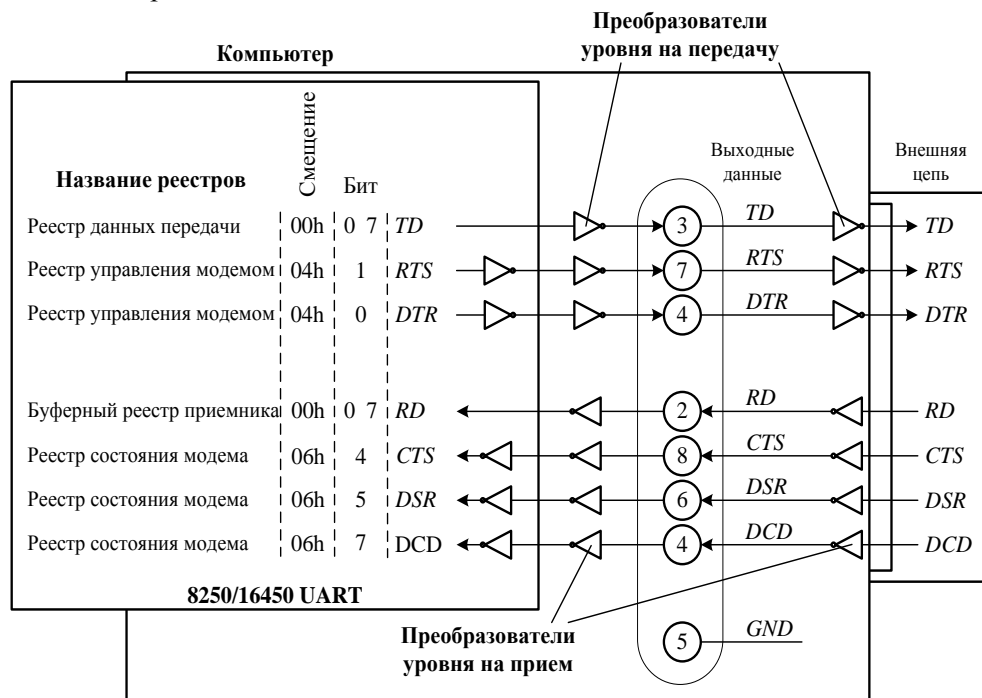


Рис. 10.17. Логическая структура последовательного порта

ПК может иметь до четырех последовательных портов COM1 - COM4. Базовые адреса этих портов обычно имеют значение 3F8h, 2F8h, 3E8h и 2E8h соответственно. При загрузке компьютера наличие последовательных портов и их тестирование выполняет POST BIOS, в результате чего базовые адреса обнаруженных последовательных портов помещаются в ячейки BIOS Data Area 0:0400h, 0402h, 0404h, 0406h. Нулевое значение адреса является признаком отсутствия порта с данным номером. В ячейки 047C, 047D, 047E, 047F заносятся константы, задающие тайм-ауты для портов, а в младшие биты ячейки 0:0411h – информацию о количестве установленных COM-портов. Для портов COM3 и COM4 возможны альтернативные адреса – 3E0h, 338h и 2E0h, 238h соответственно. Для PS/2 стандартными для портов COM3 - COM8 являются адреса 3220h, 3228h, 4220h, 4228h, 5220h и 5228h.

Обнаруженные порты инициализируются на скорость обмена 2400 бит/с, 7 бит данных с контролем четности (even), 1 стоп-битом. Управляющие сигналы интерфейса DTR и RTS переводятся в исходное состояние («выключено» – положительное напряжение). Управление последовательным портом делится на два этапа – предварительное конфигурирование (Setup) аппаратных средств порта и текущее (оперативное) переключение режимов работы прикладным или системным ПО. Конфигурирование COM-порта зависит от его исполнения. Порт на плате расширения конфигурируется джамперами (переключателями). Порт на системной плате конфигурируется через BIOS Setup. Для COM1 и COM3 обычно используются аппаратные прерывания IRQ4 или IRQ11, для COM2 и COM4 – IRQ3 или IRQ10. В принципе номер прерывания можно назначать в произвольных сочетаниях с базовым адресом (номером порта), но некоторые программы и драйверы (например, драйверы последовательной мыши) настроены на стандартные сообщения. Каждому требующему аппаратного прерывания порту назначают отдельную линию, несовпадающую с линиями запроса прерываний других устройств.

**Применение прерывания INT 14h BIOS.** COM-порты поддерживаются сервисом BIOS INT 14h, который обеспечивает следующие функции:

00h – *инициализация* (установка скорости обмена и формата посылок; запрет источников прерываний) – на сигналы DTR и RTS влияния не оказывает;

01h – *вывод символа* – активизируются сигналы DTR и RTS, и после высвобождения регистра THR в него помещается выводимый символ;

02h – *введение символа* – активизируется только сигнал DTR (RTS переходит в пассивное состояние) и ожидается готовность принятых данных;

03h – *опрос состояния* модема и линии (чтение регистров MSR и LSR); эту функцию обычно вызывают перед функциями ввода/вывода чтобы избежать риска ожидания (тайм-аута).

При вызове INT 14h номер функции задается в регистре AH, номер порта (0-3) – в регистре DX (0 - COM1, 1 - COM2 и т.д.), коды инициализации – в регистре AN, где каждый бит имеет свое значение.

**Формат регистра AL при инициализации:**

биты [7:5] – скорость обмена: 000-110; 010-300; 100-1200; 110-4800, 001-150; 011-600; 101-2400; 111-9600 бит/с;

биты [4:3] – контроль паритета: 01 – число единиц непарное, 11 – парное, 00 и 10 – без контроля;

бит 2 – количество стоп-бит: 0 – 1 бит, 1 – 2 бита (на скорости 110 бит/с – 1,5 стоп-бита);

биты [1:0] – длина посылки: 00 – 5 бит, 01 – 6 бит, 10 – 7 бит, 11 – 8 бит.

Задать скорость обмена больше 9600 бод этим методом невозможно, поэтому для UART 16450, способного работать со скоростью до 115200 бод, это достигается путем непосредственного обращения к регистру формата данных UART (смещение 03h).

При возвращении из функций 0, 1 и 3 регистр **AH** содержит *байт состояния линии* (регистр **LSR**), а **AL** – *байт состояния модема (MSR)*.

При возвращении из функции 2 нулевое значение бита 7 регистра **AH** указывает на наличие принятого символа в регистре **AL**; ненулевое значение бита 7 – на ошибку приема, которую можно уточнить функцией 3.

**Формат байта состояния линии (регистр AH):**

бит 7 – ошибка тайм-аута, а после выполнения функции 2 – признак любой ошибки;

бит 6 – регистр сдвига передатчика пуст (пауза передачи);

бит 5 – промежуточный регистр передатчика пуст (готов принять символ для передачи);

бит 4 – обнаружен обрыв линии;

бит 3 – ошибка кадра (отсутствие стоп-бита);

бит 2 – ошибка паритета принятого символа;

бит 1 – переполнение (потеря символа);

бит 0 – регистр данных содержит принятый символ.

**Формат байта состояния модема (регистр AL):**

бит 7 – состояние линии **DCD**;

бит 6 – состояние линии **RI**;

бит 5 – состояние линии **DSR**;

бит 4 – состояние линии **CTS**;

бит 3 – изменение состояния **DCD**;

бит 2 – изменение огибающей **RI**;

бит 1 – изменение состояния **DSR**;

бит 0 – изменение состояния **CTS**.

**Программное управление последовательным портом.** Рассмотрим программную реализацию следующих функций: 1) определение количества установленных COM-портов; 2) получение базовых адресов последовательных портов; 3) инициализация последовательного порта; 4) ввод и вывод данных через последовательный порт. Листинги соответствующих программ даны на языках QBASIC и Turbo Pascal.

**Пример.** Получение базового адреса последовательного порта

```

10 DEF SEG=0
20 PRINT "Number of RS232 ports:", (PEEK(&H411) AND (1+2+4))
30 PRINT 'Address of COM1:', PEEK(&H400)+256*PEEK(&H401)
40 PRINT "Address of COM2:", PEEK(&H402)+256*PEEK(&H403)
50 PRINT "Address of COM3:", PEEK(&H404)+256*PEEK(&H405)
60 PRINT "Address of COM4:". PEEK(&H406)+256*PEEK(&H407)
70 INPUT X

```

Представленная программа выводит общее количество встроенных в ПК COM-портов и их базовые адреса. Строка 20 считывает байт из ячейки памяти 0000:0411h, используя команду PEEK. Биты 0, 1 и 2 содержат информацию о количестве установленных COM-портов. На эти три бита накладывается маска с помощью оператора AND (1 +2 +4) для определения количества портов. Строка 30 считывает два байта из ячеек памяти, содержащих базовый адрес COM1. Строки 40, 50 и 60 делают то же самое для других портов.

Следующая функция обеспечивает считывание информации о количестве установленных портов и присваивание полученного значения переменной *Number\_of\_COM*. Затем она считывает базовые адреса из ячеек памяти, в которых они хранятся, и присваивает адрес выбранного порта переменной *RS232\_address*.

#### Пример.

(\*Модуль определения базовых адресов COM-портов- \*)

```

Procedure COM_address;
(* $0000:$0400 содержит базовый адрес порта COM1,
   $0000:$0402 содержит базовый адрес порта COM2,
   $0000:$0404 содержит базовый адрес порта COM3,
   $0000:$0406 содержит базовый адрес порта COM4,
   $0000:$0411 содержит количество COM-портов в двоичной системе *)
var
  COM:array[1,,4] of integer;
  COM_number, number_of_COM, code: integer;
  Kbchar:char;
begin
  clrscr;
  COM_number:= 1; (*Установка порта по умолчанию*)
  Number_of_COM:= mem($0000:$0411); (*Считывание количества
                                     COM-портов*)
  Number_of_COM:= (Number_of_COM and (8+4+2)) shr 1; (*Битовые
                                                       преобразования*)
  COM[1]:= memw($0000:$0400); (*Процедура считывания из памяти*)
  COM[2]:= memw($0000:$0402);
  COM[3]:= memw($0000:$0404);
  COM[4]:= memw($0000:$0406);
  Writeln ('Number of COM installed:', Number_of_COM:2);
  Writeln ('Addresses for COM1 to COM4:', COM[1]:3', COM[2]:3', COM[3]:3',
  COM[4]:3);
  Writeln ('Select COM to be used (1,2,3,4):');
  delay(1000);

```

```

if number_of_COM>1 then begin      (*Выбор одного порта из нескольких*)
    repeat
        kbchar: = readkey; (*Считывание значения с вводимой клавиши*)
        val (kbchar, COM_number, code); (*Преобразование символа в число*)
        until (COM_number>=1) and (COM_number<=4) and (COM
            [COM_number]<>0);
    end;
    RS232_address: = COM [COM_number];
    Writeln ('Your selected RS232 interface: COM', COM_number:1);
    Write ('RS232 address:', RS232_address:4);
end.

```

**Инициализация COM-порта.** Перед тем как использовать COM-порт, его необходимо настроить на определенный формат передачи данных – установить скорость, количество битов данных, количество стоповых битов и битов проверки. Существует три метода настройки. Первый заключается в использовании команды MODE операционной системы MS DOS. Синтаксис команды представляется следующим образом:

MODE COMm: baud=b, parity=p, data=d, stop=s, retry=r

или

MODE COMm: b,p,d,s,r

**Например,** команда MODE COM1: 96, n, 8, 1 настраивает порт COM1 со следующими параметрами: скорость 9600 бод, без проверки на четность, 8 бит данных, 1 стоповый бит. Указанная команда может быть включена в файл *autoexec.bat*. Недостаток такого метода – невозможность менять формат передачи данных в пользовательских программах.

Второй метод использует прерывание BIOS INT 14h, которое позволяет выполнять настройку порта из программ пользователя. Для этого необходимо в регистр AH записать 0 (задания функции инициализации), а в DX – число от 0 до 3, что указывает на соответствующий порт (COM1 - COM4). В регистр AL загружается байт инициализационных данных, значение битов которого были приведены выше при описании прерывания INT 14h BIOS.

Следующая программа на языке Turbo Pascal инициализирует такой же режим, что и команда DOS.

**Пример.**

MODE COM1: 96, n, 8, 1.

Procedure initialize; (\*COM1: 9600, без проверки на четность, 8 бит данных, 1 стоповый бит\*)

```

var
    register: registers;
begin
    with register do begin
        ah := 0;           {Загрузка в AH номера функции прерывания}
        al:=128+64+32+0+0+0+2+1; {Загрузка в AL кода инициализации
                                11100011B}
        dx:=0;           {Загрузка в DX номера порта COM1}
        intr($14, register); {Вызов прерывания INT 14 BIOS}
    end;
end;

```

```
end;
end;
```

Третий, наиболее гибкий, метод настраивает порт посредством записи данных в регистр формата данных UART (смещение 03h). Следующая программа позволяет настроить собственно регистр, для чего нужно знать базовый адрес настраиваемого порта, скорость, режим проверки, количество стоповых бит и длину блока данных. Процедура переводит заданную скорость в 16-битовый делитель и загружает его в соответствующие регистры.

**Пример.**

(\*-Модуль записи кода инициализации в регистр формата данных-\*)

```
Procedure Write_data_format (RS232_address, Baud, Parity, Data_bit, Stop_bit: integer);
var
  byte1, byte2, output_byte: byte;
  divisor: integer;
begin
  divisor:=115200 div Baud;
  if divisor <= 255 then begin byte1 := divisor; byte2:=0; end;
  if divisor > 255 then begin byte1 := divisor mod 256; byte2:=divisor div 256;
end;
  output_byte:=(data_bit-5)+4*(stop_bit-1) + 8*( parity);
  port(RS232_address+3):=128; {Загрузка кода инициализации, первый
                             бит регистра равен 1}
  port(RS232_address+0) := byte1; {Младший байт делителя равен 1}
  port(RS232_address+1) := byte2; {Старший байт делителя равен 0}
  port(RS232_address+3) := output_byte; {Загрузка делителя и других параметров}
end;
```

**Передача и прием данных через последовательный порт.** Существует несколько способов приема и передачи данных через последовательный порт: с помощью команд операционной системы, прерываний BIOS или непосредственного доступа к порту. Последний способ наиболее удобен при проведении операций ввода/вывода общего назначения.

**Пример.** Для передачи данных можно записать их в буферный регистр передатчика 3F8h, используя оператор языка QBASIC

```
OUT 3F8h, X
```

где X – данные в десятичном формате.

Для получения данных из порта COM1 считываются данные из буферного регистра приемника 3F8h. С этой целью используется оператор Y=INP(3F8h).

**Передача данных по линиям взаимодействия.** Для вывода данных через линии RTS и DTR в регистр управления модемом (смещение 04h) необходимо записывать биты 1 и 0, соответствующие сигналам RTS и DTR. Линии управляются процедурой на языке Turbo Pascal, входной переменной которой является базовый адрес выбранного COM-порта (RS232\_address). Сигналы RTS и DTR перед подачей в порт инвертируются с целью компенсации инверсии преобразователями уровня напряжений TTL/RS232.

**Пример.**

(\*-Запись данных в регистр состояния модема-\*)

```

procedure write_modem_status (RS232_address, RTS, DTR:integer);
begin
RTS := 1-RTS, DTR :=1-DTR;
port(RS232_address+4):=RTS*2+DTR;          (*-Запись в реестр 04h-*)
end;

```

Для считывания данных с линий **DSR**, **CTS** и **DCD** необходимо считать текущее состояние регистра состояния модема. Для этого служит приведенная ниже процедура на языке Turbo Pascal, что требует базового адреса выбранного COM-порта. Сигналы DSR, CTS и DCD также инвертируются по вышеуказанной причине.

## 10.5. Интерфейс USB

**USB**. Universal Serial Bus – универсальная последовательная шина - является промышленным стандартом расширения архитектуры ПК. Интерфейс USB регламентируется стандартом USB 1.1 и USB 2.0. Обмен данными по шине USB версии 1.1 выполняется со скоростью до 12 Мбит/с, а по шине USB версии 2.0 – со скоростью до 480 Мбит/с.

Архитектура USB определяется следующими критериями:

- легкость реализации расширения периферии ПК;
- дешевизна решения, поддерживающего скорость передачи до 12 Мбит/с;
- поддержка в реальном времени передачи аудио- и видеоданных;
- гибкость протокола смешанной передачи изохронных данных и асинхронных сообщений.

- совместимость с выпускаемыми устройствами;

- доступность в ПК всех конфигураций и размеров;

- создание новых классов устройств, расширяющих возможности ПК.

С точки зрения пользователя привлекательны следующие особенности USB: простота кабельной системы и подключений, возможность автоматического подключения и настройки устройств, подключение и отключение устройств без перезагрузки операционной системы.

**Составляющие USB.** Для реализации интерфейса USB в ПК применяется шинная технология. Устройства к ПК могут быть подключены по нескольким шинами USB, каждой из которых управляет отдельный *хост-контроллер* или *хост*, установленный в системном блоке ПК (host – центральный или управляющий контроллер в сетевой среде или среде с распределенной обработкой данных). На шине USB допускается наличие только одного хоста. Устройство может представлять собой *хаб*, *функцию* или их комбинацию и подключается через *порт*.

*Хаб* (hub – концентратор) – устройство, обеспечивающее дополнительные порты на шине USB путем разветвления. Архитектура шины USB допускает каскадное соединение до пяти хабов. Хаб распознает подключение и отключение устройств к портам и может управлять подачей питания на порты и ограничивать потребляемый каждым портом ток. Каждый из портов может быть разрешен или запрещен и настроен на полную или ограниченную ско-

рость обмена. Хаб обеспечивает изоляцию сегментов с низкой скоростью от высокоскоростных. *Корневой хаб* – это хаб, входящий в состав хоста.

*Функция* – это периферийное устройство (ПУ) или отдельный блок периферийных устройств, способные передавать и принимать информацию по шине USB. Каждая функция предоставляет конфигурационную информацию, описывающую возможности ПУ и требования к ресурсам. Перед использованием функция должна быть настроена хостом – ей должна быть выделена полоса частот в канале и выбраны опции конфигурирования.

***Свойства хабов.*** Хаб выполняет коммутацию сигналов и выдачу питающего напряжения, а также отслеживает состояние подключенных к нему устройств, уведомляя хост об изменениях. Концентратор состоит из двух частей – *контроллера* (Hub Controller) и *повторителя* (Hub Repeater).

Контроллер содержит регистры для взаимодействия с хостом. Доступ к регистрам осуществляется по специфическим командам обращения к хабу. Команды позволяют конфигурировать хаб, управлять нисходящими портами и опрашивать их состояние. Повторитель представляет управляемый ключ, соединяющий выходной порт со входным и имеющий средства сброса и прекращения передачи сигналов.

Нисходящие порты хабов могут находиться в следующих состояниях:

*питание выключено* (Powered off) – порт не подключен к источнику питания; выходные буферы переводятся в высокоимпедансное состояние, входные сигналы игнорируются;

*отсоединенный* (Disconnected) – порт не передает сигналы ни в одном направлении, но способен обнаружить подключение устройства;

*запрещено* (Disabled) – порт передает только сигнал сброса (по команде контроллера), сигналы от порта (кроме обнаружения отключения) не воспринимаются;

*разрешено* (Enabled) – порт передает сигналы в обоих направлениях; по команде контроллера или после обнаружения ошибки порт переходит в состояние запрещено, а по обнаружении отключения – в состояние отключен;

*прекращен* (Suspended) – порт передает сигнал перевода в состояние останова ("спящий режим"), если хаб находится в активном состоянии, сигналы через порт не пропускаются ни в одном направлении.

Состояние каждого порта идентифицируется контроллером хаба с помощью отдельных регистров. Есть общий регистр, биты которого отражают факт изменения состояния каждого порта. Это позволяет хосту быстро узнать состояние хаба, а в случае обнаружения изменений специальными транзакциями уточнить состояние.

При подключении внешних устройств через интерфейс USB используются концентраторы (хабы) USB. К хабу USB могут подключаться другие хабы USB или любые другие устройства с интерфейсом USB. Используя хабы USB можно создать сеть устройств подключенных к хабам USB, один из которых должен быть корневым или ведущим концентратором, подключен-



ным к шине USB материнской платы ПК.

Для подключения устройств к хамам USB и связей хабов между собой используются кабели USB. Они имеют четыре провода, два из которых предназначены для питания, а два других – для передачи данных. На концах кабелей USB находятся разъемы одного из двух типов – А и В. Разъем В отличается от А меньшей шириной. Разъемы А используются для подключения устройств к хамам USB, а разъемы В – для связи хабов USB друг с другом и для подключения внешних устройств, от которых кабель USB может отсоединяться без выключения ПК.

Для связи ПК друг с другом через интерфейс USB нужен специальный кабель USB, отличный от кабеля, используемого для подключения к ПК периферийных устройств. Дело в том, что стандартный кабель USB содержит проводники для подачи питания на подключаемые устройства, и при соединении кабелем ПК происходит замыкание двух источников питания, следствием чего может быть выход из строя компьютеров. При планировании архитектуры собственной сети использование интерфейса USB оправдано лишь для подключения отдельных ПК друг к другу, например, ноутбука к настольному ПК, поскольку длина кабеля USB ограничена пятью метрами.

**Режимы передачи данных.** Пропускная способность шины USB, соответствующая спецификации 1.1, составляет 12 Мбит/с (то есть 1,5 Мбайт/с). Спецификация 2.0 определяет шину с пропускной способностью 400 Мбайт/с. Полоса пропускания делится между всеми подключенными к шине устройствами. Шина USB имеет три режима передачи данных: низкоскоростной (LS , Low-speed); полноскоростной (FS , Full-speed) и высокоскоростной (HS, High-speed, только для USB 2.0).

Поскольку обмен данными по шине USB осуществляется только между ПК и устройствами, при подключении последних следует учитывать потребляемую ими полосу пропускания. Устройства с большими объемами приема/передачи данных должны подключаться или к самому компьютеру, или к ближайшему свободному узлу. С другой стороны, при подключении устройств надо учитывать и поддерживаемые ими стандарты USB: устройства USB 2.0 должны быть подключены к портам 2.0, а устройства с интерфейсом 1.1 можно подключать как к портам 2.0, так и к портам 1.1. Устройство USB 2.0 сможет реализовать высокую скорость обмена только в случае, если на пути от него к хост-контроллеру (тоже типа 2.0) будут расположены только хабы 2.0. Если это правило нарушить, связь может быть установлена только в режиме FS. Если такая скорость удовлетворяет устройство и клиентское ПО (например, для принтера и сканера это приведет только к большему времени ожидания), подключенное устройство работать будет, но появится сообщение о неоптимальной конфигурации соединения. Критичные к полосе пропускания шины устройства и ПО, в случае неправильной конфигурации, откажутся работать и категорически потребуют переключений.

Скорость передачи данных USB-канала позволяет использовать USB-

шины для подключения измерительных приборов таких как генераторы сигналов, цифровые осциллографы, логические анализаторы и т. п. В таких устройствах USB используется как для передачи данных в ПК для обработки и отображения, так и для задания параметров приборов и режимов измерения.

**Физический интерфейс.** Стандарт USB определяет электрические и механические спецификации шины.

Информационные сигналы и напряжение питания 5 В передаются по четырехпроводному кабелю. Используется дифференциальный способ передачи сигналов D+ и D- по двум проводам. Уровни логических сигналов передатчиков в статическом режиме должны быть ниже 0,3 В (низкий уровень) или выше 2,8 В (высокий уровень). Приемники выдерживают входное напряжение в пределах 0,5...+3,8 В. Передатчики должны иметь возможность переходить в высокоимпедансное состояние для двусторонней полудуплексной передачи по одной паре проводов.

Передача по двум проводам в USB не ограничивается дифференциальными сигналами. Кроме дифференциального приемника каждое устройство имеет линейные приемники сигналов D+ и D-, а передатчики этих линий управляются индивидуально. Это позволяет различать более двух состояний линии, используемых для организации аппаратного интерфейса. Состояния *Diff0* и *Diff1* определяются по разности потенциалов на линиях D+ и D- более 200 мВ при условии, что на одной из них потенциал выше порога срабатывания. Состояние, при котором на обоих входах D+ и D- присутствует низкий уровень, называется *линейным нулем (SE0 - Single-Ended Zero)*.

Интерфейс определяет следующие состояния:

*Data J State* и *Data K State* – состояния передаваемого бита, определяются через состояния *Diff0* и *Diff1*;

*Idle State* – пауза на шине;

*ResumeState* – сигнал для вывода устройства из «спящего» режима;

*Start of Packet ( SOP )* – начало пакета (переход из *Idle State* в *K*);

*End of Packet ( EOP )* – конец пакета;

*Disconnect* – устройство отключено от порта;

*Connect* – устройство подключено к порту;

*Reset* – сброс устройства в состояние предшествующее его запуска.

Состояния определяются сочетаниями дифференциальных и линейных сигналов. Для полной и низкой скоростей состояний *Diff0* и *Diff1* имеют противоположные назначения. В декодировании состояний *Disconnect*, *Connect* и *Reset* учитывается время нахождения линий (более 2,5 мс) в определенных состояниях.

Шина имеет два режима передачи. Полная скорость передачи сигналов USB составляет 12 Мбит/с, низкая – 1,5 Мбит/с. Для полной скорости используется экранированная витая пара с импедансом 90 Ом и длиной сегмента до 5 м, для низкой – нескрученный неэкранированный кабель до 3 м.

Скорость, используемая подключенным к конкретному порту устройст-

вом, определяется хабом по уровням сигналов на линиях D+ и D-, смещенным резисторами нагрузок R2 приемопередатчиков (рис. 10.18 и 10.19). Кабель также имеет линии Vbus и GND для передачи напряжения питания 5 В к устройствам. Сечение проводников выбирается в соответствии с длиной сегмента для обеспечения гарантированного уровня сигнала и питающего напряжения.

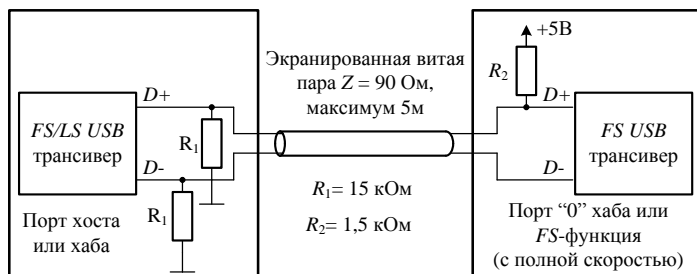


Рис. 10.18. Подключение полноскоростного устройства

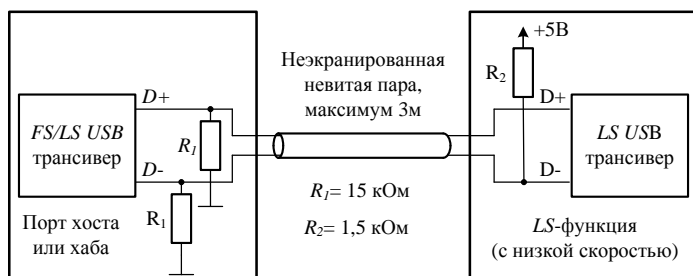


Рис. 10.19. Подключение низкоскоростного устройства

Для низкоскоростных и полноскоростных устройств дифференциальная "1" передается путем «подтягивания» линии D+ к напряжению большему 2,8 В, а линии D- к напряжению меньшему 0,3 В. При этом линии D+ и D- нагружены на стороне хоста (нисходящего потока) резисторами 15 кОм. Скорость передачи, используемая подключенным к конкретному порту устройством, определяется хабом по уровням сигналов D+ и D-, смещенным резисторами нагрузок приемопередатчиков: устройства с низкой скоростью "подтягивают" к высокому уровню линию D-, с полной – линию D+. Подключение HS-устройств определяется на этапе конфигурирования.

Дифференциальный 0 передается путем подтягивания линии D+ к напряжению менее 0,3 В, а линии D- – к напряжению более 2,8 В. Приемник определяет дифференциальную единицу только в том случае, когда напряжение на линии D+ больше на 200 мВ, чем на линии D-, а дифференциальный 0 – когда напряжение на линии D+ меньше на 200 мВ, чем на линии D-.

Стандарт определяет два типа разъемов. Маркировка проводов в кабеле

USB приведена в табл. 10.4.

Таблица 10.4.

Контакт	Цвет провода	Цепь
1	Красный	+5 В
2	Белый	D-
3	Зеленый	D+
4	Черный	GND
Корпус	Медная оплетка	Экран

Разъемы А применяются для подключения хабов (Upstream Connector). Вилки устанавливаются на кабелях, которые не отсоединяются от устройств (например, клавиатура, мышь и т. п.). Гнезда устанавливаются на нисходящих портах (Downstream Port) хабов.

Разъемы В (Downstream Connector) устанавливаются на устройствах, от которых соединительный кабель может отсоединяться (принтеры). Ответная часть (вилка) устанавливается на кабель, противоположный конец которого имеет вилку разъема А. Разъемы А и В отличаются механически (рис. 10.20), что исключает недопустимые петлевые соединения портов хабов.

Четырехконтактные разъемы имеют ключи, исключающие неправильное присоединение. Конструкция разъемов обеспечивает более позднее соединение и раннее отсоединение сигнальных цепей по сравнению с цепями питания. Для распознавания разъема USB на корпусе устройства ставится стандартное символическое обозначение (рис. 10.20, в).

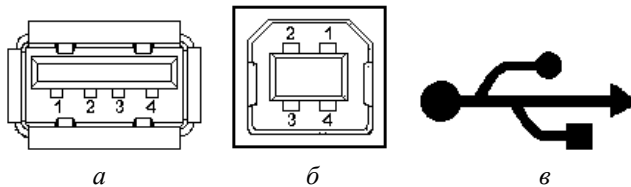


Рис. 10.20. Гнезда USB: а – разъемы А, б – разъемы В, в – символическое обозначение гнезда

*Кодирование данных.* Данные по шине USB передаются битовыми последовательностями. Все данные кодируются с помощью метода, называемого *NRZI with bit stuffing* (NRZI – Non Return to Zero Invert, метод без возврата к нулю с инвертированием) (рис. 10.21). В этой кодировке логическая 1 представлена неизменным в течение битового интервала уровнем, а логический 0 представляет собой изменение уровня на противоположный в течение битового интервала.

Каждому пакету предшествует поле синхронизации *SYNC*, позволяющее приемнику настроиться на частоту передатчика.

Вместо кодирования логических 0 и 1 уровнями напряжения, USB опре-

деляет логический 0 как изменение напряжения, а логическую 1 как не изменение напряжения. Если текущий бит имеет значение 0, то текущий потенциал представляет собой инверсию потенциала предыдущего бита независимо от его значения. Если же текущий бит имеет значение 1, то текущий потенциал повторяет предыдущий.

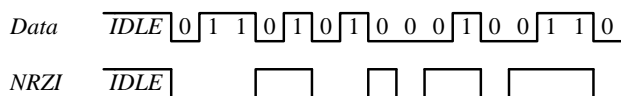


Рис. 10.21. Кодирование данных методом NRZI

Очевидно, если данные содержат нули, то приемнику и передатчику достаточно легко поддерживать синхронизацию – уровень сигнала будет постоянно меняться. Но если данные содержат длинную последовательность единиц, уровень сигнала меняться не будет и возможна рассинхронизация. Для надежной передачи данных исключают из кодов слишком длинные последовательности единиц. Это действие называется *стаффингом* (Bit stuffing): после каждых шести единиц автоматически добавляется 0 (рис. 10.22).

Стаффинг может увеличить число передаваемых бит до 17 %, но на практике эта величина значительно меньше. Кодирование данных несколько затрудняет налаживание схем, но, с другой стороны, значительно повышает надежность передачи данных.

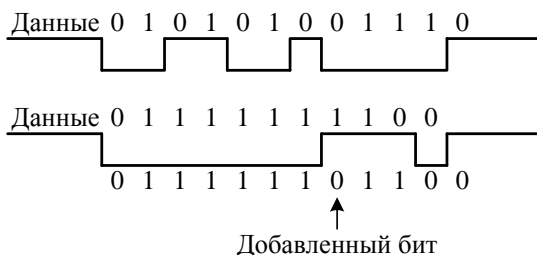


Рис. 10.22. Кодирование методом NRZI

**Принципы передачи данных.** Механизм передачи данных является асинхронным и блочным. Блок передаваемых данных называется *USB-фреймом* или *USB-кадром* и передается за фиксированный временной интервал. Оперирование командами и блоками данных реализуется с помощью логической абстракции, называемой *каналом*. Внешнее устройство также делится на логические абстракции, называемые *конечными точками*. Таким образом, канал является логической связкой между хост-контроллером и конечной точкой внешнего устройства.

*Каналом* (Pipe) в USB называется модель передачи данных между хост-контроллером и конечной точкой устройства (рис. 10.23).

Существует два типа каналов: потоки (Stream) и сообщения (Message).

Поток доставляет данные от одного конца канала к другому. Поток всегда однонаправленный. Один и тот же номер конечной точки может использоваться для двух текущих каналов – ввода и вывода. Поток может реализовывать следующие типы обмена: сплошной, изохронный и прерывания. Доставка всегда идет в порядке «первым вошел – первым вышел» (FIFO).

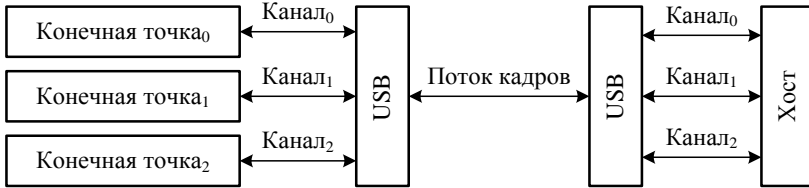


Рис. 10.23. Каналы USB

Сообщения имеют формат, определенный спецификацией LJSB. Хост посылает запрос к конечной точке, после чего передается (принимается) пакет сообщения, за которым следует пакет с информацией о состоянии конечной точки. Следующее сообщение не может быть нормально направлено до окончания обработки предыдущего, но при отработке ошибок возможен сброс необслуженных сообщений. Двусторонний обмен сообщениями адресуется к одной и той же конечной точке. Для доставки сообщений используется только обмен типа «управление».

Коммуникационные каналы USB подразделяются на два типа:

*Потоковый канал* (streaming pipe) доставляет данные от одного конца канала к другому, он всегда *однонаправленный*. Передача данных в различных потоковых каналах друг с другом не синхронизирована. Это означает, что запросы клиентских драйверов для различных каналов, поставленные в определенном порядке относительно друг друга, могут выполняться в другом порядке. Если во время выполнения запроса происходит серьезная ошибка (об этом устройство сообщает ответом STALL), поток останавливается.

*Канал сообщений* (message pipe) является *двунаправленным*. Передача сообщений во встречных направлениях синхронизирована друг с другом и строго упорядочена. На каждое сообщение противоположная сторона обязана ответить подтверждением его приема и обработки. Форматы сообщений определяются спецификацией USB: есть набор стандартных сообщений (запросов и ответов) и зарезервированных идентификаторов сообщений, формат которых определяется разработчиком устройства или интерфейса.

Основными характеристиками каналов являются полоса пропускания канала; используемый каналом тип передачи данных; характеристики, соответствующие конечной точке – направление передачи данных и максимальный размер пакета.

Полоса пропускания шины делится между всеми установленными каналами. Выделенная полоса закрепляется за каналом, и если установка нового

канала требует такой полосы, которая не вписывается в уже существующее распределение, запрос на выделение канала отклоняется. Архитектура USB предусматривает внутреннюю буферизацию всех устройств, причем, чем большей полосы пропускания требует устройство, тем больше должен быть его буфер. Шина USB должна обеспечивать обмен с такой скоростью, чтобы вызванная буферизацией задержка данных в устройстве не превышала нескольких миллисекунд.

**Механизм прерываний.** Для шины USB истинного механизма прерываний (как, например, для последовательного порта) не существует. Вместо этого хост-контроллер опрашивает подключенные устройства на предмет наличия данных о прерывании. Опросы происходят в фиксированные интервалы времени, обычно каждые 1–32 мс. Устройству позволяет посылать до 64 байт данных. Возможности работы с прерываниями определяются хост-контроллером, обеспечивающим поддержку физической реализации USB.

**Передача данных по уровням.** Передача данных между конечной точкой и ПО производится посредством выделения канала и обмена данными по этому каналу. Различные уровни передачи данных отображены на рис.10.24.

Передача данных осуществляется в следующей последовательности.

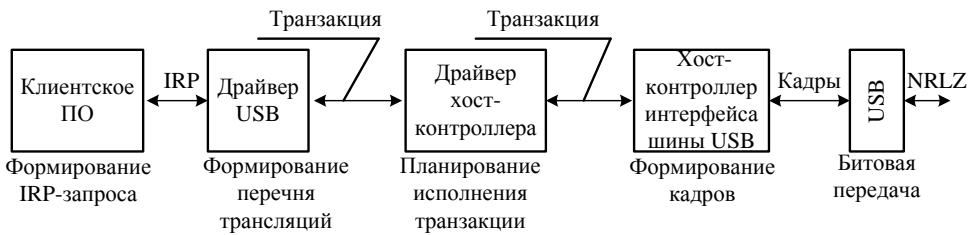


Рис. 10.24. Уровни передачи данных

Клиентское ПО посылает IPR-запросы уровню USBD.

Драйвер USBD разбивает запросы на транзакции по таким правилам: выполнение запроса считается законченным, когда успешно завершены все составляющие его транзакции;

все подробности отработки транзакций (такие как ожидание готовности, повтор транзакции при ошибке, неготовность приемника и т. д.) к клиентскому ПО не сообщаются;

ПО может только запустить запрос и ждать выполнения запроса или выхода из тайм-аута;

устройство может сигнализировать о серьезных ошибках, что приводит к аварийному завершению запроса, о чем сообщается источник запроса.

Драйвер контроллера хоста принимает от системного драйвера шины перечень транзакций и выполняет следующие действия:

планирует выполнение полученных транзакций, добавляя их в список транзакций;

извлекает из списка очередную транзакцию и передает ее уровню хост-контроллера интерфейса шины USB;

отслеживает состояние каждой транзакции до ее завершения.

Хост-контроллер интерфейса шины USB формирует кадры. Кадры передаются последовательной передачей бит методом NRZI .

Формирование составляющих USB протокола можна представить упрощенной схемой, изображенной на рис. 10.25.

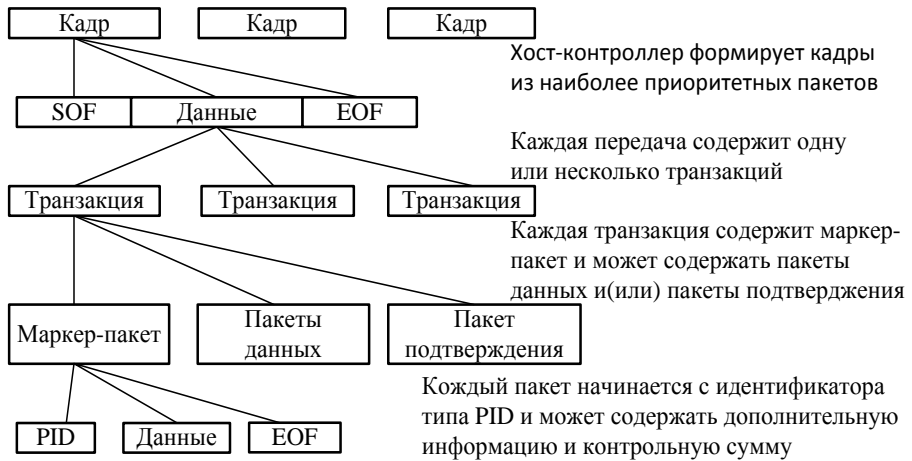


Рис. 10.25. Общая схема составляющих USB протокола

**Типы передач данных.** Спецификация шины определяет четыре различных типа передачи (transfer type) данных для конечных точек:

*управляющие передачи* (Control Transfers) – используются хостом для конфигурирования устройства при подключении с целью управления устройством и получения статусной информации в процессе работы. Протокол обеспечивает гарантированную доставку таких посылок. Длина поля данных управляющей посылки не может превышать 64 байта на полной скорости и 8 байт – на низкой. Для таких посылок хост гарантированно выделяет 10 % полосы пропускания;

*передачи массивов данных* (Bulk Data Transfers) – применяются при необходимости обеспечить гарантированную доставку данных от хоста к функции или от функции к хосту, и время доставки не ограничено. Такая передача занимает всю доступную полосу пропускания шины. Пакеты имеют поле данных размером 8, 16, 32 или 64 байт. Приоритет в таких передачах низкий, они могут приостанавливаться в случае большой загрузки шины, допускаются только на полной скорости передачи. Такие посылки используются, например, принтерами или сканерами;

*передачи по прерываниям* (Interrupt Transfers) – используются в случае, когда нужно передавать одиночные пакеты данных небольшого размера за



ограниченное время. Операции передачи носят спонтанный характер и должны обслуживаться НЕ медленнее, чем того требует устройство. Поле данных может содержать до 64 байт на полной скорости и до 8 байт – на низкой. Предел времени обслуживания устанавливается в диапазоне 1–255 мс на полной скорости и 10–255 мс – на низкой. Такие передачи используются в устройствах ввода (мышь, клавиатура);

*изохронные передачи* (Isochronous Transfers) – применяются для обмена данными в "реальном времени", когда на каждом временном интервале необходимо передавать строго определенное количество данных, но доставка информации не гарантирована (передача данных ведется без повторения при сбоях, допускается потеря пакетов). Такие передачи занимают предварительно согласованную часть пропускной способности шины и имеют заданную задержку доставки. Изохронные передачи обычно используются в мультимедийных устройствах для передачи аудио- и видеоданных. Изохронные передачи разделяются по способу синхронизации конечных точек – источников или получателей данных – с системой: различают асинхронный, синхронный и адаптивный классы устройств, каждому из которых соответствует свой тип канала USB.

**Кадры.** Любой обмен по шине USB инициируется хост-контроллером. Он организует обмены с устройствами согласно плану распределения ресурсов. Контроллер циклически (с периодом  $1,0 \pm 0,0005$  мс) формирует кадры (frames), в которые укладываются все запланированные передачи. Каждый кадр (рис. 10.26) начинается с пакета-маркера SOF (Start Of Frame, начало кадра), который является синхросигналом для всех устройств включая хабы.

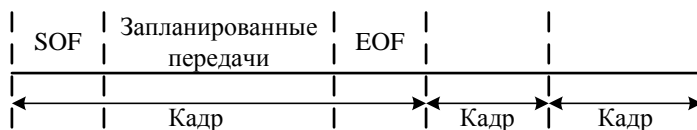


Рис. 10.26. Поток кадров USB

В конце каждого кадра выделяется интервал времени EOF (End Of Frame, конец кадра), в течение которого хабы запрещают передачу по направлению к контроллеру. Если хаб обнаружит, что с какого-то порта в данное время ведется передача данных, этот порт отключается. В режиме высокоскоростной передачи пакеты SOF передаются в начале каждого микрокадра (период  $125 \pm 0,0625$  мкс). Хост планирует загрузку кадров таким образом, чтобы в них всегда имелось место для наиболее приоритетных передач, а свободное место кадров заполняется низкоприоритетными передачами больших объемов данных. Спецификация USB позволяет занимать под периодические транзакции до 90 % пропускной способности шины.

Каждый кадр имеет свой номер. Хост-контроллер оперирует с 32-битным счетчиком, но в маркер SOF передает только младшие 11 бит. Номер

кадра циклически увеличивается во время EOF.

Для изохронной передачи важна синхронизация устройств и контроллера. Существует три варианта синхронизации: синхронизация внутреннего генератора устройства с маркерами SOF, подстройка частоты кадров под частоту устройства и согласование скорости передачи (приема) устройства с частотой кадров.

В каждом кадре может быть выполнено несколько транзакций, их допустимое количество зависит от скорости, длины поля данных каждой из них, а также от вносимых кабелями, хабами и устройствами задержек. Все транзакции кадров должны быть завершены к моменту времени EOF. Частота генерации кадров может немного варьироваться с помощью специального регистра хост-контроллера, что позволяет подстраивать частоту для изохронных передач. Подстройка частоты кадров контроллера возможна только под частоту внутренней синхронизации одного устройства.

*Конечная точка* (Endpoint) – это часть USB-устройства, которая имеет уникальный идентификатор и является получателем или отправителем информации, т. е. это буфер, который хранит несколько байт. Данные, хранящиеся в КТ, могут быть либо принятыми данными, либо данными, которые ожидают передачу. Хост имеет буфер для приема и передачи данных, но он не имеет КТ.

Конечная точка имеет такие основные параметры и характеристики:

частота доступа к шине;

допустимая задержка обслуживания;

требуемая ширина полосы пропускания канала;

номер;

способ обработки ошибок;

максимальный размер пакета доступный приему или отправлению КТ;

используемый КТ тип посылок;

направление передачи данных.

Любое USB-устройство имеет КТ с нулевым номером (Endpoint Zero). Эта точка позволяет хосту опрашивать устройство с целью определения его типа и параметров.

Кроме нулевой точки, устройства могут иметь дополнительные КТ, используемые для обмена данными с хостом. Такие КТ могут работать либо только на прием данных от хоста (входные точки, IN), либо только на передачу данных хосту (исходные точки, OUT). Число дополнительных КТ определяется режимом передачи: для низкоскоростных устройств допускается наличие одной–двух дополнительных КТ, а для высокоскоростных – до 15 входных и 15 выходных точек.

Нулевая точка устройства доступна после того, как устройство подключено к шине, включено и получен сигнал сброса (bus reset). Остальные КТ после включения питания или сброса находятся в неопределенном состоянии и недоступны для работы до тех пор, пока хост не выполнит конфигурирова-

ние устройства.

**Пакеты.** Информация по каналу передается в виде *пакетов* (Packet, рис. 10.27).

SYNC	PID	Check	Данные пакета	EOP
------	-----	-------	---------------	-----

Рис. 10.27. Структура пакета

Каждый пакет начинается с *поля синхронизации* SYNC (SYNChronization), за которым следует *идентификатор пакета* PID (Packet Identifier), значения которого приведены в табл. 10.5. Поле Check представляет собой побитовую инверсию PID.

Таблица 10.5

Обозначение	Код PID	Источник	Описание
Идентификаторы маркер-пакетов (Token Packet)			
OUT	0001b	Хост	Маркер транзакции вывода, передает адрес и номер КТ при передаче от хоста к функции
IN	1001b		Маркер транзакции ввода, передает адрес и номер КТ при передаче от функции к хосту
SOF	0101b		Маркер начала кадра, содержит номер кадра
SETUP	1101b		Маркер транзакции управления: передает адрес и КТ при передаче хоста к функции.
Идентификаторы пакетов данных (Data Packet)			
DataO	0011b	Хост, устр-во	Пакеты данных из четных и нечетных PID чередуются для точной идентификации подтверждений
Data1	1011b		
Data2	0111b		Дополнительные типы пакетов данных, используемых в транзакциях с широкополосными изохронными точками
MData	1111b		
Идентификаторы пакетов-подтверждений (Handshake)			
ACK	0010b	Хост, устр-во	Подтверждение безошибочного приема пакета
NAK	1010b	Устр-во	Приемник не сумел принять или передатчик не сумел передать данные. Может использоваться для управления потоком данных ("ответ на запрос не готов"). В транзакциях прерываний является признаком отсутствия необслуживаемых прерываний
STALL	1110b	Устр-во	Произошел сбой в КТ или запрос не поддерживается требуется вмешательство хоста
NYET	0110b	Устр-во	Подтверждение безошибочного приема с указанием на отсутствие места для приема следующего пакета максимального размера (USB 2.0)

Идентификаторы специальных пакетов (Special Packet)			
PRE	1100b	Хост	Специальный маркер, сообщающий, что следующий пакет будет передаваться в режиме LS (позволяет трансляцию данных на низкоскоростной порт хаба)
ERR		Устр-во, хаб	Сигнализация ошибки в расщепленной транзакции (USB2.0)
SPLIT (SS/CS)	1000b	Хост	Маркер расщепленной транзакции (USB 2.0). В зависимости от назначения обозначается как SS (маркер запуска) и CS (маркер завершения), назначение определяется битом SC в теле маркера
PING	0100b	Хост	Пробный маркер высокоскоростного управления потоком (USB 2.0)
RESERV	0000b		Зарезервированный PID

Из таблицы видно, что два младших бита идентификатора определяют группу, к которой он принадлежит:

00 - специальный пакет (Special); 01 - маркер (Token); 10 - подтверждение (Handshake); 11 - пакет данных (Data).

Структура данных пакета зависит от группы, к которой он относится.

**Программная поддержка интерфейса USB.** Интерфейс USB обеспечивает надежную доставку данных, предоставляет множество сервисных функций для конфигурирования устройства, т.е. реализует весь необходимый набор надежного протокола обмена.

**Модель WDM.** В Windows 2000/XP драйверная поддержка реализуется на основе WDM (WINDOWS DRIVER MODEL), которая позволяет распределить процесс передачи данных (рис. 10.28).

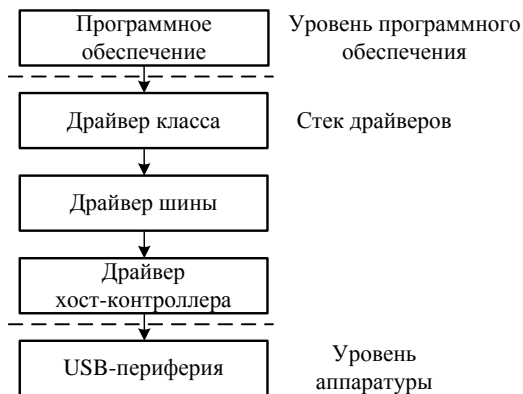


Рис. 10.28. Модель для USB-интерфейса

В комплект поставки Windows входят два низкоуровневых драйвера, что освобождает программиста от рутинной работы: драйвер хост-контроллера (Host Controller Driver) отвечает за обмен данными с аппаратурой; драйвер

шины (USB Bus Driver) отвечает за управление транзакциями, питания и распознавания устройств.

С точки зрения прикладного программиста, наибольший интерес представляют драйвер класса «Class Driver» и интерфейс обращения к этому драйверу. Все USB-устройства делятся на группы в соответствии с общими свойствами, выполняемыми функциями и требованиями к ресурсам. Windows для каждой группы устройств предлагает готовый драйвер, который автоматически устанавливается при выявлении принадлежности устройства к одной из групп. Для работы с нестандартными устройствами можно воспользоваться одним из системных драйверов. Таким образом, в большинстве случаев нет необходимости в разработке дополнительных драйверов. Для ПК, где по ряду причин не используется ОС WINDOWS, возможна реализация драйвера USB на основе функций BIOS. Кратко рассмотрим эти функции.

**Сервис прерывания BIOS 1AH.** Для работы с PCI-шиной (и с шиной USB) используются следующие функции В1H прерывания 1AH:

V101H – определение наличия PCI BIOS;

V102H – поиск PCI-устройства с идентификаторами устройства и производителя;

V103H – поиск PCI-устройства с кодом класса;

V108H – чтение регистра конфигурации (байт, Byte);

V109H – чтение регистра конфигурации (слово, Word);

V10AH – чтение регистра конфигурации (двойное слово, DWord);

V10BH – запись регистра конфигурации (байт, Byte) ;

V10CH – запись регистра конфигурации (слово, Word);

V10DH – запись регистра конфигурации (двойное слово, DWord) .

Основное назначение этих функций – работа с конфигурационным пространством, общий вид которого показан на рис. 10.29. Наиболее интересными полями являются поля, позволяющие определить тип устройства:

Vendor ID (Word, смещение 0) – код фирмы-производителя устройства;

Device id (Word, смещение 2) – код устройства;

class code (DWord, смещение 8) – код класса устройства:

Device ID			Vendor ID		00H
Status			Code		04H
Class Code			Revision ID		08H
BITS	Header Type	Latency Timer	Cache Line Size		0CH
Определяется типом устройства					
Определяется пользователем					

Рис. 10.29. Конфигурационное пространство устройства PCI

Для вызова конкретной функции ее номер задается в регистре AX. Для операций чтения и записи регистров номер шины (контроллера) задается в

регистре ВН. В зависимости от функции в регистрах ВН, АL, СН, СL и других могут указываться входные параметры. В случае успешного выполнения функции флаг переноса CF сбрасывается в 0, в случае ошибки – устанавливается в 1.

После выполнения функций регистры EAX, EBX, ECX, EDX и флаги могут измениться. Выполнение описанных функций сервиса 1AH требует стека до 1 кбайт.

---

### *Основные выводы*

---

Увеличение потоков измерительной информации, усложнение алгоритмов ее получения и обработки предполагает использования в ИИС вычислительных ресурсов компьютерных систем.

Компьютерная система – это единый комплекс, состоящий из электронных модулей и пакета программ, предназначенных для решения универсальных или специализированных задач.

В основу построения компьютерных систем положены идеи Джона фон Неймана: в цифровых системах для представления чисел необходимо использовать двоичную систему счисления, а программы вычислений и данные в виде двоичных кодов должны храниться в одной памяти. Архитектура компьютера – это совокупность основных устройств и блоков и их взаимодействие по обработке информации. Основными блоками компьютерных систем, по Нейману, являются: устройство управления, арифметико-логическое устройство, память, внешняя память, устройства ввода и вывода данных.

Архитектура ПК основана на магистрально-модульном принципе, согласно которому информационная связь между устройствами осуществляется через системную магистраль, состоящую из нескольких шин, по которым передаются адреса, данные и сигналы управления. Шинной называется набор проводов, по которым передается информация. Информация по шинам передается в соответствии с параллельно-последовательным принципом, т. е. последовательно во времени в виде блоков, каждый блок состоит из битов, поступающих одновременно, параллельно по всем разрядам шин.

Производительность ПК – это количество операций, которые он выполняет в единицу времени. Существует два способа оценки производительности компьютера. Первый использует число команд, выполняемых компьютером за единицу времени (MIPS), второй – число операций с плавающей запятой, выполняемых компьютером за одну секунду (Flops).

Интерфейс – совокупность программных и аппаратных средств, предназначенных для передачи информации между компонентами. Основными параметрами и характеристиками интерфейсов являются: 1) пропускная способность; 2) максимальная частота передачи информации через интерфейс; 3)

максимально допустимое расстояние между связываемыми устройствами; 4) число проводов; 5) информационная ширина; 6) топология соединения; 7) наличие гальванической развязки; 8) возможность «горячего» подключения/отключения; 9) возможность автоматического конфигурирования.

Основным назначением интерфейса является подключение к ПК внешних устройств. По месту интерфейсов в структуре ПК они подразделяются на внутренние (обеспечивают соединение отдельных модулей ПК) и внешние (обеспечивают подключение внешних устройств). В интерфейсах используют три режима обмена - дуплексный, полудуплексный и симплексный.

По способу передачи данных интерфейсы делятся на параллельные, последовательные и специальные. В параллельных интерфейсах передача каждого бита выполняется по отдельной сигнальной линии, все биты передаются одновременно. Эти интерфейсы используют логические уровни ТТЛ, ограничивающие длину кабеля из-за невысокой помехозащищенности. Гальваническая развязка отсутствует. Передача данных может быть как однонаправленной, так и двунаправленной.

Последовательные интерфейсы используют одну сигнальную линию, по которой информационные биты передаются последовательно во времени. В этих интерфейсах применяются сигналы с уровнями, отличными от уровней ТТЛ, что позволяет увеличить дальность связи. В ряде последовательных интерфейсов применяется гальваническая развязка. Последовательная передача данных может осуществляться в асинхронном или синхронном режимах.

В ИИС широко используется интерфейс USB (универсальная последовательная шина), относящийся к специальным интерфейсам. Этот интерфейс отличается простотой кабельной системы и подключения, возможностью автоматического подключения и настройки устройств, подключения и отключения устройств без перезагрузки операционной системы.

Устройства к компьютеру могут быть подключены по нескольким шинам USB, каждой из которых управляет отдельный хост-контроллер, установленный в системном блоке ПК. Хост – это центральный (управляющий) контроллер в сетевой среде или среде с распределенной обработкой данных. На шине USB допускается наличие только одного хоста.

Устройство может представлять собой хаб, функцию или их комбинацию и подключается через порт. Хаб или концентратор – устройство, обеспечивающее дополнительные порты на шине USB путем разветвления. Функция – это периферийное устройство или отдельный блок периферийных устройств, способный передавать и принимать информацию по шине USB. Для подключения устройств к хамам USB и связей хабов между собой используются кабели USB. Они имеют четыре провода, два из которых предназначены для питания, а два других – для передачи данных.

Шина USB имеет три режима передачи данных: низкоскоростной, полноскоростной и высокоскоростной (от 1,5 до 400 Мбайт/с). Высокая скорость передачи данных USB-канала позволяет использовать USB-шины для под-

ключения измерительных приборов. Данные для передачи по шине USB кодируются методом NRZI – «без возврата к нулю с инвертированием», в котором логический 0 определяется как изменение напряжения, а логическая 1 – как неизменение напряжения.

Каналом в USB называется модель передачи данных между хост-контроллером и конечной точкой устройства. Конечная точка – это часть USB-устройства, которая имеет уникальный идентификатор и является получателем или отправителем информации. В USB используются два типа каналов: потоки и сообщения. Поточковый канал – это канал для передачи данных, структура которых определяется клиентским ПО. Доставка данных всегда идет в порядке «первым вошел – первым вышел» (FIFO). Канал сообщений – это канал для передачи данных, структура которых определяется спецификацией USB. Механизм передачи данных является асинхронным и блочным. Блок передаваемых данных называется USB-фреймом или USB-кадром и передается за фиксированный временной интервал.

---

### ***Вопросы для самоконтроля***

---

- 1. Приведите общие характеристики основных поколений компьютеров.*
- 2. Назовите составляющие вычислительной машины Бэббиджа.*
- 3. В чем суть идей, сформулированных Нейманом относительно архитектуры вычислительных машин?*
- 4. В чем суть магистрально-модульного принципа организации ПК?*
- 5. Какие показатели быстродействия ПК вам известны?*
- 6. Чем различаются CISC и RISC архитектуры компьютера?*
- 7. Какова роль конвейерной обработки микрокоманд?*
- 8. Какие разновидности многопроцессорных систем вы знаете?*
- 9. Какие есть принципы организации и виды компьютерной памяти?*
- 10. Перечислите основные характеристики компьютерной памяти.*
- 11. Какую роль играет BIOS в компьютерной системе?*
- 12. Изложите сущность системы прерываний в организации взаимодействия процессора с внешними устройствами.*
- 13. В чем состоит различие между внутренними и внешними компьютерными интерфейсами?*
- 14. Перечислите основные характеристики цифровых интерфейсов.*
- 15. Какие режимы обмена обеспечивают интерфейсы ввода/вывода?*
- 16. Объясните необходимость гальванической развязки для интерфейсных соединений.*
- 17. В чем преимущества и недостатки параллельных интерфейсов?*
- 18. Что называется базовым адресом интерфейса и каким образом он может быть определен?*



19. Какую роль играет регистр состояния в параллельном интерфейсе?
20. Назовите основные принципы программного управления вводом/выводом информации через параллельные порты ПК.
21. Какие режимы обмена данными для параллельного интерфейса устанавливает стандарт IEEE 1284?
22. Какие вы знаете режимы синхронизации при последовательной передаче данных?
23. Назовите основные протоколы последовательного интерфейса.
24. Какие сигналы управления участвуют в реализации протокола RS-232?
25. В чем заключается сущность нуль-модемного соединения компьютеров через интерфейс RS-232?
26. Как реализовать программное управление последовательным портом?
27. В чем состоит инициализация последовательного порта ввода/вывода?
28. Охарактеризуйте преимущества и недостатки интерфейса USB?
29. Назовите основные составляющие интерфейса USB.
30. Какие режимы по скорости передачи данных через интерфейс USB вам известны?
31. С какой целью формируются кадры при передаче данных через интерфейс USB?
32. Перечислите основные поля в пакете USB.
33. Каким образом осуществляется программная поддержка интерфейса USB в среде WINDOWS?

---

### **Conclusions**

---

Increasing flows of measuring information, complication of algorithms for its obtaining and processing suggests the use of computer systems computational resources in IMS.

Computer system is a single complex, consisting of electronic modules and a software package designed to solve universal or specialized tasks.

Construction basis of computer systems is based on John von Neumann ideas: for representation of numbers in digital systems it is necessary to use binary number system; calculation programs and data in binary form should be stored in a single memory. Computer architecture is a set of basic components and blocks and their interaction to process information. Basic blocks of computer systems according to Neumann are: control device, arithmetic logic unit, memory, external memory, input and output devices.

PC architecture is based on trunk-modular principle, according to which information communication between devices is carried out via system trunk, consisting of several buses that carry address, data and control signals. Bus is a set of wires where information is transmitted. Information is transmitted through buses according to parallel-serial principle, i.e. sequentially over time in form of blocks; each block consists of bits, coming simultaneously, parallel over all bus bits.

PC performance is a number of operations that it carries out in one time unit. There are two methods to evaluate computer performance. First uses a number of computer-executable instructions per time unit (MIPS), second - number of floating-point operations performed by computer per second (Flops).

Interface is a set of hardware and software for information transmission between components. Basic interfaces parameters and characteristics are: 1) Bandwidth; 2) Maximum rate of information transfer through interface; 3) Maximum allowable distance between communicating devices; 4) Number of wires; 5) Information width; 6) Connection topology; 7) Galvanic separation presence; 8) Possibility of "hot" connection/disconnection; 9) Possibility of automatic configuring.

The main purpose of interface is to connect external devices to PC. By interfaces place in PC structure they are divided into internal (connecting separate PC modules) and external (connecting external devices). Interfaces use three communication states - duplex, half-duplex and simplex.

By data transmission methods interfaces are divided into parallel, serial and special. In parallel interfaces every bit is transmitted via separate signal line, all bits are transmitted simultaneously. These interfaces use logical levels of transistor-transistor logic (TTL) that limits wire length because of pure interference resistance. Galvanic separation is absent. Data transmission can be either unidirectional or bidirectional.

Serial interfaces use one signal line, through which information bits are transmitted sequentially over time. In these interfaces signals with levels different from TTL levels are used, which allows to increase communication range. In a number of serial interfaces galvanic separation is used. Serial data transfer can be performed in asynchronous or synchronous modes.

USB interface is widely used in IMS – that is serial bus, belonging to special interfaces. This interface differs by simplicity of cable system and connectivity, an ability to automatically connect and configure devices, connection and disconnection of devices without rebooting the operating system.

Devices could be connected to PC via several USB buses, each of them are operated by host controller, mounted in PC system block. Host is a central (operational) controller in network environment or distributed data processing environment. USB bus is allowed to have only one host.

Device may be a hub, function or a combination of them and is connected via port. Hub is a device that provides additional ports on USB bus by branching. Function is a peripheral device or a separate block of peripheral devices capable of transmitting and receiving information via USB bus. USB cables are used to con-

nect devices to USB hubs and to connect hubs with each other,. They have four wires, two of them are for power, while two others - for data transmission.

USB bus has three modes of data transmission: low-speed, full-speed and high-speed (1.5 Mb/s to 400 Mb/s). High speed data transmission of USB channel allows the use of USB bus for connection of measuring devices.

Data for transmission via USB bus are encoded by NRZI – “Non Return to Zero Inverted”, where logical 0 is defined as voltage changed, and logical 1 – as voltage unchanged.

Channel in USB is a model of data transmission between host-controller and endpoint of device. Endpoint is a part of USB-device that has unique identifier and acts as information recipient or sender. USB uses two types of channels: streams and messages. Streaming channel is a channel for data transmission, which structure is defined by client software. Data delivery is always going in order "first in - first out» (FIFO). Message channel is a channel for data transmission, which structure is defined by USB specification. Data transmission mechanism is asynchronous and block. Block of transmission data is called USB-frame and is transmitted in fixed time interval.

*Ключевые слова*

аппаратное обеспечение	hardware
программное обеспечение	software
системная шина	system bus
винчестер	hard disk drive (HDD)
цифровой интерфейс	digital interface
контроллер	controller
горячее подключение	hot connection
последовательный интерфейс	serial interface
скорость передачи	transmission rate
бит	bit
данные	data
драйвер шины	bus driver



## **ПЕРЕДАЧА ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ В КАНАЛАХ СИСТЕМ**

**11**

- 11.1. Системы передачи данных
- 11.2. Виды информационных каналов, их математические модели и характеристики
- 11.3. Скорость передачи информации в каналах связи
- 11.4. Синтез элементов информационных систем.  
Оптимальный приемник
- 11.5. Многоканальные сети передачи данных.  
Разделение информационных каналов
- 11.6. Помехоустойчивость систем передачи информации

### 11.1. Системы передачи данных

Важно обеспечить верность, целостность, доступность информации на всех этапах обработки, хранения и передачи данных по информационным каналам связи ИИС. Сигналы, передаваемые по каналам связи, под влиянием помех искажаются. Поэтому принятое сообщение лишь в некоторой степени соответствует переданному. Степень соответствия принятого сообщения переданному называется *верностью* информации. Верность информации является одним из основных показателей качества систем передачи данных. Верность информации тесно связана с понятием *помехоустойчивости*.

*Канал связи является совокупностью технических средств между источником сообщения и потребителем.* Технические устройства, входящие в состав канала связи, предназначены для того, чтобы сообщения дошли к потребителю наилучшим образом, и с этой целью сигналы обрабатывают и преобразуют согласно определенным алгоритмам. Такими преобразованиями сигнала является, например, модуляция и преобразование непрерывных сигналов в дискретные. Соответственно типу сигналов каналы разделяют на непрерывные и дискретные.

Преобразование дискретного сообщения в информационный сигнал канала связи осуществляется в виде операций - *форматирования, кодирования и модуляции*. Кодирование является преобразованием сообщений в последовательность кодовых символов, а модуляция - преобразованием этих символов в сигналы, пригодные для передачи по информационному каналу.

При кодировании происходит процесс преобразования элементов сообщений в соответствующие им числа (кодовые символы). Каждому элементу сообщения присваивается определенная совокупность кодовых символов, называемая *кодовой комбинацией*. Совокупность кодовых комбинаций образует код. Показатели качества дискретных систем связи приведены на рис. 11.1.



Рис. 11.1. Основные показатели качества дискретных систем связи

В результате преобразований непрерывного сигнала, называемых *дис-*

кретизацией и квантованием, получают отсчеты, рассматриваемые как числа в той или иной системе исчисления, которые являются дискретными сигналами. Эти числа преобразовывают в кодовые комбинации электрических сигналов, которые и передают по линиям связи как непрерывные. При использовании в качестве носителя информации постоянный ток, получают последовательность видеоимпульсов. При необходимости эту последовательность модулируют гармоническим колебанием и получают последовательность радиоимпульсов.

В общем виде модель системы передачи данных изображена на рис. 11.2. Хотя эта модель и содержит основные элементы, присущие любой системе передачи информации, она может служить лишь простой иллюстрацией к описанию *информационной системы передачи данных*, поскольку практически не отображает тех действий, которые должны (или могут) выполняться над информацией в процессе ее передачи от источника к потребителю.

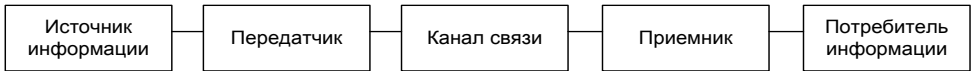


Рис. 11.2. Обобщенная схема передачи данных

Более полной в этом смысле является модель системы передачи (и хранения) информации, приведенная на рис. 11.3. Следует указать, что на самом деле проблемы, возникающие при передаче (причем не только с использованием радиоволн) и хранении информации (на оптических дисках, магнитных носителях и в памяти компьютеров), похожи, поэтому методы их решения и структура технических устройств также во многом идентичны.

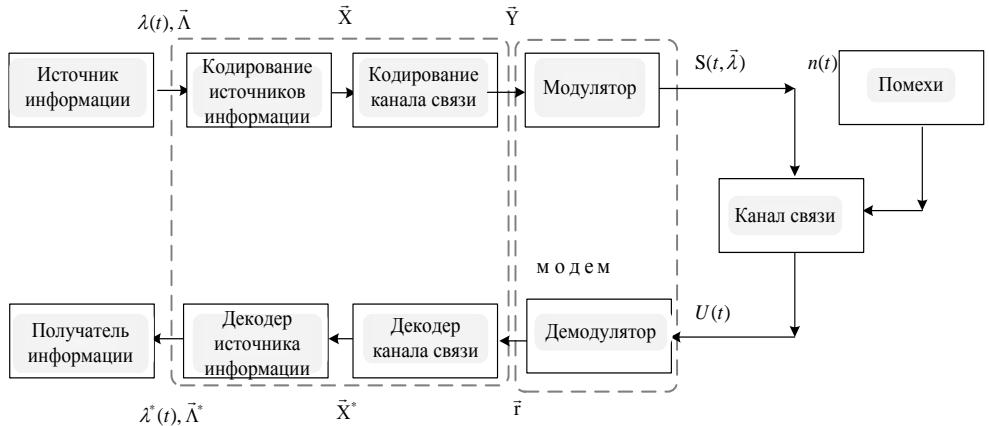


Рис. 11.3. Структурная схема системы передачи информации

Кратко охарактеризуем назначение и функции элементов такой модели.

1. **Источник информации или сообщение**- это физический объект, система или явление, формирующие сообщение с целью его передачи от источника информации к ее потребителю.

*Сообщение* - это значение или изменение некоторой физической величины, отображающей состояние объекта (системы или явления). Как правило, первичные сообщения - изображение, измерение параметров окружающей среды и др. - являются функциями времени неэлектрической природы.

С целью передачи по каналу связи эти сообщения преобразуются в электрический сигнал, изменение которого во времени  $\lambda(t)$  отображает передаваемое сообщение. Значительная часть таких сообщений по своей природе не являются сигналами - это массивы чисел, текст или другие файлы. Сообщение можно представить в виде некоторых векторов  $\vec{\lambda}$ .

**2. Кодирование источника информации.** Большой частью информационные сообщения содержат избыточную информативность и имеют медленно изменяемую частоту, которая в общем случае неудовлетворительно приспособлена для эффективной передачи по каналам связи. Поэтому сообщения ( $\lambda(t)$  или  $\vec{\lambda}$ ), как правило, подвергаются кодированию. Процедура кодирования включает предварительную дискретизацию непрерывного сообщения  $\lambda(t)$ , т.е. его преобразование в последовательность элементарных дискретных сообщений  $\{\lambda_i\}$ .

Кодирование источника информации может иметь различные цели: сокращение объема переданных данных (сжатие данных), увеличение количества переданной за единицу времени информации, повышение достоверности передачи, обеспечение секретности при передаче и др.

Таким образом, на выходе *кодера источника* по переданным сообщениям  $\lambda(t)$  или  $\vec{\lambda}$  формируется последовательность кодовых символов  $\vec{X}$  - так называемая *информационная последовательность*, допускающая точное или приближенное восстановления начального информационного сообщения.

**3. Кодирование в каналах связи.** При передаче информации по каналу связи с помехами в принятых данных могут возникать ошибки. Если такие ошибки не велики или возникают достаточно редко, информация может быть использована потребителем. При значительном количестве ошибок полученной информацией пользоваться невозможно.

*Кодирование в канале*, или *помехоустойчивое кодирование*, - это способ обработки переданных данных, обеспечивающий *уменьшение количества ошибок*, возникающих в процессе передачи по каналу с помехами. Существует много различных методов помехоустойчивого кодирования информации, но все они базируются на следующем принципе: при помехоустойчивом кодировании в передаваемые сообщения вносится специальным образом организованная избыточность (в передаваемые кодовые последовательности вводятся избыточные символы), что дает возможность на приемной стороне обнаруживать и исправлять возникающие ошибки. Таким образом, если при кодировании источника проводится устранение естественной, существующей в сообщении избыточности, то при кодировании в канале избыточность в

передаваемое сообщение вносится сознательно. В результате на выходе кодера канала формируется последовательность кодовых символов  $Y(X)$ , называемая *кодовой последовательностью канала связи*.

Заметим, что как помехоустойчивое кодирование, так и сжатие данных не являются обязательными операциями при передаче информации. Эти процедуры (и соответствующие блоки в структурной схеме системы передачи информации) могут отсутствовать. Тем не менее их отсутствие может привести к серьезным потерям в помехоустойчивости системы, уменьшению скорости передачи и снижению качества передачи информации. Поэтому все современные системы включают в себя и эффективное, и помехоустойчивое кодирование данных.

**4. Модулятор.** *Функции модуляторов в информационных системах передачи данных* - это согласование сообщения источника или кодовых последовательностей, вырабатываемых кодером, со свойствами канала связи и обеспечение возможности одновременной передачи большого количества сообщений по общему информационному каналу связи.

В самом деле, большинство подлежащих передаче непрерывных  $\lambda(t)$  и дискретных  $\bar{\Lambda}$  сообщений, а также результаты их кодирования - последовательности кодовых символов  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  - представляют собой сравнительно низкочастотные сигналы с широкой полосой ( $\Delta F \leq 1 \text{ МГц}$ ,  $\Delta F \sim f_0$ ). Вместе с тем эффективная передача с использованием электромагнитных колебаний (радиоволн) возможна лишь для достаточно высокочастотных сигналов ( $f_0 \geq 1 \dots 1000 \text{ МГц}$ ) со сравнительно узкополосными спектрами ( $\Delta F \ll f_0$ ). Поэтому модулятор должен преобразовать сообщения *источника*  $\lambda(t)$  и  $\bar{\Lambda}$  или *соответствующие им кодовые последовательности* ( $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$ ) в сигналы  $S(t, \lambda(t))$ ,  $S(t, Y(\lambda(t)))$ , т.е. наложить сообщения на сигналы, свойства которых обеспечивали бы возможность эффективной их передачи по радиоканалу (или другим существующим каналам связи - телефонным, оптическим и т.д.).

Существуют методы модуляции сигналов, обеспечивающие передачу информации с разной эффективностью и качеством. Простейшими являются амплитудная, частотная и фазовая модуляции непрерывных сигналов.

**5. Канал связи** - это система передачи информации, использующая в качестве носителя от источника к потребителю электромагнитные волны или радиоволны, а в качестве среды распространения - окружающее пространство или радиоканал.

Рассмотрим информационный канал связи в виде звенарадиотехнической системы передачи информации, на вход которого поступает *сигнал передатчика*  $S(t, \lambda(t))$ , а на выходе образовывается сигнал, называемый, по обыкновению, *принятым колебанием*.



Существует достаточное количество моделей информационных каналов большей или меньшей сложности, тем не менее, в общем случае сигнал  $S(t, Y(\lambda(t)))$ , проходя по каналу связи, ослабевает, приобретает некоторую временную задержку (или фазовый сдвиг) и искажается. Принимаемое колебание  $U(t)$  в этом случае будет иметь вид:

$$U(t) = \varepsilon S(t - \tau, Y(\lambda(t)) + n(t)) \quad (11.1)$$

где  $\varepsilon$  - угасание;  $\tau$  - задержка времени;  $n(t)$  - помехи в канале связи.

**6. Получатель информации.** *Функции получателя системы передачи информации* состоят в том, чтобы с максимально возможной точностью по принятому колебанию  $U(t)$  воссоздать на своем выходе переданное сообщение ( $\lambda(t)$  или  $\bar{\Lambda}$ ).

Принятое (воспроизведенное) сообщение из-за помех в общем случае отличается от переданного. Принятое сообщение будем называть *оценкой* (имеется в виду оценка сообщения) и обозначать тем же символом, что и отправленное сообщение, но со знаком \*:  $\lambda^*(t)$  или  $\bar{\Lambda}^*$ .

**7. Демодулятор.** Для воспроизведения оценки сообщения  $\lambda^*(t)$  или  $\bar{\Lambda}^*$  приемник системы должен по принятому колебанию  $U(t)$ , учитывая сведения об использованных при передаче сигналах и способах модуляции, получить оценку кодовой последовательности  $Y(\lambda^*(t))$ ; эта оценка называется принятой *последовательностью*  $\vec{r}$ . Такая процедура называется *демодуляцией, детектированием* или *приемом сигнала*. При этом демодуляция должна выполняться так, чтобы принятая последовательность  $\vec{r}$  минимально отличалась от переданной кодовой последовательности  $\vec{Y}$ .

Задача демодуляции принятого колебания  $U(t)$  совпадает с различными вариантами задачи оптимального приема сигнала на фоне помех (оптимальное выявление, оптимальное различение двух или нескольких сигналов).

**8. Декодер канала связи.** Принятые последовательности  $\vec{r}$  в общем случае могут отличаться от переданных кодовых слов  $\vec{Y}$ , т.е. содержать ошибки. Количество таких ошибок зависит от уровня помех в канале связи, скорости передачи, выбранного для передачи сигнала и способа модуляции, а также от способа приема (демодуляции) колебания  $U(t)$ .

*Функция декодера канала связи заключается в выявлении и, по возможности, исправлении ошибок, возникших под влиянием помех, и воссоздании с максимальным приближением переданного от источника информации к потребителю сигнала. Процедура воспроизведения сообщения, выявления и исправления ошибок в принятой последовательности  $\vec{r}$  называется декодированием канала.*

Результатом декодирования  $\vec{r}$  является оценка информационной последовательности  $\vec{r}$ .

довательности  $\bar{X}^*$ . Выбор помехоустойчивого кода, способа кодирования, а также метода декодирования может осуществляться так, чтобы на выходе декодера канала осталось по возможности меньше неисправленных ошибок.

Вопросом помехоустойчивого кодирования/декодирования в системах передачи (и хранения) информации отводится большое внимание, поскольку этот прием дает возможность существенным образом повысить качество передачи. Во многих случаях при высоких требованиях к достоверности принимаемой информации (в компьютерных сетях передачи данных, в дистанционных системах управления и т.д.) передача без помехоустойчивого кодирования вообще невозможна.

**9. Декодер источника информации.** Поскольку информация источника ( $\lambda(t)$ ,  $\Lambda$ ) в процессе передачи подвергалась кодированию с целью ее более компактного (или удобного) представления (сжатие данных, экономное кодирование, кодирование источника), необходимо восстановить ее к результирующему (начальному) виду по принятой последовательности  $\bar{X}^*$ .

Процедура восстановления  $\bar{\Lambda}^*$  по  $\bar{X}^*$  называется *декодированием источника* и может быть обратной к операции кодирования (неразрушительное кодирование/декодирование) или восстанавливать приближенное значение  $\bar{\Lambda}^*$ , в большей или меньшей степени отличающееся от  $\bar{\Lambda}$  (разрушительное кодирование/декодирование). К операции восстановления  $\bar{\Lambda}^*$  по  $\bar{X}^*$  будем относить также восстановление, если в этом есть необходимость, непрерывной функции  $\lambda^*(t)$  в соответствии с набором дискретных значений оценок  $\bar{\Lambda}^*$ . Таким образом, кратко описав общую структуру информационной системы передачи данных, перейдем к более подробному изучению ее основных элементов.

## 11.2. Виды информационных каналов, их математические модели и характеристики

**Классификация каналов по частотным распределениям.** В методах и средствах передачи данных в ИИС используют механические, акустические, оптические, электрические и радиоканалы, которые различаются по техническим характеристикам и физической природе сигналов. Основным признаком каждого из перечисленных видов каналов обычно является диапазон рабочих частот. Классификация каналов в соответствии с природой сигналов приведена на рис. 11.4, а в табл. 11.1 представлены соответствующие данные по частотным диапазонам.

**Механический канал передачи данных.** Механические каналы применяются для передачи на короткие (до 500 м) расстояния сигналов в виде механических усилий или давлений. Применяются такие разновидности механических каналов.

*Жесткие, или собственно механические, каналы.* Простейшим примером

является трос управления дроссельной заслонкой карбюратора. Длина таких каналов может достигать нескольких десятков метров.

*Гидравлические каналы*, в которых передающей средой является жидкость. Их недостатком являются неудовлетворительные динамические свойства, из-за чего длина этих каналов ограничивается несколькими метрами.

*Пневматические каналы*. По пневматическим каналам передается сигнал в виде давления. Средой для передачи обычно является воздух. Длина пневматических каналов достигает нескольких сотен метров.



Рис. 5.4. Классификация информационных каналов

Таблица 5.1

Вид канала	Классификационный признак	Разновидности каналов	Частота сигналов $f$	Длина волны $\lambda$
Механический	Среда передачи	Жесткие Гидравлические Пневматические		
Акустический	Диапазон частот	Звуковые Ультразвуковые	< 20 кГц > 20 кГц	> 15 км < 15 км
Оптический	Диапазон частот	Видимого спектра Инфракрасное излучение	400...000 ГГц 0,3...400 ГГц 1000...3000 ГГц	0,3...0,75 мкм 0,75...1000 мкм 0,1...0,3 мкм
Электрический	Диапазон частот	Ультрафиолетовое излучение Подтональных частот Тональных частот	200 ГГц 300...3400 Гц 4000...8500 Гц >10 кГц	> 1500 км 90...1000 км 32...75...75 км < 30 км
Радио	Диапазон частот	Сверхтональных частот Высокочастотные Длинноволновые Средневолновые КВ и УКВ диапазона	< 300 кГц 300...1500 кГц 1,5...6 МГц 6...30 МГц 30...30·10 <sup>5</sup> МГц	> 1000 м 200...1000 м 50...200 м 10...50 м 0,0001...10 м

Среди механических каналов наибольшее распространение приобрели

пневматические каналы в связи с широким применением унифицированных пневматических систем контроля и регулирования на предприятиях с пожароопасной средой. Основным препятствием, ограничивающим применение пневматических систем, являются продолжительные переходные процессы в пневматических сетях связи, особенно в линиях большой длины.

**Акустический канал передачи данных.** Акустические каналы предназначены для передачи колебаний. Средой для передачи могут служить любые звукопроводящие материалы и среды.

Акустические сигналы и каналы нашли разнообразное применение в технике автоматического контроля, выявления и связи: акустический контроль состояния работающих механических объектов, ультразвуковая дефектоскопия, акустическое выявление объектов (подводных лодок, самолетов), гидролокация, акустическая связь и т.д. Справочные данные относительно скорости распространения звуковых волн в различных средах приведены в табл. 11.2.

Таблица 11.2

Среда	Скорость распространения звуковых волн, м/с	Среда	Скорость распространения звуковых волн, м/с
Воздух	331,45	Дерево	3350
Вода пресная	1430	Стекло	5400
Вода морская	1500	Сталь	6100

При пассивной передаче сигналов в процессе контроля или выявления источниками звука являются контролируемые или выявленные объекты. При активной передаче (ультразвуковая дефектоскопия, локация, связь) акустические сигналы создаются специальными генераторами.

**Оптический канал передачи данных.** По диапазону используемых частот (или длине волны) оптические каналы подразделяются на:

*каналы видимой части спектра оптических сигналов (с длиной волны  $0,3 < \lambda < 75$  мкм);*

*каналы инфракрасной части спектра ( $0,75 < \lambda < 1000$  мкм);*

*каналы ультрафиолетовой части спектра ( $\lambda < 0,3$  мкм).*

Устройства, работающие с инфракрасным излучением, в отличие от устройств с видимым и ультрафиолетовым излучением применяются чаще ввиду ряда преимуществ: малое ослабление инфракрасного излучения атмосферой в сравнении с излучением видимой и ультрафиолетовой частей спектра; распространение инфракрасного излучения в темноте, тайна передачи.

Перспективным в технике передачи информации является применение квантовых генераторов света - лазеров. Разработаны многочисленные конструкции кристаллических и газовых лазеров, работающих в разных частях оптического диапазона. Как приемники используются фоторезисторы, фотодиоды и фотоумножители.

**Электрический канал.** *Электрические каналы* - это каналы с примене-

нием коммутативных (проводниковых) сетей связи. Для передачи информации используются как специально выделенные сети, так и сети, созданные для иных целей. Например, широко применяются сети энергоснабжения, высоковольтные сети электропередачи, телекоммуникационные сети.

Шкала частот, которую занимают сигналами в электрическом канале связи, условно делится на четыре диапазона: *подтональные частоты* 300...3400 Гц; *тональные частоты* 4000...8500 Гц; *сверхтональные частоты* – менее 300 кГц; *высокие частоты* 300...1500 кГц.

**Радиоканалы передачи данных.** По диапазону частот радиосигналов различают каналы следующих диапазонов: *длинноволнового* (300...30кГц), *средневолнового* (3...0...0,3МГц), *коротковолнового (КВ)* (3...30...30 МГц) и *ультракоротковолнового (УКВ)* (< 20 МГц).

На распространение радиоволн влияют отражательные и поглотительные свойства земной поверхности и атмосферы, особенно слоя, называемого ионосферой и расположенного над стратосферой. Ионосфера состоит из заряженных частичек газов – электронов и ионов, которые образуются в результате влияния солнечных лучей, космического излучения и метеоритных частичек.

Изменение степени концентрации ионов с высотой предопределяет непрерывное изменение угла преломления радиоволн, в результате чего волны распространяются криволинейно. Если направление распространения становится горизонтальным, не достигнув уровня максимальной ионизации, происходит отражение радиоволн в сторону Земли. Преломляющая способность ионосферы не одинакова для различных типов волн. Она уменьшается с уменьшением длины волны. Чем больше длина волны, тем меньше степень ионизации нужна для ее отражения. Волны, распространяемые вследствие отражения от ионосферы, *называются пространственными*. Кроме пространственных существуют так называемые *поверхностные волны*, распространяющиеся вдоль поверхности Земли благодаря дифракции. Чем меньшая длина волны, тем быстрее угасает поверхностная волна (вследствие потерь в земной поверхности) и тем медленнее угасает пространственная волна. Ультракотковолновые сигналы не отражаются и не выходят за пределы земной атмосферы, вследствие чего они эффективно используются для космической связи. Сигналы других диапазонов отражаются ионосферой.

Для передачи сигналов и данных широко применяются радиорелейные каналы, осуществляющие связь на ультракоротких волнах. Приемопередающие станции располагаются в пределах прямой видимости (рис.11.5).

Для передачи информации на большие расстояния используются промежуточные ретрансляционные станции, служащие одновременно и для восстановления сигнала, искаженного и ослабленного в процессе передачи. Если прямая видимость ограничена только кривизной поверхности Земли, то расстояние между станциями (в километрах) рассчитывается по формуле  $l = 7,2\sqrt{h}$ , где  $h$  - высота антенны системы. Таким образом, при  $h = 60$  м

имеем  $l = 54$  км .



Рис. 11.5. Радиорелейный канал связи

Реальная структура атмосферы (рис. 11.6) более сложна, и приведенное деление на тропосферу, стратосферу и ионосферу довольно условно.

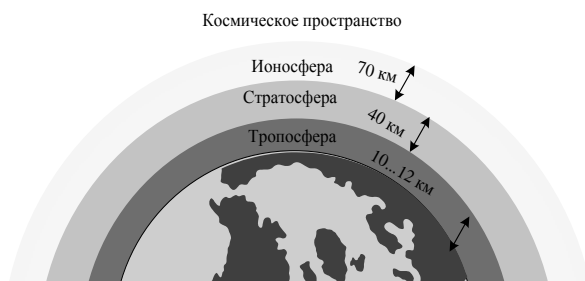


Рис. 11.6. Структура атмосферы Земли

Высота слоев атмосферы приведена приближенно, причем она различна для разных географических точек Земли. Около 80 % массы атмосферы сосредоточено в тропосфере и около 20 % - в стратосфере.

Плотность атмосферы в ионосфере крайне мала, граница между ионосферой и космическим пространством является условным понятием, поскольку следы атмосферы встречаются даже на высотах свыше 400 км. Считается, что плотные слои атмосферы заканчиваются на высоте 120 км.

Типичная схема радиолинии изображена на рис. 11.7. Линия может состоять из двух конечных станций.



Рис. 11.7. Типичная схема радиолинии

Классификация и способы распространения радиоволны приведены в табл. 11.3 и 11.4. Деление радиоволн на диапазоны установлены Международным регламентом радиосвязи МСЭ-Р. Радиоволны, излучаемые передающей антенной, прежде чем попасть на приемную антенну, проходят в общем случае сложный путь. На значение напряженности поля в точке приема влияют такие факторы: отражение электромагнитных волн от поверхности Земли, преломление в ионизированных слоях атмосферы (ионосфере), рассеяние на диэлектрических неоднородностях нижних слоев атмосферы (тропосфере) и дифракция на сферической поверхности Земли.

Таблица 11.3

Вид радиоволн	Тип радиоволн	Диапазон радиоволн (длина волны)	Номер диапазона	Диапазон частот	Вид радиочастот
Мириаметровые	Сверхдлинные	10...100 км	4	3...30 кГц	Очень низкие (ОНЧ)
Километровые	Длинные	1...10 км	5	30...300 кГц	Низкие (НЧ)
Гектометровые	Средние	100...1000 м	6	300...3000 кГц	Средние (СЧ)
Декаметровые	Короткие	10...100 м	7	3...30 МГц	Высокие (ВЧ)
Метровые		1...10 м	8	30...300 МГц	Очень высокие (ОВЧ)
Дециметровые	Ультракороткие	10...100 дм	9	300...3000 МГц	Ультравысокие (УВЧ)
Сантиметровые		1...10 дм	10	3...30 ГГц	Сверхвысокие (СВЧ)
Миллиметровые		1...10 мм	11	30...300 ГГц	Крайне высокие(КВЧ)
Децимиллиметровые		0.1...1 мм	12	300... 3000 ГГц	Гипервысокие (ГВЧ)

Таблица 11.4

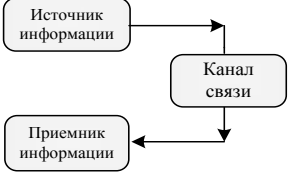
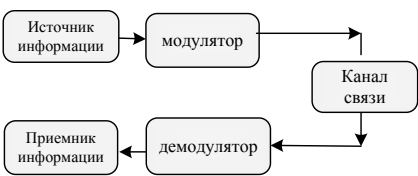
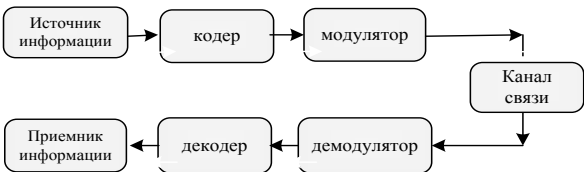
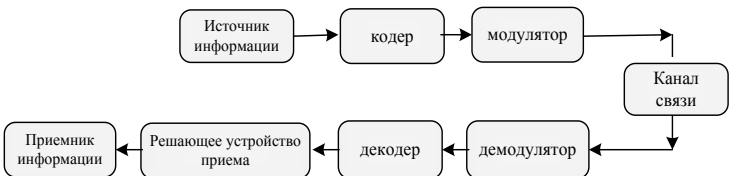
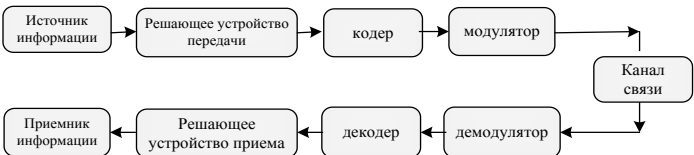
Вид радиоволн	Основные способы распространения радиоволн	Дальность связи
Мириаметровые и километровые (сверхдлинные и длинные)	Дифракция Отражения от Земли и ионосферы	До тысячи км Тысячи км
Гектометровые (средние)	Дифракция Преломления в ионосфере	Сотни км Тысячи км
Декаметровые (короткие)	Преломление в ионосфере и отражение от Земли	Тысячи км
Метровые и более короткие	Свободное распространение и отражение от Земли Рассеяние в тропосфере	Десятки км Сотни км

Напряженность поля в точке приема зависит также от длины волны, освещенности земной атмосферы солнцем и ряда других факторов.

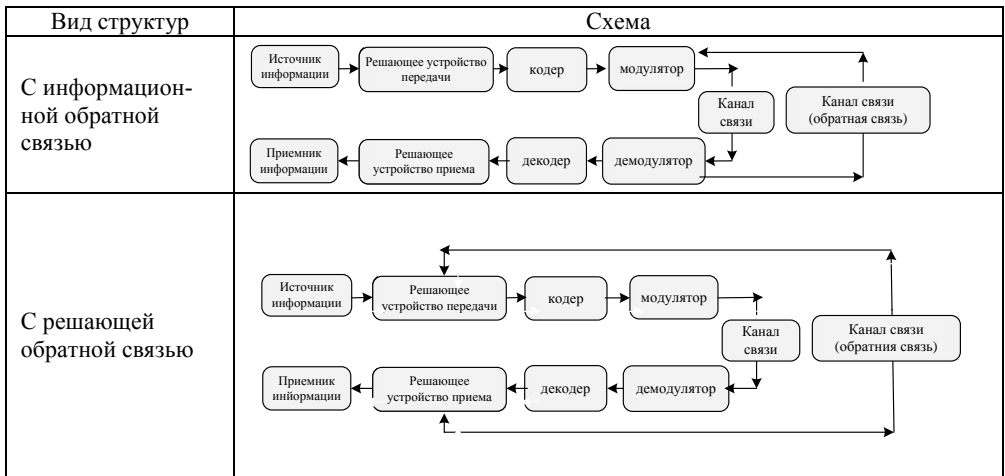
**Классификация каналов по структуре.** Канал передачи информации состоит из сети связи, модулятора и демодулятора (кроме случая передачи данных с использованием простой модуляции, при которой сигнал в сети совпадает с сигналом кодирующего и декодирующего датчиков), а также устройств принятия решения, дающих возможность с высокой степенью дос-

товерности принять и передать сообщение. Для увеличения надежности передачи применяются также каналы обратной связи. Варианты структур каналов приведены в табл. 11.5. Решающие устройства служат для классификации сомнительных сигналов, отождествляя их с достаточно высокой степенью вероятности с состоянием источника информации или с определенным кодом. Количество информации, содержащейся в отдельном сигнале, имеющем вероятность  $p$ , составляет  $\log_2(1/p)$  бит и может быть значительно большей. Однако в среднем в довольно длинном сообщении двоичный сигнал переносит не более чем один бит информации. В общем случае в сообщении, состоящем из символов алфавита емкостью  $h$ , среднее количество информации не превышает одной единицы информации этого алфавита на символ. Тем не менее не все сигналы несут полезную информацию.

Таблица 11.5

Вид структур	Схема
Элементарные	
С модуляцией	
С модуляцией и кодированием	
С решающим устройством на приеме	
С решающим устройством на приеме и передаче	





Импульс помехи, случайно возникающей в сети, информации не несет и мешает передаче. Иногда дополнительные (избыточные) сигналы вводятся специально для повышения помехоустойчивости. В этих случаях среднее количество информации, переносимой одиночным сигналом, уменьшается.

Случай, когда сообщение состоит из символов, несущих максимальное количество информации, встречается редко и возникает при отсутствии помех в сети, при равномерном распределении вероятностей между символами и при отсутствии статистической зависимости между последовательно переданными символами.

В случае невыполнения одного из этих условий количество информации оказывается меньшим. При заданном характере и уровне помех задача повышения эффективности передачи решается прежде всего путем определенного преобразования, приводящего к увеличению среднего количества информации.

Непосредственным носителем информации является случайно изменяющийся сигнал. На практике при рассмотрении информационных процессов удобно оперировать обобщенными показателями, характерными для сигналов данного вида и наиболее важными с точки зрения передачи заложенной в них информации.

Каждый сигнал имеет определенную длительность. Длительность сигнала характеризует время передачи сообщений, продолжительность занятости информационного канала, т.е. *время передачи сигнала*  $T_c$ .

Каждый сигнал характеризуется определенным частотным спектром. Теоретически ширина спектра сигнала конечной продолжительности неограниченна. Тем не менее изучение спектров реальных сигналов показывает, что их спектральная плотность спадает с ростом частоты. Это дает возможность при определенных условиях рассматривать сигналы как процессы с ограниченным спектром. Существуют различные критерии ограничения спектра

сигнала. Одним из таких критериев являются допустимые искажения сигнала. Например, при передаче речевого сигнала разборчивость и качество речи практически полностью сохраняются при ширине спектра от 300 до 3400 Гц. Таким образом, второй обобщенной характеристикой сигнала должна быть *ширина частотного спектра*  $F_c$ .

Третьей важной характеристикой сигнала является его энергетическая характеристика - *средняя мощность*  $P_c$ .

Однако поскольку при передаче на сигналы всегда влияют помехи, то в качестве энергетической характеристики сигнала целесообразно брать отношения средней мощности сигнала  $P_c$  к средней мощности помехи  $P_n$ .

*Динамическим диапазоном информационного канала* называют логарифмическую меру, выраженную в отношении средней мощности сигнала  $P_c$  к средней мощности помехи  $P_n$ :  $D_k = \log_2 P_c / P_n$ .

При оценивании информационной содержательности удобно выражать динамический диапазон посредством логарифма с основанием 2.

*Объемом сигнала называется* произведение времени передачи сигнала  $T_c$ , ширины частотного спектра  $F_c$  и средней мощности  $P_c$  этого сигнала:

$$V_c = T_c F_c P_c. \quad (11.2)$$

В геометрическом изображении объем сигнала имеет вид параллелепипеда с ребрами  $T_c, F_c$  и  $D_c$  (рис. 11.8, а).

Информационный канал можно охарактеризовать также тремя соответствующими параметрами: временем использования канала  $T_k$ , шириной полосы частот пропускания канала  $F_k$  и динамическим диапазоном канала  $D_k$ , характеризующим способность передавать различные уровни сигнала (см. рис. 11.8, б).

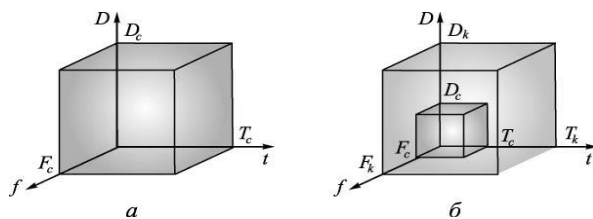


Рис. 11.8 . Геометрическая модель объема сигнала (а) и емкости канала связи (б)

*Емкостью канала* называется произведение времени занятости канала  $T_k$ , ширины его частотного спектра  $F_k$  и динамического диапазона

$$D_k : V_k = T_k F_k D_k. \quad (11.3)$$

Неискаженная передача сигналов возможна только при условии, что объем сигнала меньше или такой же, как и емкость канала связи («вмещается» в емкость канала - рис. 11.9).

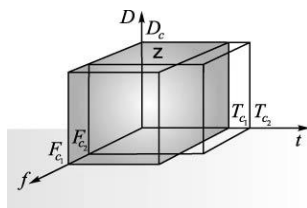


Рис. 11.9. Геометрическое представление трансформации сигнала по параметрам  $F_c$  и  $T_c$

*Общее условие согласования* сигнала с каналом передачи информации определяется соотношением

$$V_c \leq V_k. \quad (11.4)$$

Однако соотношение (11.4) выражает необходимое, но не достаточное условие согласования сигнала с каналом.

*Достаточное условие согласования* по всем параметрам:

$$T_c \leq T_k, \quad F_c \leq F_k, \quad D_c \leq D_k. \quad (11.5)$$

Если при выполнении условия (11.4) не обеспечивается часть условий (11.5), то согласование можно достичь трансформацией сигнала с сохранением его объема.

**Например,** при *отсутствии согласования речевого сигнала с каналом по частоте* выполняются такие соотношения:  $T_c < T_k$ ,  $F_c > F_k$ ,  $D_0 < D_k$ .

Тогда согласование по частоте при передаче можно достичь, записывая сигнал на стационарный накопитель информации с одной скоростью и воссоздавая его с меньшей скоростью.

Предположим, что при выполнении условий  $V_c \leq V_k$  и  $D_c \leq D_k$  частотный спектр сигнала в  $n$  раз шире полосы пропускания канала:  $F_c = nF_k$ .

Для согласования сигнала с каналом можно записать сигнал на стационарный накопитель информации со скоростью  $u_1$ , а передавать со скоростью  $u_2$ , в  $n$  раз меньшей скорости  $u_1$ . При этом продолжительность сигнала увеличивается в  $n$  раз и во столько же раз уменьшается ширина его спектра. Объем сигнала при этом остается неизменным.

*Скоростью передачи информации* называется среднее количество информации, которое передается по каналу связи за единицу времени.

В общем случае эта скорость зависит от продолжительности  $T$  соответствующих сигналов. При достаточно длинных сообщениях скорость передачи остается постоянной. Учитывая это, скорость передачи информации аналитически представляется как

$$C = \bar{I}(Z, Y) = \lim_{T \rightarrow \infty} I(Z, Y)/T, \quad (11.6)$$

где  $I(Z, Y)$  - количество информации, переданное сигналом длительностью  $T$ .

*Пропускной способностью канала* называется максимальная теоретиче-

ски достижимая для этого канала скорость передачи информации.

Пропускная способность информационного канала  $C = \max \{\bar{I}(Z, Y)\}$ .

Скорость передачи информации в общем случае зависит от статистических свойств сообщения, метода кодирования и свойств канала. Пропускная способность - это характеристика канала. Она не зависит от фактической скорости передачи информации. С целью наиболее эффективного использования информационного канала необходимо принимать меры, чтобы скорость передачи информации была по возможности более близкой к пропускной способности канала. Тем не менее скорость введения информации в канал не должна превышать пропускную способность канала, иначе не вся информация будет передана по каналу.

*Скорость введения информации* - аналитическое отношение среднего количества информации, заложенной в информационном потоке на входе канала, к продолжительности сообщения

$$\bar{I}(X) = \lim_{T \rightarrow \infty} I(X)/T, \quad (11.7)$$

где  $I(X)$  - среднее количество информации, заложенной в сообщении на входе канала;  $T$  - продолжительность сообщения.

Таким образом, должно выполняться *основное условие динамического согласования информационного потока источника сообщений и информационного канала*:

$$\bar{I}(X) \leq C. \quad (11.8)$$

Одним из основных вопросов в теории передачи информации является определение зависимости скорости передачи информации и пропускной способности канала от его параметров и характеристик сигналов и помех. Эти вопросы впервые глубоко исследовал Клод Шеннон.

Рассмотрим три вида каналов: дискретный канал без помех, дискретный канал с помехами и непрерывный канал с помехами.

**Помехи в непрерывном канале.** *Помехой* называется любой нежелательный процесс или действие, влияющее на сигнал и усложняющее его достоверный прием.

Для рассмотрения помех сигнал на выходе канала представляют в виде:

$$y(t) = x(t)n_m(t) + n_a(t),$$

где  $x(t)$  - чистый, или полезный, информационный сигнал на входе передатчика;  $y(t)$  - сигнал на входе приемника;  $n_m(t)$  - *мультипликативная* помеха, обусловленная случайными изменениями параметров канала;  $n_a(t)$  - *аддитивная* помеха, которая имеет размерность сигнала и прибавляется к сигналу. Обычно считают, что аддитивная помеха возникает в сети связи.

Аддитивные помехи предопределяются многочисленными факторами, такими как флуктуационные шумы, вызванные тепловыми процессами в резисторах и других элементах схем, промышленные помехи, в частности от

наводок линий электропитания, контактной сети, радиостанций, других сетей связи. Аддитивные помехи делятся на *сосредоточенные* и *флуктуационные*.

Сосредоточенные помехи бывают узкополосные (сосредоточенные в узкой полосе частот) и импульсные (сосредоточенные во времени). Узкополосные помехи характерны для радиосвязи (помехи от соседних станций); борьба с ними ведется методами повышения селективности систем.

*Импульсные помехи* - случайные последовательности импульсов, создаваемые промышленными установками (например, в цепи контактный провод – «пантограф»). Помеха считается импульсной, если ее длительность намного меньше длительности сигнала  $\tau_n \ll T_c$ . Борьба с импульсной помехой - применение систем с широкополосными усилителями, ограничителями, узкополосными усилителями, с использованием низкочастотных и сверхвысокочастотных диапазонов, где спектральная плотность мощности помех спадает.

*Флуктуационная помеха* распределена в широком спектре частот. Мощность теплового шума на 1 Ом нагрузки в полосе частот  $\Delta f$  определяется по формуле  $P_n = \sigma^2 = \Delta f 4KT$ , где  $K = 1,37 \cdot 10^{-23}$  Дж/К - постоянная Больцмана;  $T$  - абсолютная температура.

**Общая характеристика дискретного канала.** Как уже отмечалось, дискретный канал имеет в своем составе непрерывный канал, через который дискретные сигналы (последовательность символов) проходят как непрерывные, отличающиеся друг от друга кодовыми признаками. На эти сигналы действуют помехи, вследствие чего на выходе дискретного канала появляется последовательность символов, среди которых есть искаженные. Это означает, что в канале возникли ошибки.

Дискретный канал в общем виде представляется совокупностью дискретного модулятора на входе, непрерывного канала и дискретного демодулятора на выходе (рис. 11.10). Дискретный канал характеризуется:

*алфавитом входа*  $B_e = (b_1; b_2; \dots; b_i; \dots; b_{m-1})$ , например 0, 1, 2, ...;

*алфавитом выхода*  $B'_e = (b'_1; b'_2; \dots; b'_i; \dots; b'_{m-1})$ , причем алфавиты входа и выхода не обязательно совпадают, например выходной алфавит может иметь избыточные символы ( $m$  - основа кода);

*скоростью передачи*  $V_k$  символов/с. Эта скорость определяется в основном свойствами непрерывного канала - его памятью;

*матрицей или графом переходов*, т.е. совокупностью условных вероятностей  $P(b'_i / b_j)$  того, что при входном символе  $b_j$  на выходе будет  $b'_i$ .

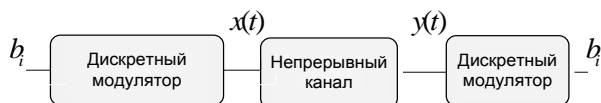


Рис. 11.10. Дискретный канал в общем виде

Дискретный канал, кроме перечисленных (см. рис. 11.11), имеет такие характеристики, как *пропускная способность* и *количество переданной по каналу информации*.

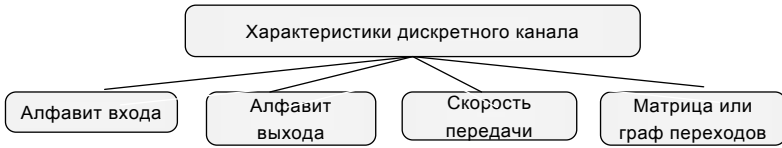


Рис. 11.11. Характеристики дискретного канала

**Модели дискретных каналов передачи данных.** Помехи и искажения в непрерывном канале вызывают появление в дискретном канале потока ошибок. В зависимости от свойств потока ошибок дискретные каналы могут описываться такими моделями.

1. *Двоичный симметричный канал без памяти* характеризуется тем, что каждый переданный символ может быть принят или ошибочно с вероятностью  $P_0$ , или правильно с вероятностью  $1 - P_0$ , причем в случае ошибки переходы  $1 \rightarrow 0$  и  $0 \rightarrow 1$  равновероятны. Вероятность того, что при передаче  $b_j$  будет получен  $b'_i$ :  $P(b'_i / b_j) = P_0$  при  $i \neq j$ ,  $P(b'_i / b_j) = 1 - P_0$  при  $i = j$ .

Отсутствие памяти проявляется в том, что условная вероятность  $P(b'_i / b_j)$  не зависит от предыдущих событий, т.е. от того, какие символы передавались ранее и как они были приняты.

Вероятность  $P(b'_i / b_j)$  называется *априорной вероятностью* и для данного канала определяется на основе продолжительных экспериментов.

Физический смысл симметрии канала заключается в том, что в дискретном демодуляторе, называемом также *первой расчетной схемой*, пороговый уровень выбран точно внутри между средними значениями сигналов, которые соответствуют нулю и единице. Если бы этот уровень был выбран возле значения 0, то за счет помехи вероятность перехода  $0 \rightarrow 1$  была бы большей, чем вероятность перехода  $1 \rightarrow 0$ . Вероятность переходов в двоичном симметричном канале иллюстрирует рис. 11.12, а.

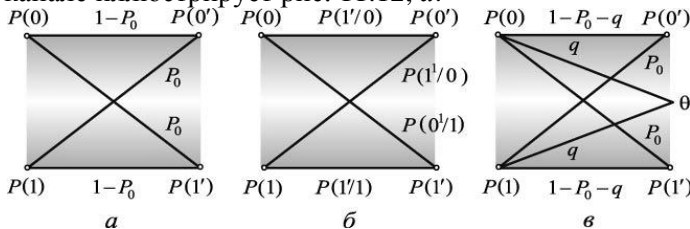


Рис. 11.12. Графы вероятностей переходов в двоичных симметричных каналах без памяти: а - с равными переходами; б - с неравными переходами; в - со стиранием памяти

2. *Двоичный несимметричный канал без памяти* отличается от предыдущей модели неодинаковой вероятностью переходов  $0 \rightarrow 1$  и  $1 \rightarrow 0$ . Графы переходов для данной модели изображены на рис. 11.12, б.

Полная вероятность приема символа  $b'_i$  для двоичного канала на базе вероятности входных символов и условной вероятности переходов определяется как:  $P(0') = P(0)P(0'/0) + P(1)P(0'/1)$ ;  $P(1') = P(1)P(1'/1) + P(0)P(1'/0)$ .

Средняя вероятность ошибки в канале:

$$P_0 = P(0) P(1'/0) + P(1) P(0'/1). \quad (11.9)$$

3. *Симметричный канал без памяти со стиранием* отличается от симметричного канала наличием в алфавите на выходе канала дополнительного символа, который появляется при ненадежном опознавании демодулятором переданного символа.

Естественно, что в таком канале вероятность ошибочных переходов уменьшается за счет вероятности  $q$  появления символа стирания  $\theta$ .

Граф переходов для рассматриваемого канала приведен на рис. 11.12, в. Физический смысл канала со стиранием заключается в том, что в демодуляторе создаются два пороговых уровня; при этом фиксируется нуль, если уровень принятого непрерывного сигнала меньше нижнего уровня; фиксируется единица, если уровень сигнала больше верхнего уровня. Символ стирания  $\theta$  фиксируется (его можно и не фиксировать) в случае попадания сигнала в промежуток между уровнями.

**Основная задача приема дискретных сигналов.** *Заданным* называется дискретный канал, если известны его алфавиты входа  $(0,1)$  и выхода  $(0',1')$ , а априорная вероятность перехода символов входного алфавита в символы выходного определена условными вероятностями  $P(0'/0)$ ,  $P(1'/0)$ ,  $P(0'/1)$ ,  $P(1'/1)$ .

*Обратная задача приема* - определение апостериорной вероятности того, что при приеме была подтверждена указанная гипотеза, например, при приеме нуля был передан нуль.

Поскольку нуль в приемнике можно было получить также и за счет ошибочного перехода  $1 \rightarrow 0$ , в случае двоичного канала необходимо рассматривать две гипотезы появления нуля на выходе приемника и определять вероятность этих гипотез по формуле Байеса (рис. 11.13):

$$P(0/0') = P(0)P(0'/0) / [P(0)P(0'/0) + P(1)P(0'/1)];$$

$$P(1/0') = P(1)P(0'/1) / [P(1)P(0'/1) + P(0)P(0'/0)]. \quad (11.10)$$

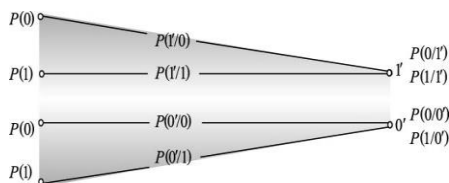


Рис. 11.13. Граф переходов в двоичном канале

Вероятность каждой гипотезы определяется отношением вероятности приема данного символа к полной вероятности его приема. Сравнивая вероятность гипотез, особенно при приеме маловероятного символа, когда вероятность гипотезы относительно правильного перехода приблизительно равна вероятности ошибочного перехода, приходят к выводу о неудовлетворительной работе канала. Улучшения можно достичь изменением порогового уровня так, чтобы априорная вероятность, например приема нуля при передаче единицы  $P(0' / 1)$ , была намного меньше вероятности  $P(1)$ .

### 11.3. Скорость передачи информации в каналах связи

**Скорость передачи информации и пропускная способность дискретного канала без помех.** *Дискретный канал передачи информации - совокупность методов и средств, предназначенных для передачи дискретных сигналов от источника сообщения к потребителю.*

На вход такого канала подаются дискретные сообщения  $X$  создаваемые из первичного алфавита  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Эти сообщения кодируются с помощью кодеров (см. рис. 11.3) и превращаются в кодированные сообщения  $Y$ . Для кодирования используется некоторый алфавит символов  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . Суть кодирования сводится к представлению отдельных сообщений или последовательностей сообщений определенными комбинациями символов используемого алфавита.

*Скорость ввода информации дискретного канала*

$$\bar{I}(X) = H(X) / \bar{\tau}_X = \bar{V}_X H(X), \quad (11.11)$$

где  $H(X)$  - средняя энтропия одного сообщения;  $\bar{\tau}_X$  - средняя продолжительность сообщения.

*Скорость выдачи символов сообщения источником  $\bar{V}_X = 1 / \bar{\tau}_X$ .*

Под *продолжительностью сообщения* понимается интервал времени, в течение которого сообщение на выходе источника информации формируется или существует.

*Средняя продолжительность  $\bar{\tau}_X$  информационного сообщения на фоне источника при отсутствии статистических зависимостей между сообщениями определяется выражением:*

$$\bar{\tau}_X = \sum_{i=1}^n p(x_i) \tau_{x_i}, \quad (11.12)$$

где  $p(x_i)$  и  $\tau_{x_i}$  - априорная вероятность и продолжительность  $i$ -го сообщения соответственно;  $n$  - количество сообщений.

В канале без помех каждому определенному входному сигналу всегда будет соответствовать тот же сигнал на выходе канала, другими словами, входные и выходные сигналы связаны между собой однозначной функциональной зависимостью (рис. 11.14, а).



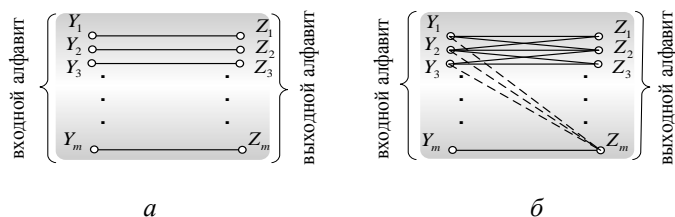


Рис. 11.14. Графы функциональных зависимостей между входом и выходом дискретного канала без помех (а) и с помехами (б)

*Среднее количество информации* в этом случае равно энтропии символа на входе канала, дв. ед./символ  $I(Y) = H(Y)$ .

*Скорость передачи информации в дискретном канале без помех*, дв. ед./символ

$$I(Y) = \bar{U}_Y \cdot H(Y), \quad (11.13)$$

где  $\bar{U}_Y = 1 / \bar{\tau}_Y$  - скорость передачи элементарных символов сигнала;  $\tau_Y$  - средняя продолжительность элементарных сигналов.

*Пропускная способность дискретного канала без помех*:  $C = \max\{\bar{U}_Y H(Y)\}$ .

*Максимальная скорость передачи информации  $\bar{U}_Y$  будет обеспечена при максимальном значении энтропии кодированного сигнала*

$$C = \bar{U}_Y \max\{H(Y)\} = \bar{U}_Y \log_2 n, \quad (11.14)$$

*т.е. в случае равномерного распределения вероятностей и статистической независимости символов алфавита сигналов.*

Таким образом, скорость передачи информации может быть максимальной при условии согласования определенным образом статистических характеристик источника сообщений со свойствами информационного канала. Для каждого источника сообщений подобное согласование может быть достигнуто специальным выбором способа кодирования сигналов. На вопрос, в какой степени скорость передачи информации может быть приближена к пропускной способности информационного канала, отвечает теорема К. Шеннона для дискретного канала без помех.

**Теорема К. Шеннона для дискретного канала связи без помех:** *если поток информации от источника достаточно близок к пропускной способности канала, т.е. если выполняется равенство*

$$\bar{I}(X) = C - \delta, \quad (11.15)$$

где  $\delta$  - достаточно малая величина, то всегда можно найти такой способ кодирования, который обеспечит передачу всех сообщений от источника к потребителю, причем скорость передачи информации будет достаточно близкой к пропускной способности канала  $\bar{I}(Z, Y) = C - \delta$ .

**Обратное утверждение теоремы:** *невозможно обеспечить продолжительную передачу всех сообщений, если поток информации от источника*

превышает пропускную способность канала  $\bar{I}(X) > C$ .

Итак, теорема К. Шеннона утверждает, что при выполнении условия (11.15) скорость передачи информации может быть в принципе в достаточной степени приближена к пропускной способности канала. Это может быть обеспечено соответствующим кодированием сигналов. Тем не менее рассмотренная теорема не отвечает на вопрос, каким образом нужно осуществлять кодирование.

**Скорость передачи информации и пропускная способность дискретного канала с помехами.** При наличии помех в канале передачи информации нарушается однозначное соответствие между входным и выходным алфавитами канала. Одному входному сигналу могут соответствовать различные выходные сигналы (см. рис. 11.14, б). Из-за случайного характера помех невозможно заранее точно установить, какой сигнал может быть принят на выходе канала при посылке определенного входного сигнала. Речь может идти только о вероятностях получения на выходе канала элементарного сигнала  $z_Y$  при условии, что был отправлен соответствующий элементарный сигнал.

*Вероятностный характер связи* между входным и выходным алфавитами канала передачи информации полностью определяется матрицей переход-

ных вероятностей  $\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \dots p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \dots p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \dots \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} \dots p_{nm} \end{vmatrix}$ , где  $p_{ij}$  - условная вероятность перехода  $i$ -

го символа входного алфавита в  $j$ -й символ выходного алфавита. Т.е. выполняется равенство:  $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$ .

*Бинарным каналом* называется дискретный канал, по которому передаются только два типа элементарных сигналов.

Матрица переходных вероятностей для такого канала  $\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}$ .

*Симметричным* называется канал при условии, что все вероятности правильной передачи сигналов одинаковы, а также одинаковы все вероятности искаженной передачи.

Для симметричного бинарного канала матрица переходных вероятностей  $\begin{vmatrix} p & q \\ q & p \end{vmatrix}$ , где  $p = p_{11} = p_{22}$  - вероятность правильной передачи;  $q = p_{12} = p_{21}$  - вероятность искаженной передачи.

Поскольку в симметричном канале вероятности искажения всех символов сигнала одинаковы, то можно утверждать, что в таком канале помехи не зависят от передаваемых сигналов.

На рис. 11.15 приведен график переходных вероятностей двоичного

симметричного канала.

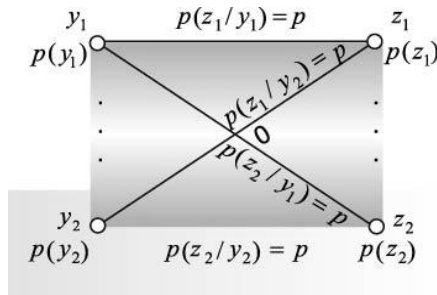


Рис. 5.15. Граф вероятностей переходов в двоичном симметричном канале без памяти с помехами

*Скорость передачи информации дискретного канала с помехами*

$$\bar{I}(Z, Y) = \bar{U}_Y [H(Y) - H(Y/Z)], \quad (11.16)$$

где  $H(Y/Z)$  - остаточная энтропия сигнала, обусловленная действием помех.

Выражение для скорости передачи информации можно представить также в виде

$$\bar{I}(Z, Y) = \bar{U}_Y [H(Z) - H(Z/Y)], \quad (11.17)$$

где  $H(Z)$  - энтропия выходного сигнала;  $H(Z/Y)$  - условная энтропия выходного сигнала по известной энтропии входного сигнала.

*Каналом без памяти* называется дискретный канал, в котором помехи влияют на каждый переданный символ информационного сигнала независимо от того, какие сигналы передавались раньше.

В таких каналах помехи не вызывают дополнительных коррелятивных связей между символами.

В случае независимости отдельных символов сигнала выражения (11.16) и (11.17) для канала без памяти приобретают следующий вид:

$$\bar{I}(Z, Y) = \bar{U}_Y \left[ -\sum_{i=1}^n p(y_i) \log_2 p(y_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p(z_i) p(y_i/z_i) \log_2 p(y_i/z_i) \right]; \quad (11.18)$$

$$\bar{I}(Z, Y) = \bar{U}_Y \left[ -\sum_{i=1}^n p(z_i) \log_2 p(z_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p(y_i) p(z_i/y_i) \log_2 p(z_i/y_i) \right]. \quad (11.19)$$

В качестве **примера** рассмотрим бинарный канал. Для такого канала алфавиты входного  $Y$  и выходного  $Z$  сигналов состоят из двух символов:  $Y = \{y_1, y_2\}$ ;  $Z = \{z_1, z_2\}$ . Для сокращения записи обозначим вероятности искажения сигналов:  $p(z_1/y_1) = q_1$ ;  $p(z_2/y_2) = q_2$ . Очевидно, что вероятности правильной передачи будут:  $p(z_1/y_1) = 1 - q_2$ ;  $p(z_2/y_2) = 1 - q_1$ . При этом выражение (11.19) приобретет вид

$$\begin{aligned} \bar{I}(Z, Y) = & \bar{U}_Y \{ -p(z_1) \log_2 p(z_1) - p(z_2) \log_2 p(z_2) + \\ & + p(y_1) [(1 - q_2) \log_2 (1 - q_2) + q_2 \log_2 q_2] + p(y_2) [q_1 \log_2 q_1 + (1 - q_1) \log_2 (1 - q_1)] \}. \end{aligned}$$

Максимизируя правую часть выражения (11.19), можем определить пропускную

способность канала. Очевидно, что этого можно достичь за счет оптимизации значений априорных вероятностей  $p(y_1)$  и  $p(y_2)$  передачи сигналов  $y_1$  и  $y_2$ , поскольку никаких других параметров канала изменять мы не можем.

*Рассмотрим частные случаи.*

1. Вероятности искажения сигналов  $q_1 = q_2 = q$ . Этот случай соответствует симметричному каналу. Для симметричного канала условная энтропия

$$H(Z/Y) = -[p(y_1) + p(y_2)][q \log_2 q + (1 - q) \log_2 (1 - q)] = \\ = q \log_2 q + (1 - q) \log_2 (1 - q), \quad (11.20)$$

поскольку  $p(y_1) + p(y_2) = 1$ . Из выражения (11.20) следует, что условная энтропия не зависит от априорных вероятностей  $p(y_1)$  и  $p(y_2)$ . Итак, максимальная скорость передачи информации достигается в этом случае при таком распределении вероятностей  $p(y_1)$  и  $p(y_2)$ , при котором энтропия  $H(Z)$  оказывается максимальной. Это будет в случае равенства априорных вероятностей  $p(z_1) = p(z_2)$ . Тогда максимальное значение энтропии  $H(Z_{\max}) = 1$  дв. ед. и пропускная способность канала определяется выражением

$$C = \bar{U}_Y [\log_2 2 + q \log_2 q + (1 - q) \log_2 (1 - q)]. \quad (11.21)$$

Используя известное правило теории вероятностей:

$$p(z_i) = \sum_{i=1}^n p(y_i) p(z_i / y_i), \quad (11.22)$$

можно показать, что равенство априорных вероятностей выходных сигналов  $Z_1$  и  $Z_2$  для симметричного канала достигается в случае равенства априорных вероятностей входных сигналов. Таким образом, в симметричном бинарном канале с помехами максимальная скорость передачи информации достигается при таком же условии, как и в канале без помех. Однако из сравнения формул (11.21) и (11.14) следует, что наличие помех в канале приводит к уменьшению пропускной способности канала.

2. Вероятности искажения сигналов  $q_1 = 0, q_2 \neq 0$ , т.е. искажения возникают лишь при передаче сигналов  $y_2$ . Из формулы (11.19) с использованием выражения (11.22) для этого случая получаем

$$\bar{I}(Z, Y) = \bar{U}_Y \{-p(y_1) \log_2 p(y_1) q_2 \log_2 q_2 - [p(y_2) + \\ + p(y_1) q_2] \log_2 [p(y_2) + p(y_1) q_2]\}.$$

Максимальное значение скорости передачи информации достигается при условии

$$p(y_1)_{\text{опт}} = 1 / \left( 1 + q_2^{q_2 / (1 - q_2)} - q_2 \right). \quad (11.23)$$

Пропускная способность такого канала определяется выражением:

$$C = \bar{U}_Y \{-p(y_1)_{\text{опт}} + \log_2 p(y_1)_{\text{опт}} + p(y_1)_{\text{опт}} q_2 \log_2 q_2 - \\ - [1 - p(y_1)_{\text{опт}} + p(y_1)_{\text{опт}} q_2] \log_2 [1 - p(y_1)_{\text{опт}} + p(y_1)_{\text{опт}} q_2]\}. \quad (11.24)$$

На рис. 11.16 приведены графики  $C / \bar{U}_Y = C \bar{\tau}_Y$ ,  $p(y_1)_{\text{опт}}$  и  $p(y_2)_{\text{опт}} = 1 - p(y_1)_{\text{опт}}$  как функции от вероятности  $q_2$ . Как следует из графиков, с увеличением  $q_2$  от 0 до 1 пропускная способность спадает от  $U_Y = 1 / \tau_Y$  до нуля.

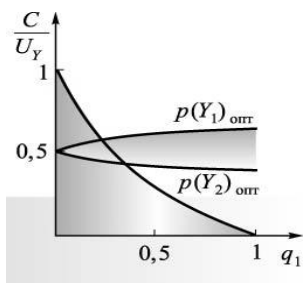


Рис. 11.16. Пропускная способность канала в зависимости от вероятностей искажений

**Теорема К. Шеннона для дискретного канала с помехами:** если поток информации от источника сообщений достаточно близок к пропускной способности канала (если выполняется равенство  $\bar{I}(X) = C - \delta$ , где  $\delta$  - достаточно малая величина), то всегда можно найти такой способ кодирования, который обеспечит передачу всей информации, создаваемой источником сообщений, со сколь угодно малой вероятностью неправильного (ошибочного) выявления любого переданного сообщения  $p_{н.в}$  (т.е.  $p_{н.в} < \eta$ ,

где  $\eta$  - бесконечно малая величина).

**Обратное утверждение теоремы:** если поток информации источника превышает пропускную способность канала, то не существует способа кодирования, который обеспечивает передачу любого сообщения с малой вероятностью ошибки.

Теорема определяет соотношение между скоростью создания сообщений источником, пропускной способностью канала при наличии помех и вероятностью передачи. Если для канала без помех характерной является эффективность передачи, то для канала с помехами - эффективность и вероятность передачи. Эта теорема, как и теорема для канала без помех, не отвечает на вопрос, каким образом нужно осуществлять кодирование, чтобы приблизить скорость передачи информации к пропускной способности канала. Но для приближения скорости передачи к предельной общим методом как для канала с помехами, так и для канала без помех является кодирование длинных сообщений.

**Скорость передачи информации и пропускная способность непрерывного канала с помехами.** Непрерывный канал передачи информации - совокупность методов и средств, предназначенных для передачи непрерывных сигналов от источника сообщения к потребителю.

В отличие от дискретных каналов, в непрерывных каналах вместо кодирующих и декодирующих устройств может использоваться широкий класс различных преобразователей. Для передачи информации по каналу может применяться модуляция одного или нескольких параметров сигнала. Независимо от конкретного характера преобразования сигналов входные и выходные сигналы непрерывного канала задаются в виде ансамблей непрерывных функций с соответствующими функциями плотности распределения вероятностей.

Пусть на вход канала поступает непрерывный сигнал  $Y(t)$  продолжительности  $T$ . Вследствие влияния помех  $\xi(t)$  выходной сигнал  $Z(t)$  будет

отличаться от входного. Количество информации в случайном сигнале  $Z(t)$  относительно случайного сигнала  $Y(t)$  определяется известной зависимостью

$$I_T(Z, Y) = H_T(Z) - H_T(Z/Y) \quad (11.25)$$

В соответствии с теоремой Котельникова, непрерывные сигналы  $Y(t)$  и  $Z(t)$  можно представить совокупностями отсчетов  $y_i$  и  $z_i$  в дискретные моменты времени (рис. 11.17), являющиеся случайными величинами. Распределение совокупности случайных величин описывается многомерными плотностями распределения вероятности  $w(y_1, y_2, \dots, y_m)$  и  $w(z_1, z_2, \dots, z_m)$ . Тогда дифференциальная энтропия сигнала на выходе канала

$$h_i(Z) = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(z_1, z_2, \dots, z_m) \log_2 w(z_1, z_2, \dots, z_m) dz_1, dz_2, \dots, dz_m.$$

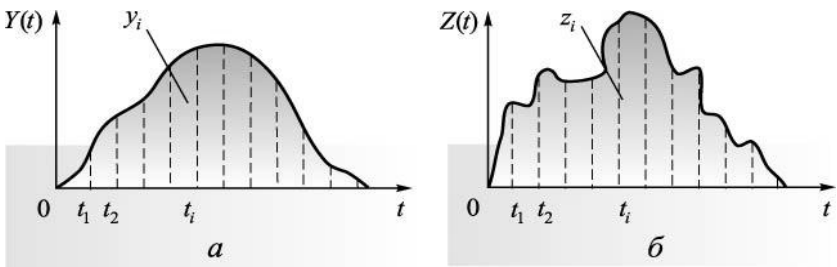


Рис. 11.17. Случайный информационный сигнал (а) и смесь информационного сигнала и помех (б)

В соответствии с критерием М. А. Железнова при квантовании случайных сигналов по времени интервал квантования необходимо брать равным интервалу корреляции функции  $\tau_0$ . Тогда случайные величины  $z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_m$  можно считать независимыми и такими, что

$$w(z_1, z_2, \dots, z_m) = w(z_1)w(z_2) \dots w(z_m).$$

Исходя из равенства энтропии совокупности независимых случайных величин сумме энтропии случайных величин, получаем следующее выражение для дифференциальной энтропии сигнала:

$$h_T(Z) = \sum_{i=1}^m h(z_i), \quad \text{где}$$

$$h(z_i) = - \int_{-\infty}^{\infty} w(z_i) \log_2 w(z_i) dz_i$$

- дифференциальная энтропия  $i$ -го отсчета сигнала  $Z$ ;  $m = T/\Delta t$  - общее количество отсчетов сигнала  $Z$  продолжительности  $T$ ;  $\Delta t$  - интервал временного квантования.

Ограничиваясь рассмотрением стационарных процессов, получаем

$$w(z_1) = w(z_2) = \dots = w(z_m); \quad h(z_1) = h(z_2) = \dots = h(z_m) = h(Z).$$

Тогда  $h_T(Z) = m h(Z)$ , где  $h(Z)$  - дифференциальная энтропия одного отсчета. Аналогично можно утверждать, что условная дифференциальная энтропия

$h_T(Z/Y) = m h(Z/Y)$ , где  $h(Z/Y)$  - условная дифференциальная энтропия одного отсчета. Таким образом, выражение для количества информации приобретает вид  $I_T(Z, Y) = m[h(z) - h(Z/Y)]$ .

*Скорость передачи информации в непрерывном канале с помехами*

$$\bar{I}_T(Z, Y) = m[h(z) - n(Z/Y)]/T = F_0[h(Z) - h(Z/Y)], \quad (11.26)$$

где  $F_0 = m/T = 1/\Delta t$  - частота временного квантования (отсчета).

*Пропускная способность канала в непрерывном канале с помехами*

$$C = \max[\bar{I}_T(Z, Y)] = F_0 \max[h(Z) - h(Z/Y)]. \quad (11.27)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Сигнал ограниченной мощности передается по каналу, в котором действует аддитивная помеха ограниченной мощности типа белого гауссового шума. При аддитивной помехе сигнал  $Z(t)$  на выходе канала будет равен:  $Z(t) = Y(t) + \xi(t)$ , где  $\xi(t)$  - помеха, действующая в канале передачи информации. Средние мощности сигнала и помехи соответственно равны  $P_Y$  и  $P_\xi = \sigma_\xi^2$ . Полоса пропускания канала ограничена значениями 0 и  $F_k$ . Ширина спектра сигнала и помехи ограничиваются полосой пропускания канала. Частота квантования ограниченного по спектру сигнала в соответствии с теоремой Котельникова  $F_0 = 2F_k$ . Тогда выражение (11.27) для пропускной способности канала приобретет вид

$$C = 2F_k \max[h(Z) - h(Z/Y)]. \quad (11.28)$$

При взаимно независимым сигнале  $Y$  и помехе  $\xi$  вероятность того, что при передаче сигнала  $Y$  выходной сигнал будет равен  $Z = Y + \xi$ , должна определяться вероятностью того, что помеха приобретет значение  $\xi = Z - Y$ , т.е.  $w(Z/Y)dY = w(\xi)d\xi$ . При этом

$$w(Z/Y) = w(Y + \xi/Y) = w(Y/Y + \xi/Y) = w(Y/Y) w(\xi/Y) = w(\xi). \quad (11.29)$$

Учитывая формулу (11.29), выражение для условной дифференциальной энтропии  $h(Z/Y)$  можно преобразовать таким образом:

$$\begin{aligned} h(Z/Y) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(Y) w(Z/Y) \log_2 w(Z/Y) dY dZ = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} w(Y) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) \log_2 w(\xi) d\xi \right] dY = h(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} w(Y) dY = h(\xi), \end{aligned} \quad (11.30)$$

где  $h(\xi)$  - дифференциальная энтропия помехи.

Итак, в случае аддитивной помехи условная дифференциальная энтропия  $h(Z/Y)$  полностью определяется свойствами помехи. Ранее было установлено, что выражение для дифференциальной энтропии сигнала, распределенного по нормальному закону, имеет вид

$$h(\xi) = \log_2(\sqrt{2\pi e} \sigma_\xi), \quad (11.31)$$

где  $e$  — основа натурального логарифма,  $e = 2,7$ . Подставив выражение (11.31) в формулу (11.28), получим для пропускной способности канала

$$C = 2F_k \max\{h(Z) - \log_2 \sqrt{2\pi e} \sigma_\xi\}. \quad (11.32)$$

Поскольку значение  $\sigma_\xi$  задано, то максимальное значение выражения (5.32) будет обеспечено при условии максимизации дифференциальной энтропии выходного сигнала  $h(Z)$ . Средние мощности входного сигнала  $Y(t)$  и помехи  $\xi(t)$  ограничены, поэтому средняя мощность выходного сигнала  $Z(t)$  также ограничена. Дифференциальная энтропия  $h(Z)$  будет максимальна, если  $Z(t)$  характеризуется нормальным законом распределения. Если же суммарный сигнал  $Z(t)$  и одна из его составляющих  $\xi(t)$  распределены по нормальному закону, то и вторая составляющая, т.е. входной сигнал  $Y(t)$ , также должна соответствовать нормальному закону распределения.

Дифференциальная энтропия выходного сигнала

$$h(Z) = \log_2(\sqrt{2\pi e} \sigma_Z) = \log_2 \sqrt{(\sigma_Y^2 + \sigma_\xi^2)2\pi e}. \quad (11.33)$$

Подставляя выражение (11.31) в формулу (11.30), окончательно получаем

$$\begin{aligned} C &= 2F_k \left[ \log_2 \sqrt{(\sigma_Y^2 + \sigma_\xi^2)2\pi e} - \log_2 \sqrt{\sigma_\xi^2 2\pi e} \right] = \\ &= F_k \log_2 (\sigma_Y^2 + \sigma_\xi^2) / \sigma_\xi^2 = F_k \log_2 (1 + P_Y/P_\xi), \end{aligned} \quad (11.34)$$

где  $P_Y = \sigma_Y^2$  - средняя мощность полезного сигнала;  $P_\xi = \sigma_\xi^2$  - средняя мощность помехи. Скорость передачи информации сигналами с ограниченной средней мощностью по каналу, в котором действует белый гауссовский шум, оказывается максимальной в случае полного подобия сигнала и помехи; при этом максимальная скорость передачи информации будет обеспечена, если в качестве физического носителя информации применять стационарный случайный процесс в виде белого гауссовского шума.

Как следует из формулы (11.34), пропускную способность канала можно регулировать, изменяя  $F_k$  или  $P_Y$ . При этом зависимость пропускной способности канала от  $F_k$  при постоянной мощности сигнала практически нелинейна. Это обусловлено тем, что мощность помехи  $P_\xi$  также зависит от ширины частотного спектра. В самом деле, энергетический спектр белого шума равномерен, поэтому мощность такой помехи можно представить в виде

$$P_\xi = P_0 F_k, \quad (11.35)$$

где  $P_0$  - мощность помехи, приходящаяся на полосу в 1 Гц (спектральная плотность мощности помехи).

Подставив (11.35) в (11.34), получим выражение, определяющее настоящий характер зависимости пропускной способности канала (рис. 11.18) от



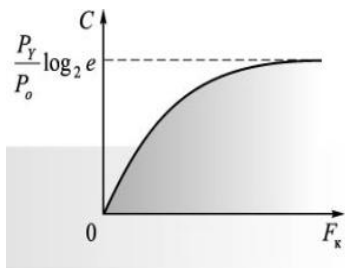


Рис. 11.18.

ширины его полосы пропускания:

$$C = F_k \log_2 (1 + P_Y / P_0 F_k). \quad (11.36)$$

Определим границу, к которой стремится пропускная способность канала при неограниченном увеличении его полосы пропускания:

$$\lim_{F_k \rightarrow \infty} C = \lim_{F_k \rightarrow \infty} [F_k \log_2 (1 + P_Y / P_0 F_k)].$$

Раскрывая неопределенность, получаем предельное значение пропускной способности канала:

$$\lim_{F_k \rightarrow \infty} C = P_Y \log_2 e / P_0. \quad (11.37)$$

Из формулы (11.37) следует, что максимальное значение, к которому стремится пропускная способность канала с ростом ширины его полосы пропускания, пропорционально отношению средней мощности сигнала к спектральной плотности мощности помехи.

Из приведенного анализа можно сделать вывод: *нет смысла чрезмерно увеличивать полосу пропускания канала, поскольку с расширением полосы пропускания возрастание пропускной способности канала замедляется, и в границе при  $F_k \rightarrow \infty$  пропускная способность приближается к постоянной величине. При этом полоса пропускания достигает значения, близкого к отношению  $P_Y / P_0$ .*

Предельно возможное значение пропускной способности можно увеличить за счет увеличения отношения  $P_Y / P_0$ . Сигнал ограниченной мощности передается по каналу, в котором действует аддитивная помеха в виде произвольного шума.

При определенном среднеквадратичном значении помехи наибольшую энтропию имеет помеха с нормальным законом распределения вероятностей

При любом другом законе распределения вероятностей помехи ее энтропия меньше.

Зависимость энтропии от вида закона распределения побудила К. Шеннона характеризовать помеху не ее настоящей мощностью, а так называемой энтропийной мощностью. Под *энтропийной мощностью* К. Шеннон понимал мощность эквивалентного белого шума, имеющего такую же продолжительность, ширину спектра и энтропию, что и данная помеха.

Таким образом, если произвольная помеха  $\xi(t)$  характеризуется энтропией на один отсчет  $h(t)$ , то мощность эквивалентного белого шума, т.е. энтропийную мощность  $\sigma_{\xi_e}^2$ , можно определить из условия

$$h(\xi) = \log 2 \sqrt{2\pi e \sigma_{\xi_e}^2}, \quad \sigma_{\xi_e}^2 = 2^{h(\xi)} / 2\pi e = 2^{h(\xi)-1} / \pi e. \quad (11.38)$$

Значение отношения средней мощности помехи  $\sigma_{\xi}^2$  к ее энтропийной мощности  $\sigma_{\xi e}^2$  определяется законом распределения помехи. Обозначив данное отношение через  $k_e$ , получим

$$\sigma_{\xi}^2 = k_e \sigma_{\xi e}^2. \quad (11.39)$$

В частности, для закона равной вероятности  $k_e = 1, 3$ .

Используя понятие энтропийной мощности, можно получить выражение для пропускной способности канала, в котором действует произвольная помеха:

$$\begin{aligned} C &= 2F_k [\log_2 \sqrt{(\sigma_Y^2 + \sigma_{\xi}^2)2\pi e} - \log_2 \sqrt{\sigma_{\xi e}^2 2\pi e}] = \\ &= F_k \log_2 \left[ (\sigma_Y^2 + \sigma_{\xi}^2) / \sigma_{\xi e}^2 \right] = F_k \log_2 \left[ k_e (\sigma_Y^2 + \sigma_{\xi}^2) / \sigma_{\xi}^2 \right]. \end{aligned} \quad (11.40)$$

Для всех законов распределения (кроме нормального) коэффициент  $k_e > 1$ , поэтому пропускная способность канала, в котором действует произвольная помеха, будет всегда больше пропускной способности канала, в котором действует белый шум с такой же средней мощностью, что и произвольная помеха.

**Теорема К. Шеннона для непрерывного канала с помехами:** *если энтропия  $\bar{H}_{\xi}(X)$  источника непрерывных сообщений, определяющая количество информации в единицу времени при заданной оценке  $g$  правильности воспроизведения, достаточно близка к пропускной способности канала (т.е. выполняется соотношение  $\bar{H}_{\alpha}(X) = C - \alpha$ , где  $\alpha$  - бесконечно малая величина), то существует такой метод передачи, при котором все сообщения от источника могут быть переданы с правильностью воспроизведения, как угодно близкой к  $g$ .*

**Обратное утверждение** этой теоремы говорит о том, что такая передача невозможна, если  $\bar{H}_{\alpha}(X) > C$ .

Теорема дает возможность находить предельно достижимую эффективность непрерывных каналов. Количество информации, которую можно передать по каналу за время его работы  $T_k$  при влиянии помех типа белого шума,

$$I_T(Z, Y) = T_k F_k \log_2 \left( 1 + P_Y / P_{\xi} \right). \quad (11.41)$$

Практически в большинстве случаев мощность полезного сигнала значительно превышает мощность помех. В этих случаях выражение (11.41) можно с достаточным приближением представить в виде

$$I_T(Z, Y) = T_k F_k \log_2 P_Y / P. \quad (11.42)$$

В формулах (11.41) и (11.42) члены  $\log_2 \left( 1 + P_Y / P_{\xi} \right)$ ,  $\log_2 \left( P_Y / P_{\xi} \right)$  выражают (с точностью до постоянного множителя) максимально возможное количество информации на один отсчет. Тогда, сравнивая формулы (11.41) и (11.42) с



**Эдмон Никола Лагерр**  
(Edmond Nicolas  
Laguerre,  
1834 - 1886),

французский математик, член Парижской академии наук с 1884 г. Закончил Политехническую школу в Париже (1854). Служил офицером в артиллерии. Репетитор Политехнической школы (1864-1884); профессор в колледж де Франс (1883 - 1886). Основные работы посвящены геометрии. В своих исследованиях искал возможность конкретного изображения мысленных точек на плоскости и в пространстве. Разрабатывал аналитическую теорию функций комплексной переменной, изучал многочлены Чебышева - Лагерра.

(11.3), можно утверждать, что емкость канала определяет максимально возможное количество информации, которую можно передать по этому каналу за время его работы.

А поскольку пропускная способность выражает максимально возможное количество информации, которую можно передать по каналу за единицу времени, то связь между емкостью и пропускной способностью канала определяется зависимостью

$$V_k = T_k C. \quad (11.43)$$

#### 11.4. Синтез элементов информационных систем. Оптимальный приемник

Большинство информационных процессов связано с решением проблемы выбора. Такая же проблема решается при поиске наилучших в определенном понимании алгоритмов обработки информационных сообщений и сигналов, технической реализации этих методов.

Основные алгоритмы преобразующих элементов информационных систем принимают логическое двоичное решение «да» или «нет»: найдено сообщение или не найдено, различимы сигналы на фоне помех или неразличимы, искривлено сообщение или неискривлено, доступна информация потребителю или недоступна и т.д. Эти задачи решаются при обмене данными, при формировании и принятии решений, при отображении информации и т.п.

*Задача синтеза* состоит в определении алгоритма функционирования информационных систем по заданному критерию качества и интерпретированию или внедрении этого алгоритма с помощью технических средств.

*Задача анализа* состоит в расчете рабочих характеристик и обобщенных структур информационных систем.

Сообщения, поступающие в информационные системы, являются случайными процессами. Сигналы как носители сообщений и помехи, действующие на них, также являются случайными процессами. Поиск алгоритмов обработки сигналов с

помехами осуществляется при использовании вероятностных моделей. Оценки (решения), получаемые на основании выборок конечного размера, называют *статистическими характеристиками*.

При поиске решения всегда возникает ситуация неопределенности относительно распределения вероятности сигналов и помех, их параметров и дополнительных ограничений. Если все эти данные не известны, то говорят о задачах статистического синтеза в условиях априорной неопределенности.

Из-за полного отсутствия априорных данных решать задачи оптимального синтеза невозможно. Но на практике всегда удается найти какие-либо априорные сведения.

Различают такие основные типы задач статистического синтеза:

1. *Выявление сигнала на фоне помех.*
2. *Различение сигналов на фоне помех.*
3. *Выявление сигналов и оценивание их параметров на фоне помех.*
4. *Выделение сигналов на фоне помех.*

Результатом решения перечисленных задач являются соответствующие алгоритмы обработки сигнала с помехой, приводящие, как правило, к улучшению соотношения между полезным сигналом и помехой. Все эти задачи имеют не только много общего, но и свои особенности, сказывающиеся на структуре алгоритмов.

**Статистические критерии выявления сигналов на фоне помех.** При приеме информационных сообщений в зависимости от назначения системы и вида сигналов возникают два типа задач: выявление сигналов и распознавание сигналов.

**Выявление сигналов.** *Задача выявления информационного сигнала заключается в том, чтобы по результатам процесса обработки принятого сообщения, могущего быть либо помехой, либо суммой переданного сигнала и помехи, были приняты решения относительно наличия или отсутствия в этом сигнале полезной информации.*

При выявлении возможны две ошибки:

- 1) *ошибка 1-го рода, или «ошибочная тревога»* - при отсутствии полезного сигнала выносит ошибочное решение о наличии сигнала.
- 2) *ошибка 2-го рода, или «пропуск цели»* - при наличии полезного сигнала в сообщении выносит ошибочное решение о его отсутствии.

Эти ошибки количественно оцениваются условной вероятностью  $\alpha$  о наличии сигнала при его отсутствии и условной вероятностью  $\beta$  ошибочного решения об отсутствии сигнала при его наличии. Полная вероятность ошибочного решения определяется как  $P_0 = q\alpha + p\beta$ , где  $q$  и  $p$  - априорная вероятность отсутствия и наличия полезного сигнала соответственно.

Очевидно, что потери, испытываемые потребителем информации при ошибках 1-го и 2-го рода, могут быть далеко не одинаковы.

**Распознавание сигналов.** *Передачей с пассивной паузой* называется такой способ передачи информации, при котором наличие полезного сообще-

ния (посылка) соответствует приему символа 1 (гипотеза  $H_1$ ), а отсутствие сигнала (пауза) - приему символа 0 (гипотеза  $H_0$ ).

*Передачей с активной паузой* называется такой способ передачи информации, при котором в процессе различения двух сигналов символу 1 отвечает сигнал  $x_1$ , а символу 0 - сигнал  $x_0$ ; причем сигналы  $x_0$  и  $x_1$  имеют одинаковую энергию.

При распознавании сигналов могут также появляться ошибки 1-го и 2-го рода. Пусть  $\alpha$  - условная вероятность ошибочного решения о наличии сигнала  $x_1$ , если на самом деле принято  $x_2$ , а  $\beta$  - условная вероятность ошибочного решения о наличии сигнала  $x_2$ , если принято  $x_1$ . Задача распознавания, или различения, сигналов возникает в системах автоматизированного управления, радиолокации и радионавигации, телекоммуникационных систем и сетей и т.п.

Рассмотрим графики распределения плотности условной вероятности событий, которые иллюстрируют характеристику принятым сигналом состояния  $a_1$  или  $a_2$  (рис. 11.19).

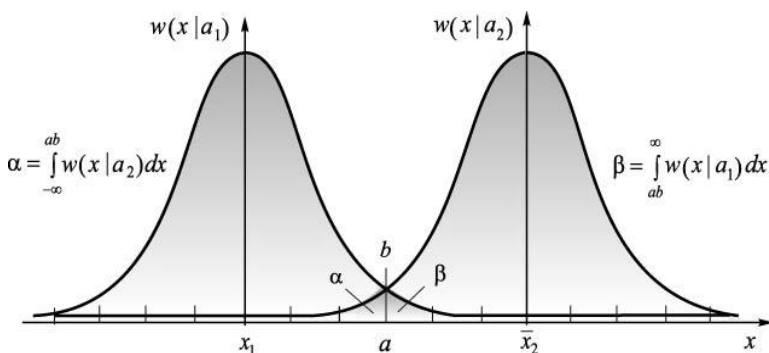


Рис. 11.19. Графики распределения плотности условной вероятности в симметричном канале

Эти графики пересекаются; причем в симметричном канале граница  $ab$  различения признаков сигналов  $x_1$  о состоянии  $a_1$  и сигналов  $x_2$  о состоянии  $a_2$  лежит посередине интервала, разделяющего  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$ . Кроме этого, в таком канале  $\alpha = \beta$ . Если источник информации вырабатывает только два сигнала  $x_1$  и  $x_2$ , образующих полную группу событий  $[P(x_1) + P(x_2) = 1]$ , то на выходе приемника возможны четыре события, которые также образуют полную группу:  $P(x'_1) + \alpha + P(x'_2) + \beta = 1$ . Этот тип задач является базовым и довольно распространенным в технике связи, автоматике и радиолокации, в измерениях, где широко применяются статистические критерии выявления и распознавания. Рассмотрим коротко некоторые из них.

**Общие критерии распознавания.** На графике, изображенном на 588

рис. 11.19, граница различения признаки  $ab$  проведена через точку пересечения графиков. При  $w(x|a_1) = w(x|a_2)$  реализуется критерий *максимального правдоподобия* (не предоставляется преимущество ни одному из сигналов)  $\alpha = \beta$ .

Вероятность ошибочных решений зависит не только от вида, но и от априорных значений вероятности сигналов, соответствующих состоянию  $a_i$  ( $i = 1, 2$ ) объекта. Графики  $P(x_i) w(x|a_i)$  с учетом «веса» приведены на рис. 11.20.

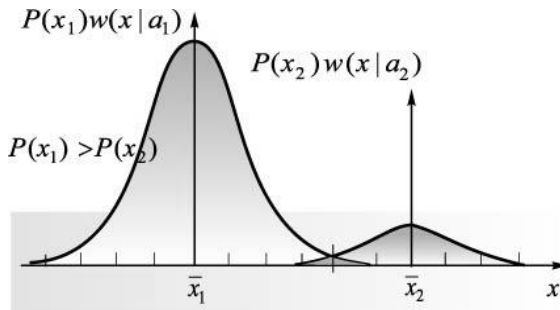


Рис. 11.20. Графики распределений плотностей условной вероятности с учетом «веса»

Как и в предыдущем случае, граница между признаками сигналов  $x_1$  и  $x_2$  проводится через точку пересечения графиков. В этом случае реализуется *критерий минимума средней ошибки, или критерий идеального наблюдателя Котельникова*. Заметим, что вместе с тем реализуется и критерий максимальной апостериорной вероятности.

В тех случаях, когда кроме известной заранее вероятности сигналов  $x_i$  и  $x_2$  известны и *потери*, испытываемые потребителем от ошибочных решений, граница различения признаков проводится с учетом относительных потерь  $r_{12}$  и  $r_{21}$  (рис. 11.21).

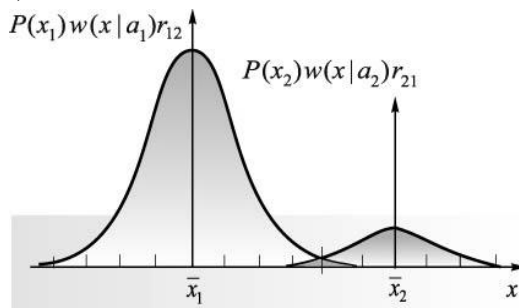


Рис. 11.21. Графики распределений плотностей условной вероятности с учетом «веса» и относительных потерь

В этом случае реализуется *критерий минимального риска*. Усредненное значение риска  $r = P(x_1)\alpha r_{12} + P(x_2)\beta r_{21}$ .

Этот критерий целесообразно использовать при разработке таких информационных систем, в которых ошибки 1-го и 2-го рода приводят к *различным потерям*, но обе ошибки не создают опасных ситуаций.

Выявление *сигнала методом одноразового отсчета*. Все рассмотренные критерии качества приводят, в сущности, к одному правилу принятия решения. Оно состоит в определении отношения правдоподобия  $\Lambda$  и сравнение его с пороговым значением  $\Lambda_D$ , зависимым от применяемого критерия.

Задачу обработки реализации  $y(t)$  для отыскания отношения правдоподобия  $\Lambda$  можно решить, если априорно известны хотя бы некоторые данные о полезном сигнале  $s(t)$ , характеристиках вероятности помехи  $n(t)$  и характере взаимосвязи между полезным сигналом и помехой.

Рассмотрим простой случай выявления по методу одноразового отсчета.

Метод одноразового отсчета - это процесс обработки одного отсчета  $y(t_i) = y_i$  реализации входного сигнала, взятого в некоторый момент времени  $t_i$ . На базе отсчета  $y(t_i) = y_i$  выносится решение о наличии или отсутствии полезной составляющей в принятом информационном сообщении.

Мгновенное значение реализации входного сигнала как суммы полезного сигнала и помехи

$$y_i = s_i + n_i . \tag{11.44}$$

При отсутствии полезного сигнала  $s_i = 0$  и  $n_i \neq 0$ . Тогда

$$P(y/0) = P(y_i/0) = P(n_i) = w(n_i)dx_i = w(y_i)dy_i \tag{11.45}$$

где  $w(n_i)$  - одномерная плотность вероятности помехи.

Вероятность  $P(y/s)$  получения реализации сигнала с помехой совпадает с вероятностью получения случайной величины  $(y_i - s_i)$ , которая равна  $n_i$ . Поэтому

$$P(y/s) = P(y_i/s_i) = P(y_i - s_i) = w_i(y_i, s_i)dy_i , \tag{11.46}$$

$$\Lambda = P(y/s) = P(y/0) = w_i(y_i, s_i) / w(y_i) . \tag{11.47}$$

Помеху можно считать стационарным нормальным случайным процессом с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ . Поэтому

$$\begin{aligned} w_i &= w(y_i, s_i) = \exp\{-(y_i - s_i)^2 / (2\sigma^2)\}; \\ w &= w(y_i) = \exp\{-(y_i)^2 / (2\sigma^2)\} / \sqrt{2\pi\sigma^2}; \\ \Lambda &= \exp\{(s_i / \sigma^2) / (y_i - 0,5s_i)\}. \end{aligned} \tag{11.48}$$

Из выражения (11.48) следует, что при известных  $s_i$  и  $\sigma^2$  отношение правдоподобия  $\Lambda$  и отсчет  $y_i$  реализации связаны между собой взаимно

однозначно. Каждому отсчету  $y_i$  соответствует полностью определенное значение  $\Lambda$ . Поэтому достаточно сравнивать отсчеты  $y_i$  с некоторым порогом, который получаем из выражения (5.48) при  $\Lambda = \Lambda_n$ :

$$y_n = (\sigma^2 \ln \Lambda_n + 0,5s_i^2) / s_i. \quad (11.49)$$

При  $y_i > y_n$  принимается решение «да», при  $y_i < y_n$  - решение «нет».

Основные недостатки метода, которые вносят неопределенность в решение задачи:

неопределенность частоты последовательности отсчетов. При редко встречающихся отсчетах сигнал может быть пропущен;

определение значения  $s_i$  в момент отсчета. Непосредственное измерение мгновенного значения  $s_i$  по полученному мгновенному значению  $y_i$  невозможно из-за наличия случайной величины  $n_i$ .

Во избежание первого недостатка, т.е. чтобы сделать невозможным пропуск сигнала, отсчеты должны быть непрерывными. В таком случае сигнал  $y(t)$  должен поступать на решающее устройство непрерывно и сравниваться с порогом  $y_n$  (рис. 11.22). Если  $s_i = a$  и  $\Lambda_n = 1$ , то  $y_n = 0,5 a$ .

*Вероятность ошибочной тревоги при этом*

$$P_{н.т} = P[(y_i > y_n) / 0] = \int_{y_n}^{\infty} w(y) dy, \quad (11.50)$$

где  $y(t)$  не содержит полезного сигнала.

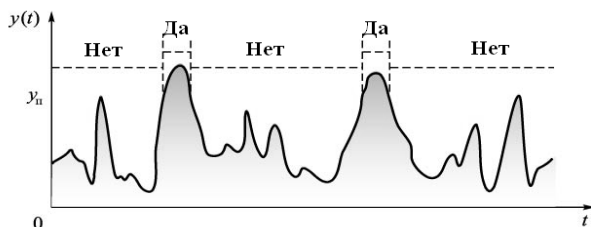


Рис. 11.22. Схема обработки сигналов на решающем устройстве

*Вероятность пропуска сигнала:*

$$P_{прп} = P[(y_i < y_n) / s] = \int_{-\infty}^{y_n} w_1(y) dy, \quad (11.51)$$

где  $y(t)$  содержит полезный сигнал.

**Корреляционный метод выявления сигналов на фоне помех.** Принимая решение на основании не единственного значения рассматриваемой величины, а на основании большого количества  $N$  ее значений, можно достичь более ощутимого эффекта, если различные отсчеты взаимно независимы. Для выполнения этого условия отсчеты должны отличаться друг от друга не менее чем на  $\Delta\tau$  - интервал корреляции помехи. Для помехи типа белого шума



$\Delta\tau \rightarrow 0$ . В этом случае

$$\Lambda = \prod_{i=1}^N w_i(y_i, s_i) / \prod_{i=1}^N y_i. \quad (11.52)$$

Для нормальных случайных процессов с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$  отношения правдоподобия запишется в виде

$$\Lambda = \exp\left\{\sum_{i=1}^N [-(y_i - s_i)^2 / 2\sigma^2]\right\} / \exp\left\{\sum_{i=1}^N [-(y_i^2 / 2\sigma^2)]\right\}. \quad (11.53)$$

В результате преобразования формулы (11.53) получим

$$\ln \Lambda = (\sum_{i=1}^N s_i y_i - 0,5 \sum_{i=1}^N s_i^2) / \sigma^2. \quad (11.54)$$

Правило обработки удобнее представить в виде

$$(a_y)_N = \sum_{i=1}^N s_i y_i = \sigma^2 \ln \Lambda + 0,5 \sum_{i=1}^N s_i^2, \quad (11.55)$$

откуда следует, что при обработке необходимо определить  $(\sum_{i=1}^N s_i y_i)$  и сравнить найденное значение с порогом

$$(a_y)_N^n = \sigma^2 \ln \Lambda_n + 0,5 \sum_{i=1}^N s_i^2, \quad (11.56)$$

который находим из формулы (11.54) при  $\Lambda = \Lambda_n$ .

При  $(a_y)_N > (a_y)_N^n$  выносится решение «да». Если выборка взята на интервале  $[0, t]$ , а отсчеты в ней берутся через  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , то суммы в формуле (11.56) превращаются в интегралы, а величина  $\sigma^2 \Delta\tau$  - в спектральную плотность мощности. В итоге получаем:

$$\int_0^{t_0} s(t)y(t)dt = \ln \Lambda + 0,5 \int_0^{t_0} s^2(t)dt. \quad (11.57)$$

Процедура принятия решения согласно (11.57) заключается в перемножении реализации  $y(t)$  и ожидаемого сигнала  $s(t)$ , интегрировании полученного произведения в пределах от нуля до  $t_0$  и сравнении результата с порогом (рис. 11.23).



Рис. 11.23. Функциональная схема устройства для выявления сигнала корреляционным методом

Интеграл  $\int_0^{t_0} s(t)y(t)dt$  является мерой взаимной корреляции между реализацией  $y(t)$  и полезным сигналом  $s(t)$ . Поэтому его называют *корреляцион-*

ным интегралом, а описанную только что процедуру выявления - корреляционным методом.

Условные вероятности  $P_{п.т}$  и  $P_{прп}$  определяются так же, как и для одно-разового отсчета с предварительным уточнением закона распределения.

**Синтез приемников непрерывных сигналов. Согласованный прием.** Эта задача принадлежит к классу задач различения сигналов на фоне помех (воспроизведение сообщений) или задач фильтрации. Эту задачу впервые сформулировал и решил Н. Винер в 1941 г.

Пусть на вход приемника (рис. 11.24) поступает входной сигнал с помехой  $y(t) = s(t) + n(t)$ . Приемник характеризуется передаточной функцией  $K(i\omega)$ , которую необходимо определить. Этапы поиска следующие.

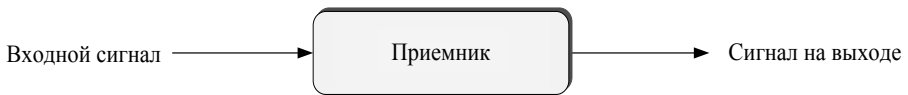


Рис. 11.24. Обработка сигнала в приемнике

Сигнал на выходе приемника

$$\gamma(t) = \int_0^{\infty} y(t - \tau)g(\tau)d\tau, \quad (11.58)$$

где  $g(\tau) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} K(i\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$  - импульсная переходная функция.

Ошибка в воспроизведении сигнала  $v(\tau) = \gamma(\tau) - s(\tau)$ .

Задача оптимального приема - найти передаточную функцию  $K(i\omega)$  приемника, которая обеспечивает минимальное значение дисперсии (среднего квадрата) ошибки

$$\bar{v}^2 = [\gamma(t) - s(t)]^2. \quad (11.59)$$

После подстановки в формулу (11.59) выражений для известных и иско-мых величин задача сводится к интегральному уравнению, решить которое можно методами вариационного исчисления. Решение, найденное Н. Винером, имеет вид

$$K(i\omega) = S(\omega) / (S(\omega) + N(\omega)), \quad (11.60)$$

где  $S(\omega)$ ,  $N(\omega)$  - энергетические спектры сигнала и помехи.

Такая постановка задачи нуждается в уточнении критерия оптимальности относительно передаточной функции приемника.

Передаточная характеристика приемника должна обеспечить максимум отношения сигнала к шуму на выходе системы. Условие оптимальности в таком смысле обеспечивает фильтр (приемник) с передаточной функцией

$$K(i\omega) = aS^*(i\omega)e^{-i\omega t_0}, \quad (11.61)$$

где  $a$ ,  $t_0$  - постоянные значения;  $S^*(i\omega)$  - спектр, который связан со спектром

сигнала.

*Согласованной фильтрацией* называется процесс оптимизации передаточной характеристики фильтра и ее согласование со спектром входного сигнала с целью обеспечения максимума отношения полезного сигнала к шуму на выходе системы.

На выходе приемника отношения сигнала к шуму  $h_{\max} = \sqrt{2E / N_0}$ , где  $E = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega$  - энергия сигнала на входе приемника;  $N_0$  - энергетический спектр помех. Заметим, что сигнал на выходе согласованного фильтра имеет такую же форму, как автокорреляционная функция входного сигнала, поскольку  $s_{\text{вых}} = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(t-x)g(x)dx$ , а для согласованного фильтра  $g(t) = A_0 s_{\text{вх}}(t-t_0)$ . Тогда  $s_{\text{вых}} = A_0 \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(y)s_{\text{вх}}(y-\tau)dy = A_0 K_s(\tau)$ , где  $\tau = t-t_0$ .

Это означает, что приемник можно строить по правилам вычисления взаимно корреляционной функции входного сигнала с ожидаемым. Корреляционная функция  $K = f(t)$  отрезка гармонического колебания изображена на рис. 11.25.

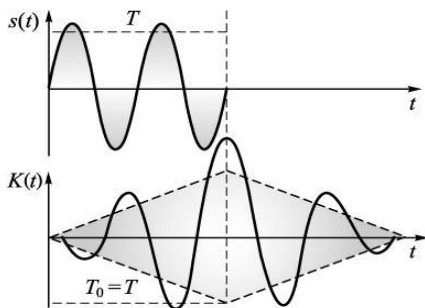


Рис. 11.25. Корреляционная функция отрезка гармонического колебания

**Идеальный приемник Котельникова.** Передача данных может осуществляться с использованием амплитудной, частотной или фазовой модуляции любых сообщений дискретного или непрерывного характера (в последнем случае - после соответствующей дискретизации согласно теореме Котельникова). В зависимости от используемых при приеме параметров сигналов различают когерентный и некогерентный прием. В первом случае используют частоту и фазу сигнала, во втором - лишь частоту, а фазу не учитывают.

Методы передачи и приема сравнивают по их помехоустойчивости. Для ее оценки используется разработанная в 1946 г. В. А. Котельниковым теория потенциальной помехоустойчивости, согласно которой для уменьшения влияния флуктуационных помех существует наилучший (идеальный) приемник, имеющий наибольшую (потенциальную) помехоустойчивость для данного метода передачи.

Рассмотрим подходы, лежащие в основе построения идеальных приемников при когерентном приеме. Если сигналам 1 и 0 на входе когерентного приемника соответствуют сигналы  $A(t)$  и  $B(t)$  одинаковой продолжительности  $t_c$ , а суммой сигнала и флуктуационной помехи является  $x(t)$ , то согласно теории Котельникова приемник обеспечит наименьшую вероятность искажения (искажение символа), если будет выдавать сигнал  $A$  при выполнении условия

$$I(A) < I(B), \tag{11.62}$$

в противоположном случае – сигнал  $B$ . Здесь:

$$I(B) = \int_0^{t_c} [x(t) - B(t)]^2 dt; \quad I(A) = \int_0^{t_c} [x(t) - A(t)]^2 dt,$$

где  $t_c$  - продолжительность двоичного сигнала.

**Оптимальный приемник по критерию идеального наблюдателя** (идеальный приемник Котельникова) - это техническое средство, которое реализует алгоритм обработки входного информационного сообщения на основе сравнения принятого сигнала с помехами с неискаженными (идеальными) образцами сигнала, вычисляет энергию разности и относит принятый сигнал к тому образцу, для которого энергия разности минимальна.

Воспользовавшись выражением (11.62), можно построить идеальный приемник Котельникова (рис. 11.26).

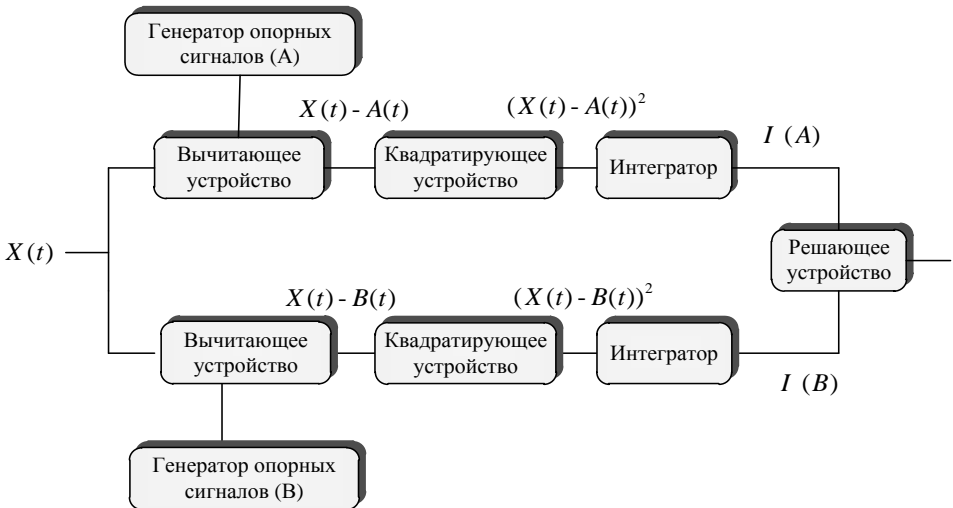


Рис. 11.26. Структурная схема идеального приемника Котельникова

Схема приемника Котельникова состоит из генераторов опорных сигналов, точно повторяющих переданные сигналы  $A$  и  $B$ ; вычитающего устройства; квадратирующего устройства; интегратора  $I$ ; решающего устройства. Для генерирования опорных сигналов в приемнике должны быть известны все

параметры переданных сигналов  $A$  и  $B$ . Приемник имеет две ветки, в каждой из которых вычисляется среднее квадратичное значение отклонения принятого колебания  $x(t)$  от известного сигнала: в первой ветке - от сигнала  $A(t)$ , во второй - от сигнала  $B(t)$ . Решение принимается по той ветке, где это отличие меньше.

**Оптимальные приемники с активной и пассивной паузами.** Обозначим энергию сигналов  $A$  и  $B$  (энергия на резисторе составляет 1 Ом) соответственно через  $E_A$  и  $E_B$ :

$$E_A = P_A, \quad t_c = \int_0^{t_c} [A(t)]^2 dt; \quad E_B = P_B, \quad t_c = \int_0^{t_c} [B(t)]^2 dt, \quad (11.63)$$

где  $P_A$  и  $P_B$  - соответственно удельная средняя мощность сигналов  $A$  и  $B$  (мощность, развиваемая на единичном резисторе).

*Сигналом с пассивной паузой* называется сигнал, излучаемый только при передаче одного из символов (например, 1), тогда как передаче другого символа (например, 0) соответствуют паузы между сигналами. В этом случае

$$A(t) \neq 0, \quad B(t) = 0, \quad E_A = E, \quad E_B = 0. \quad (11.64)$$

Подставив в формулу (11.62) выражения (11.63) и (11.64), получим выражение, описывающее *алгоритм работы оптимального приемника сигналов с пассивной паузой*:

$$\int_0^{t_c} x(t)A(t)dt \geq E / 2 \quad - \text{принят сигнал А}; \quad (11.65)$$

$$\int_0^{t_c} x(t)A(t)dt \leq E / 2 \quad - \text{принят сигнал В}.$$

Левая часть этих выражений характеризует взаимную корреляцию между  $x(t)$  и  $A(t)$  (корреляционный интеграл). Согласно правилу (11.65) приемник должен вычислить значение корреляционного интеграла и сравнить его с некоторым фиксированным значением - порогом. Таким образом, оптимальный приемник сигналов с пассивной паузой - это корреляционный приемник (рис. 11.27), состоящий из коррелятора и решающего устройства.

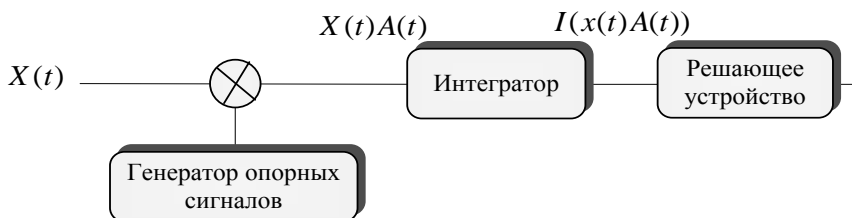


Рис. 11.27. Структурная схема оптимального корреляционного приемника с пассивной паузой

Коррелятор содержит в своей схеме множитель, блок принятия решения,

интегратор и устройство снятия отсчетов (на схеме не показан) в моменты времени, кратные продолжительности сигналов ( $t_k = kt_c, k = 1, 2, \dots$ ). Рассмотренный приемник называют еще *когерентным приемником с пассивной паузой*. Если корреляционный интеграл вычислять с помощью линейного фильтра, согласованного с сигналом  $A(t)$ , то придем к приемнику (рис. 11.28) с оптимальным фильтром.

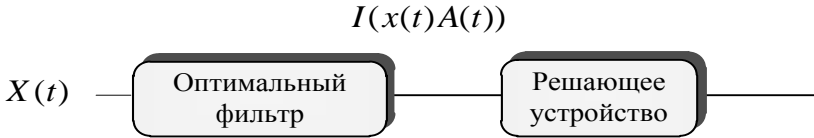


Рис. 11.28. Структурная схема с оптимальным фильтром приемника с пассивной паузой

Сигналом с *активной паузой* называют сигнал, излучаемый при передаче любого символа (0 или 1). Этот сигнал должен иметь двоичную структуру для обретения двух различных значений. Чаще всего используются сигналы с одинаковыми энергиями:  $E_A = E_B = E$ . Преобразуем формулу (11.62) к

$$\text{виду } 2 \int_0^{t_c} x(t)A(t)dt - \int_0^{t_c} [A(t)]^2 dt > 2 \int_0^{t_c} x(t)B(t)dt - \int_0^{t_c} x(t)B(t)dt - \int_0^{t_c} [B(t)]^2 dt.$$

Отсюда, учитывая формулы (11.63) и (11.64), а также то, что  $\int_0^{t_c} [A(t)]^2 dt = \int_0^{t_c} [B(t)]^2 dt$ , получим два варианта записи.

$$\text{Первый вариант: } \int_0^{t_c} x(t)A(t)dt - \int_0^{t_c} x(t)B(t)dt > 0 - \text{принят сигнал } A,$$

$$\int_0^{t_c} x(t)A(t)dt - \int_0^{t_c} x(t)B(t)dt < 0 - \text{принят сигнал } B.$$

$$\text{Второй вариант } \int_0^{t_c} x(t)\Delta A(t)dt > 0 - \text{принят сигнал } A, \quad (11.66)$$

$$\int_0^{t_c} x(t)\Delta A(t)dt < 0 - \text{принят сигнал } B, \Delta A(t) = A(t) - B(t).$$

Полученные выражения определяют различные алгоритмы работы оптимального приемника с активной паузой.

### 11.5. Многоканальные сети передачи данных. Разделение информационных каналов

*Разделением каналов* называется процесс размежевания информационных трактов (сетей) на фоне информационных параметров переданных сигналов, имеющий целью соединить каждый определенный источник сообще-

ний с его приемником.

Введем обозначения:  $U_k(t)$  - сигналы датчиков, которые отображают информационные функции  $x_k(t)$  и порождают модуляцию параметров  $a_k$  носителя;  $u_{xk}(t)$  - сигналы на выходах передающих устройств отдельных каналов;  $u(t)$  - суммарный сигнал в линии связи.

Сигнал в одном канале описывается как  $u_x(t) = g[a_1, \dots, a_i(t), \dots, a_j, \dots, a_n]$ , где параметр  $a_i(t)$  передает информацию, а параметр  $a_j$  (или несколько таких параметров) можно использовать для характеристики индивидуальных каналов. Такими параметрами могут быть: принадлежность к конкретной электрической цепи; частота или фаза носителя; положение на временной оси; форма и т.д. Каждому каналу  $k$  соответствует определенное значение  $a_{jk}$  или область значений  $\Delta a_{jk}$  параметра  $a_j$ . В случае использования этого обозначения выражение для сигнала  $k$ -го канала приобретет вид

$$u_{xk}(t) = g[a_1, \dots, a_i(t), \dots, a_{jk}(t), \dots, a_n],$$

или сокращенно  $u_{xk}(t) = g_k[a_k(t)]$ . В линию связи поступает составной сигнал, обычно представляющий собой сумму сигналов отдельных каналов:  $u(t) = \sum_k g_k[a_k(t)]$ . Процесс разделения можно рассматривать как фильтрацию для выделения  $u_{xk}$  или сигнала датчика  $U_k$ :

$$\Phi_k \left\{ \sum_k g_k[a_k(t)] \right\} = g_k[a_k(t)].$$

В зависимости от вида оператора фильтрации  $\Phi$  различают следующие методы разделения каналов: пространственный (схемный), дифференциальный, частотный, временной, фазовый, кодовый, по уровню, по форме и корреляционный (рис. 11.29).

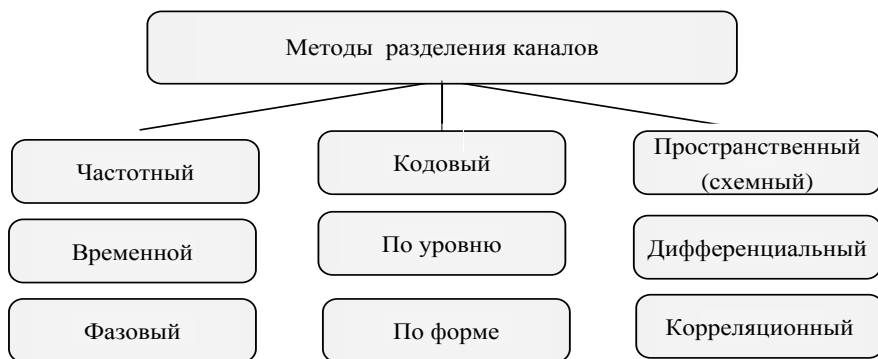


Рис. 11.29. Классификация распределения каналов передачи данных

**Многоканальные системы связи с пространственным разделением.** Это простейший вид разделения, при котором каждому каналу выделяется индивидуальная сеть связи (рис. 11.30).

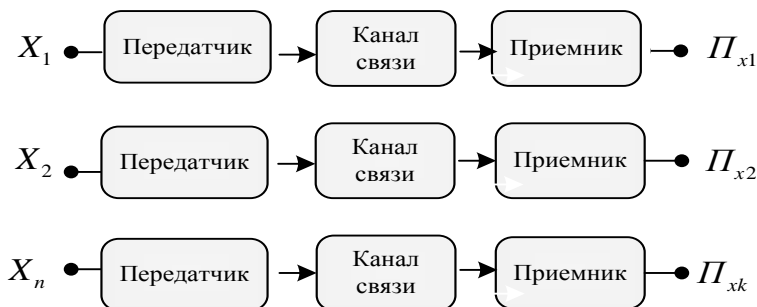


Рис. 11.30. Многоканальная система с пространственным разделением  
 $X_k$  - датчик  $k$ -го канала;  $П_{xk}$  - приемник информации  $k$ -го канала

**Примером** является пространственное разделение сигналов с помощью матричных коммутаторов с  $n$  входами и  $n$  выходами.

Другие формы разделения каналов допускают передачу сообщений по одной сети. Именно поэтому многоканальную передачу называют также *уплотнением каналов*.

**Многоканальные системы связи с дифференциальным разделением.** На рис. 11.31 приведена распространенная схема использования коммутативного (проводникового) канала для передачи информационных сигналов (от датчика  $X$  к приемнику). В линию на передающей и приемной стороне включаются дифференциальные трансформаторы.

Средние их точки соединяют с  $X$  и  $П_x$ . Таким образом, телекоммуникационные сигналы не создают помех в первичных цепях дифференциальных трансформаторов, связанных с телефонными аппаратами  $A$ . Благодаря дифференциальному включению телефонные сигналы также не создают помех.

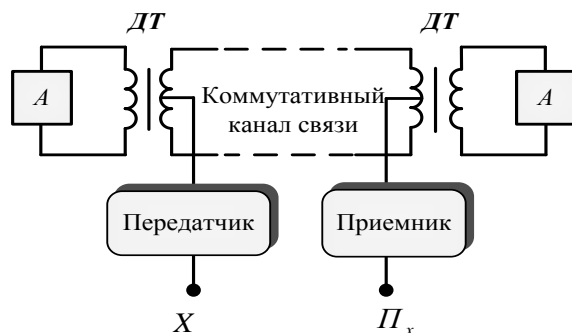


Рис. 11.31. Многоканальная система с дифференциальным разделением:  
 $A$  – телефонный аппарат;  $ДТ$  - дифференциальный трансформатор;  
 $X$  – датчик сигналов;  $П_x$  - приемник



**Многоканальные системы связи с частотным разделением.** При частотном разделении для различных каналов на частотной шкале  $f$  отводятся непересекающиеся участки  $\Delta f_1, \Delta f_2, \dots, \Delta f_n$  (рабочая ширина спектра соответствующего канала  $\Delta f_k$ ) (рис. 11.32, *a*).

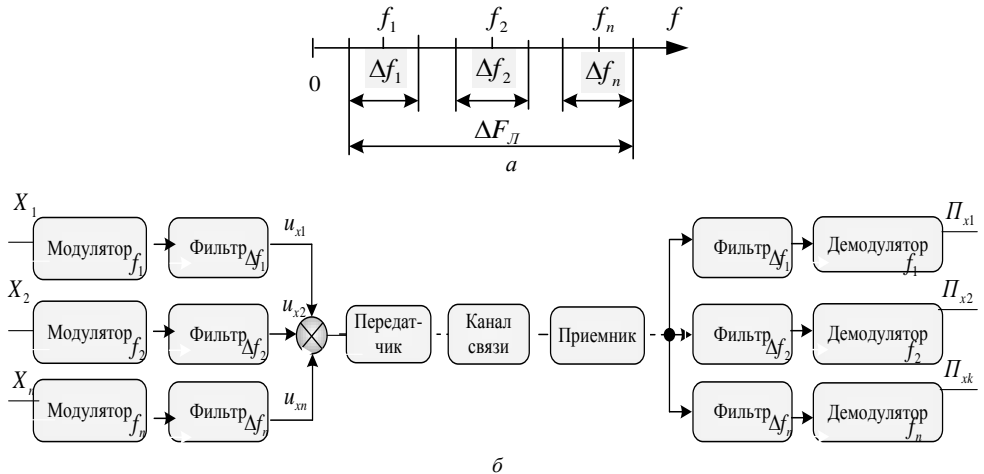


Рис. 11.32. Многоканальная система с частотным разделением:  
*a* - разделение каналов по шкале частот; *б* - схема частотного разделения

Спектры сигналов  $u_{kx}$  соответствующих каналов должны вкладываться в границы  $\Delta f_k$ . Полоса пропускания сети связи  $\Delta F_{пр}$  определяется крайними частотами (минимальной частотой интервала  $\Delta f_1$  и максимальной частотой интервала  $\Delta f_n$ ). Низкочастотные сигналы  $U_k$  датчиков  $X$  модулируют по амплитуде или частоте высокочастотные сигналы с несущими  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , вырабатываемыми специальными генераторами. Сигналы на выходе модуляторов имеют спектры  $\Delta f_k$ , положения которых на шкале частот определяется несущими частотами  $f_k$ , а ширина зависит от ширины спектра сигналов датчиков. Полосовые фильтры передающей части служат для ограничения полосы частот своих каналов. На приемной стороне фильтры разделяют сигналы, которые, пройдя через демодуляторы, могут быть восприняты приемными устройствами. Важным преимуществом систем с частотным разделением является возможность одновременной передачи сигналов, относящихся к разным каналам. Еще одно их преимущество заключается в возможности передачи сигналов от рассредоточенных объектов. Недостаток таких систем - сравнительно большое взаимное влияние каналов из-за перекрытия спектров сигналов, неидеальность полосовых фильтров и появление паразитных частотных составляющих вследствие нелинейности электрических цепей (так называемая перекрестная модуляция).

**Многоканальные системы связи с временным разделением.** В случае временного разделения сигналы  $u_{xk}$  датчиков передаются только в отведенные для них непересекающиеся отрезки времени  $\Delta t_k$  (рис. 11.33, а).

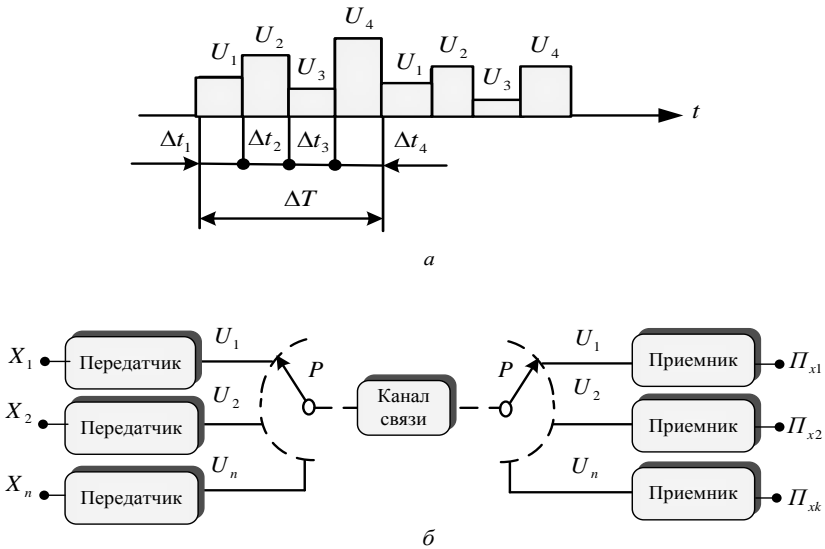


Рис. 11.33. Многоканальная система с временным разделением:  
а – разделение каналов по времени; б – схема временного разделения

Разделение осуществляется распределителями  $P$  (см. рис. 11.33, б), которые должны быть строго синхронизированными (работать с одинаковой скоростью) и синфазными (работать без сдвига). Взаимное влияние каналов при временном разделении обычно незначительно, что дает возможность строить системы с большим количеством каналов. Благодаря простоте технических средств указанный метод используется довольно широко.

**Многоканальные системы связи с фазовым разделением.** Фазовое разделение применяют в двухканальной системе (рис. 11.34) с синусоидальными сигналами, фазы которых отличаются на  $90^\circ$ .

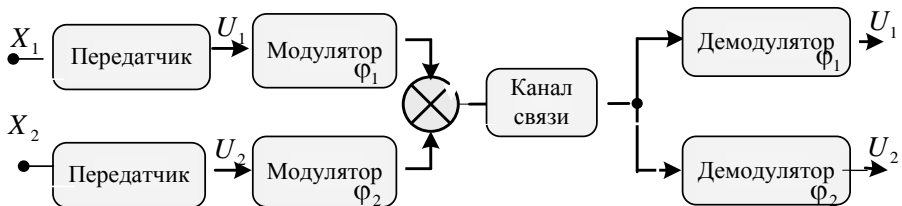


Рис. 11.34. Многоканальная система с фазовым разделением

Сигналы датчиков  $X_k$  модулируют амплитуду синусоидальных носителей, отличающихся фазой. Таким образом, сигналы  $u_{xk}$  на выходе модулято-

ров имеют амплитуды, обусловленные модулирующими функциями датчиков, и фазы соответственно  $\varphi_1$  и  $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$ :  $u_{x1} = U_1 \sin \omega_0 t$ ;  $u_{x2} = U_2 \sin(\omega_0 t + \pi/2) = U_2 \cos \omega_0 t$ . Фазовые детекторы выделяют модулирующие функции  $U_1$  и  $U_2$ .

**Многоканальные системы связи с кодовым разделением.** В случае кодового разделения адрес канала указывается кодированным сигналом, посылаемым в сеть связи. Разделение на приемной стороне осуществляется декодирующим устройством, направляющим сообщение по выбранному каналу. Код адреса может быть как последовательным, так и параллельным. В последнем случае используется отдельная сеть связи или индивидуальный частотный канал на каждый разряд кода. Кодовое разделение каналов дает возможность опрашивать каналы в произвольном порядке, что делает удобным использование данного разделения в системах передачи данных.

**Многоканальные системы связи с разделением по форме.** Для разделения сигналов, различающихся формой, используются операции, наиболее чувствительные к изменению формы, - обычное дифференцирование, интегрирование и вычитание. Рассмотрим процедуру разделения, при которой функции носителя получают последовательным дифференцированием.

Пусть, например:  $u_{x1}(t) = U_1$  и  $u_{x2}(t) = U_2 t$ . В линию поступает сумма сигналов  $u(t) = U_1 + U_2 t$ . Процесс разделения имеет целью выделение информационных параметров  $U_1$  и  $U_2$ . Выделение  $U_2$  осуществляется дифференцированием функции  $u(t)$ . Интегрирование  $U_2$  восстанавливает переданный сигнал второго канала  $u_{x2}(t)$ .  $U_1$  получаем вычитанием  $u_{x2}(t)$  от  $u(t)$ .

**Многоканальные системы связи с корреляционным разделением.** В некоторых случаях сигналы отдельных каналов можно представить в виде

$$u_{jk}(t) = g_k[a_k(t)] = a_k(t)g_k(t) = U_k(t)g_k(t).$$

Здесь функция  $g_k(t)$  описывает носитель с некоторым значением разделительного параметра  $a_{jk}$ , а информационный параметр  $a_k(t)$ , модулирующий функцию  $g_k(t)$  по амплитуде, равен сигналу  $U_k(t)$  соответствующего датчика. Этот параметр является функцией времени, изменяющегося медленнее по сравнению с  $g_k(t)$ , и его можно считать постоянным. Сигнал в сети является линейной комбинацией функций  $u(t) = \sum_k U_k g_k(t)$ . Если функции  $g(t)$  линейно

независимы, они могут быть разделены линейными фильтрами. Такие многоканальные системы передачи называют *линейными*. К линейным относятся, в частности, системы с частотным, временным, фазовым разделением и разделением по форме. Важной разновидностью линейно независимых сигналов являются ортогональные сигналы, для которых существует общий метод разделения, базирующийся на применении оператора корреляционной фильтрации к поступающему из сети связи сигналу. Для геометрической интерпрета-

ции понятия ортогональности рассмотрим две функции  $g_i(t)$  и  $g_j(t)$ , определенные на интервале  $T_1 < t < T_2$ . Представим их в виде дискретных отсчетов  $g_i^* = (g_i(t_1), g_i(t_2), \dots, g_i(t_m))$ ;  $g_j^* = (g_j(t_1), g_j(t_2), \dots, g_j(t_m))$ .

Эти совокупности можно рассматривать как два вектора в  $m$ -мерном евклидовом пространстве с координатами  $g_i(t_k)$  и  $g_j(t_k)$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ . Если векторы ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю:  $(g_i^*, g_j^*) = \sum_k g_i(t_k)g_j(t_k) = 0$ . При бесконечном увеличении количества отсчетов  $m$  дискретные функции превращаются в непрерывные. Их также можно рассматривать как векторы, но уже в бесконечномерном пространстве. Условие ортогональности приобретает интегральный вид и определяется на заданном интервале  $(T_1, T_2)$ :  $(g_i(t), g_j(t)) = \int_{T_1}^{T_2} g_i(t)g_j(t)dt = 0$ .

Ортогональную систему образуют такие функции:

1. *Бесконечное множество функций  $\cos k\omega t$ ,  $\sin k\omega t$ , ортогональных на интервале  $0 < t < 2\pi / \omega$ , где  $k$  - неотрицательное число (рис. 11.35, а). Носитель с такими функциями используется в устройствах с частотным и фазовым разделением.*

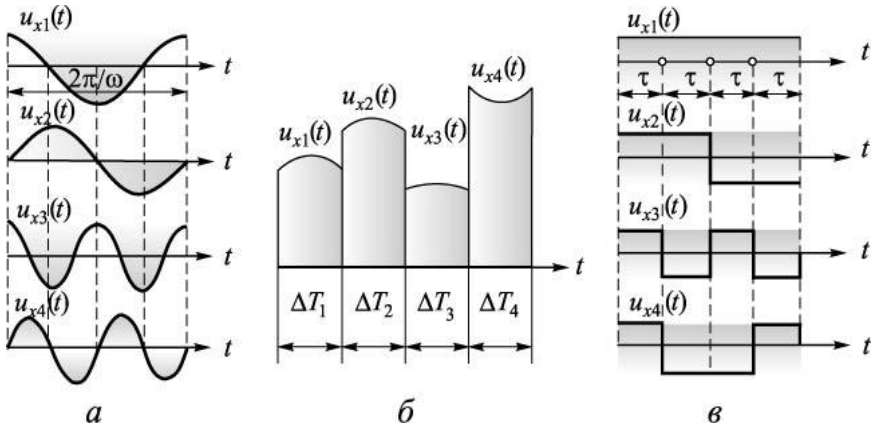


Рис. 11.35. Примеры ортогональных сигналов: а – с гармоническим носителем; б – с носителем с распределенным во времени; в – с импульсным носителем

2. *Множество произвольных функций, определенных на непересекающихся интервалах времени, тождественно равных нулю вне этих интервалов (см. рис. 11.35, б), также представляет собой ортогональную систему, поскольку при  $i \neq j$  выполняется равенство  $(g_i(t), g_j(t)) = 0$ .*

3. *Множество, состоящее из дискретных знакопеременных функций, которые можно получить с помощью  $n$ -разрядного счетчика в режиме вычи-*

тания, находящегося сначала в заполненном состоянии (см. рис. 11.35, в), и которые являются ортогональными на заданном интервале  $T = n\tau$  ( $\tau$  - продолжительность импульса младшего разряда). Коды, соответствующие этим последовательностям, принадлежат к групповым и называются кодами Рида - Мюллера 1-го порядка.

4. *Ортогональными на определенных интервалах* являются большое количество специальных функций: полиномы и функции Лежандра, Чебышева, Якоби, Эрмита, Лагерра, Хаара, Уолша, Радемахера и др.

Ортогональную систему удобно использовать в нормированном виде при выполнении условия  $\int_{T_1}^{T_2} g_k^2(t) dt = 1$ . Если  $\varphi_k(t)$  - ненормированные ортогональные функции, то операция нормирования выполняется умножением на коэффициент

$\lambda_k = 1 / \sqrt{\int_{T_1}^{T_2} \varphi_k^2(t) dt}$ . В этом случае в сеть поступает сигнал вида  $u_{xk}(t) = U_k \lambda_k \varphi_k(t) = U_k g_k(t)$ , где  $g_k(t)$  уже являются нормированными функциями, образующими ортонормированную систему.

Для выделения информационного параметра  $U_k$  нужно умножить принятый сигнал  $u(t)$  на функцию  $g_k(t)$  и проинтегрировать полученное произведение в пределах  $T_1 \leq t \leq T_2$ :

$$\int_{T_1}^{T_2} \left[ \sum_i U_i g_i(t) \right] g_k(t) dt = U_k \int_{T_1}^{T_2} g_k^2(t) dt = U_k.$$

Умножение сигнала линии на все функции  $g_k(t)$  обеспечивает полное разделение любых ортогональных сигналов. Оператор разделения  $\Phi$ , выполняющий это преобразование, определяет, в сущности, степень взаимной корреляции сигналов  $u(t)$  и  $g_k(t)$ . Таким образом, многоканальная система (рис. 11.36) на передающей стороне содержит генераторы  $\Gamma_k$  ортогональных

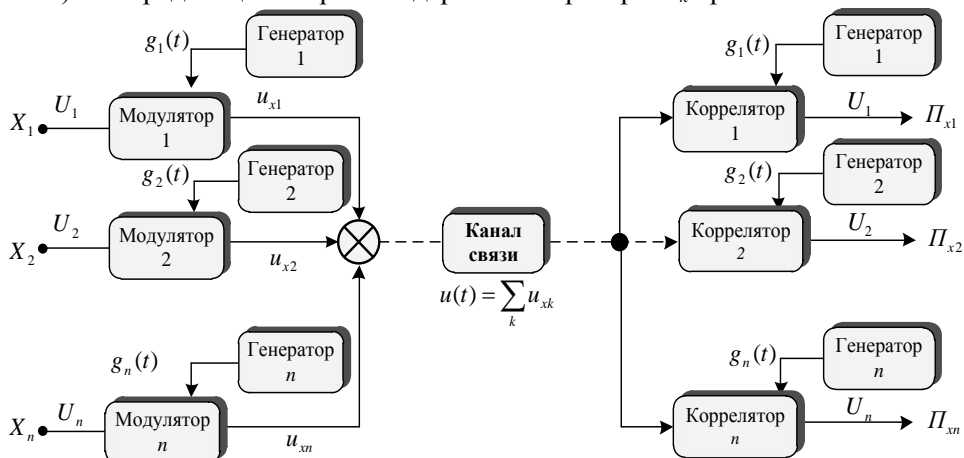


Рис. 11.36. Многоканальная система с корреляционным разделением

функций и модуляторы  $M_k$  с нормализаторами, а на приемной - такие же генераторы  $\Gamma_k$  и корреляторы  $K_k$ . Эффективность корреляционного метода разделения заключается в предоставлении возможности значительно ослабить влияние перекрестных помех, а это существенно в случае перекрываемых спектров сигналов.

Рассмотрим в качестве **примера** систему, использующую полиномы Лежандра 1-го рода. Эти полиномы ортогональны на интервале  $-1 < t < +1$  и описываются соотношениями  $\varphi_0(t) = 1; \dots; \varphi_1(t) = t; \dots; \varphi_k(t) = \left[ (2k-1) \int_{-1}^t \varphi_{k-1}(t) dt + \varphi_{k-2}(t) \right], k \geq 2$ . Скалярное произведение двух функций:  $\int_{-1}^1 \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 2 / (2i + 1) & \text{при } i = j. \end{cases}$

Итак, нормировочный множитель  $\lambda_k = \sqrt{(2k+1)/2}$ .

Сигналы образуются на основе носителя в виде постоянного события, промодулированного по форме в соответствии с приведенными соотношениями. Таким образом, форма служит параметром разделения, а для перенесения информации используется амплитуда. Функциональная схема генератора ортогональных функций  $\varphi_k(t)$  приведена на рис. 11.37.

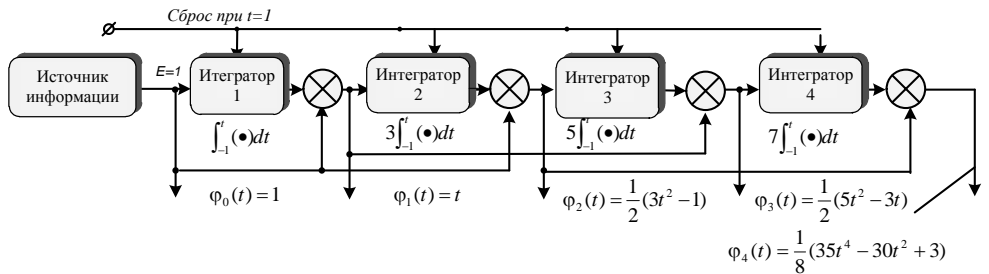


Рис. 11.37. Схема разделения каналов на фоне ортогональных функций

Источник  $E$  создает постоянный сигнал  $E = 1$ , играющий роль функции  $\varphi_0(t)$ . После прохождения через интегратор 1 и дальнейшего вычитания  $\varphi_0(t)$  от результата формируется функция  $\varphi_1(t)$ . Формирование следующих функций осуществляется в соответствии с приведенными рекуррентными соотношениями последовательным интегрированием функций  $\varphi_{k-1}(t)$ , умножением результата на соответствующий коэффициент  $2k - 1$  и прибавлением функции  $\varphi_{k-2}(t)$ . После нормирования и модуляции образуется сигнал  $u_{xk}(t) = U_k \lambda_k \varphi_k(t) = U_k g_k(t)$ .

### 11.6. Помехоустойчивость систем передачи информации

**Критерии оценивания помехоустойчивости систем передачи.** Основу методов повышения помехоустойчивости составляют различные способы введения избыточности. Повышение функциональной надежности или помехоустойчивости систем передачи информации достигают увеличением вре-

менной, частотной, энергетической избыточности и т.п.

*Помехоустойчивость системы* - способность системы противостоять: влиянию случайных (или намеренных) помех на полезный сигнал; уменьшению (или невозможности) достоверной передачи данных от источника сообщения к потребителю.

Поскольку в результате действия помехи принятый сигнал всегда отличается от переданного, то помехоустойчивость характеризуется степенью соответствия принятого сообщения переданному.

При сравнении различных информационных систем более помехоустойчивой будет система, обеспечивающая меньшее отличие между принятым и переданным сообщениями при данном уровне помех. Количественная мера этого соответствия выбирается по-разному в зависимости от характера сообщения. При оценивании помехоустойчивости систем передачи непрерывных сообщений в каналах с флуктуационной помехой типа *белого шума* используется отношение  $h^2$  средних мощностей полезного сигнала и помехи. При сравнении разных способов приема используют понятие *преимущества системы*, где  $h_{\text{вх}}^2$  и  $h_{\text{вых}}^2$  - отношение средних мощностей сигнала и помехи на входе и выходе устройства.

В случае передачи дискретных сообщений в качестве критерия помехоустойчивости (надежности или правильности) используют вероятность правильного приема символа, где  $P_0$  - вероятность ошибки при приеме символа. Значение ошибки  $P_0$  зависит от  $h^2$  в непрерывном канале, по которому проходят сигналы, соответствующие переданным символам.

При оценке способов передачи оценивают помехоустойчивость различных видов модуляции в сравнении с амплитудной.

Введенную избыточность проще реализовать в передатчике: повысить мощность сигнала, применить, например, более высокочастотный носитель, в конце концов, использовать корректирующее кодирование, т.е. во всех случаях увеличить объем переданного сигнала.

Этап передачи в принципе изменить сложнее. На входе приемника появляются помехи, возникшие в сети связи, исключить которые нельзя, но можно каким-либо образом уменьшить. Любой дискретный приемник можно представить в виде структурной схемы (рис. 11.38).

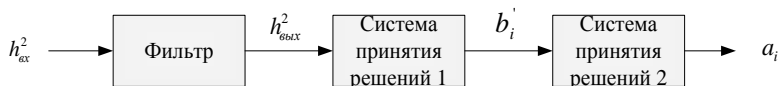


Рис. 11.38. Обобщенная структурная схема дискретного приемника

При этом выполняются такие операции:

фильтрация или «очистение» сигнала от помехи до максимально возможного значения  $B = h_{\text{вых}}^2 / h_{\text{вх}}^2$  ;

обеспечение правильного выбора символа сообщения - первая система

принятия решений;  
 решение задачи об отождествлении сигнала, являющегося комбинацией символов, с переданным полезным сообщением - вторая система принятия решений.

*Поэлементным (последовательным) приемом* называется такой прием, при котором окончательный вывод о принятом сообщении делается путем анализа каждого элемента сигнала.

*Приемом в целом* называется такой прием, при котором принятый сигнал можно не разбивать на элементы, а вывод о принятом сообщении делать, анализируя всю последовательность символов.

В ряде случаев, когда переданное сообщение имеет избыточность, прием в целом обеспечивает *большую надежность вывода*, чем поэлементный прием. В некотором понимании такие устройства могут быть даже проще традиционных, поскольку в них нет первой системы для принятия решения относительно символов сообщения.

**Потенциальная помехоустойчивость при приеме дискретных сигналов.** Если два сигнала отличаются вследствие действия помехи, то кроме правильных решений возможны и ошибочные.

Найдем вероятность искажения  $P_{\text{ном}}$  с помощью идеального приемника Котельникова (см. рис. 11.26). Вероятность искажения - вероятность ошибочного решения приемника - равна вероятности невыполнения условия реализации оптимального приемника по формуле (11.62).

Искажения возникают из-за того, что в принятый сигнал входит случайная составляющая - флуктуационная помеха.

В большинстве случаев помеху считают стационарным эргодическим процессом с нормальным законом распределения мгновенных значений напряжений

$$w(U_n) = \exp\left[-(U_n - \bar{U}_n)^2 / (2\sigma_n^2)\right] / \left[\sigma_n^2 \sqrt{2\pi}\right],$$

где  $U_n$  - мгновенное значение напряжения помехи;  
 $\bar{U}_n$  - среднее значение напряжения помехи (постоянная составляющая);  $\sigma_n^2$  - дисперсия (средний квадрат отклонения от постоянной составляющей) помехи;



**Шарль Эрмит (Charles Hermite, 1822 - 1901),**

французский математик, член Парижской академии наук (1856), иностранный член-корреспондент (1857) и иностранный почетный член (1895) Петербургской академии наук. С 1848 г. работал в Политехнической школе, с 1869 г. - профессор Парижского университета. Основные работы касаются теории чисел, теории квадратичных форм, теории инвариантов, ортогональных полиномов, эллиптических функций и алгебры. Среди его учеников был Анри Пуанкаре. Эрмит первым показал, что число  $e$  (основа натурального логарифма) является трансцендентным.





**Оливер Хевисайд**  
(**Oliver Heaviside,**  
**1850 - 1925),**

английский ученый-самоучка, инженер, математик и физик. Создал теорию передачи сигналов на далекие расстояния. Впервые применил комплексные числа для изучения электрических цепей, разработал технику применения преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений, сформулировал уравнение Максвелла в терминах электрической и магнитной сил и потока, а также независимо от других математиков создал векторный анализ. Впервые разработал операционное исчисление, которое со временем широко применяется в физике и других науках.

$w(U_n) = \exp[-U_n^2 / (2\sigma_n^2)] / [\sigma_n^2 \sqrt{2\pi}]$  - функция плотности распределения вероятностей по нормальному закону. Поскольку постоянная составляющая помехи равна нулю, то ошибка происходит при превышении мгновенным значением напряжения помехи некоторого значения  $x$ . Вероятность этого события равна площади под кривой распределения от  $x$  к  $\infty$  (рис. 11.39):

$$P_{\text{пом}} = P(|U_n| > x) = \int_x^\infty w(U_n) dU_n = -\Phi(x). \quad (11.67)$$

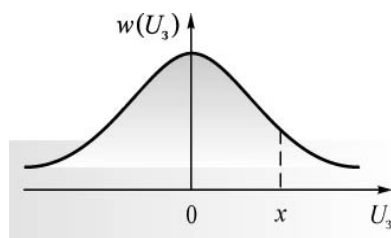


Рис. 11.39. К определению вероятности искажения при оптимальном приеме

Здесь  $\Phi(\alpha) = \left( \int_{-\infty}^{\alpha} \exp[-z^2 / 2] dz \right) / [\sigma_n^2 \sqrt{2\pi}]$  - функция

Лапласа, где  $\alpha$  - обобщенная функция, обусловленная отношением энергий сигнала и помехи, а также степенью расхождения сигналов  $A$  и  $B$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\int_0^{\alpha} [A(t) - B(t)]^2 dt}{2N_0}}, \quad (11.68)$$

где  $N_0 = U_{\text{п.эфф}}^2 / \Delta F$  - спектральная плотность мощности помехи ( $U_{\text{п.эфф}}^2$  - интегральная мощность помехи;  $\Delta F$  - полоса пропускания приемного фильтра).

Преобразуем выражение (11.68), для чего воспользуемся выражением (11.63), а также понятием удельной разности энергий разностного сигнала

$$\Delta E = \Delta P_c \cdot t_c = \int_0^{t_c} \Delta A(t)^2 dt, \quad (11.69)$$

где  $\Delta P_c$  - удельная средняя мощность разностного сигнала  $\Delta A(t)$ . Тогда  $\alpha = \sqrt{\Delta E / (2N_0)}$ . (11.70)

Подставив это значение в выражение (11.67), получим

$$P_{\text{пом}} = 1 - \Phi \sqrt{\Delta E / (2N_0)}. \quad (11.71)$$

Вероятность искажения (11.71) определяет потенциальную помехоустойчивость идеального и любого другого оптимального приемника. Уменьшить вероятность искажения можно за счет уменьшения спектральной плотности мощности помех  $N_0$ .

**Потенциальная помехоустойчивость приема информационных сигналов по Котельникову.** Помехоустойчивость к действию помехи типа *белого шума* называют *потенциальной*, если она обеспечивает минимальную среднюю вероятность ошибки различения сигналов. Это достигается при использовании критерия *идеального наблюдателя*, который делает вывод о переданном коде  $x_2$ , сравнивая отношения правдоподобности с определенным порогом

$$w(u_y | x_2) / w(u_y | x_1) > p(x_1) / p(x_2). \quad (11.72)$$

Пусть переданные сигналы  $u_{x1}(t)$  и  $u_{x2}(t)$ , соответствующие кодам  $x_1$  и  $x_2$ , имеют произвольную форму, а принятый сигнал  $u_y(t) = u_x(t) + u_\xi(t)$ . Представим сигнал  $u_y(t)$  в виде совокупности отсчетов  $u_{y1}, \dots, u_{yn}$ , разделенных интервалами  $\Delta t = 1/2f_m$ . Распределение  $w(u_y | x_i)$  в пространстве сигналов  $u_y$  соответствует распределению  $w(u_\xi) = w(u_y - u_{xi})$  в пространстве сигналов  $u_\xi$ . Для гауссовской помехи при отсутствии корреляции между значениями шума в моменты отсчета разностная плотность

$$w(u_y - u_{xi}) = \prod_{j=1}^n e^{-\frac{(u_y - u_{xij})^2}{2\sigma_\xi^2}} / \sqrt{2\pi\sigma_\xi} = e^{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2} \sum_{j=1}^n (u_y - u_{xij})^2} / (\sqrt{2\pi}\sigma_\xi)^n,$$

где  $\sigma_\xi = \sqrt{D[U_\xi]}$  - среднеквадратичное отклонение помехи. Правило для принятия решения

$$e^{\left[ \sum_{j=1}^n (u_y - u_{x1j})^2 - \sum_{j=1}^n (u_y - u_{x2j})^2 \right] / 2\sigma_\xi^2} > p(x_1) / p(x_2), \quad (11.73)$$

или после логарифмирования

$$\left[ \sum_{j=1}^n (u_y - u_{x1j})^2 - \sum_{j=1}^n (u_y - u_{x2j})^2 \right] / 2\sigma_\xi^2 > \ln p(x_1) - \ln p(x_2).$$

Умножим обе части неравенства на  $\Delta t$  и перейдем к непрерывным во времени функциям, считая  $u_x(t)$  и



**Эндрю Джеймс Витерби (Andrew James Viterbi, 1935),**

итальянско-американский электротехник и бизнесмен. Родился в Бергамо (Италия) в еврейской семье, которая эмигрировала вместе с ним в 1939 г. в США как беженцы. В 1952 г. поступил в Массачусетский технологический институт, где изучал электротехнику и получил степень магистра наук. Получил степень доктора философии в области цифровой связи в университете Южной Калифорнии. Изобрел алгоритм, названный в его честь, который использовал для декодирования свернуто закодированных данных.

$u_{\xi}(t)$  на малых интервалах постоянными. Тогда суммы можно сменить на интегралы согласно приближенным равенствам:

$$\sum_{j=1}^n (u_y - u_{x1j})^2 \Delta t \approx \int_0^T [u_y(t) - u_{x1}(t)]^2 dt;$$

$$\sum_{j=1}^n (u_y - u_{x2j})^2 \Delta t \approx \int_0^T [u_y(t) - u_{x2}(t)]^2 dt. \quad (11.74)$$

Поскольку  $\Delta t = 1/2f_m$ , то формула (11.74) приобретает вид:

$$\int_0^{T_x} [u_y(t) - u_{x2}(t)]^2 dt - C_2 < \int_0^{T_x} [u_y(t) - u_{x1}(t)]^2 dt - C_1; C_k = \sigma_{\xi}^2 \ln p(x_k) / f_m, k = 1, 2.$$

Схема, реализующая это правило, получила название *оптимального приемника* (рис. 11.40):

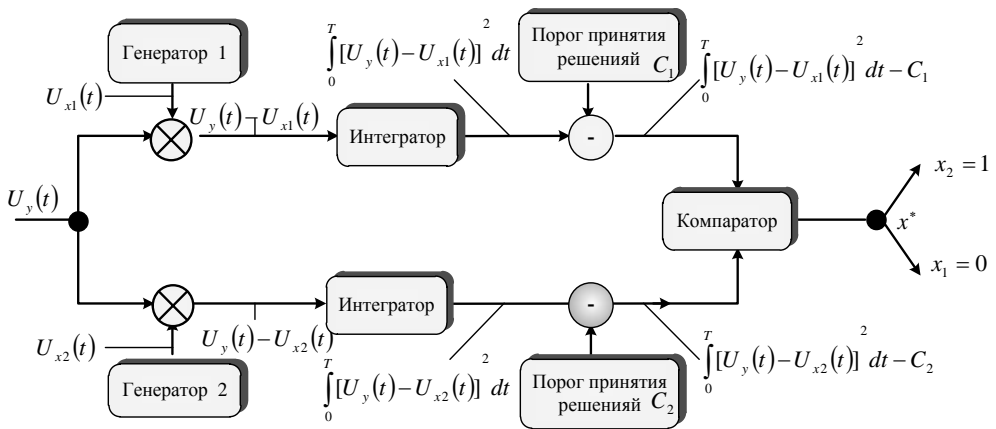


Рис. 11.40. Оптимальный приемник Котельникова с системой принятия решений на основе определенных порогов на фоне помех

Рассмотрим важный частный случай, когда вероятности  $p(x_1)$  и  $p(x_2)$  равны между собой, а функции  $u_{x1}(t)$  и  $u_{x2}(t)$  пронормированы таким образом, что их энергии на интервале одинаковы. Раскрыв в последнем соотношении скобки и учитывая, что  $C_1 = C_2$ , получим

$$\int_0^{T_x} u_{x2}^2(t) dt - \int_0^{T_x} u_y(t) u_{x2}(t) dt < \int_0^{T_x} u_{x1}^2(t) dt - \int_0^{T_x} u_y(t) u_{x1}(t) dt.$$

Первые слагаемые каждой части неравенства, которые являются энергиями полезных сигналов, взаимно уничтожаются. Правило принятия решения в этом случае превращается в сравнение исходных сигналов взаимнокорреляционных фильтров (рис. 11.41)

$$\int_0^{T_x} u_y(t) u_{x2}(t) dt < \int_0^{T_x} u_y(t) u_{x1}(t) dt.$$

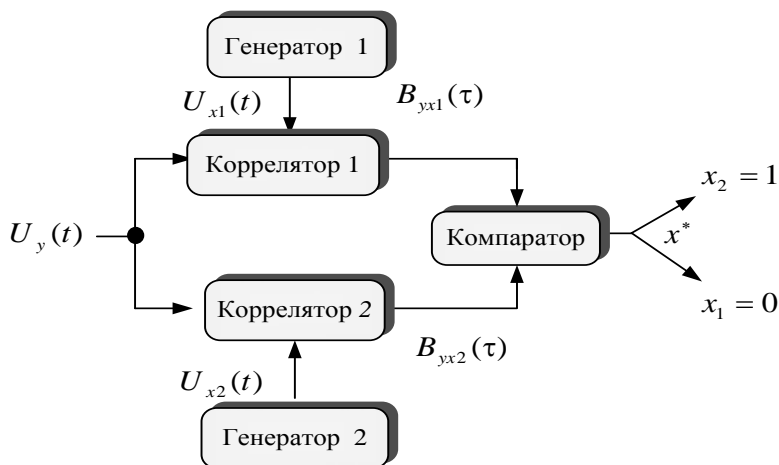


Рис. 11.41. Схема корреляционного приемника с определенным порогом принятия решений на фоне помех

### Основные выводы

Любую информационную систему можно подразделить на источник, преобразователь, канал передачи, накопитель и устройство, отображающее информацию, а информационные процессы, происходящие в этих устройствах, представить в общем случае в виде процесса передачи информации по каналу связи.

Если сжатие производится так, что по сжатым данным можно абсолютно точно восстановить начальную информацию, кодирование называется неразрушающим. Неразрушающее кодирование используется при передаче (или хранении) текстовой информации, числовых данных, компьютерных файлов и т.д., т.е. в случаях, где недопустимы даже наименьшие отличия начальных и восстановленных данных.

Кодирование в канале, или помехоустойчивое кодирование, - это способ обработки переданных данных, обеспечивающий уменьшение количества ошибок, которые возникают в процессе передачи по каналу с помехами.

Обобщенные характеристики информационных каналов: время передачи сигнала; ширина его частотного спектра; энергетическая характеристика - средняя мощность.

Дискретный канал в общем виде представляется совокупностью дискретного модулятора на входе, непрерывного канала и дискретного демодулятора на выходе.

Модели дискретных каналов передачи данных подразделяются на такие

виды: двоичный симметричный канал без памяти; двоичный несимметричный канал без памяти; симметричный канал без памяти.

Скорость передачи информации сигналами с ограниченной средней мощностью по каналу, в котором действует белый гауссовский шум, оказывается максимальной в случае полного сходства между сигналом и помехой.

Максимальная скорость передачи информации обеспечивается, если в качестве физического носителя информации применять стационарный случайный процесс в виде белого гауссовского шума.

Нет смысла безгранично расширять полосу пропускания канала, поскольку с ее расширением возрастание пропускной способности канала замедляется, и у границы при  $F_k \rightarrow 0$  пропускная способность приближается к постоянной величине.

Задача синтеза элементов информационных систем состоит в определении алгоритма функционирования информационных систем по заданному критерию качества и интерпретировании этого алгоритма с помощью технических средств.

Задача анализа элементов информационных систем заключается в расчете рабочих характеристик и структурных схем информационных систем.

Различают такие основные типы задач статистического синтеза: выявление сигнала на фоне помех; различение сигналов на фоне помех; одновременное выявление (различение) сигналов и оценивание их параметров на фоне помех; выделение сигналов на фоне помех.

Теория потенциальной помехоустойчивости заключается в том, что для уменьшения влияния флуктуационных помех существует наилучший (идеальный) приемник, который имеет наибольшую (потенциальную) помехоустойчивость для данного метода передачи.

Повышение функциональной надежности, или помехоустойчивости, систем передачи информации достигаются увеличением временной, частотной, энергетической избыточности.

---

### ***Вопросы для самоконтроля***

---

- 1. Какие основные элементы входят в модель системы передачи информации?*
- 2. Что понимается под понятием «канал связи»?*
- 3. Раскройте понятие «объем сигнала» и «емкость канала».*
- 4. Назовите основные характеристики дискретных каналов.*
- 5. Поясните отличие между двоичным симметричным и несимметричным каналами без памяти.*
- 6. Сформулируйте теорему К. Шеннона для дискретного канала с помехами и без помех.*

7. Назовите статистические критерии выявления сигналов на фоне помех и укажите, в каких случаях они реализуются.

8. Приведите структурную схему идеального приемника Котельникова.

9. Укажите пути повышения помехоустойчивости систем передачи информации.

---

### **Conclusions**

---

Any information system could be divided into source, converter, transmission channel, storage device and device, displaying information, while information processes, occurring in these devices, could be presented in general case in form of information transmission via communication channel.

If compression is performed in the way that compressed data can be exactly restored as initial information, the coding is called nondestructive. Nondestructive coding is used in transmission (or storing) of text information, numerical data, computer files, etc., i.e. in cases where even the smallest differences between primary and recovered data are not allowed.

Coding in channel or interference immune coding is a way of transmitted data processing, capable of reducing the number of errors that occur during transmission via noisy channel.

Generalized characteristics of information channels: signal transmission time; frequency spectrum width; energy characteristic - average power.

Digital channel is generally represented by set of discrete modulator at the input, continuous channel and discrete demodulator at the output.

Discrete data channels models are subdivided into following types: binary symmetric channel without memory; binary asymmetric channel without memory; symmetric channel without memory.

Information transmission speed by signals with limited average power via channel where white Gaussian noise is functioning is maximal when signal and noise are identical.

Maximum information transmission speed is ensured, if the stationary random process in the form of white Gaussian noise is used as the physical data carrier.

There is no sense to infinitely extend channel bandwidth, because with its extension the increase in channel capacity slows down and within the limit with  $F_k \rightarrow 0$  the bandwidth approaches constant value.

Synthesis task of information systems elements is to define an algorithm of information systems functioning within predetermined quality criteria and to interpret this algorithm using technical means.

The task of analyzing information systems elements is to calculate operational characteristics and structural schemes of information systems.

There are following basic types of statistical synthesis tasks: identifying signal on background noise; signals distinction on background noise; simultaneous signals detection (distinction) and estimation of their parameters on background noise; signals selection on background noise

Theory of potential interference immunity says that to reduce the impact of fluctuation interference there is the best (ideal) receiver, which has the greatest (potential) interference immunity for given transmission method.

Increasing functional reliability, or interference immunity, information transmission systems can be reached by increasing time, frequency and energy redundancy.

*Ключевые слова*

канал связи	communication channel
кодер источника	coder of the source
декодер источника	decoder of the source
дискретный канал	discrete channel
непрерывный канал	continuous channel
оптимальный приемник	optimum receiver



## **КОДИРОВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ**

**12**

- 12.1. Кодирование источника сообщений  
и передача данных
- 12.2. Помехоустойчивое кодирование
- 12.3. Блочное помехоустойчивое кодирование
- 12.4. Сверточное помехоустойчивое кодирование



### 12.1. Кодирование источника сообщений и передача данных

Под *кодированием в широком смысле* понимают процесс преобразования сообщений в сигнал. Как при передаче, так и при хранении и обработке информации в ИИС значительные преимущества дает дискретная форма представления сигналов. Поэтому в случае, когда начальные сигналы в ИИС являются непрерывными, происходит, как правило, преобразование их в дискретные сигналы. В связи с этим термин «кодирование» относят по обыкновению к дискретным сигналам и под *кодированием в узком смысле* понимают отображение дискретных сообщений сигналами в виде определенных комбинаций символов. Совокупность правил, согласно которым происходят эти операции, называют *кодом*.

Под *кодированием в общем случае* понимают преобразование алфавита сообщения  $A\{\lambda_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, K$ ) в алфавит определенным способом выбранных кодовых символов  $R\{x_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ). По обыкновению (но не обязательно) размер алфавита кодовых символов  $\dim\{x_j\}$  меньше, чем размер алфавита источника  $\dim A\{\lambda_i\}$ .

Кодирование сообщений может иметь разные цели, но в информационных сетях передачи данных существует последовательность использования того или другого метода кодирования в зависимости от поставленных перед системой заданий и технических требований. Рассмотрим информационную систему передачи данных (рис. 12.1).

*Источник информации или сообщение* - это физический объект, система или явление, которые формируют переданное сообщение.

Как правило, начальные сообщения - результаты измерения - представляют собой функции времени, например  $s(t)$ , или других аргументов неэлектрической природы (акустическое давление, температура, распределение яркости на некоторой плоскости и т.д.), например,  $s(x, y, z)$ . С целью передачи по каналу связи эти сообщения обычно превращаются в электрический сигнал, изменения которого во времени  $s(t)$  отображают переданную информацию. Такие сообщения называются *непрерывными*, или *аналоговыми*, сообщениями (сигналами), и для них выполняются условия

$$s(t) \in (s_{\min}, s_{\max}), t \in (0, t). \quad (12.1)$$

Т.е. значения и функции, и аргумента для таких сообщений - непрерывные или определенные для любого значения непрерывного интервала как по функции  $s$ , так и по времени  $t$ .

*Форматирование источника сообщений* - это процесс аналого-цифрового преобразования информационного сигнала источника сообщения  $\tilde{x}(t)$  в цифровой сигнал  $x_{\text{ц}}(k\Delta t)$ . Такое преобразование базируется на процедурах дискретизации и квантовании сигнала  $\tilde{x}(t)$  и его представлении в дво-

ичной системе исчисления.

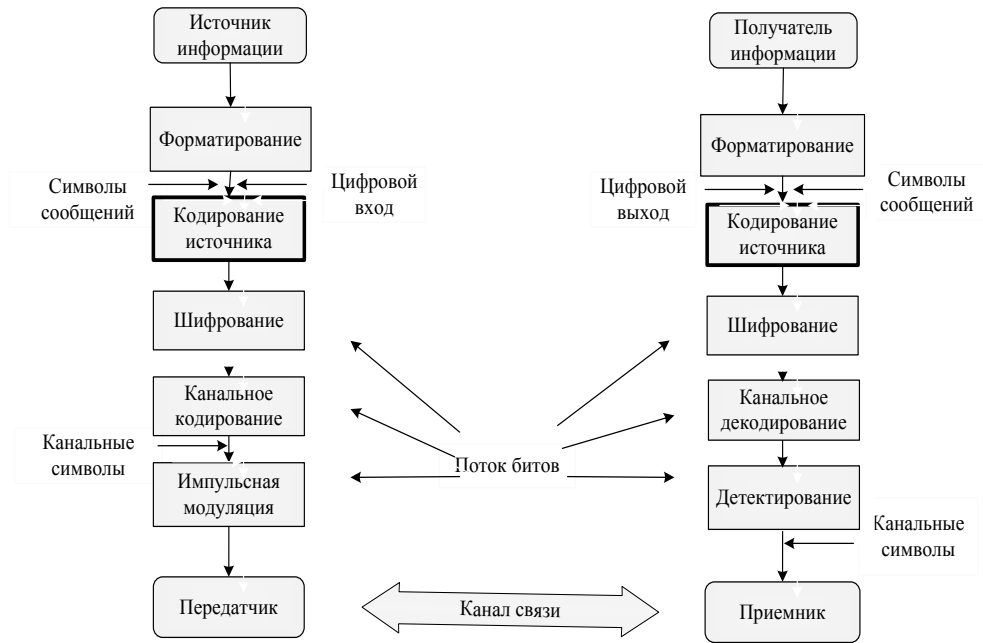


Рис. 12.1. Структурная схема информационной сети передачи данных

Аналого-цифровой преобразователь осуществляет одновременно процедуру дискретизации сигнала по времени, квантование по уровню и формирует значение исходного сигнала, подавая его в цифровом виде.

Передача и хранение информации нуждаются в довольно больших затратах. Часть данных, которые нужно передавать по каналам связи и сохранять, имеет не самое компактное представление. Чаще всего эти данные сохраняются в форме, которая обеспечивает их простейшее использование, например двоичные коды данных ЭВМ, отдельные отсчеты сигналов в системах сбора данных и т.д. Тем не менее такое наипростейшее в использовании представление данных заставляет тратить вдвое, втрое, а иногда и в сотне раз больше места для их хранения и намного более широкую полосу частот для их передачи, чем нужно на самом деле. Поэтому сжатие данных - это один из наиболее актуальных направлений современной теории информации.

*Кодирование источника сообщений* проводится с целью обеспечения компактного представления данных, сокращения объема информации, которая вырабатывается источником, и с целью повышения скорости передачи информационных сообщений по каналам связи.

Такое кодирование называют экономным, безызыбыточным, эффективным кодированием, или сжатием данных (рис. 12.2).

Существуют два типа систем сжатия данных:

системы сжатия без потерь информации (неразрушительное сжатие);

системы сжатия с потерями информации (разрушительное сжатие).

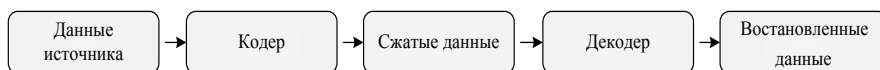


Рис. 12.2. Блок-схема алгоритма сжатия данных

Общую классификацию методов кодирования источника сообщения приведены на рис. 12.3.

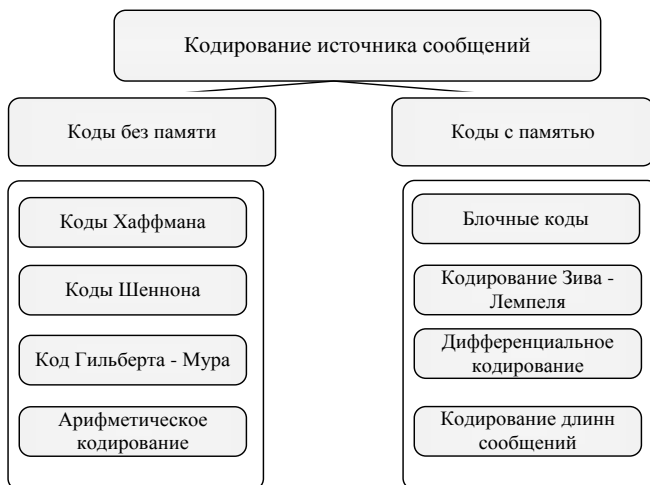


Рис. 12.3. Классификация методов кодирования источника сообщений

**Сжатие без потерь информации.** Системой сжатия без потерь называется система, реализующая процесс восстановления сообщений источника таким способом, в котором определенная процедура является неразрушающей относительно структуры и значений вектора входных данных  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которые подлежали сжатию или кодированию.

Структура системы сжатия изображена на рис. 12.4. Вектор данных источника  $X$ , подлежащего сжатию, - это последовательность  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  конечной длины - результат форматирования аналогового информационного сигнала. Отсчеты  $x_i$  - компоненты вектора  $X$  - выбрано с конечного алфавита данных  $A$ . При этом размер  $n$  вектора данных ограничен, но может быть довольно большим. Таким образом, источник на своем выходе формирует как вектор данных  $X$  последовательность длиной  $n$  из алфавита  $A$ .

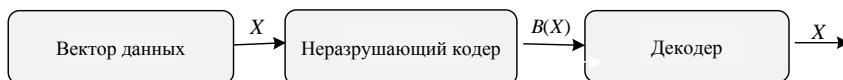


Рис. 12.4. Блок-схема алгоритма кодирования без потерь

Выход кодера - сжатые данные, которые отвечают входному вектору  $X$ , дадим в виде двоичной последовательности  $B(X) = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ , размер которой  $k$ . Назовем  $B(X)$  кодовым словом, присвоенным вектору  $X$  кодером (или кодовым словом, в которое вектор  $X$  преобразован кодером). Поскольку система сжатия неразрушительная, одинаковым векторам  $X_l = X_m$  должны отвечать одинаковые кодовые слова  $B(X_l) = B(X_m)$ .

При решении задачи сжатия важным является вопрос, насколько эффективна та или другая система сжатия. Поскольку, как уже отмечалось, в основном используется двоичное кодирование, то мерой эффективности системы может быть *коэффициент сжатия*  $r$ , определенный как отношение размера данных источника в битах к размеру  $k$  сжатых данных в битах

$$r = n \log_2 (\dim A) / k, \quad (12.2)$$

где  $\dim A$  - размер алфавита данных  $A$ .

Таким образом, коэффициент сжатия  $r = 2$  означает, что объем сжатых данных, представляет половину объема данных источника. Чем больше коэффициент сжатия  $r$ , тем лучше работает система сжатия данных. Рядом с коэффициентом сжатия  $r$  эффективность системы сжатия можно характеризовать *скоростью сжатия*  $R$ , которая определяется как отношение

$$R = k/n \quad (12.3)$$

и измеряется количеством кодовых бит, которые отвечают отсчету данных источника. Система, имеющая *большой* коэффициент сжатия, обеспечивает *меньшую* скорость сжатия.

**Сжатие с потерей информации.** *Системой сжатия с потерями* называется система, реализующая процесс восстановления сообщений источника таким образом, что определенная процедура восстановления является разрушительной относительно структуры и значений вектора входных данных  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которые подлежали сжатию или кодированию. Структура системы сжатия изображена на рис. 12.5.

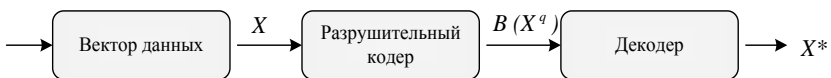


Рис. 12.5. Блок-схема алгоритма кодирования с потерями

Как и в предыдущей схеме,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  - вектор данных, который подлежит сжатию. Восстановленный вектор обозначим как  $X^* = (x_1^*, x_2^* \dots x_n^*)$ . Отметим наличие в этой схеме сжатия *разрушительного кодера* как элемента, которого не было при неразрушительном сжатии.

Кодер подвергает разрушительному сжатию вектор квантованных данных  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и, таким образом, обеспечивается соответствие между  $X$  и  $B(X^q)$  (при этом возможно невыполнение условия  $X = X^q$ ). Система в

целом остается разрушительной, поскольку двум разным векторам  $X^*$  может отвечать один и тот же вектор  $X$ . Разрушительный кодер относительно вектора входных данных  $X$  формирует вектор  $X^q$ , достаточно близкий к  $X$  в смысле среднеквадратичного расстояния.

Разрушительный кодер характеризуется двумя параметрами - скоростью сжатия  $R$  и значением искажений  $D$ , определяемыми выражениями

$$R = k/n, \quad D = (1/n) \sum (x_i - x_i^*)^2. \quad (12.4)$$

Параметр  $R$  характеризует скорость сжатия в битах на один отсчет источника, а значение величины  $D$  является мерой среднеквадратичного отличия между  $X^*$  и  $X$ . Если существует система разрушительного сжатия со скоростью  $R_1$  и искажениями  $D_1$  и вторая система со скоростью  $R_2$  и искажениями  $D_2$ , то первая из них лучшая, если  $R_1 < R_2$  и  $D_1 < D_2$ . Тем не менее, к сожалению, невозможно построить систему разрушительного сжатия, которое обеспечивает одновременное снижение скорости  $R$  и уменьшение искажений  $D$ , поскольку эти два параметра связаны обратной зависимостью. Поэтому целью оптимизации системы сжатия с потерями может быть минимизация или скорости при заданной величине искажений, или искажений при заданной скорости сжатия.

Выбор системы неразрушительного или разрушительного сжатия зависит от типа данных, которые подлежат сжатию. При сжатии текстовых данных, компьютерных программ, документов, черчений и т.д. нужно применять неразрушительные методы, поскольку необходимо абсолютно точное восстановление начальной информации после ее сжатия. При сжатии языка, музыкальных данных и изображений, наоборот, чаще используется разрушительное сжатие, поскольку при практически незаметных искажениях оно обеспечивает на порядок меньшую скорость  $R$ . В общем случае разрушительное сжатие обеспечивает, как правило, существенным образом высшие коэффициенты сжатия, чем неразрушительное.

К сожалению, неразрушительное сжатие при всей привлекательности перспективы получения *абсолютного совпадения* начальных и восстановленных данных имеет невысокую эффективность - коэффициенты неразрушительного сжатия редко превышают 1-2 (за исключением случаев кодирования данных с высокой степенью повторяемости одинаковых участков). Тем не менее зачастую нет потребности в абсолютной точности передачи начальных данных потребителю. Речь идет, в частности, о таких случаях.

Источники данных имеют ограниченный динамический диапазон и вырабатывают начальные сообщения с определенным уровнем искажений и ошибок. Этот уровень может быть большим или меньшим, но абсолютной точности воспроизведения достичь невозможно.

Передача данных по каналам связи и их хранение всегда происходят при наличии разного рода помех. Поэтому принятое (воспроизведенное) сообщение всегда определенной мерой отличается от переданного, т.е. на практике

невозможна абсолютно точная передача при наличии помех в канале связи (в системе хранения).

Заметим, что сообщения передаются и сохраняются для их восприятия и использования получателем. Получатели информации - органы чувств человека, исполнительные механизмы и т.д. - также имеют конечную раздельную способность, т.е. не замечают незначительной разности между *абсолютно точным* и *приближенным* значениями воспроизведенного сообщения. Порог чувствительности к искажениям также может быть разным, но он всегда существует.

Кодирование с разрушением учитывает эти аргументы в пользу приближенного восстановления данных и дает возможность получить за счет некоторой контролируемой по размеру ошибки коэффициенты сжатия, которые в десятки раз превышают степень сжатия для разрушительных методов.

Большинство методов разрушительного сжатия основываются на кодировании не самих данных, а некоторых линейных преобразований от них, например коэффициентов дискретного преобразования Фурье, коэффициентов косинусного преобразования, преобразований Хаара, Уолша и т.д.

#### **Постановка задачи посимвольного кодирования.**

Предположим, что для некоторого дискретного источника  $X$  с известным распределением вероятностей  $\{p(x), x \in X\}$  нужно построить эффективный неравномерный двоичный код с алфавитом  $A = \{a\}$ . Поскольку на практике для кодирования источников используются большей частью лишь двоичные коды, допустим, что  $A = \{0,1\}$ .

*Требованием однозначного декодирования называют необходимость существования такого двоичного кода, который допускает однозначное распределение последовательности кодовых слов на отдельные кодовые слова без использования любых дополнительных символов.*

*Неравномерный посимвольный код  $C = \{c\}$  объемом  $|C| = M$  над алфавитом  $A$  определяется как произвольное множество последовательностей одинаковой или разной длины из элементов алфавита  $A$ . Код является однозначно декодированным, если любая последова-*



**Элиаким Гастингс Мур (Eliakim Hastings Moore, 1862 - 1932),**

американский математик. Сначала работал в области абстрактной алгебры, доказал (1893), что любое финитное поле является полем Галуа. Переформулировал аксиомы Гильберта для геометрии так, что только точки были первоначальным понятием, перевел линии и плоскости из первоначальных понятий Гильберта в обозначенные понятия. Больше того, показал (1902), что некоторые из аксиом Гильберта избыточны. Разработывал систему аксиом с точки зрения метаматематики и теории моделей. После 1906 г. вернулся к основам анализа.

тельность символов с  $A$  единым способом разбивается на отдельные кодовые слова.

**Префиксным кодом** называется такой код, для которого ни одно кодовое слово не является началом другого. Префиксные коды являются однозначно декодированными.

**Пример.** Для источника  $X = \{0, 1, 2, 3\}$  среди четырех кодов

а)  $C_1 = \{00, 01, 10, 11\}$ ;      б)  $C_2 = \{1, 01, 001, 000\}$ ;

в)  $C_3 = \{1, 10, 100, 000\}$ ;      г)  $C_4 = \{0, 1, 10, 01\}$

первые три кода (а - в) однозначно декодированные, последний код - нет.

Первый код этого примера - равномерный код. Понятно, что любой равномерный код может быть однозначно декодированный.

Для декодирования второго кода можно применить такую стратегию. Декодер считывает символ за символом, и каждый раз проверяет, не совпадает ли полученная последовательность с одним из кодовых слов. В случае успеха соответствующее сообщение выдается получателю, и декодер приступает к декодированию следующего сообщения. В случае кода  $C_2$  неоднозначности не может быть, поскольку ни одно слово не является продолжением другого.

Код  $C_3$ , очевидно, не префиксный. Тем не менее мы утверждаем, что он однозначно декодирован. Каждое слово кода  $C_3$  получено переписыванием в обратном порядке соответствующего слова кода  $C_2$ . Для декодирования последовательности кодовых слов кода  $C_3$  можно переписать принятую последовательность в обратном порядке и для декодирования использовать декодер кода  $C_2$ .

**Префиксность** - достаточное, но не необходимое условие однозначной декодированности.

Графически удобно изображать префиксные коды в виде кодовых деревьев. Кодовое дерево кода  $C_2$  из примера 12.1 приведено на рис. 12.6.

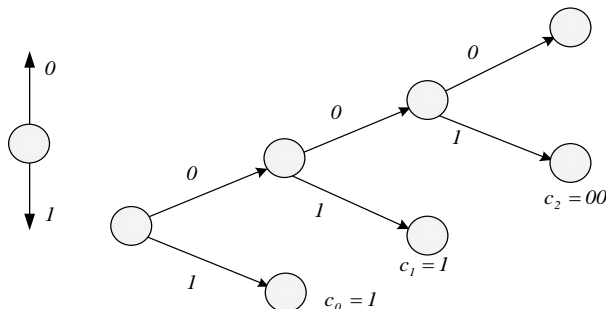


Рис. 12.6. Кодовое дерево кода  $C_2$

Узлы дерева размещаются на ярусах. На начальном (нулевом) ярусе расположен один узел, который называется *корнем дерева*. Узлы следующих ярусов связаны с узлами предыдущих ярусов ребрами. В случае двоичного кода из каждого узла выходит не более чем два ребра. Ребрам приписаны кодовые символы. В этом примере считаем, что ребру, направленному вверх, приписывается символ 0, а ребру, направ-

ленному вниз - символ 1. Таким образом, каждой вершине дерева отвечает последовательность, которая считывается вдоль пути, который связывает данный узел с корнем дерева. Узлы дерева размещаются на ярусах. На начальном (нулевом) ярусе расположен один узел, который называется *корнем дерева*. Узлы следующих ярусов связаны с узлами предыдущих ярусов ребрами. В случае двоичного кода из каждого узла выходит не более чем два ребра. Ребрам приписаны кодовые символы. В этом примере считаем, что ребру, направленному вверх, приписывается символ 0, а ребру, направленному вниз - символ 1. Таким образом, каждой вершине дерева отвечает последовательность, которая считывается вдоль пути, который связывает данный узел с корнем дерева.

*Конечным узлом* называют узел, из которого не выходит ни одного ребра. *Древовидным кодом* называют такой код, который содержит только такие кодовые слова, которые отвечают конечным вершинам кодового дерева. Древовидность кода и префиксность - синонимы в том понимании, что каждый древовидный код является префиксным и каждый префиксный код можно подать с помощью кодового дерева. *Критерием качества кода относительно кодирования источника сообщения есть средняя длина кодовых слов.*

Рассмотрим источник  $X = \{1, \dots, M\}$ , который порождает буквы с вероятностями  $\{p_1, \dots, p_M\}$ . Предположим, что для кодирования букв источника взят код  $C = \{c_1, \dots, c_M\}$  с длинами кодовых слов  $\text{length}(c_1) = l_1, \dots, \text{length}(c_M) = l_M$ .

*Средней длиной кодовых слов* является  $\bar{l} = M[l_i] = \sum_{i=1}^M p_i l_i$ . Еще один важный аспект, который нужно учитывать при сравнении способов неравномерного кодирования, - это сложность реализации кодирования и декодирования.

*Задача посимвольного неравномерного кодирования* - построение однозначно декодированного кода с наименьшей средней длиной кодовых слов при заданных ограничениях на сложность.

**Неравенство Крафта для префиксного кодирования.** Требование префиксности накладывает жесткие ограничения на множество длин кодовых слов и не дает возможности выбирать кодовые слова слишком короткими. Формально эти ограничения записываются в виде неравенства, которое называется *неравенством Крафта*.

*Необходимым и достаточным условием существования префиксного кода объемом  $M$  с длинами кодовых слов  $l_1, \dots, l_M$  является выполнение неравенства*

$$\sum_{i=1}^M 2^{-l_i} \leq 1. \quad (12.5)$$

*Необходимое условие префиксности.* Убедимся в том, что неравенство (12.5) правильно для любого префиксного кода.

Рассмотрим двоичное кодовое дерево произвольного префиксного кода объе-





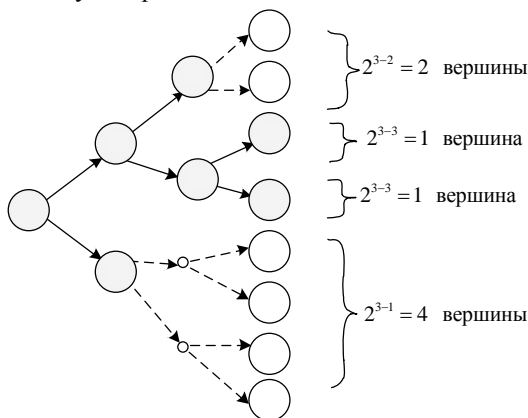
**Якоб Зив (Jacob Ziv, 1931),**

родился в Израиле. В 1962 г. получил степень доктора философии в Массачусетском технологическом институте (Кембридж, США). Его исследовательские интересы охватывают сжатие данных, теорию информации и статистическую теорию связи. Зив вместе с Абрахамом Лемпелем разработал алгоритм сжатия данных без потерь LZ77. В разные года работал старшим инженером в Министерстве обороны Израиля, где занимался исследованием и развитием систем коммуникаций.

мом  $M$  с длинами кодовых слов  $l_1, \dots, l_M$ . Выберем целое число  $L$ , чтобы  $L \geq \max l_i$ . Продолжим все пути в дереве к ярусу с номером  $L$ . На последнем ярусе получим  $2^L$  вершин. Заметим, что конечная вершина исходного дерева, размещенная на глубине  $l_i$ , имеет следующие 2 узла на глубине  $l_i + 1$ , 4 узла на глубине  $l_i + 2$  и т.д. На глубине  $L$  будет  $2^{L-l_i}$  узлов этой вершины. Множества узлов разных конечных вершин не пересекаются, поэтому суммарное количество узлов не превышает общего количества вершин на ярусе  $L$ .

Получим неравенство  $\sum_{i=1}^M 2^{L-l_i} \leq 2^L$ .

Поделив обе части на  $2^L$ , получим искомый результат. Доказательство необходимости выполнения неравенства Крафта на **примере** кода из 4 слов иллюстрирует рис. 12.7. В этом примере  $l_1 = 2, l_2 = l_3 = 3, l_4 = 1, L = 4$ . Кодовое дерево на рис. 12.7 изображено сплошными линиями, а ребра, которые появились при продолжении дерева к ярусу с номером  $L$ , - пунктиром.



Всего вершин  $2+1+1+4=8: \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = 1$

Рис. 12.7. Дерево выполнения условий Крафта для префиксного кода

*Достаточное условие префиксности.* Покажем, что из формулы (12.5) вытекает существование кода с заданным набором длин кодовых слов. Построим такой код. Без потери всеобщности можем считать числа  $l_i$  упорядоченными по росту.

Из общего количества  $2^{l_i}$  вершин на ярусе  $l_i$  выберем любую, сделаем ее конечной и закрепим за первым кодовым

словом. Продолжим вершины, которые остались, к ярусу  $l_2$ . Из общего количества возможных вершин нужно исключить  $2^{l_2-l_1}$  вершин, которые принадлежат поддереву, что начинается в узле, который отвечает первому слову. На ярусе  $l_2$  останется  $2^{l_2} - 2^{l_2-l_1} \geq 1$  вершин.

Последнее неравенство вытекает из неравенства (12.5), в чем можно убедиться, разделив его правую и левую части на  $2^{l_2}$ . Сделаем одну из них конечной и закрепим ее за вторым словом. Аналогично для третьего слова получим множество из выражения  $2^{l_3} - 2^{l_3-l_2} - 2^{l_3-l_1} \geq 1$  вершин. Согласно формуле (12.5) всегда обнаружится одна вершина для третьего слова. Продолжая построение, на последнем ярусе с номером  $l_M$  получим вершин:  $2^{l_M} - 2^{l_M-l_{M-1}} - 2^{l_M-l_{M-2}} - \dots - 2^{l_M-l_1}$ .

Простые выкладки показывают, что это число не меньше 1, если неравенство (12.5) правильное. Выбрав эту вершину для последнего слова, закончим построение префиксного кода. Процесс построения кодового дерева для набора длин кодовых слов  $l_1 = 1, l_2 = 2, l_3 = l_4 = 3$  иллюстрирует рис. 12.8. В рассмотренном примере неравенство Крафта превращается в равенство.

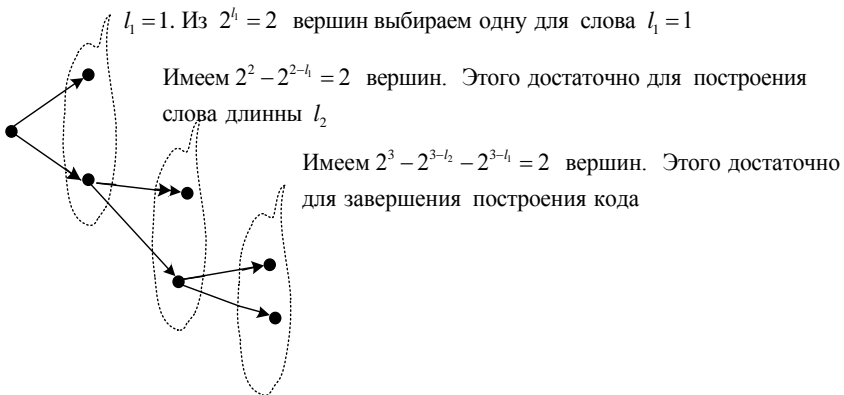


Рис. 12.8. Построение префиксного кода с длинами слов, которые удовлетворяют неравенству Крафта

Для достижения равенства в формуле (12.5) кодовое дерево должно быть полным, т.е. каждая промежуточная вершина дерева должна иметь ровно 2 узла и всем конечным вершинам должны быть сопоставленные кодовые слова.

*Неравенство Крафта ограничивает снизу длину кодовых слов префиксного кода заданного объема  $M$ .*

В связи с этим важно быть уверенным, что это неравенство выполняется не только для древовидных (префиксных) кодов, а и для любых других однозначно декодированных кодов.

Для любого однозначно декодированного двоичного кода объемом  $M$  с длинами кодовых слов  $l_1, \dots, l_M$  выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^M 2^{-l_i} \leq 1. \quad (12.6)$$

**Коды без памяти. Коды Хаффмана.** Рассмотрим один из наиболее распространенных методов сжатия данных - *код Хаффмана*, или *минимально избыточный префиксный код*, предложенный в 1952 г. Дэвидом Хаффманом. Идея, положенная в основу кода Хаффмана, довольно простая. Вместо того чтобы кодировать все символы одинаковым количеством бит (как это сделано, например, в ASCII кодировании, где каждому символу отводится ровно по 8 бит), будем кодировать символы, которые встречаются чаще, меньшим количеством бит, чем те, которые случаются реже. Более того, необходимо, чтобы код был оптимальным, или, другими словами, минимально избыточным. Предложенный Хаффманом алгоритм построения оптимальных неравномерных кодов - одно из важнейших достижений теории информации как из теоретической, так и с прикладной точек зрения.

Рассмотрим ансамбль сообщений  $X = \{1, \dots, M\}$  с вероятностями сообщений  $p_1, p_2, \dots, p_M$  и упорядочим его по уменьшению вероятностей, т.е.  $p_1 < p_2 < \dots < p_M$ . *Задача* состоит в построении оптимального кода, т.е. кода с наименьшей возможной средней длиной кодовых слов. Понятно, что при заданных вероятностях такой код может не быть единственным, возможно существование семьи оптимальных кодов. Выясним некоторые свойства всех кодов этой семьи. На основании этих свойств найдем и обоснуем один из оптимальных кодов.

Пусть двоичный код  $C = \{c_1, \dots, c_M\}$  с длинами кодовых слов  $\{l_1, \dots, l_M\}$  оптимальный для рассмотренного ансамбля сообщений.

**Свойства оптимальных префиксных кодов.** 1. Если  $p_i < p_j$ , то  $l_i > l_j$ .

Свойство легко доказывается методом от противоположного. Предположим, что  $l_i < l_j$ . Рассмотрим другой код  $C'$ , в котором сообщению  $x_i$  отвечает слово  $c_j$ , а сообщению  $x_j$  - слово  $c_i$ . Нетрудно убедиться в том, что средняя длина кодовых слов для кода  $C'$  меньшая, чем для кода  $C$ , что противоречит предположению об оптимальности кода  $C$ .

2. Не менее чем два кодовых слова имеют одинаковую длину  $l_M = \max l_m$ .

Предположив, что существует только одно слово максимальной длины, приходим к выводу, что соответствующее кодовое дерево будет неполным. Очевидно, слово максимальной длины можно будет сделать менее коротким, по меньшей мере, на один символ. При этом уменьшится средняя длина кодовых слов, которая противоречит предположению об оптимальности кода.

3. Среди кодовых слов длиной  $l_M = \max l_m$  обнаруживаются два слова, которые отличаются только одним последним символом.

В соответствии с предыдущим свойством два слова длиной  $l_M$  существуют в любом оптимальном коде. Рассмотрим конечный узел, который отвечает одному из слов максимальной длины. Чтобы дерево было полным, дол-

жен существовать узел, который является общим с предыдущим узлом. Кодовые слова, которые отвечают двум конечным вершинам, имеют одинаковую длину  $l_M$  и отличаются одним последним символом.

Введем обозначения. Для рассмотренного ансамбля  $X = \{1, \dots, M\}$  и некоторого кода  $C$ , удовлетворяющего свойству 1 - 3, введем вспомогательный ансамбль  $X' = \{1, \dots, M-1\}$ , сообщение которого поставим в соответствие вероятности  $\{p'_1, \dots, p'_{M-1}\}$  таким образом:  $p'_1 = p_1, \dots, p'_{i-2} = p_{i-2}, p'_{i-1} = p_{i-1} + p_i$ . Из кода  $C$  построим код  $C'$  для ансамбля  $X'$ , приписав сообщению  $x'_1, \dots, x'_{M-2}$  те самые кодовые слова, что и в коде  $C$ , т.е.  $c'_i = c_i, i=1, \dots, M-2$ , а сообщению  $x'_{M-1}$  - слово  $c'_{M-1}$ , которое представляет собой общую часть слов  $c_{M-1}$  и  $c_M$  (соответственно свойству 3 эти два кодовых слова отличаются только одним последним символом).

4. Если код  $C'$  для  $X'$  оптимальный, то код  $C$  оптимальный для  $X$ .

Длины кодовых слов кодов  $C$  и  $C'$  связаны соотношением

$$l_m = \begin{cases} l'_m & \text{при } m \leq M-2; \\ l'_{M-1} + 1 & \text{при } m = M-1. \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} \bar{l} &= \sum_{m=1}^M p_m l_m = \sum_{m=1}^{M-2} p_m l'_m + p_{M-1} l_{M-1} + p_M l_M = \sum_{m=1}^{M-2} p_m l'_m + (p_{M-1} + p_M)(l'_{M-1} + 1) = \\ &= \sum_{m=1}^{M-2} p'_m l'_m + p'_{M-1} l'_{M-1} + p_{M-1} + p_M = \sum_{m=1}^{M-1} p'_m l'_m + p_{M-1} + p_M = \bar{l}' + p_{M-1} + p_M. \end{aligned}$$

Последние два слагаемых в правой части не зависят от кода, поэтому код, который минимизирует  $\bar{l}'$ , одновременно обеспечивает минимум для  $\bar{l}$ .

Итак, сформулированные свойства оптимальных префиксных кодов сводят задачи построения кода объемом  $M$  к задаче построения кодов объемом  $M' = M - 1$ . Это означает, что мы получили рекуррентное правило построения кодового дерева оптимального неравномерного кода.

Хаффман предложил строить дерево, в котором узлы с наибольшей вероятностью наименее отдалены от корня. Отсюда и вытекает сам способ построения дерева.

1. Выбрать два символа  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  ( $i \neq j$ ), так, чтобы  $P_i(\alpha_i)$  и  $P_j(\alpha_j)$  из всего списка  $\{P_1(\alpha_1), P_2(\alpha_2), \dots, P_n(\alpha_n)\}$  были минимальными.

2. Свести ветки дерева от этих двух элементов в одну точку с вероятностью  $P = P_i(\alpha_i) + P_j(\alpha_j)$ , обозначив одну ветку нулем, а другую - единицей.

3. Повторить п. 1 с учетом новой точки вместо  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$ , если количество образованных точек больше, чем единица. В противоположном случае мы достигли корня дерева.

*Избыточность кода Хаффмана.* Для посимвольных по алгоритму Хаффмана кодов средняя длина кодовых слов удовлетворяет неравенству

$$\bar{l} \leq H + 1, \quad (12.7)$$

где  $H$  - энтропия ансамбля.

*Избыточностью неравномерного кода Хаффмана называется разность*  
 $r = \bar{l} - H.$

Она показывает степень «несовершенства» кода в том понимании, что при кодировании с избыточностью  $r$  на каждое сообщение тратится на  $r$  бит больше, чем в принципе можно было бы израсходовать, если использовать теоретически наилучший (возможно, нереализованный) способ кодирования.

Итак, из формулы (12.7) вытекает, что для кода Хаффмана избыточность  $r \leq 1$ . Однако при решении практических задач избыточность существенным образом меньше единицы, поэтому нужно найти самую точную оценку средней длины кодовых слов. Этого нельзя сделать, не ограничив множества рассматриваемых источников.

**Код Шеннона.** Рассмотренный раньше префиксный код Хаффмана является оптимальным неравномерным кодом. Во время рассмотрения прямой теоремы посимвольного кодирования уже говорилось о том, что избыточность 1 бит на букву не такая уже и большая при большом значении энтропии.

Рассмотрим источник, который выбирает сообщение из множества  $X = \{1, \dots, M\}$  с вероятностями  $\{p_1, \dots, p_M\}$ . Считаем, что символы упорядочены по спаданию вероятностей, т.е.  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_M$ . Поставим в соответствие каждой букве так называемую *кумулятивную вероятность* по правилу  $q_1 = 0, q_2 = p_1, \dots, q_M = \sum_{i=1}^{M-1} p_i$ .

*Кодовым словом Шеннона для сообщения с номером  $t$  является двоичная последовательность, которая представляет собой первые  $l_m = \lceil -\log p_m \rceil$  разрядов после запятой в двоичной записи числа  $q_m$ .*

**Арифметическое кодирование.** *Метод арифметического кодирования дает возможность эффективно кодировать блоки длины  $n$  с избыточностью порядка  $2/n$  и со сложностью, которая возрастает только пропорционально квадрату длины блока  $n$ .*

За счет малого проигрыша в скорости кода можно достичь даже линейной по длине кода сложности. Арифметическое кодирование широко применяется в системах обработки информации.

Рассмотрим для упрощения соображений дискретный постоянный источник, который выбирает сообщение из множества  $X = \{1, \dots, M\}$  с вероятностями  $\{p_1, \dots, p_M\}$ . Обозначим через  $\{q_1, \dots, q_i\}$  кумулятивные вероятности сообщений. Наша задача состоит в кодировании последовательностей множества  $X^n = \{x\}$ . Описывая алгоритм кодирования, будем использовать обозначение  $x_i^j$  для короткой записи подпоследовательности  $(x_i, \dots, x_j)$  последовательности  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Применим к ансамблю  $X^n = \{x\}$  довольно простой и эффективный посимвольный код. Упрощение заключается в том, что ни кодер, ни декодер не сохраняет и не строит всего множества из  $|X^n|$  кодовых слов. Вместо этого при передаче конкретной последовательности  $x$  кодером вычисляется кодовое слово  $c(x)$  только для данной последовательности  $x$ . Правило кодирования обычно известно декодеру, и он восстанавливает  $x$  по значениям  $c(x)$ , не имея полного списка кодовых слов. Возможными алгоритмами для использования в такой схеме можно рассматривать код Шеннона и код Гильберта - Мура. Тем не менее использование кода Шеннона допускает благоустроенность сообщений по спаданию вероятности. При больших  $n$  сложность приведения в порядок становится недопустимо большой, поэтому единственным претендентом остается код Гильберта - Мура. Соответственно правилу построения кода Гильберта - Мура кодовое слово формируется по вероятности  $p(x)$  и кумулятивной вероятности  $q(x)$  как первые  $l(x) = \lceil -\log p(x) + 1 \rceil$  разрядов после точки в двоичной записи числа  $\sigma(x) = q(x) + p(x)/2$ . Для того чтобы вычислить  $q(x)$ , нужно договориться о некоторой нумерации последовательностей из  $X^n$ . Наиболее естественный способ нумерации последовательностей - использование лексикографической благоустроенности. Лексикографический порядок на последовательностях обозначают знаком « $\prec$ ». Запись  $y \prec x$  означает, что  $y$  лексикографически передает  $x$ . Лексикографический порядок - это порядок, который обычно используется при составлении словарей. Задача состоит в вычислении кумулятивной вероятности

$$q(x) = \sum_{y \prec x} p(y), \quad (12.8)$$

поскольку для источника без памяти вероятности последовательностей  $p(x)$  вычисляются довольно просто по формуле

$$p(x) = \prod_{i=1}^n p(x_i).$$

#### **Алгоритм арифметического кодирования**

1. По вероятностям  $\{p_1, \dots, p_M\}$  сообщений источника исчисляются кумулятивные вероятности  $q_1 = 0$  при  $j = 2, \dots, M$ ,  $q_j = q_{j-1} + p_{j-1}$ . Устанавливаются начальные значения вспомогательных сменных  $F = 0$ ,  $G = 1$ . Принимается от источника последовательность сообщений



**Абрахам Лемпель (Abraham Lempel, 1936),**

ученый-компьютерщик и один из родителей семьи алгоритмов сжатия данных без потерь LZ, по происхождению поляк. Ныне проживает в Израиле. Его исторически важные работы берут начало из презентации алгоритма LZ77 в статье "A Universal Algorithm for Sequential Data Compression" (1977 г.). Эта работа написана в соавторстве с Якобом Зивом. Немало алгоритмов с буквой L в названии указывают на Лемпеля: LZ77, LZ78, LZW, LZR, LZS, LZO и LZMA. Названия LZX, LHA (LHarc) и LZH ссылаются также на Лемпеля. Его работы заложили основу для таких графических форматов сжатия, как GI, TIFF и JPEG.



**Ричард Весли Хэмминг (Richard Wesley Hamming, 1915 - 1998),**

американский математик, которого можно назвать гением одной идеи. Он сформулировал ее в 1950 г. в своей научной статье, посвященной кодам для корректирования ошибок. Речь шла о конструкции блочного кода, который корректирует одиночные ошибки, возникающие при передаче сообщений. Одним из важнейших разделов теории информации является теория кодирования, основы которой заложил Хэмминг. Пионерскую работу Хэмминга было отмечено многими наградами. В 1996 г. в Мюнхене за исследование кодов, которые корректируют ошибки, Хэмминг был удостоен престижной премии Эдуарда Рейма.

$$x = (x_1, \dots, x_n).$$

2. Для  $i = 1, \dots, n$  выполняются такие вычисления:  
 $F \leftarrow F + q(x_i)G, \quad G \leftarrow p(x_i)G.$

3. Кодовое слово для  $x$  формируется как первые  $[-\log G] + 1$  разрядов после запятой в двоичной записи числа  $(F + G/2)$ .

*Некоторые аспекты практической реализации арифметического кодирования.*

Как вытекает из описания арифметического кодирования, в случае его практической реализации, для кодирования последовательностей большой длины  $n$  возникают такие проблемы: арифметическое кодирование нуждается в большой (в границе бесконечной) точности вычислений, которая приводит к недопустимо высокой сложности реализации. Для формирования кодового слова формально необходима вся последовательность сообщений, которая приводит к недопустимо большой задержке кодирования, которая равняется длине закодированной последовательности сообщений. Обе проблемы можно преодолеть. Решение заключается в том, что ту часть данных, которая не принимает участия в дальнейших вычислениях и уже не влияет на окончательный результат, можно изъять из вычислений и выдать на выход кодера. Тем самым уменьшается сложность вычислений и задержка кодирования. Чтобы объяснить, как это делается, рассмотрим работу декодера.

Начнем из анализа работы декодера кода Гильберта - Мура. Пусть для источника  $X = \{1, \dots, M\}$  известны вероятности  $\{p_1, \dots, p_l\}$ , по которым вычислены  $q_m = \sum_{j=1}^{m-1} q_j$ ,  $\sigma_m = q_m + p_m / 2$ , длины слов  $l_m = \lceil \log(p_m / 2) \rceil$  и кодовые слова длиной  $l_m$ , полученные округлением значения  $\sigma_m$ . Округленные к  $l_m$  разрядам после запятой числа  $\sigma_m$  обозначим через  $\hat{\sigma}_m$ . Задача декодера состоит в восстановлении сообщения  $t$  по соответствующему округленному значению  $\sigma_m = \hat{\sigma}_m$ .

**Коды с памятью.** По обыкновению рассматривают два типа кодов с памятью: блочные коды и блочные коды с конечной памятью.

*Блочный код* - это код, который разделяет вектор данных на блоки заданной длины и каждый указанный блок последовательно заменяет кодовым словом из

префиксного множества двоичных слов. Образованную последовательность кодовых слов объединяют в результирующую двоичную строку на выходе кодера.

О блочном коде говорят, что он представляет собой блочный код  $k$ -го порядка, если все блоки имеют длину, равную  $k$ .

*Код с конечной памятью* - это такой код, который при кодировании вектора данных  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  использует кодовую книгу (словарь), который состоит из нескольких разных кодов без памяти. Каждая выборка данных кодируется таким кодом без памяти из кодовой книги, который определяется значением некоторого количества предыдущих выборок данных.

*Кодер с памятью* - это такой кодер, который при кодировании текущего символа учитывает значение предыдущего символа.

**Кодирование длин повторений.** Кодирование длин участков (или повторений) может быть достаточно эффективным при сжатии двоичных данных, например черно-белых изображений, которые содержат множество прямых линий и однородных участков, схем и т.д.

*Идея сжатия данных на основе кодирования длин повторений заключается в том, что вместо кодирования самих данных прибегают к кодированию чисел, которые отвечают длинам участков, на которых данные сохраняют неизменное значение.*

**Дифференциальное кодирование.** Работа дифференциального кодера основывается на том, что для многих типов данных разность между соседними отсчетами сравнительно небольшая, даже если сами данные имеют большие значения. Например, нельзя ожидать большой разности между соседними пикселями цифрового изображения.

Метод дифференциального кодирования широко используется в тех случаях, когда природа данных такова, что их соседние значения немного отличаются друг друга, но сами значения могут быть какими угодно большими.

Это касается звуковых сигналов, особенно языка, изображений, соседние пиксели которых имеют практически одинаковую яркость и цвет. Тем не менее этот метод абсолютно непригоден для кодирования текстов, черчений или любых цифровых данных с независимыми соседними значениями.

## 12.2. Помехоустойчивое кодирование

Искажение информации, т.е. нарушение ее целостности, возможно на любом этапе ее циркуляции в информационно-телекоммуникационных сетях: при хранении, передаче или обработке.

Под *целостностью информации* понимается ее свойство, которое заключается в том, что информация не может быть модифицирована неавторизованным пользователем или процессом. Другими словами, под целостностью информации понимается отсутствие в ней любых искажений (модификаций), которые не были санкционированы ее владельцем, независимо от причин или источников возникновения таких искажений.





**Марсель Голей**  
(Marcel J. E. Golay,  
1902 - 1989),

математик, физик, специалист в области теории информации, который применял математику к реальным практическим военным и промышленным задачам. Родился в Швейцарии. Изучал электротехнику в Швейцарском федеральном технологическом институте в Цюрихе. Работал над решением многих задач, включая газовую хроматографию и оптическую спектроскопию. Его достижения: разработка кодов Голя, обобщение абсолютных бинарных кодов Хэмминга к небинарным кодам, открытие комплементарных последовательностей.

Причины таких искажений могут быть случайными или намеренными. В свою очередь, случайные искажения могут быть как естественными, связанными с действием естественных факторов, так и искусственными. Случайные искусственные искажения связаны с деятельностью людей - со случайными ошибками персонала. Намеренные искажения всегда связанные с целенаправленными действиями нарушителей. И те, и другие действия имеют своим следствием искажения некоторого количества символов в цифровом представлении информации (независимо от используемой системы исчисления и формы представления информации) и в этом понимании являются угрозами функциональным свойствам защищенности информационных ресурсов - их целостности и доступности. Поэтому задача обеспечить целостность и доступность информационных ресурсов является одной из наиболее актуальных при разработке и эксплуатации информационных систем и их элементов.

Эта актуальность подтверждается и требованиями относительно допустимой вероятности  $D_{\Pi}$  ошибок в сообщениях, которую следует понимать как вероятность нарушения целостности информационных объектов, которые обрабатываются (если передача и обработка информации осуществляются в виде сообщений). Для обеспечения контроля и возобновления целостности информационных объектов, в частности для восстановления разрушенной информации, в состав информации включают избыточную информацию - признак целостности или контрольный, процедура формирования которой известна и принадлежит к помехоустойчивым методам кодирования.

*Задача помехоустойчивого корректирующего кодирования* - обеспечить целостность информационных сообщений с применением помехоустойчивых корректирующих кодов.

*Помехоустойчивым корректирующим кодированием* называется такой вид кодирования, который дает возможность реализовывать программные, аппаратные или программно-аппаратные средства выявления и устранения искажений в информационных сообщениях.

Кодирование с исправлением ошибок является, в сущности, методом обработки сигналов, предназначенным для увеличения надежности передачи информационных потоков по цифровым каналам связи. Хотя разные схемы кодирования отличаются одна от другой и основываются на разных математических теориях, всем им присущи два общих свойства:

1. *Использование избыточности информации относительно кодового слова.* Закодированные цифровые сообщения всегда содержат дополнительные (избыточные) символы. Их используют для того, чтобы сделать более выразительным индивидуальность каждого сообщения, устанавливая правило или алгоритм восстановления целостности информации. Эти символы выбирают так, чтобы сделать маловероятной потерю сообщением его индивидуальности через искажение вследствие влияния помех.

2. *Усреднение влияния помех.* Эффект усреднения достигается за счет того, что избыточные символы зависят от нескольких информационных символов. В каналах с помехами эффективным средством повышения достоверности передачи сообщений есть помехоустойчивое кодирование. Оно основывается на применении специальных кодов, которые корректируют ошибки, вызванные действием помех.

**Корректирующим** называется такой код, который дает возможность обнаруживать или и обнаруживать, и исправлять ошибки при приеме сообщений. Существует много корректирующих кодов, которые различаются как по принципам построения, так и основными характеристиками (рис. 12.9).



Рис. 12.9. Классификация помехоустойчивого кодирования

**Обнаруживающим** называется код, с помощью которого только обнаруживаются ошибки.

Исправление ошибки при таком кодировании по обыкновению происходит путем повторения обезображенных сообщений. Запрос о повторении передается по каналу обратной связи.



**Ирвинг Рид (Irving S. Reed, 1923),**

математик и инженер. Родился в Сетле. Получил степень доктора философии в области математики в Калифорнийском технологическом институте (1949). Член Национальной инженерной академии и Института инженеров по электротехнике и электронике, а также лауреат премии имени Клода Элюда Шеннона. Главное достижение — разработка вместе с Густавом Соломоном алгебраических кодов выявления и исправления ошибок, известных как коды Рида — Соломона. Также является соизобретателем кодов Рида-Мюллера. Сделал значительный вклад в электротехнику, в частности радиолокацию, сигналы и изображения.

*Исправляющим* называется код, который фиксирует не только сам факт наличия ошибок, а и устанавливает, какие кодовые символы приняты с ошибкой, также дает возможность их исправить без повторной передачи.

Известны также коды, в которых исправляется только часть выявленных ошибок, а сдача ошибочных комбинаций передается повторно.

Для того чтобы код имел корректирующие свойства, в кодовой последовательности должны содержаться дополнительные (избыточные) символы, предназначенные для корректирования ошибок. Чем больше избыточность кода, тем выше его корректирующая способность.

Базовым алгоритмом для всех корректирующих кодов является использование избыточности для исправления ошибок, которые могут возникнуть в процессе передачи или хранения информации. Согласно основной схеме, чрезмерные символы дописываются вслед за информационными, образуя кодовую последовательность или кодовое слово.

Кодовое слово, сформированное за процедурой блочного кодирования, изображено на рис. 12.10.

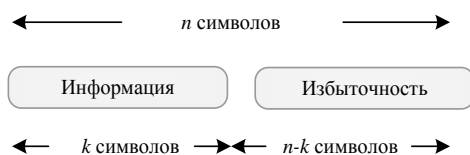


Рис. 12.10. Систематическое блочное кодирование для исправления ошибок

Такое кодирование называют *систематическим*. Это означает, что информационные символы всегда появляются на первых позициях кодового слова. Символы на  $n-k$  позициях, которые остались, являются разными функциями от информационных символов, которые обеспечивают тем самым чрезмерность, необходимую для выявления или исправления ошибок. Множество всех кодовых последовательностей называют *кодом, который исправляет ошибки*.

**Блочные и сверточные коды.** Соответственно тому, как вводится чрезмерность в сообщение, корректирующие коды можно поделить на два класса: блоки и свертку кода. Обе схемы кодирования нашли практическое применение.

*Блочным кодированием* называется алгоритм кодирования, согласно которому каждый блок информационных символов обрабатывается независимо от других блоков информационного сообщения. Т.е. блочное кодирование является *операцией без памяти* в том смысле, что кодовые слова не зависят один от другого.

*Сверточным кодированием (циклическо-замкнутым)* называется алгоритм кодирования, согласно которому кодер зависит не только от информационных символов в данный момент, а и от предыдущих символов на его входе или выходе (*кодирование с памятью*).

Чтобы упростить объяснение, начнем с изучения структурных свойств блочных кодов. Множество свойств является общим для обоих типов кодов. Заметим, что на самом деле блочные коды имеют память, если рассматривать кодирование как побитовый процесс в пределах кодового слова.

**Принципы помехоустойчивого кодирования.** В теории помехоустойчивого кодирования важным является вопрос об использовании избыточности для корректирования ошибок, которые возникают при передаче.

Для равномерных кодов, которые являются основными для помехоустойчивого кодирования, количество возможных комбинаций  $M = 2^n$ , где  $n$  - значительность кода. В обычном некорректирующем коде без избыточности (например, в коде Бодо) количество комбинаций  $M$  выбирается таким, которое равняется количеству сообщений алфавита источника  $M_0$ , причем все комбинации используются для передачи информации. Корректирующие коды строятся так, чтобы количество комбинаций  $M$  превышало количество сообщений источника  $M_0$ . Тем не менее в этом случае лишь  $M_0$  комбинаций из общего их количества используется для передачи информации. Эти комбинации называются *разрешенными*, а  $M - M_0$  комбинаций - *запрещенными*. На приемном конце в декодирующем устройстве известно, какие комбинации являются разрешенными, а какие запрещенными. Поэтому если в результате ошибки передачи разрешенная комбинация превратится в некоторую запрещенную комбинацию, то такую ошибку будет обнаружено, а при определенных условиях и исправлено. Естественно, ошибки, которые приводят к образованию другой разрешенной комбинации, не обнаруживаются.

*Расстоянием между комбинациями* называют количество символов, которыми различаются переданные комбинации равномерного кода. Расстояние  $d_{ij}$  между двумя комбинациями  $A_i$  и  $A_j$  определяется количеством единиц в сумме комбинаций по модулю два.

Например:

$$\begin{array}{r} 110011 A_i \\ 010110 A_j \\ \hline 100101 d_{ij} = 3 \end{array}$$

*Кодовым расстоянием  $d$*  для любого кода  $d_{ij} \leq n$  называется минимальное расстояние между разрешенными комбинациями в этом коде.

Расстояние между комбинациями  $A_i$  и  $A_j$  условно обозначено на рис. 12.11, а, где изображены промежуточные комбинации, которые отличаются одна от другой одним символом.

В общем случае некоторая пара разрешенных комбинаций  $A_{p1}$  и  $A_{p2}$ , разделенных кодовым расстоянием  $d$ , изображается на прямой (см. рис. 12.11, б), где точками обозначаются запрещенные комбинации. Для того чтобы в результате ошибки комбинация  $A_{p1}$  превратилась в другую разрешен-

ную комбинацию  $A_{p_2}$ , должны исказиться  $d$  символов.

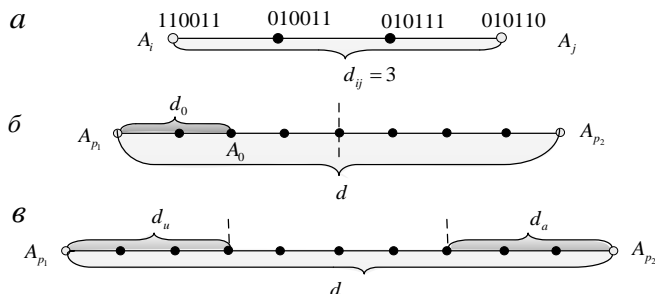


Рис. 12.11. Геометрическое представление разрешенных и запрещенных кодовых комбинаций

В случае искажения меньшего количества символов комбинация  $A_{p_1}$  перейдет в запрещенную комбинацию и ошибку будет обнаружено.

*Ошибка всегда обнаруживается, если ее кратность, т.е. количество искаженных символов в кодовой комбинации*

$$g \leq d - 1. \quad (12.9)$$

Если  $g > d$ , то некоторые ошибки также обнаруживаются. Тем не менее полной гарантии обнаружения ошибок здесь нет, поскольку ошибочная комбинация в этом случае может совпасть с какой-нибудь разрешенной комбинацией.

*Минимальное кодовое расстояние, при котором обнаруживаются любые одиночные ошибки,  $d = 2$ .*

Процедура исправления ошибок в процессе декодирования сводится к определению переданной комбинации при известной принятой. Расстояние между переданной разрешенной комбинацией и принятой запрещенной комбинацией  $d_0$  равняется кратности ошибок  $g$ . Если ошибки в символах комбинации случаются независимо одна от другой, то вероятность искажения некоторых  $g$  символов в  $n$ -значной комбинации

$$P_0^g (1 - P_0)^{n-g}, \quad (12.10)$$

где  $P_0$  - вероятность искажения одного символа. Поскольку по обыкновению  $P_0 \ll 1$ , то вероятность многократных ошибок уменьшается с увеличением их кратности, при этом вероятнее меньшее расстояние  $d_1$  или  $d$ .

При этих условиях исправление ошибок может происходить по следующему правилу: *если принята запрещенная комбинация, то считается переданной ближайшая разрешенная комбинация.*

**Например:** пусть образовалась запрещенная комбинация  $A_0$  (см. рис. 12.11, б), тогда принимается решение, что была передана комбинация  $A_1$ . Это правило декодирования для указанного распределения ошибок является оптимальным, поскольку

обеспечивает исправление максимального количества ошибок. Напомним, что аналогичное правило используется в теории потенциальной помехоустойчивости при оптимальном приеме дискретных сигналов, когда решение сводится к выбору того переданного сигнала, который меньше всего отличается от принятого. При таком правиле декодирования будут исправлены все кратные ошибки

$$g \leq d - 1/2. \quad (12.11)$$

Минимальное значение  $d$ , при котором еще возможно исправление любых одиночных ошибок, равно 3.

Возможно также построение кодов, в которых часть ошибок исправляется, а часть только обнаруживается. Так, согласно рис. 12.11, в, ошибки, кратные  $g \leq d_{\text{исп}}$ , исправляются, а ошибки, кратность которых лежит в пределах  $d_{\text{исп}} \leq n \leq d - d_{\text{обн}}$  только обнаруживаются, тем не менее при их исправлении принимается ошибочное решение - считается переданной комбинация  $A_{p1}$  вместо  $A_{p2}$  или наоборот.

Исправление ошибок - сложная задача, практическое выполнение которой связано с осложнением кодирующих и декодирующих устройств. Поэтому коды по обыкновению используются для корректирования ошибок малой кратности.

Корректирующая способность кода возрастает с увеличением  $d$ . При фиксированном количестве  $M_0$  разрешенных комбинаций увеличить  $d$  возможно лишь за счет роста количества запрещенных комбинаций

$$M - M_0 = 2^n - 2^k, \quad (12.12)$$

что, в свою очередь, нуждается в чрезмерном количестве символов  $r = n - k$ , где  $k$  - количество символов в комбинации кода без избыточности. Можно ввести понятие избыточности кода, количественно определив ее как

$$\chi = n - k/n = 1 - \log_2 M_0 / \log_2 M. \quad (12.13)$$

В случае независимых ошибок вероятность появления  $g$  ошибочных символов в  $n$ -значной кодовой комбинации выражается формулой (12.10), а количество всех возможных появлений  $g$  ошибочных символов в  $n$ -значной комбинации зависит от ее длины и определяется известной комбинаторной формулой  $C_n^g = n! / g! (n - g)!$ .

Отсюда полная вероятность ошибки кратности  $g$ , которая учитывает все возможные появления ошибочных символов, описывается выражением

$$P_{0g} = C_n^g P_0^g = (1 - P_0)^{n-g}. \quad (12.14)$$

Используя формулу (12.14), можно определить вероятность отсутствия ошибок в кодовой комбинации, т.е. вероятность правильного приема  $P_{\text{пр}} = (1 - P_0)^n$ , и вероятность правильного корректирования ошибок  $P_{\text{кор}} = \sum_g P_{0g} = \sum_g C_n^g P_0^g (1 - P_0)^{n-g}$ . Здесь суммирование выполняется по всем значениям кратности ошибок  $g$ , которые обнаруживаются и исправляются. Таким

образом, вероятность некорректированных ошибок

$$P_{\text{ош}} = 1 - P_{\text{пр}} - P_{\text{кор}} = 1 - (1 - P_0)^n - \sum_g C_n^g P_0^g (1 - P_0)^{n-g} . \quad (12.15)$$

Анализ выражения (12.15) показывает, что при малом значении  $P_0$  и сравнительно небольших значениях  $n$  наиболее возможные ошибки малой кратности, которые и необходимо корректировать прежде всего.

*Вероятность  $P_{\text{пом}}$ , избыточность  $\chi$  и количество  $n$  символов являются основными характеристиками корректирующего кода, которые определяют уровень помехоустойчивости передачи дискретных сообщений и меру цены ее достижения.*

Общая задача, которая возникает при создании кода, заключается в достижении наименьших значений  $P_{\text{пом}}$  и  $\chi$ . Целесообразность применения того или другого кода зависит также от сложности кодирующих и декодирующих устройств, которая, в свою очередь, зависит от  $\chi$ . Во многих практических случаях эта сторона вопроса являются решающей. Часто, например, используются коды с большой избыточностью, имеющие простые правила кодирования и декодирования.

В соответствии с общим принципом корректирования ошибок, основывающимся на использовании разрешенных и запрещенных комбинаций, необходимо сравнивать принятую комбинацию со всеми комбинациями данного кода. В результате  $M$  сравнений принимается решение о переданной комбинации. Этот способ декодирования логически является наиболее простым, однако он нуждается в сложных устройствах, в которых должны запоминаться все комбинации кода. Поэтому на практике чаще всего используются коды, дающие возможность с помощью ограниченного количества преобразований принятых кодовых символов получить из них всю информацию о корректированных ошибках, что и будет описано далее.

**Расстояние Хэмминга и свойства корректирования.** Рассмотрим двоичный код  $C$ , который исправляет ошибки. Если не все из  $2^n$  возможных двоичных векторов длины  $n$  будут передавать по каналу связи, то этот код может иметь свойство помехоустойчивости. Так, код  $C$  является подмножеством  $n$ -измеримого двоичного векторного пространства  $V_2 = \{0,1\}^n$ , таким, при котором его элементы максимально отдалены один от другого.

*Кодовое расстояние в двоичном пространстве  $V_2$  определяется как количество позиций, на котором два кодовых вектора  $x_1 = (x_{1,0}, x_{1,1}, \dots, x_{1,n-1})$  и  $x_2 = (x_{2,0}, x_{2,1}, \dots, x_{2,n-1})$  в этом пространстве не сохраняются.*

*Расстояние Хэмминга между векторами  $x_1$  и  $x_2$ , обозначаемое как  $d_H(x_1, x_2)$ , определяется выражением*

$$d_H(x_1, x_2) = \left| \left\{ i : x_{1,i} \neq x_{2,i}, 0 \leq i \leq n \right\} \right|, \quad (12.16)$$

где вертикальные черточки, которые охватывают запись множества в правой части неравенства (12.16), означают, что берется количество элементов в этом множестве.

**Минимальное расстояние Хэмминга** для заданного кода  $C$  определяется как минимум расстояния Хэмминга по всем возможным парам разных кодовых слов:

$$d_{\min} = \min_{v_1, v_2 \in C} \{d_H(v_1, v_2) | v_1 \neq v_2\}. \quad (12.17)$$

Запись  $(n, k, d_{\min})$  означает, что рассматривается блочный код длины  $n$ , который используется для кодирования сообщений длины  $k$ , и имеет минимальное расстояние Хэмминга  $d_{\min}$ . Считается, что количество кодовых слов этого кода равняется  $|C| = 2^k$ .

**Пример.** Простым примером является код-повторение длины 3. Каждый информационный бит повторяется трижды. Таким образом, сообщение «0» кодируется вектором (000), а сообщение «1» — вектором (111). Поскольку эти два вектора различаются тремя позициями, расстояние Хэмминга между ними равно 3. Графическое изображение этого кода приведено на рис. 12.12. Трехмерное двоичное векторное пространство соответствует  $2^3 = 8$  вершинам трехмерного единичного куба.

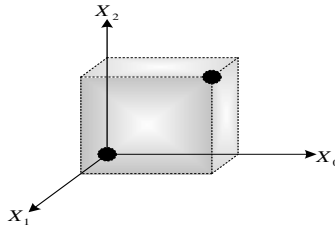


Рис. 12.12. (3, 1, 3) код-повторение в трехмерном векторном пространстве

Расстояние Хэмминга между кодовыми словами (000) и (111) равно количеству вершин, через которые проходит совмещающий их путь, т.е. количество координат, которые необходимо изменить, чтобы превратить (000) в (111), и наоборот. Итак,  $d_H = [(000), (111)] = 3$ . Поскольку в этом коде только два кодовых слова, то  $d_{\min} = 3$ .

Двоичное векторное пространство  $V_2$  обычно называют *пространством Хэмминга*. Пусть  $v$  - кодовое слово кода  $C$ . *Сферой Хэмминга*  $S_t(v)$  радиуса  $t$  с центром в точке  $v$  есть множество векторов (точек) в  $V_2$ , которые находятся от этого центра на расстоянии, меньшем или равным  $t$ :

$$S_t(v) = \{x \in C | d_H(x, v) \leq t\}. \quad (12.18)$$

Заметим, что количество слов (векторов) в  $S_t(v)$ :

$$|S_t(v)| = \sum_{i=0}^t \binom{n}{i}. \quad (12.19)$$

**Пример.** Сферы Хэмминга радиуса  $t=1$ , которые окружают кодовые слова



(3, 1, 3) двоичного кода-повторения, изображены на рис. 12.13.

Укажем, что сферы Хэмминга для этого кода не пересекаются, т.е. в пространстве  $V_2$  нет векторов (или вершин в единичном трехмерном кубе), принадлежащих одновременно  $S_1(000)$  и  $S_1(111)$ . Соответственно, если изменить любую одну позицию кодового слова  $v$ , то образуется вектор, остающийся внутри сферы Хэмминга с центром в  $v$ . Эта идея принципиальна для понимания и определения корректирующей способности кода.

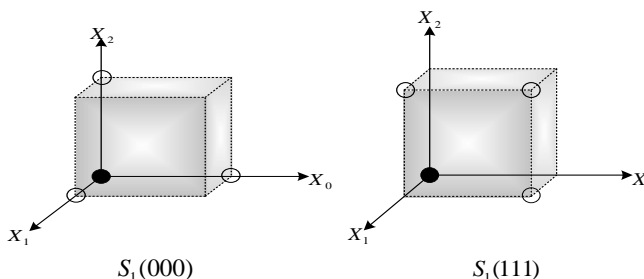


Рис. 12.13. Сферы Хэмминга радиуса  $t=1$ , окружающие кодовые слова (3, 1, 3) двоичного кода-повторения

**Корректирующей способностью  $t$  кода  $C$**  называют наибольший радиус сферы Хэмминга  $S_t(v)$  для всех кодовых слов  $v \in C$ , при котором для любых разных пар  $v_i, v_j \in C$ , соответствующие им сферы Хэмминга не пересекаются, т.е.

$$t = \max \left\{ t \mid S_t(v_i) \cap S_t(v_j) = \emptyset, v_i \neq v_j \right\}. \quad (12.20)$$

Это отвечает более распространенному определению

$$t = \left[ (d_{\min} - 1) / 2 \right], \quad (12.21)$$

где  $[x]$  - целая часть  $x$ , т.е. целое число, не превышающее  $x$ .

Заметим, что для определения минимального кодового расстояния произвольного блочного кода  $C$  необходимо вычислить все  $2^k(2^k - 1)$  расстояния между разными парами кодовых слов. Это практически невозможно даже для сравнительно коротких кодов, например из  $k=50$ . Одной из важных преимуществ линейных блочных кодов является то, что для вычисления  $d_{\min}$  достаточно знать только *весы Хэмминга*  $2^k - 1$  ненулевых кодовых слов.

### 12.3. Блочное помехоустойчивое кодирование

**Линейное блочное кодирование.** Построение оптимального кода означает поиск в  $V_2$  подмножества элементов, наиболее отдаленных один от другого. Это сильно сложная задача. Более того, если даже это сделано, то остается невыясненным, как назначить кодовые слова информационным сообщениям. Приведем общую классификацию блочного помехоустойчивого коди-

рования (рис. 12.14).

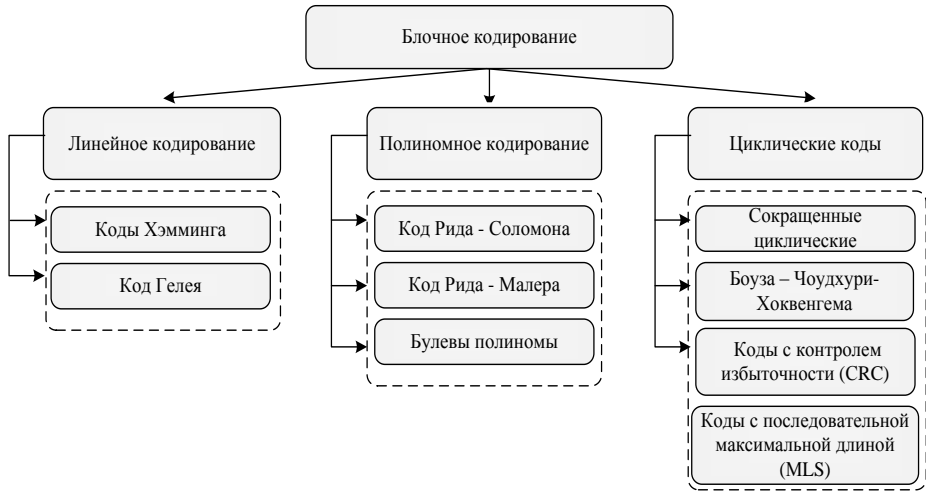


Рис. 12.14. Классификация блочного помехоустойчивого кодирования

Линейный код (множество кодовых слов) является векторным подпространством в пространстве  $V_2$ . Это означает, что операция кодирования может быть умножением на матрицу. Правила добавления и умножения двоичных чисел приведены в табл. 12.1.

Таблица 12.1

$a$	$b$	$a + b$	$ab$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Пусть  $C$  - двоичный линейный код  $(n, k, d_{\min})$ . Поскольку  $C$  представляет собой  $k$ -измеримое подпространство, то он имеет базис, например  $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$ , такой, при котором любое кодовое слово  $v \in C$  можно записать как линейную комбинацию элементов этого базиса

$$v = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_{k-1} v_{k-1}, \quad (12.22)$$

где  $u_i \in \{0, 1\}$ ,  $0 \leq i < k$ . Уравнение (12.22) можно представить в матричной форме через *породную матрицу*  $G$  и *вектор-сообщение*  $u = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$ :

$$v = uG, \quad (12.23)$$

где

$$G = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0,0} & v_{0,1} & \dots & v_{0,k-1} \\ v_{1,0} & v_{1,1} & \dots & v_{1,k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k-1,0} & v_{k-1,1} & \dots & v_{k-1,k-1} \end{pmatrix}. \quad (12.24)$$

Поскольку  $C$  является  $k$ -измеримым векторным пространством в  $V_2$ , то существует  $(n - k)$ -измеримое дуальное пространство  $C^\perp$ , которое порождается строками матрицы  $H$  - так называемой *проверочной матрицы*, где  $GH^T = 0$ , где  $H^T$  - транспонированная матрица  $H$ . Укажем, в частности, что любое кодовое слово  $v \in C$  удовлетворяет условию

$$vH^T = 0. \tag{12.25}$$

Уравнение (12.25) является фундаментальным для декодирования линейных кодов.

Линейный код  $C^\perp$ , генерирующийся матрицей  $H$ , является двоичным линейным кодом  $(n, n - k, d_{\min}^T)$  и его называют *дуальным кодом*  $C$ .

Как уже отмечалось, линейные коды отличаются тем, что для определения минимального расстояния кода достаточно знать минимум весов Хэмминга ненулевых кодовых слов. Дальше этот факт будет доказан. Определим вес Хэмминга  $wt_H(x)$  вектора  $x \in V_2$  как количество ненулевых элементов в  $x$ . Из определения расстояния Хэмминга вытекает, что  $wt_H(x) = d_H(x, 0)$ . Для двоичного линейного кода  $C$  получаем

$$d_H(v_1, v_2) = d_H(v_1 + v_2, 0) = wt_H(v_1 + v_2). \tag{12.26}$$

Наконец, из свойства линейности кода имеем  $v_1 + v_2 \in C$ . Отсюда вытекает, что минимальное расстояние кода  $C$  можно вычислить как минимальный вес по всем  $2^k - 1$  ненулевым кодовым словам. Эта задача существенно проще, чем полный перебор по всем парам кодовых слов, хотя и остается очень сложной даже для кодов среднего размера (или размерности  $k$ ).

**Кодирование и декодирование линейных блочных кодов.** Равенство (12.23) определяет правило кодирования для линейного блочного кода, которым можно воспользоваться непосредственно. Если кодирование должно быть систематическим, то произвольную породную матрицу  $G$  линейного блочного  $(n, k, d_{\min})$  кода  $C$  можно превратить в систематическую (каноническую) форму  $G_{\text{sys}}$  с помощью элементарных операций и перестановок столбцов матрицы. Матрица  $G_{\text{sys}}$  состоит из двух подматриц: единичной матрицы размера  $k \times k$ , что обозначается  $I_k$ , и проверочной подматрицей  $P$  размера  $k \times (n - k)$ . Таким образом,

$$G_{\text{sys}} = (I_k | P), \tag{12.27}$$

где

$$P = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & \cdots & P_{0,n-k-1} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & \cdots & P_{1,n-k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k-1,0} & P_{k-1,1} & \cdots & P_{k-1,n-k-1} \end{pmatrix}. \tag{12.28}$$

Поскольку  $GH^T = 0$ , то систематическая форма проверочной матрицы

имеет вид

$$H_{sys} = (P^\perp | I_{n-k}). \quad (12.29)$$

**Пример.** Рассмотрим двоичный линейный (4, 2, 2) код с порождающей матрицей  $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Перестановками второго и четвертого столбцов превратим

эту матрицу в систематическую форму  $G_{sys} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Таким образом, проверочная подматрица  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

В этом случае выполняется соотношение  $P = P^\perp$ . Из формулы (12.29) вытекает, что систематическая форма проверочной матрицы имеет вид  $H_{sys} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

В дальнейшем будут использованы обозначения  $u = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$  для информационного сообщения и обозначения  $v = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$  для соответствующего кодового слова кода  $C$ .

Если параметры  $C$  такие, что  $k > (n-k)$ , т.е. скорость кода  $k/n < 1/2$ , то кодирование с помощью порождающей матрицы нуждается в меньшем количестве логических операций. В этом случае

$$v = uG_{sys} = (u, v_p), \quad (12.30)$$

где  $v_p = uP = (v_k, v_{k+1}, \dots, v_{n-1})$  - проверочная часть кодового слова.

Если  $k > (n-k)$  или  $k/n > 1/2$ , то кодирование с помощью проверочной матрицы  $H$  нуждается в меньшем количестве вычислений. Этот вариант кодирования обосновывается уравнением (12.25):  $(u, v_p)H^T = 0$ .

Проверочные позиции  $(v_k, v_{k+1}, \dots, v_{n-1})$  вычисляются как

$$v_j = u_0\rho_{0,j} + u_1\rho_{1,j} + \dots + u_{k-1}\rho_{k-1,j} \quad k \leq j < n. \quad (12.31)$$

Можно сказать, что элементами систематической формы проверочной матрицы являются коэффициенты проверочных уравнений, из которых вычисляются проверочные символы.

**Пример.** Рассмотрим двоичный линейный (4, 2, 2) код из прошлого примера. Пусть сообщение и кодовые слова обозначены соответственно  $u = (u_0, u_1)$  и  $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ . Из уравнения (12.31) получаем:  $v_2 = u_0 = u_1, v_3 = u_0$ . (12.32)

Соответствие между  $2^2 = 4$  двухбитовыми сообщениями и кодовыми словами имеет

$$\begin{array}{l} \text{вид} \\ (00) \rightarrow (0000) \\ (01) \rightarrow (0110) \\ (10) \rightarrow (1011) \\ (11) \rightarrow (1110) \end{array} \quad (12.33)$$

*Декодирование по стандартной таблице.* Процедура декодирования находит кодовое слово  $v$ , самое близкое к принятому с искажениями слову  $r = v + e$ , где вектор ошибок  $e \in \{0, 1\}^n$  образовывается двоичным симметричным каналом в процессе передачи кодового слова. Модель изображена на рис. 12.15. По предположению, переходная вероятность  $p \leq 1/2$ .

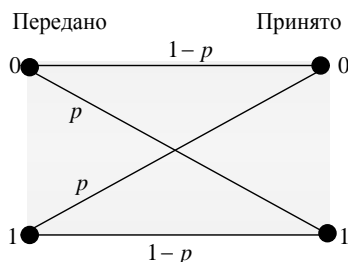


Рис. 12.15. Модель двоичного симметрического канала

**Стандартной проверочной таблицей (или стандартной расстановкой)** для двоичного линейного  $(n, k, d_{\min})$  кода  $C$  называется таблица всех возможных принятых из канала векторов  $r$ , организованная таким способом, который может быть наиболее близок к  $r$  кодовому слову  $v$ .

Стандартная таблица содержит  $2^{n-k}$  строк и  $2^{k+1}$  столбцов (табл. 12.2).

Таблица 12.2

$s$	$u_0 = 0$	$u_1$	...	$u_{2^k-1}$
0	$v_0$	$v_1$	...	$v_{2^k-1}$
$s_1$	$e_1$	$e_1 + v_1$	...	$e_1 + v_{2^k-1}$
$s_2$	$e_2$	$e_2 + v_1$	...	$e_2 + v_{2^k-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$s_{2^{n-k}-1}$	$e_{2^{n-k}-1}$	$e_{2^{n-k}-1} + u_{2^k-1}$	...	$e_{2^{n-k}-1} + v_{2^k-1}$

Размещенные по правую сторону  $2^k$  столбцы таблицы содержат все векторы из пространства  $V_2 = \{0, 1\}^n$ .

Для описания процедуры декодирования необходимо ввести понятие синдрома. *Синдромом произвольного кодового слова*  $V_2$  называется произведение искаженного слова  $r = v + e$  и транспонированной проверочной матрицы  $H$

$$s = rH^T, \tag{12.34}$$

где  $H$  - проверочная матрица кода  $C$ .

Покажем, что синдром является индикатором вектора ошибок. Предположим, что кодовое слово  $v \in C$ , передано по ДСК, принято как  $r = v + e$ . Синдром принятого слова

$$s = rH^T = (v + e)H^T = eH^T. \tag{12.35}$$

Таким образом, вычисление синдрома можно рассматривать как линейное преобразование вектора ошибок.

**Пример.** Имеем стандартную таблицу двоичного линейного  $(4, 2, 2)$  кода (табл. 12.3). Декодирование с помощью стандартной таблицы выполняется таким образом. Пусть  $r = v + e$  - принятое слово. Найдем это слово в таблице и возьмем как результат декодирования сообщения  $u$ , записанное в верхней (первой) ячейке того столбца, в котором лежит принятое слово  $r$ . В сущности, этот процесс предусматривает хранение в памяти всей таблицы и поиска в ней заданного слова.

Таблица 12.3

$s$	00	01	10	11
00	0000	0110	1011	1101
11	1000	1110	0011	0101
10	0100	0010	1111	1001
01	0001	0111	1010	1100

Можно упростить процедуру декодирования, если заметить, что все элементы одной и той самой строки имеют один и тот самый синдром. Каждая строка  $\text{Row}_i, 0 \leq i < 2^{n-k}$ , этой таблицы представляет собой *смежный класс* кода  $C$ , а именно  $\text{Row}_i = \{e_i + v | v \in C\}$ . Вектор  $e_i$  называется *лидером смежного класса*. Синдром всех элементов  $i$ -й строки

$$s_i = (e_i + v)H^T = e_i H^T \quad (12.36)$$

*не зависит* от конкретного значения кодового слова  $v \in C$ . Упрощенная процедура декодирования состоит в выполнении таких действий: вычислить синдром принятого слова  $r = e_j + v$ :  $s_j = (e_j + v)H^T = e_j H^T$ , найти его в левом столбце стандартной таблицы; взять лидера смежного класса  $e'_j$  из второго столбца той же строки и прибавить его к принятому слову, взяв наиболее близкое к принятому  $r = e'_j + v'$  кодовое слово  $v'$ . Итак, вместо таблицы  $n \times 2^n$  бит для декодирования достаточно использовать таблицу лидеров смежных классов  $n \times 2^{n-k}$  бит.

**Алгоритмы помехоустойчивого блочного кодирования.** Коды Хэмминга представляют, наверно, наиболее известный класс блочных кодов, за исключением, возможно, только кодов Рида - Соломона. Как уже отмечалось, коды Хэмминга являются оптимальными в том смысле, что они требуют минимальной чрезмерности при заданной длине блока для исправления одной ошибки. Двоичные коды Голея - это единственный нетривиальный пример оптимального кода, который исправляет тройные ошибки (другими примерами оптимальных кодов являются коды-повторения и коды с одной проверкой на парность). Коды Рида - Маллера - очень элегантная комбинаторная конструкция с простым декодированием.

**Коды Хэмминга.** Напомним, что любое кодовое слово  $v$  линейного  $(n, k, d_{\min})$  кода  $C$  удовлетворяет уравнению

$$vH^T = 0. \quad (12.37)$$

Полезная интерпретация этого уравнения заключается в том, что максимальное количество линейно независимых столбцов проверочной матрицы  $H$  кода  $C$  равняется  $d_{\min} - 1$ .

В двоичном случае для  $d_{\min} = 3$  из формулы (12.37) вытекает, что сумма любых двух столбцов проверочной матрицы не равна нулевому вектору. Пусть столбцы  $H$  являются двоичными векторами длины  $m$ . Существует всего  $2^m - 1$  ненулевых разных столбцов. Итак, длина двоичного кода, который исправляет одиночную ошибку, удовлетворяет условию  $n \leq 2^m - 1$ .

Эта неравенство точно совпадает с границей Хэмминга для кода длины  $n$  с  $n - k = m$  проверками и исправлением  $t = 1$  ошибок. Соответственно код, который удовлетворяет приведенному условию со знаком равенства, известный как *код Хэмминга*.

**Пример.** Для  $m = 3$  получаем (7, 4, 3) код Хэмминга с проверочной матрицей  $H = \begin{pmatrix} 1110100 \\ 0111010 \\ 1101001 \end{pmatrix}$ . Как уже подчеркивалось, проверочная матрица кода Хэмминга имеет

свойство, что все ее столбцы разные. Если возникает одиночная ошибка на  $j$ -й позиции,  $1 \leq j \leq n$ , то синдром искаженного принятого слова равен  $j$ -му столбцу матрицы  $H$ . Обозначим через  $e$  вектор ошибок, добавленный к кодовому слову в процессе его передачи по ДСК и допустим, что все его компоненты равны нулю за исключением  $j$ -й позиции,  $e_j = 1$ . Тогда синдром принятого слова

$$s = rH^T = eH^T = h_j, \tag{12.38}$$

где  $h_j$  -  $j$ -й столбец матрицы  $H$ .

*Процедуры кодирования и декодирования.* Из уравнения (12.38) вытекает, что когда столбцы проверочной матрицы рассматривать как двоичное представление целых чисел, то значение синдрома равно номеру искаженной (ошибочной) позиции. Эта идея положена в основу следующих алгоритмов кодирования и декодирования.

Запишем столбцы проверочной матрицы в виде двоичного представления номера (от 1 до  $n$ ) позиции кодового слова в возрастающем порядке. Обозначим эту матрицу через  $H$ . Очевидно, что матрице  $H^*$  отвечает эквивалентный код Хэмминга с точностью до перестановки позиций кодового слова. Напомним, что проверочная матрица в систематической форме содержит единичную подматрицу  $I_{n-k}$  размера  $(n-k) \times (n-k)$ . Очевидно, что в матрице  $H^*$  столбцы единичной подматрицы  $I_{n-k}$  (т.е. столбцы веса один) размещаются на позициях с номерами, которые равняются степени 2, т.е.:  $2^l$ ,  $l = 0, 1, \dots, m$ .

**Пример.** Пусть  $m = 3$ . Тогда систематическую (каноническую) проверочную матрицу можно задать в виде

$$H = \begin{pmatrix} 1101100 \\ 1011010 \\ 0111001 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $H^*$ , заданная двоичным представлением целых чисел от 1 до 7 (младший разряд записывается в верхней строке), имеет вид:

$$H^* = \begin{pmatrix} 1010101 \\ 0110011 \\ 0001111 \end{pmatrix},$$

где матрица  $I_3$  содержится в первом, втором и четвертом столбцах.

Вообще для  $(2^m - 1, 2^m - 1 - m)$  кода Хэмминга и данного (арифметического) порядка столбцов единичная матрица  $I_m$  содержится в столбцах проверочной матрицы с номерами  $1, 2, 4, \dots, 2^{m-1}$ .

*Кодирование.* При вычислении проверочных символов  $p_j$  для всех  $1 \leq j \leq t$  проверяют номера столбцов и те столбцы, номера которых не является степенью 2, ставятся в соответствие информационным позициям слова. Соответствующие информационные символы включаются в процесс вычисления проверок. Такая процедура кодирования в чем-то сложнее обычной процедуры для систематического (канонического) кода Хэмминга. Тем не менее, соответствующая ей процедура декодирования очень простая. Для некоторых применений этот подход может быть более привлекательным, поскольку обычное декодирование должно выполняться довольно быстро.

*Декодирование.* Если кодирование выполнялось соответственно матрице  $H^*$ , то декодирование оказывается очень простым. Синдром (12.38) равен номеру позиции, в которой случилась ошибка. После вычисления синдрома  $s$ , рассматриваемого как целое число, ошибка исправляется по правилу

$$v_s = v_s + 1, \quad (12.39)$$

и выполняется сложение по модулю 2 ( $0 + 0 = 0, 1 + 1 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1$ ).

**Двоичный код Голея.** Голей установил, что  $\sum_{i=0}^3 \binom{23}{i} = 2^{11}$ .

Это равенство дает основание предположить, что может существовать совершенный двоичный  $(23, 12, 7)$  код при  $t = 3$ , т.е. код способен исправлять до трех ошибок в словах длиной 23 символа. В своей статье Голей привел порождающую матрицу такого двоичного кода, который исправляет до трех ошибок.

Учитывая сравнительно небольшую длину (23) и размерность (12), а также небольшое количество проверок (11) кодирование и декодирование двоичного  $(23, 12, 7)$  кода Голея можно выполнить табличным методом.

*Кодирование.* Табличное (LUT, look-up-table) кодирование реализуется с помощью просмотров таблицы, которая содержит список всех  $2^{12} = 4096$  кодовых слов, пронумерованных непосредственно информационными символами. Пусть  $u$  - информационный вектор размерности 12 бит и  $v$  - соответствующее кодовое слово



(23 бит). Табличный кодер использует таблицу, в которой для каждого информационного вектора (12 бит) вычислен и записан синдром (11 бит). Синдром берется из таблицы и приписывается по правую сторону к информационному вектору.

Операция LUT - это взаимно однозначное отображение из множества векторов  $u$  на множество векторов  $v$ , которое можно записать в виде

$$v = \text{LUT}(u) = (u, \text{get\_syndrome}(u, 0)). \quad (12.40)$$

В реализации табличного кодера учтены упрощения, которые вытекают из циклической природы кода Голя. Его *порождающий полином* имеет вид

$$g(x) = x^{11} + x^{10} + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1, \quad (12.41)$$

или в шестнадцатиричной системе исчисления C75. Этот полином используется в процедуре «get\_syndrome», заданной уравнением (12.41).

*Декодирование.* Напомним, что задача декодера заключается в оценивании наиболее возможного (такого, который имеет минимальный хэммингов вес) вектора ошибок  $e$  по принятому вектору  $r$ .

Процедура построения табличного LUT-декодера состоит из таких действий:

- 1) выписать все возможные векторы ошибок  $e$ , хэммингов вес которых не превышает три;
- 2) для каждого вектора ошибок вычислить соответствующий синдром  $s = \text{get\_syndrome}(e)$ ;
- 3) записать в таблицу для каждого значения  $s$  соответствующий ему вектор  $e$ , при котором  $\text{LUT}(s) = e$ .

Исправление до трех ошибок в принятом искаженном слове  $r$  с помощью LUT-декодера можно записать как  $v'' = r \oplus \text{LUT}(\text{get\_syndrome}(r))$ , где  $v''$  - исправленное кодовое слово.

**Полиноминое помехоустойчивое кодирование.** Двоичные коды Рида - Маллера (РМ) образуют семью кодов, которые исправляют ошибки, с простым декодированием, которое обосновывается на *мажоритарной логике*.

Известное определение двоичных кодов РМ обосновывается на двоичных полиномах (или булева функция). Согласно этому определению коды РМ становятся близкими к кодам, которые входят в класс *полиномиальных кодов*.

**Булевы полиномиальные коды РМ.** Обозначим  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  булеву функцию от  $m$  двоичных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Известно, что такие функции легко дать с помощью *таблицы истинности*. Таблица истинности содержит список значений функции  $f$  для  $2^m$  комбинаций значений ее аргументов. Все булевы операции («и», «или» и др.) можно дать как булевы функции.

**Пример.** Рассмотрим функцию, заданную такой таблицей истинности:

$x_2$	0	0	1	1
$x_1$	0	1	0	1
$f(x_1 x_2)$	0	1	1	0

Тогда имеем:  $f(x_1, x_2) = (x_1 \& \text{NOT}(x_2)) \cup (\text{NOT}(x_1) \& x_2)$ .

Ассоциируем с каждой булевой функцией  $f$  двоичный вектор  $f$  длины  $2^m$ , составленный из значений этой функции для всех возможных комбинаций значений  $m$

ее аргументов. Имеем арифметическое упорядочение значений аргументов функции, т.е.  $x_1$  - младший разряд, а  $x_m$  - старший разряд. Заметим, что булеву функцию можно записать прямо по таблице истинности, воспользовавшись дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ). В терминах ДНФ любую булеву функцию можно записать как сумму  $2^m$  элементарных функций  $1, x_1, x_2, \dots, x_m, x_1x_2, \dots, x_mx_1, x_2, \dots, x_m$ :

$$f = 1 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_mx_m + \alpha_{12}x_1x_2 + \dots + \alpha_{12\dots m}x_1x_2\dots x_m, \quad (12.42)$$

где вектор  $1$  включен для того, чтобы вычислить составляющую (нулевой степени).

В этом примере  $f = x_1 + x_2$ . Двоичный  $(2^m, k, 2^{m-2})$  код РМ, обозначенный  $PM_{r,m}$ , определяется как множество векторов, ассоциирующихся со всеми булевыми функциями степени  $r$  включительно от  $m$  переменных. Код  $PM_{r,m}$  называют также кодом РМ  $r$ -го порядка длины  $2^m$ . Размерность кода

$$k = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i}. \quad (12.43)$$

Это число способов построения полиномов степени, не выше  $r$ , от  $m$  переменных. С учетом уравнения (12.43) строками порождающей матрицы  $PM_{r,m}$  кода являются векторы, ассоциированные с  $k$  булевыми функциями, которые можно записать как полиномы степени, не выше  $r$ , от  $m$  переменных.

**Пример.** Код РМ  $PM_{1,3}$  первого порядка длины 8 является двоичным  $(8, 4, 4)$  кодом, который можно построить из булевых функций первой степени от трех переменных  $\{1, x_1, x_2, x_3\}$ . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ x_1 &= 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ x_2 &= 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\ x_3 &= 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \end{aligned}$$

Порождающая матрица  $PM_{1,3}$  кода

$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12.44)$$

Заметим, что код  $PM_{1,3}$  можно построить также и из кода Хэмминга  $(7, 4, 3)$  сложением общей проверки на четность. Расширенный код Хэмминга и  $PM_{1,3}$  код могут отличаться только порядком позиций (столбцов).

**Дуальные коды кодов РМ.** Можно показать, что  $PM_{m-r-1,m}$  дуальный код  $PM_{r,m}$ . Другими словами, порождающая матрица  $PM_{m-r-1,m}$  кода может использоваться как проверочная матрица  $PM_{r,m}$  кода.

Определение кодов РМ можно дать и в терминах *конечной геометрии*. Геометрия Евклида  $EG(m, 2)$  размерности  $m$  над  $GF(2)$  содержит  $2^m$  точек, которые

представляют собой все двоичные векторы длины  $m$ . Заметим, что столбцы матрицы, образованной последними тремя строками порождающей матрицы  $PM_{1,3}$  кода, представляют собой 8 точек  $EG(3,2)$ . Изъятием нулевой точки это множество точек превращается в *проективную геометрию*  $PG(m-1,2)$ . Коды конечной геометрии являются, в сущности, обобщением кодов  $PM$ . Связь между кодами и конечной геометрией можно объяснить. Возьмем  $EG(m,2)$ . Столбцы матрицы  $(x_1^T x_2^T \dots x_m^T)$  (где  $T$  - операция транспонирования матрицы) рассматриваются как координаты точек геометрии  $EG(m,2)$ . Тогда существует взаимно однозначное соответствие между компонентами двоичного вектора длины  $2^m$  и точками  $EG(m,2)$ . В частности, подмножество  $EG(m,2)$  можно ассоциировать с двоичным вектором  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  длины  $n = 2^m$ , если интерпретировать значение его координат  $w_i = 1$  как выбор точки. Другими словами,  $w$  является *вектором инцидентности* (совпадений).

*Кодовыми словами*  $PM_{r,m}$  кода  $PM$  являются векторы инцидентности всех подпространств (линейных комбинаций точек) размерности  $m-r$  в  $EG(m,2)$ . Из этого определения следует, что количества кодовых слов минимального веса  $PM_{r,m}$  кода

$$A_{2^{m-r}} = 2^r \prod_{i=0}^{m-r-1} (2^{m-i} - 1) / (2^{m-r-i} - 1). \quad (12.45)$$

Код, который образовывается после изъятия координат, которые отвечают условию  $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ , из всех кодовых слов  $PM_{r,m}$  кода и являются двоичным циклическим  $PM_{r,m}^*$  кодом. Количество слов минимального веса циклического кода  $PM$

$$A_{2^{m-r-1}}^* = \prod_{i=0}^{m-r-1} (2^{m-i} - 1) / (2^{m-r-i} - 1). \quad (12.46)$$

Декодирование  $PM$  кодов можно выполнить на основе мажоритарной логики (МЛ). Как известно, проверочная матрица порождает  $2^{n-k}$  проверочных уравнений. Построение МЛ декодера сводится к выбору такого подмножества проверочных уравнений, чтобы решение о значении кодового символа на определенной позиции формировалось по большинству «голосов», причем каждый «голос» связан с одним из проверочных уравнений.

**Коды Рида - Соломона.** При построении кодов Рида - Соломона (РС-коды), исправляющих пакетные ошибки с разрядностью  $b$ , пакет разрядов слова рассматривается как  $b$ -значный разряд, приобретающий одно из  $s = 2^b$  значений (от 0 до  $s-1$ ). В отличие от двоичных циклических кодов в этом случае в  $H$ -матрице символами являются не 1 и 0, а подматрицы  $0, I, h^\beta$ , где  $h^\beta$  определяется выражением

$$h^\beta = \left\| f^{\beta+b-1} \ f^{\beta+b-2} \ \dots \ f^{\beta+b-b} \right\|, \quad (12.47)$$

в котором  $f^{\beta-b-i}$  - столбец, который отвечает остатку от деления  $x^{\beta+b-1}$  на многочлен  $G(x)$  степени  $b$ ;  $i$  - номер столбца в подматрице  $h^\beta$ ;  $b$  - показатель степени матрицы, причем  $1 \leq \beta \leq 2^b - 1$ .

В качестве образующего полинома используется первоначальный полином степени  $b$ , обеспечивающий максимальное количество разных матриц  $h^\beta$  и равный  $2^b - 1$ . Значение полиномов для типичных пакетов искажения приведены в табл. 12.4.

Таблица 12.4

Разрядность пакета искажений	Образующий многочлен матриц $h^\beta$
2	$x^2 + x + 1$
4	$x^4 + x + 1$
8	$x^8 + x^7 + x^6 + x + 1$

Полученные матрицы вместе с нулевой (все ее элементы равняются нулю) образуют поле матриц и так же, как и столбцы  $H$ -матриц двоичных кодов, могут складываться и делиться. При сложении указанных матриц результат суммирования соответствующих символов вычисляется по модулю два. При сложении показатели степени матриц подытоживаются, а при обратной процедуре - отнимаются по модулю  $2^b - 1$ .

**Например,**  $H$ -матрица РС-кода, который исправляет одиночные и находит двойные пакеты искажений, имеет такой вид:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} I & I & \dots & I & \dots & I & I & 0 & 0 \\ I & h^1 & \dots & h^j & \dots & h^{2^b-2} & 0 & I & 0 \\ I & h^2 & \dots & h^{2^j} & \dots & h^{2^{(2^b-2)}} & 0 & 0 & I \end{array} \right\|. \quad (12.48)$$

В этой матрице вторая строка (кроме трех последних подматриц) содержит подматрицы  $b \times b$  вида (12.48) всех степеней от трех до  $(2^b - 2)$ .

Символы третьей строки (кроме трех последних) равняются квадратам соответствующих символов второй строки.

Длина РС-кодов - это количество двоичных информационных и контрольных символов, которая определяет количество символов в каждой строке  $H$ -матрицы и определяется выражением  $n = b(2^b + 2)$ .

При этом количество информационных разрядов  $K = b(2^b - 1)$ , а количество контрольных разрядов  $k = 3b$  в двоичных символах или  $N = (2b + 2)$ , или  $K = 2^b - 1$ , или  $K = 3$  в обобщенных  $b$ -разрядных символах. Причем, как и раньше, величина  $n(N)$  определяет количество столбцов, а  $k(K)$  — количество строк соответствующей  $H$ -матрицы.

**Например,** при  $b = 4$  имеем  $n = 72$ ,  $k = 12$ ,  $K = 60$ . При  $b = 2$  имеем  $N = 12$ ,  $k = 6$ .

В последнем случае  $H$ -матрица имеет вид (в обобщенных символах)

$$\begin{vmatrix} I & I & I & I & 0 & 0 \\ I & h^1 & h^2 & 0 & I & 0 \\ I & h^2 & h^4 & 0 & 0 & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & I & I & I & 0 & 0 \\ I & h^1 & h^2 & 0 & I & 0 \\ I & h^2 & h^1 & 0 & 0 & I \end{vmatrix}, \quad (12.49)$$

поскольку первая (нижняя) строка представляет собой квадрат второго, а максимальная степень подматриц вида (12.48) не должна превышать  $2^b - 1$ , откуда  $4 \pmod{(2^b - 1)} = 4 \pmod 3 = 1$ .

Полученная  $H$ -матрица размером в 12 столбцов и 6 строк (в двоичных символах) или в 6 столбцов и 3 строки в подматрице содержит

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, h^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, h^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, h^4 = h^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для построения матрицы  $h^i$  использовано соотношение (12.47), т.е.

$$h^i = \begin{vmatrix} f^{1+2+1} & f^{1+2-1} \\ f^2 & f^1 \end{vmatrix},$$

где  $f_1$  - остаток от деления  $x_i$  на многочлен  $x_2$ , что порождает  $(x+1)$ :

$$\begin{array}{c} x^2 \\ \hline x^2 + x + 1 \end{array} \left| \begin{array}{c} x^2 + x + 1 \\ 1 \end{array} \right., \\ x + 1$$

т.е. остаток от деления  $x^2$  равен  $(x+1)$ , а остаток от деления  $x^1$  равен  $x$ , откуда

$$f^2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, f^1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \text{ а } h^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (12.50)$$

Аналогично  $h^2 = \begin{vmatrix} f^{2+2-1} & f^{2+2-1} \\ f^3 & f^2 \end{vmatrix}$ . Столбец  $f^2$  вычислен ранее, а  $f^3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ .

При кодировании начальной числовой последовательности контрольные разряды, как и для двоичных кодов, вычисляются суммированием по модулю 2 информационных разрядов, соответствующих единице в соответствующей строке двоичной  $H$ -матрицы или определяются выражением  $\alpha_{k+j}^T = C_j = \sum_{i=1}^k h^{ij} \alpha_i^T \pmod 2$ ,  $j=1, \dots, K$ , где  $j$  - номер обобщенного контрольного символа;  $\alpha_i$  - значение обобщенного информационного символа, записанное в виде матрицы-столбца;  $h_{ij}$  - символ подматрицы проверочной  $H$ -матрицы, которая содержится в  $i$ -м столбце и  $j$ -й (если считать сверху вниз) строке.

**Пример.** Вычислим контрольный признак для шестиразрядного ( $n=6$ ) начального числа, считая, что код должен находить и исправлять двухразрядные ( $b=2$ ) пакеты искажений, а начальное число  $A = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 11\ 01\ 10$ .

Параметры такого кода, как доказано раньше,  $N=6$ ,  $M=3$ ,  $k=3$ , а проверочная матрица имеет вид формулы (12.48). Тогда

$$\alpha_{k+j}^T = C_j = \sum_{i=1}^3 h^{ij} \alpha_i^T \pmod 2, \quad j=1, 2, 3,$$

а именно:  $\alpha_4^T = C_1 = h^{11} \cdot \alpha_1^T + h^{21} \cdot \alpha_2^T + h^{31} \cdot \alpha_3^T \pmod 2 = I \cdot \alpha_1^T + I \cdot \alpha_2^T +$

$$\begin{aligned}
 +I \cdot \alpha_3^T \pmod 2 &= \alpha_1^T + \alpha_2^T + \alpha_3^T \pmod 2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \pmod 2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \\
 \alpha_5^T = C_2 &= h^{12} \cdot \alpha_1^T + h^{22} \cdot \alpha_2^T + h^{32} \cdot \alpha_3^T \pmod 2 = I \cdot \alpha_1^T + h^1 \cdot \alpha_2^T + \\
 +h^2 \cdot \alpha_3^T \pmod 2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \pmod 2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \pmod 2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \\
 \alpha_6^T = C_3 &= h^{123} \cdot \alpha_1^T + h^{23} \cdot \alpha_2^T + h^{33} \cdot \alpha_3^T \pmod 2 = I \cdot \alpha_1^T + h^2 \cdot \alpha_2^T + \\
 +h^1 \cdot \alpha_3^T \pmod 2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \pmod 2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \pmod 2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Итак, передаче подлежит код  $A = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 = 11\ 01\ 10\ 00\ 00\ 11$ .

Декодирование РС-кода выполняется в два этапа. На первом этапе рассчитывается так называемый синдром ошибки, т.е. вспомогательная величина, которая дает возможность устанавливать в дальнейшем факт наличия ошибки, ее место и значение:  $S_R^T = H \cdot AT$ .

**Пример.** Рассчитать синдром ошибки для закодированного прежде слова, считая, что искажение возникло во втором обобщенном символе и вместо символа

$$\alpha_2 = 01 \text{ получен символ } = 10. \text{ Тогда } S_R^T = \begin{vmatrix} S_3 \\ S_2 \\ S_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & I & I & I & 0 & 0 \\ I & h^1 & h^2 & 0 & I & 0 \\ I & h^2 & h^1 & 0 & 0 & I \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_6^T \end{vmatrix}.$$

Выполнив все необходимые операции, получим  $S_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, S_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, S_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ .

На втором этапе декодирования РС-кода вычисляется индикатор ошибки - система равенств, которая дает возможность определить место возникновения ошибки.

Если отказ (искажение) возник в разрядах  $j$ -го обобщенного символа, то искажение можно подать в виде  $0\dots 0E0\dots 0$ , где  $E$  - обобщенный  $b$ -значный символ, который равняется нулю при отсутствии ошибки и приобретает значения от 0 до  $(s-1)$  при ее наличии. Поскольку третья (верхняя) строка  $H$ -матрицы (12.48) содержит единичные подматрицы, то пакет разрядов синдрома будет  $S_3$  содержать единицы в разрядах, которые отвечают искаженным разрядам пакета ошибки. В самом деле:

$$S_3 = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i^T = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i^T + \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i^T + (\alpha_i^T + E^T) \pmod 2 = \sum_{i=1}^k \alpha_i^T + \alpha_{k+1}^T + ET \pmod 2.$$

Поскольку  $\sum_{i=1}^k \alpha_i^T = \alpha_{k+1}^T$ , то

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i^T + \alpha_{k+1}^T \pmod 2 = 0 \text{ и } S_3 = ET. \tag{12.51}$$

Анализируя формулу (12.51), приходим к выводу о наличии ошибки (при  $S_3 \neq 0$ ). Известно, что место искажения (номер искаженного символа) можно найти из системы уравнений

$$S_1 = h^{i1} S_3 = 0, S_2 = h^{i2} S_3 = 0, \tag{12.52}$$

которая называется *индикатором искажений*. Эта система совместна только в том

случае, когда в  $i$ -м обобщенном символе есть искажения.

К преимуществам РС-кода относят сопоставимую простоту реализации матричных и модульных операций (поскольку модуль равняется 2) при вычислении как синдрома (12.51), так и индикатора (12.52) искажений. Но учитывая большое количество этих операций суммарные аппаратурные затраты могут быть значительными.

**Двоичные циклические коды.** Циклические коды образуют класс кодов, которые исправляют ошибки кодирования и декодирования, алгоритм которых основывается на полиномином представлении. Простая реализация этих кодов использует регистры сдвига и логические схемы.

*Порождающие и проверочные полиномы.* Обозначим  $C$  - линейный блочный  $(n, k)$  код. Пусть  $u$  - сообщение и  $v$  - соответствующее ему кодовое слово кода  $C$ . Циклические коды имеют такие свойства, благодаря которым они становятся удобными для аппаратурной реализации. Поставим в соответствие каждому кодовому слову  $v$  полином  $v(x)$ :

$$v = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \rightarrow v(x) = v_0 + v_1x + \dots + v_{n-1}x^{n-1}.$$

Переменная  $x$  является индикатором относительного положения элемента  $v_i$  в кодовом слове в виде произведения (монома)  $v_i x^i$  полинома  $v(x)$ .

**Линейный блочный код  $C$  является циклическим тогда и только тогда, когда любой циклический сдвиг любого кодового слова представляет собой другое (или то же) кодовое слово, т.е.**

$$v = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \rightarrow v(x) = v_0 + v_1x + \dots + v_{n-1}x^{n-1}.$$

В полиномином представлении циклический сдвиг на одну позицию

$$v(x) \in C \Leftrightarrow v'(x) = xv(x) \bmod (x^n - 1) \in C.$$

Операция циклического сдвига реализуется на *регистре сдвига* (рис. 12.16).

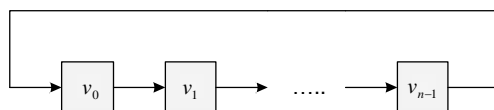


Рис. 12.16. Циклический регистр сдвига

**Пример.** Рассмотрим случай  $n = 7$ . Циклический сдвиг на одну позицию вектора равен  $v^{(1)} = (1010101)$ . В полиномином представлении и двоичной арифметике получаем  $v(x)x + x^3 + x^5 + x^6$ ,

$$v^{(1)}(x) = xv(x) = x^2 + x^4 + x^6 + x^7 \bmod (x^7 + 1) = x^2 + x^4 + x^6 + x^7 + (x^7 + 1) = 1 + x^2 + x^4 + x^6.$$

*Порождающий многочлен.* Важным свойством циклических кодов является то, что все кодовые слова-полиномы кратные одному фиксированному полиному, который называется *порождающим полиномом* кода. Этот полином (многочлен), как и любой другой, задается своими корнями, которые по обыкновению называют нулями кода. Легко показать, что порождающий полином  $g(x)$  является делителем бинома  $(x^n - 1)$ . Итак, чтобы найти некоторый порождающий многочлен, нужно знать разложение бинома  $(x^n - 1)$  на

множители

$$\varphi_j(x), j = 1, 2, \dots, l : (x^n - 1) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)\dots\varphi_l(x). \quad (12.53)$$

Заметим, что в двоичной арифметике операции  $a+b$  и  $a-b$  (по модулю 2) дают одинаковый результат. Поскольку рассматриваем только двоичные коды или коды над конечными полями характеристики два, т.е. такие, которые используют двоичную арифметику, то в дальнейшем не будем различать соответствующие операции (знаки «+» и «-»).

В результате получаем

$$g(x) = \prod_{j \in J \subset \{1, 2, \dots, l\}} \varphi_j(x). \quad (12.54)$$

**Пример.** На множестве двоичных многочленов, т.е. полиномов с коэффициентами из множества  $Z_2 = \{0, 1\}$ , бином  $x^7 - 1$  имеет такое расписание:  $x^7 + 1 = (x+1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$ .

Приведем примеры циклических кодов длины 7.

Двоичный циклический код Хэмминга с порождающим полиномом  $g(x) = x^3 + x + 1$ . Двоичный циклический код с проверкой на четность порождается полиномом  $g(x) = (x+1)$ . Дуальный код Хэмминга (код максимальной длины) имеет порождающий многочлен  $g(x) = (x+1)(x^3 + x + 1)$ .

*Кодирование и декодирование двоичных циклических кодов.* Размерность двоичного циклического  $(n, k)$  кода  $k = n - \deg[g(x)]$ , где  $\deg[.]$  - степень аргумента. Поскольку циклический код является линейным кодом, то любое множество  $k$  линейно независимых векторов (кодových слов) можно взять как порождающую матрицу кода. В частности, двоичные векторы, которые ассоциируются с многочленами  $g(x), xg(x), \dots, x^{k-1}g(x)$ , линейно независимы. Эти векторы можно использовать как строки порождающей матрицы кода  $C$ . В этом случае реализуется несистематическое кодирование. Другими словами, сообщение не появляется в неизменном виде на каких-нибудь позициях кодового слова.

**Пример.** Рассмотрим циклический код Хэмминга с порождающим полиномом  $g(x) = x^3 + x + 1 \Leftrightarrow (1101)$ . Порождающая матрица этого кода имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В другом варианте проверочную часть порождающей матрицы циклического кода можно построить с помощью таких полиномов

$$x^{n-1} \bmod g(x), \dots, x^{n-k-1} \bmod g(x), x^{n-k} \bmod g(x).$$

С их помощью реализуется *систематическое* кодирование, рассмотренное в приведенном дальше примере.



**Пример.** Пусть  $C$  - циклический код Хэмминга с порождающим многочленом

$$x^6 \bmod (x^3 + x + 1) = x^2 + 1,$$

$$g(x) = x^3 + x + 1. \text{ Тогда имеем: } x^5 \bmod (x^3 + x + 1) = x^2 + x + 1,$$

$$x^4 \bmod (x^3 + x + 1) = x^2 + x,$$

$$x^3 \bmod (x^3 + x + 1) = x + 1.$$

Итак, систематическая порождающая матрица кода  $C$  имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кодирование циклического кода может быть систематическим или не-систематическим в зависимости от того, что происходит с сообщением.

Несистематическое кодирование

$$v(x) = u(x)g(x). \tag{12.55}$$

Систематическое кодирование

$$v(x) = x^{n-k}u(x) + [x^{n-k}u(x) \bmod g(x)]. \tag{12.56}$$

*Проверочный полином.* Полином, который можно ассоциировать с проверочной матрицей циклического кода, называется *проверочным полиномом*. Порождающие и проверочные полиномы связаны соотношением

$$g(x)h(x) = x^n + 1. \tag{12.57}$$

Если известен порождающий полином, то проверочный полином легко вычисляется как  $h(x) = (x^n + 1) / g(x) = h_0 + h_1x + \dots + h_kx^k$ . Проверочную матрицу кода  $C$  легко построить, воспользовавшись как строками  $n - k - 1$  циклическими сдвигами проверочного полинома:

$$h^j(x) = x^j h(x) \bmod (x^n - 1), j = 0, 1, \dots, n - k - 1,$$

$$H = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & h_1 & h_2 & \dots & h_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & \dots & \dots & h_k & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & h_k \end{pmatrix}. \tag{12.58}$$

**Пример.** Циклический код Хэмминга с порождающим многочленом  $g(x) = x^3 + x + 1$  имеет проверочный многочлен  $h(x) = (x^7 + 1) / (x^3 + x + 1) = x^4 + x^2 + x + 1$ . Проверочная матрица этого кода имеет, например, такой вид:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Равно как и для линейных кодов, систематическое кодирование циклического кода можно реализовать как решение уравнения  $v(x)h(x) = 0 \pmod{x^n - 1}$ .

Рассмотрим правило систематического кодирования. Предположим, что код имеет скорость  $k/n \leq 0,5$ . Пусть сообщение представлено многочленом, степень которого меньше  $k$ . Пусть  $v(x)$  - кодовое слово кода  $C$ , соответствующего многочлену  $u(x)$ . На первом шаге  $v_l = u_l, l = 0, 1, \dots, k-1$ .

Из циклической природы этого кода вытекает, что проверочные символы кода можно вычислить рекурсивно с помощью проверочного уравнения, где  $h_{(l-k), j}$  -  $j$ -й элемент  $(l-k)$ -й строки матрицы (12.48):

$$v_l = \sum_{j=0}^{l-1} v_j h_{(l-k), j}, l = k, k+1, \dots, n-1. \quad (12.59)$$

В случае высокой скорости кода  $k/n > 0,5$  кодирование с помощью деления  $x^{n-k}u(x)$  на порождающий полином эффективнее. При этом всегда кодовое слово получают в систематической форме, когда  $k$  первых его символов совпадают с символами сообщения, а последние  $n-k$  являются проверочными символами.

Структурная схема кодера двоичного кода с порождающим полиномом  $g(x)$  изображена на рис. 12.17.

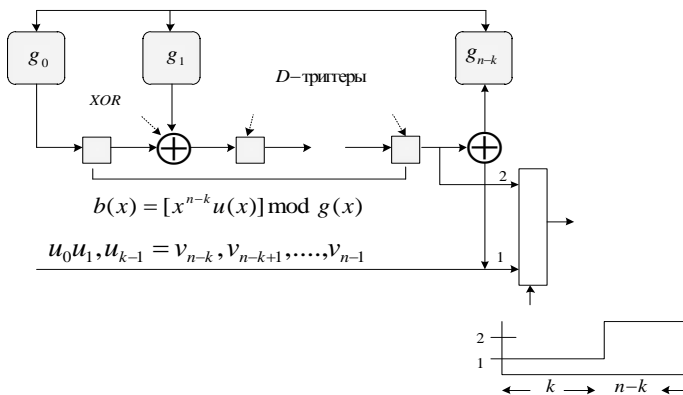


Рис. 12.17. Устройство систематического кодирования делением на  $g(x)$

Первые  $k$  тактов переключатель (правая нижняя часть схемы) находится в положении 1, а информационные символы передаются в канал связи и одновременно вводятся в схему умножения на  $x^{n-k}$  и деления на порождающий многочлен  $g(x)$ . За эти  $k$  тактов в регистре сдвига вычисляется остаток от деления, после чего переключатель переводится в положение 2 и содержимое регистра передается в канал.

**Дуальные циклические коды и последовательности максимальной длины.** Дуальным кодом циклического кода  $C$ , который порождается полиномом  $g(x)$ , является циклический код  $C^\perp$ , порождаемый полиномом  $h(x)$ .

Важный класс представляют циклические коды, словами которых являются все сдвиги последовательности максимальной длины (MLS) и которые являются дуальными циклическому коду Хэмминга. Множество сдвигов является  $(2^m - 1, m, 2^{m-1})$  циклическим кодом, который порождается полиномом  $g(x) = (x^n - 1) / p(x)$ , где  $p(x)$  - первоначальный полином. В дальнейшем этот код будем называть *MLS кодом*.

**Сокращенные циклические коды и CRC коды.** Существует много практических заданий, в которых приходится использовать коды, которые исправляют ошибки согласно простым процедурам кодирования и декодирования. Тем не менее существующие конструкции не всегда имеют нужную длину, размерность и минимальное расстояние.

Сокращение сводится к отбрасыванию информационных позиций начального кода. Пусть  $S$  - количество неупотребляемых информационных символов, которые называют *глубиной (длинной) сокращения*. Пусть  $C$  - циклический  $(n, k, d)$  код. Сокращение сообщения образовывается за счет фиксированного установления нулевых значений в некоторых (произвольных) информационных позициях. Другие позиции могут приобретать произвольные значения. Без потери для всеобщности соображений можем считать, что старшие позиции сообщения устанавливаются в нулевые состояния. Тогда  $u(x) = u_0 + u_1x + \dots + u_{k-1-s}x^{k-1-s}$ . Данное сообщение превращается систематическим кодером в кодовое слово  $v(x) = x^{n-k}u(x) + [x^{n-k}u(x) \bmod g(x)]$ , степень которого не превышает  $n - s - 1$ . Таким образом, сокращенный код  $C_s$  является линейным  $(n - s, k - s, d_s)$  кодом с кодовым расстоянием  $d_s \geq d$ . В общем случае сокращенный код не остается циклическим кодом.

**Пример.** Пусть  $C$  - циклический код Хэмминга с порождающим полиномом  $1 + x + x^3$ . Новый код, образованный из  $C$  установлением в нулевое состояние двух старших информационных разрядов, имеет два информационных символа и три проверочных, вычисленные кодером кода  $C$ . Множество полученных кодовых слов представляет собой сокращенный линейный код.

Фундаментальное свойство сокращенных циклических кодов  $C_s$  заключается в том, что могут использоваться те же кодеры и декодеры, хотя эти коды и не сохраняют стойкость к циклическому сдвигу. Для компьютерного моделирования намного проще дополнять слова нулями на старших позициях и использовать те же алгоритмы кодирования и декодирования, которые здесь обсуждаются. Этот способ (дополнение нулями) широко используется в микросхемной реализации РС-кодов. Очевидно, что нули на старших позициях сообщения не должны включаться в кодовое слово. Более того, декодер модифицируется так, что выполняется умножение принятого слова  $r(x)$  на  $x^{n-k+s}$  вместо умножения на  $x^{n-k}$  по модулю  $g(x)$  в обычном декодере.

Еще одним возможным решением может быть попытка построить другие классы циклических кодов с необходимыми параметрами. Интересными

классами таких кодов являются *непервоначальные* коды БЧХ, евклидо-геометрические (EG) и проективно-геометрические (PG) коды. Еще одна возможность заключается в применении недвоичных циклических кодов в двоичном представлении, таких как РС-коды, которые рассматривались раньше. Двоичное отображение РС-кодов имеет дополнительную способность исправлять многократные пакеты ошибок.

**CRC коды.** Один из наиболее популярных стандартов помехоустойчивого кодирования обосновывается на избыточных циклических кодах для обнаружения ошибок (CRC коды). Эти циклические коды используются для обнаружения ошибок в блоках данных. CRC коды имеют длину  $n \leq 2^{m-1}$ . Обычно CRC коды имеют порождающий полином вида  $(1+x)g(x)$ , где  $g(x)$  - порождающий полином кода Хэмминга. Обычно значения  $m$  равняются 12, 16 и 32. Выбор порождающего полинома зависит от допустимой *вероятности* неопределенной ошибки, которая определяется распределением (спектром) весов кода. Вычисление вероятности неопределенной ошибки эквивалентно определению спектра веса кода. Эта задача остается чрезвычайно трудной.

Код	$m$	$g(x)$
CRC-12	12	$x^{12} + x^{11} + x^3 + x^2 + x + 1$
CRC-16	16	$x^{16} + x^{15} + x^2 + 1$
CRC-CCITT	16	$x^{16} + x^{15} + x^5 + 1$
CRC-32	32	$x^{32} + x^{26} + x^{23} + x^{22} + x^{16} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$

**Общий алгоритм декодирования циклических кодов.** Пусть  $r(x) = v(x) + e(x)$ , где  $e(x)$  - *полином ошибок*, который ассоциируется с вектором ошибок двоичного симметричного канала. Тогда синдром (синдромный полином) имеет вид:  $s(x) = r(x) \bmod g(x) = e(x) \bmod g(x)$ . (12.60)

Алгоритм декодирования приведен на рис. 12.18.

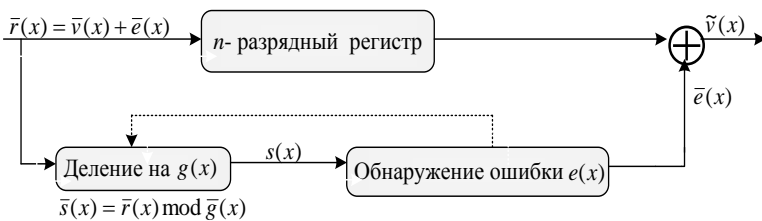


Рис. 12.18. Обобщенная структура декодера циклического кода

Синдром  $s(x)$  используется для определения полинома ошибок  $e(x)$ . Поскольку циклический код является прежде всего линейным кодом, то эта структура может рассматриваться как вариант «стандартной таблицы» для циклических кодов.

Проблема декодирования равноценна поиску (неизвестного) полинома ошибок  $e(x)$  по известному синдрому  $s(x)$ . Эти полиномы связаны уравнением, которое представляет основу синдромного декодера, известного также как *декодер Меггита* для циклического кода. Другой (но близкий) вариант

декодера, который реализует алгоритм обнаружения ошибок, известный также как *декодер Касами*, проверяет совпадение синдрома с возможным вектором ошибок. Только очень немногие классы кодов имеют такое сравнительно простое декодирование, как циклические коды Хэмминга и Голея.

Однако с увеличением корректирующей способности кода  $t = [(d_{\min} - 1) / 2]$  сложность декодера, который базируется на комбинаторном определении ошибок, становится чрезвычайно большой. Предположим, что ошибка, возникшая на первой принятой позиции,  $e(x) = x^n - 1$ . Соответствующий синдром  $s(x) = x^{n-1} \bmod g(x)$ . Если ошибка, которая искажает заданную позицию, оказывается данным циклическим кодом, то можно выявить ошибки и на других позициях за счет циклических сдвигов и соответствующей коррекции синдрома. Синдромный декодер проверяет синдром для каждой позиции принятого слова, и если оказывается полином  $x^{n-1} \bmod g(x)$ , то символ на этой позиции исправляется.

### 12.4. Сверточное помехоустойчивое кодирование

Структурная схема информационно-коммуникационной системы передачи данных с использованием помехоустойчивого сверточного кодирования/декодирования приведена на рис. 12.19.

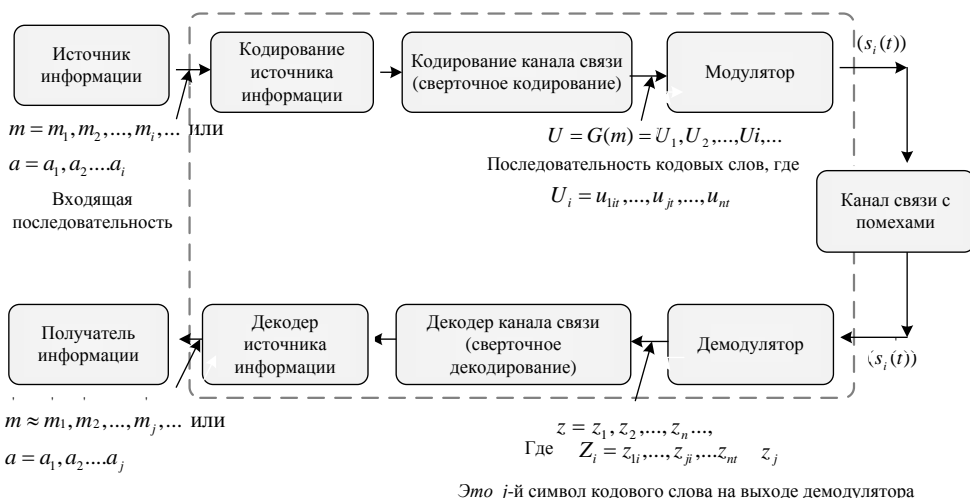


Рис. 12.19. Кодирование/декодирование и модуляция/демодуляция в каналах связи

Информационное сообщение на выходе кодера источника информации обозначается последовательностью  $m = m_1, m_2, \dots, m_i, \dots$ , где  $m_i$  - двоичный знак (бит), а  $i$  - индекс времени (см. разд. 12.1). Если быть точным, то эле-

менты  $m$  следовало бы дополнять индексом, который соответствует типу кодирования источника согласно определенной раньше классификации и индексу времени. Однако для упрощения будет использоваться только индекс, который обозначает время (или размещение элемента внутри последовательности). Допустим, что все  $m_i$  равновероятные и равняются единице или нулю и независимы между собой. Будучи независимой, последовательность бит имеет потребность в некоторой избыточности, т.е. знание о бите  $m_i$  не даст ни одной информации о бите  $m_j$  (при  $i \neq j$ ). Кодер превратит каждую последовательность  $m$  в уникальную последовательность кодовых слов  $U = G(m)$ . И хотя последовательность  $m$  однозначно определяет последовательность  $U$ , ключевой особенностью сверточных кодов является то, что данный  $k$ -кортеж внутри  $m$  неоднозначно определяет связанные с ним  $n$ -кортежи внутри  $U$ , поскольку кодирование каждого из  $k$ -кортежей является функцией не только  $k$ -кортежей, а и предыдущих  $k - 1$   $k$ -кортежей (кодирование с памятью). Последовательность  $U$  можно поделить на последовательность кодовых слов:  $U = U_1, U_2, \dots, U_i, \dots$ .

Каждое кодовое слово  $U_i$  состоит из двоичных кодовых символов, которые называют *канальными символами*, или *битами кода*, а соответствующую процедуру кодирования - *канальным помехоустойчивым кодированием*.

*Сверточные (рекуррентные цепи) коды* используются для кодирования непрерывной последовательности двоичных символов путем введения в последовательность специальных проверочных (избыточных) символов с целью обнаружения и исправления искажений в информационных сообщениях.

**Например**, для каждого информационного символа исходной последовательности  $A(a_i)$ , которые различаются между собой на шаг кодирования (добавление, перемеживание)  $\lambda$ , формируется один специальный проверочный символ  $\Pi$ .

Передаются проверочные символы с определенной задержкой относительно информационных. На стороне приемника из информационных символов  $a'$  формируются новые проверочные, которые в отличие от проверочных символов  $\Pi'$  называются *контрольными*. Контрольные символы сравниваются с проверочными, и в случае их расхождения формируется вывод о наличии искажения. Проверочные и контрольные символы формируются добавлением по модулю 2 информационных символов.

Передача	Прием
$a_i \oplus a_{i+\lambda} = \Pi_{i,i+\lambda}$	$a'_i \oplus a'_{i+\lambda} = K_{i,i+\lambda}$
$a_{i+1} \oplus a_{i+\lambda+1} = \Pi_{i,i+\lambda+1}$	$a'_{i+1} \oplus a'_{i+\lambda+1} = K_{i,i+\lambda+1}$
...	...
$a_{i+\lambda} \oplus a_{i+2\lambda} = \Pi_{i+\lambda,i+2\lambda}$	$a'_{i+\lambda} \oplus a'_{i+2\lambda} = K_{i+\lambda,i+2\lambda}$
$a_{i+\lambda+1} \oplus a_{i+2\lambda+1} = \Pi_{i+\lambda+1,i+2\lambda+1}$	$a'_{i+\lambda+1} \oplus a'_{i+2\lambda+1} = K_{i+\lambda+1,i+2\lambda+1}$ и т.д.

Одна проверка охватывает те информационные символы, разность номеров ко-

торых равняется шагу кодирования:  $i + \lambda - i = i + \lambda + 1 - (i + 1) = i + 2\lambda + 1 - (i + \lambda) = \dots = \lambda$ .

Каждый контрольный символ сравнивается с соответствующим проверочным:  $S_{i,i+\lambda} = K_{i,i+\lambda} \oplus \Pi'_{i,i+\lambda}$ ;  $S_{i+1,i+\lambda+1} = K_{i+1,i+\lambda+1} \oplus \Pi'_{i+1,i+\lambda+1}$  и т.д. Признаком отсутствия искажений есть то, что все суммы равняются нулю:  $S_{i,i+\lambda} = S_{i+1,i+\lambda+1} = \dots = 0$ . Искаженным может быть как информационный, так и проверочный символ.

На искажение одного проверочного символа указывает то, что одна из сумм равняется единице. Например, при искажении  $\Pi'_{i,i+\lambda}$  получаем  $S_{i,i+\lambda} = 1$ , поскольку  $K_{i,i+\lambda}$  не совпадает с  $\Pi'_{i,i+\lambda}$ . Если дальнейшей передачи этой последовательности не происходит (ретрансляция отсутствующая), то и исправлений нет.

Наличие двух сумм, которые равны единице и отдалены (сдвинуты) между собой на шаг добавления  $\lambda$ , говорят об искажении двух проверочных символов.

**Пример.** Рассмотрим последовательный сверточный код с шагом кодирования  $\lambda = 3$  при условии, что проверочные символы приняты без искажений. Пусть с искажением приняты три информационных символа. Формирование проверочных и контрольных символов иллюстрирует рис. 12.20.

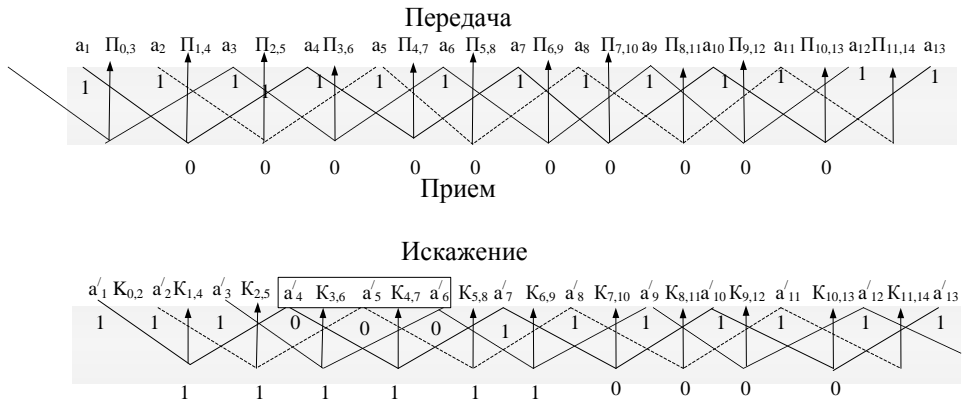


Рис. 12.20. Формирование проверочных и контрольных символов при наличии искажения в символах с номерами 4, 5, 6

Все проверочные символы, сформированные для условий примера, равны нулю, а что касается контрольных, то среди них все символы, сформированные с привлечением искаженных информационных, равняются единице, а остальные равны нулю.

Сравнение контрольных элементов, которые при приеме сформированы с привлечением неискаженных информационных символов, с соответствующими проверочными дает значение, равное нулю. А сравнив контрольные элементы, которые при приеме сформированы с привлечением искаженных информационных символов, с соответствующими проверочными, получим:  $S_{1,4} = K_{1,4} \oplus \Pi'_{1,4} = 1 \oplus 0 = 1$ ;  $S_{2,5} = K_{2,5} \oplus \Pi'_{2,5} = 1 \oplus 0 = 1$ ;  $S_{3,6} = K_{3,6} \oplus \Pi'_{3,6} = 1 \oplus 0 = 1$ ;  $S_{4,7} = K_{4,7} \oplus \Pi'_{4,7} = 1 \oplus 0 = 1$ ;  $S_{5,8} = K_{5,8} \oplus \Pi'_{5,8} = 1 \oplus 0 = 1$ ;  $S_{6,9} = K_{6,9} \oplus \Pi'_{6,9} = 1 \oplus 0 = 1$ .

Итак, образовались три пары сумм, которые равны единице и сдвинуты на шаг

кодирования  $\lambda = 3$ :  $S_{1,4}$  и  $S_{4,7}$ ;  $S_{2,5}$  и  $S_{5,8}$ ;  $S_{3,6}$  и  $S_{6,9}$ .

Согласно последним выражениям приходим к выводу, что искажены те информационные символы, номера позиций которых являются общими в каждой паре сумм, т.е.  $a_4$ ,  $a_5$ ,  $a_6$ . Значения этих символов необходимо исправить на противоположные: принято 0, а должно быть 1, и наоборот.

Таким образом, исправлено три искажения, т.е. количество искажений, которые исправляются, равно шагу добавления.

Из этого примера вытекает еще и такой вывод: значение  $\lambda$  определяет не только шаг добавления, а и количество отдельных независимых цепочек кода.

В самом деле, при  $\lambda = 3$  имеем три независимых цепочки:

$$a_1 \rightarrow \Pi_{1,4} \leftarrow a_4 \rightarrow \Pi_{4,7} \leftarrow a_7 \rightarrow \Pi_{7,10} \leftarrow a_{10} \rightarrow \Pi_{10,13} \leftarrow a_{13} \dots$$

$$a_2 \rightarrow \Pi_{2,5} \leftarrow a_5 \rightarrow \Pi_{5,8} \leftarrow a_8 \rightarrow \Pi_{8,11} \leftarrow a_{11} \rightarrow \Pi_{11,14} \leftarrow a_{14} \dots$$

$$a_3 \rightarrow \Pi_{3,6} \leftarrow a_6 \rightarrow \Pi_{6,9} \leftarrow a_9 \rightarrow \Pi_{9,12} \leftarrow a_{12} \rightarrow \Pi_{12,15} \leftarrow a_{15} \dots$$

**Пример 12.20.** Значение информационных и проверочных символов при передаче такие же, как и в предыдущем примере (см. рис. 12.20). Проверочные символы приняты без искажений, тогда как информационные символы  $a'_1$ ,  $a'_4$ ,  $a'_5$ ,  $a'_6$ ,  $a'_{12}$  приняты с искажениями (рис. 12.21). Приведем результат сравнения контрольных и проверочных символов для каждой из цепочек:

первая цепочка:  $S_{1,4} = 0$ ;  $S_{4,7} = 1$ ;  $S_{7,10} = 0$ ;  $S_{10,13} = 0$ ;

вторая цепочка:  $S_{2,5} = 1$ ;  $S_{5,8} = 1$ ;  $S_{8,11} = 0$ ;

третья цепочка:  $S_{3,6} = 1$ ;  $S_{6,9} = 1$ ;  $S_{9,12} = 1$ ;

На основании полученных результатов суммирования контрольных и проверочных символов рассмотрим возможность исправления искажений в каждой независимой цепочке кода.

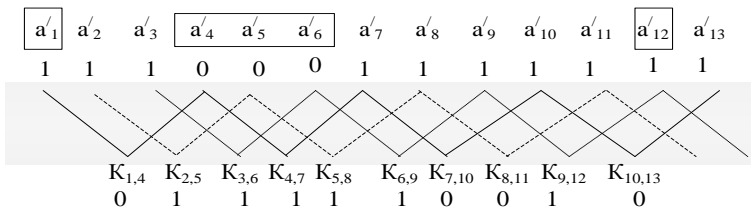


Рис. 12.21. Формирование проверочных и контрольных символов при наличии искажений в символах с номерами 1, 4, 5, 6, 12

Первая цепочка содержит  $a'_1$ ,  $a'_4$ ,  $a'_7$ ,  $a'_{10}$ ,  $a'_{13}$  и соответствующие проверочные символы  $\Pi'_{1,4}$ ,  $\Pi'_{4,7}$ ,  $\Pi'_{7,10}$ ,  $\Pi'_{10,13}$ . По условию искаженными являются  $a'_1$ ,  $a'_4$ .

В этой цепочке только одна из сумм равна единице:  $S_{4,7} = K_{4,7} \oplus \Pi'_{4,7} = 1$ .

Согласно правилам обнаружения искажений можно утверждать, что искаженным является проверочный символ  $\Pi'_{4,7}$ . Тем не менее это противоречит условию примера: проверочные символы приняты без искажений. Итак, искаженных инфор-



мационных символов, которые входят в первую цепочку, не обнаружено. Более того, неправильно «исправленным» будет проверочный символ  $\Pi'_{4,7}$ .

Вторая цепочка содержит  $a'_2, a'_5, a'_8, a'_{11}$ , и  $\Pi'_{2,5}, \Pi'_{5,8}, \Pi'_{8,11}$ . По условию искажения  $a'_5$ . Тот факт, что в этой цепочке равны единице две суммы ( $S'_{2,5} = S'_{5,8} = 1$ ), означает, что искаженным является один информационный символ с общим для этих сумм индексом, т.е.  $a'_5$ .

Во второй цепочке искажение будет исправлено правильно.

В третью цепочку входят  $a'_3, a'_6, a'_9, a'_{12}$ , и  $\Pi'_{3,6}, \Pi'_{6,9}, \Pi'_{9,12}$ . Согласно условию примера искаженными являются  $a'_6$ , и  $a'_{12}$ . В этой цепочке три суммы равняются единице:  $S'_{3,6} = S_{6,9} = S_{9,12} = 1$ . Согласно равенству  $S'_{3,6} = S_{6,9} = 1$  можно исправить  $a_6$ ; равенство  $S_{9,12} = 1$  указывает на искажение  $\Pi'_{9,12}$ , что противоречит условию. Таким образом, искажение  $a'_{12}$  не выявлено и неправильно исправлено  $\Pi'_{9,12}$ . Если взять  $S_{6,9} = S_{9,12} = 1$ , то можно считать искаженным  $a'_9$ , а это также неправильно.

Рассмотрев два примера с разным количеством искаженных информационных символов, можно прийти к таким выводам:

1. Сверточный код исправляет групповое искажение с  $\lambda$  информационных символов (см. первый пример). Чем большая длина групповой помехи, тем большим должен быть шаг добавления. Но с увеличением шага добавления возрастает и сложность кода преобразователей.

2. Правильное исправление искажений возможно, если в каждой независимой цепочке кода справа и слева от искажения есть два неискаженных символа (во втором примере - первая и третья цепочки). А поскольку информационные символы в каждой цепочке размещены на расстоянии  $\lambda$  от информационных символов других цепочек, то между групповыми искажениями должны быть по меньшей мере  $2\lambda$  неискаженных информационных символов.

Местоположение проверочных символов определяется двумя обстоятельствами: во-первых, групповая помеха не должна одновременно охватывать информационные и соответствующие проверочные символы; во-вторых, не должно быть ошибочного исправления информационных символов.

Из этих соображений каждый проверочный символ располагается на расстоянии  $2\lambda + 1$  от ближайшего своего информационного символа. Например, проверочный символ  $\Pi_{i,i+\lambda}$ , созданный из информационных  $a_i$  и  $a_{i+\lambda}$ , должен занимать  $[(i + \lambda) + 2\lambda + 1]$  позицию.

*Поскольку разность между информационными символами каждой независимой цепочки представляет  $\lambda$  информационных символов, то и расстояние между соответствующими проверочными символами также равняется шагу кодирования.*

Важной характеристикой сверточного кода является минимально допустимое расстояние между сопредельными групповыми искажениями, когда еще возможно исправлять искажение. Это расстояние должно обеспечивать правильный прием  $2\lambda$

информационных символов после искажения и проверочных, которые охватывают искаженные информационные символы. Поэтому минимально допустимое расстояние равняется  $2\lambda + 1$  символ.

В информационных сообщениях, которые передаются непрерывно, проверочные и информационные символы чередуются:  $a_1, П, a_2, П, a_3, \dots$ . Значит информационные символы, которые входят в одну проверку, отличаются один от другого на  $\lambda$  информационных и  $\lambda$  проверочных символов. Т.е. при шаге добавления  $\lambda$  информационных символов сверточный код исправляет  $b = 2\lambda$  информационных и проверочных символов, а минимально допустимое расстояние между групповыми искажениями  $M = 4\lambda + 1 = 2b + 1$  информационных и проверочных символов.

**Диаграммы состояний и процедуры сверточного кодирования.** Сверточный кодер принадлежит к классу устройств, известных как *конечный автомат*. Это общее название охватывает системы, которые имеют память о прошлых сигналах. Процедура использования конечных автоматов при помехоустойчивом сверточном кодировании непосредственно определяется алгоритмом кодирования - кодирование с памятью. Прилагательное «конечный» показывает, что существует ограниченное количество состояний, которые могут возникнуть в системе. В обобщенном смысле состояние содержит наименьшее количество информации, на основании которой вместе с текущими входными данными можно определить данные на выходе системы. Состояние дает некоторое представление о прошлых событиях (сигналы) и об ограниченном наборе возможных исходных данных в будущем, т.е. будущие состояния ограничиваются прошлыми состояниями. Для сверточного кода со степенью кодирования  $1/n$  состояние подается содержимым  $K - 1$  крайних правых разрядов. Знание состояния плюс знание следующих данных на входе являются необходимым и достаточным условием для определения данных на выходе.

Итак, пусть состояние кодера в момент времени  $t_i$  определяется как  $X_i = m_i - 1, m_i - 2, \dots, m_i - K + 1$ . При этом  $i$  ветка кодовых слов  $U_i$  целиком определяется состоянием  $X_i$  и введенными в данное время битами  $m_i$ . Таким образом, состояние  $X_i$  описывает предысторию кодера для определения данных на его выходе. Состояние кодера считается марковским в том смысле, что вероятность  $P(X_i + 1 | X_i, \dots, X_0)$  пребывания в состоянии  $X_i + 1$ , обусловленная всеми предыдущими состояниями, зависит только от последнего состояния  $X_i$ , т.е. она равняется  $P(X_i + 1 | X_i)$ . Одним из способов представления простых кодирующих устройств является *диаграмма состояния* (рис. 12.22). Состояния, изображенные в рамках диаграммы, представляют собой возможное содержимое  $K - 1$  крайних правых разрядов регистра, а пути между состояниями - кодовые слова веток на выходе, что является результатом переходов между такими состояниями. Состояние регистра взяты такие:  $a = 00$ ,  $b = 10$ ,  $c = 01$  и  $d = 11$ . Существует всего два исходных перехода из каждого состояния, что соответствует двум возможным входным битам. Дальше для каждого пути между состояниями записано кодовое слово на выходе, связанное с переходами между состояниями. При изображении путей сплошной линией обозначают путь, связанный с нулевым входным битом, а пунктирной - путь, связанный с единичным входным битом.

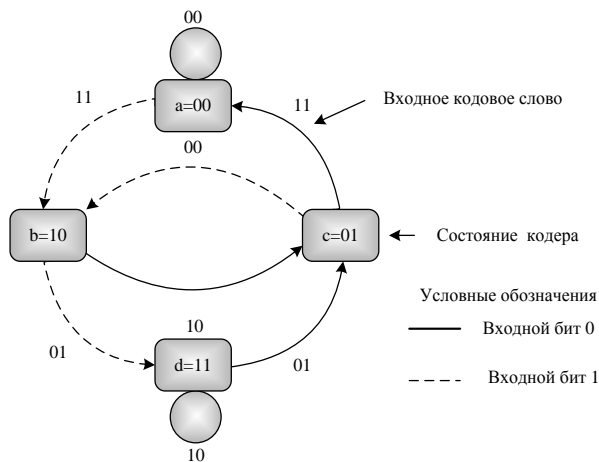


Рис. 12.22. Диаграмма состояний кодера (*степень кодирования*  $1/2, K = 3$ )

Заметим, что за один переход *невозможно* перейти из данного состояния в любое произвольное. Поскольку за единицу времени перемещается только один бит, существует только два возможных перехода между состояниями, в которые регистр может переходить за время прохождения каждого бита. Например, если состояние кодера 00, то при следующем сдвиге может возникнуть только состояние 00 или 10.

**Древовидные диаграммы кодирования.** Несмотря на то, что диаграммы состояний целиком описывают кодер, их, в сущности, нельзя использовать для легкого отслеживания переходов кодера в зависимости от времени, поскольку диаграмма не отражает динамики изменений. Древовидная диаграмма прибавляет к диаграмме состояния временное измерение. Древовидную диаграмму сверточного кодера в каждый следующий момент прохождения входного бита процедуры кодирования можно описать с помощью перемещения по диаграмме слева направо, причем каждая ветка дерева описывает кодовое слово на выходе.

*Правило разветвления для отыскания последовательности кодовых слов такое:*

если входным битом является нуль, то он связывается со словом, которое отыскивается перемещением в следующую (по направлению вверх) правую ветку;

если входной бит - единица, то кодовое слово отыскивается перемещением в следующую (за направлением вниз) правую ветку.

Предполагается, что сначала кодер содержал одни нули. Диаграмма показывает, что когда первым входным битом был нуль, то кодовым словом ветки на выходе будет 00, а если первым входным битом была единица, то кодовым словом на выходе будет 11. Аналогично, если первым входным битом была единица, а вторым - нуль, на выходе вторым словом ветки будет 10. Если первым входным битом была единица и вторым входным битом была единица, вторым кодовым словом на выходе будет 01. Согласно этой процедуре видим, что входная последовательность 11011 подается жирной линией, изображенной на древовидной диаграмме (рис. 12.35). Этот путь соответствует исходной последовательности кодовых слов 11 01 01 00 01.

Дополнительное измерение времени в древовидной диаграмме (сравнительно с диаграммой состояний) допускается динамическое описание кодера как функции

конкретной входной последовательности. Но при попытке описания с помощью древовидной диаграммы последовательности произвольной длины возникает проблема. Количество ответвлений возрастает как  $2^L$ , где  $L$  - это количество кодовых слов веток в последовательности.

**Решетчатая диаграмма.** Исследование древовидной диаграммы, приведенной на рис. 12.23, показывает, что в этом **примере** после третьего разветвления в момент времени  $t_4$  структура повторяется (в общем случае древовидная структура повторяется после  $K$  ответвлений, где  $K$  - длина кодового ограничения). Обозначим каждый узел в дереве, поставив в соответствие четыре возможных состояния в регистре смещения:  $a = 00$ ,  $b = 10$ ,  $c = 01$  и  $d = 11$ . Первое разветвление древовидной структуры в момент времени  $t_1$  дает пары узлов, обозначенных как  $a$  и  $b$ . При каждом следующем разветвлении количество узлов удваивается. Второе разветвление в момент времени  $t_2$  дает в результате четыре узла, обозначенные как  $a, b, c$  и  $d$ . После *третьего* разветвления всего есть восемь узлов: два -  $a$ , два -  $b$ , два -  $c$  и два -  $d$ .

Можно увидеть, что все ветки выходят из двух узлов того же состояния, образуя идентичные ветки последовательностей кодовых слов. В этот момент дерево делится на идентичные верхнюю и нижнюю части. Когда четвертый входной бит входит в кодер слева, первый входной бит справа отбрасывается и больше не влияет на кодовые слова на выходе.

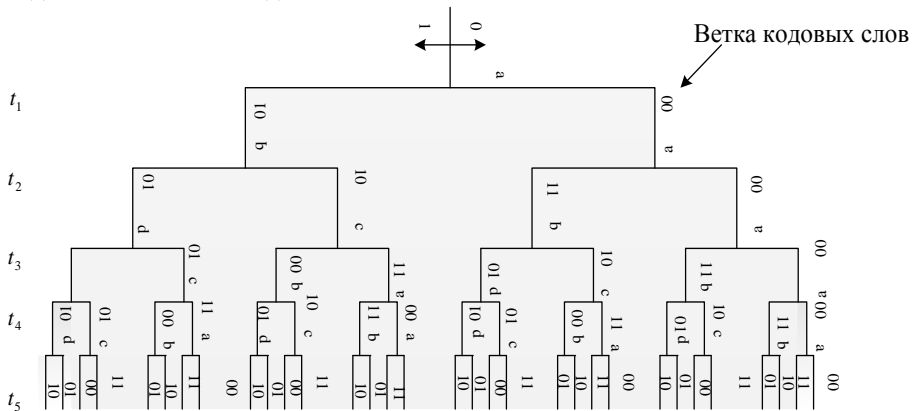
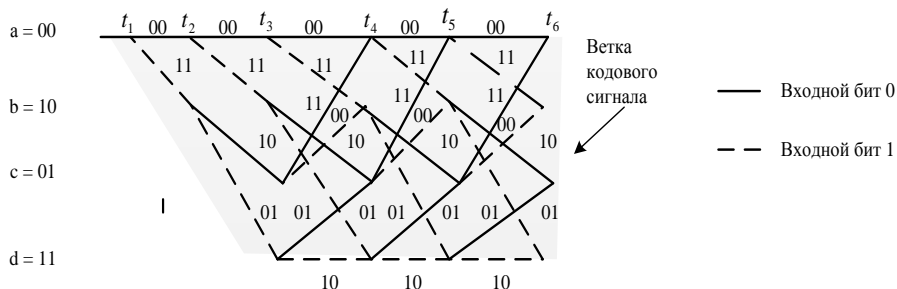


Рис. 12.23. Дерево алгоритма сверточного кодирования (степень кодирования  $1/2, K = 3$ )

Итак, входные последовательности  $100ху\dots$  и  $000ху\dots$ , где крайний левый бит наиболее ранний, после  $K$ -го ( $K = 3$ ) разветвления генерируют одинаковые кодовые слова веток. Это означает, что любые состояния, которые имеют одинаковую метку в тот самый момент  $t_i$ , можно соединить, поскольку все следующие пути будут различаемыми. Если мы выполним это для древовидной структуры, изображенной на рис. 12.23, получим другую диаграмму, которая называется *решетчатой*.

**Решетчатая диаграмма**, которая использует повторяемую структуру, дает более удобное описание кодера сравнительно с древовидной диаграммой. Решетчатая диаграмма для сверточного кодера изображена на рис. 12.24.


 Рис. 12.24. Решетчатая диаграмма кодера (степень кодирования  $1/2$ ,  $K = 3$ )

При изображении решетчатой диаграммы мы воспользовались теми же условными обозначениями, что и для диаграммы состояния: сплошная линия обозначает исходные данные, которые генерируются входным нулевым битом, а пунктирная - исходные данные, которые генерируются входным единичным битом. Узлы решетки дают состояния кодера: первый ряд узлов отвечает состоянию  $a = 00$ , второй и следующие - состоянию  $b = 10$ ,  $c = 01$  и  $d = 11$ . В каждый момент времени для представления  $2^{K-1}$  возможных состояний кодера решетки нужно  $2^{K-1}$  узлов. В нашем примере после достижения глубины решетки, которая равна трем (в момент времени  $t_4$ ), отмечаем, что решетка имела фиксированную периодическую структуру. В общем случае фиксированная структура реализуется после достижения глубины  $K$ . Итак, из этого момента в каждое состояние можно попасть из каждого из двух предыдущих состояний. Также из каждого состояния можно перейти в одно из двух состояний. Из двух исходных веток одна отвечает нулевому входному биту, а другая - единичному входному биту. На рис. 12.24 кодовые слова на выходе соответствуют переходам между состояниями, которые изображены как метки на ветках решетки.

Один столбец временного интервала решетчатой структуры кодирования, которая сформировалась, целиком определяет код. Несколько столбцов изображены лишь для визуализации последовательности кодовых символов как функции времени. Состояние сверточного кодера подается содержимым крайних правых  $K-1$  разрядов в регистре кодера. Некоторые авторы описывают состояние с помощью крайних левых  $K-1$  разрядов. Оба описания правильные. Каждый переход имеет начальное и конечное состояния. Крайние правые  $K-1$  разряды описывают начальное состояние для текущих входных данных, которые содержатся в крайнем левом разряде (степень кодирования предполагается равной  $1/n$ ). Крайние левые  $K-1$  разряды являются конечным состоянием для такого перехода. Последовательность кодовых символов характеризуется  $N$  ветками (которые подают  $N$  бит данных), которые занимают  $N$  интервалов времени. Она связана с конкретным состоянием в каждый из  $N+1$  интервалов времени (от начала до конца). Таким образом, мы запускаем биты в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_N$  и интересуемся метрическим свидетельством состояния в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_{N+1}$ . Здесь использовано такое условие: текущий бит размещается в крайнем левом разряде, а крайние правые  $K-1$  разряды стартуют из состояния со всеми нулями. Этот момент - начальное время  $t_1$ . Время завершения

последнего перехода - *время прекращения работы*  $t_{N+1}$ .

**Декодирование методом максимального правдоподобия.** Если все входные последовательности сообщений равновероятные, минимальная вероятность ошибки достигается при использовании декодера, который сравнивает условные вероятности и выбирает максимальную. Условные вероятности также называются *функциями правдоподобия декодирования*  $P(Z|U^{(m)})$ , где  $Z$  - принятая последовательность, а  $U^{(m)}$  - одна из возможных переданных последовательностей. Декодер выбирает  $U^{(m')}$ , если по всем  $U^{(m)}$

$$P(Z|U^{(m')}) = \max P(Z|U^{(m)}). \quad (12.61)$$

Принцип *максимального правдоподобия*, которое определяется уравнением (12.61), является фундаментальным достижением теории принятия решений на фоне статистических данных. При рассмотрении двоичного симметричного канала предполагалась передача только двух равновероятных сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ . Итак, принятие двоичного решения на основе принципа максимального правдоподобия, которое касается данного полученного сигнала, означает, что переданный сигнал выбирается  $s_1(t)$ , если  $p(z|s_1) > p(z|s_2)$ . В противном случае считается, что передавался сигнал  $s_2(t)$ . Параметр  $z$  зависит от  $T$ , т.е. представляет собой величину  $z(T)$  - значение принятого сигнала к детектированию в конце каждого периода передачи символа  $t = T$ .

В случае использования принципа максимального правдоподобия в задаче сверточного декодирования считается, что в сверточном коде имеется память (полученная последовательность является суперпозицией текущих и предыдущих двоичных разрядов). Таким образом, принцип максимального правдоподобия при декодировании данных, закодированных сверточным кодом, применяется в контексте выбора *наиболее возможной последовательности*, как показано в уравнении (12.61). Обычно существует множество возможных переданных последовательностей кодовых слов. Что же касается двоичного кода, то последовательность из  $L$  кодовых слов является составляющей набора из  $2^L$  возможных последовательностей. Итак, в контексте максимального правдоподобия можно сказать, что как переданную последовательность декодер выбирает  $U^{(m')}$ , если правдоподобие  $P(Z|U^{(m')})$  больше правдоподобия всех других последовательностей, которые могли быть переданными.

**Оптимальным декодером** является такой декодер, который использует алгоритм максимального правдоподобия и минимизирует вероятность ошибки в информационном сообщении при условии, что все переданные последовательности равновероятные.

Функцию правдоподобия задают или вычисляют исходя из спецификации канала.

Предположим, что мы имеем дело с аддитивным белым гауссовым шумом с нулевым средним, а соответственно, с каналом без памяти, т.е. шум влияет на каждый

символ кода *независимо* от других символов. Если степень кодирования сверточного кода равна  $1/n$ , правдоподобие можно представить как

$$P(Z | U^{(m)}) = \prod_{l=1}^{\infty} P(Z_l | U_l^{(m)}) = \prod_{l=1}^{\infty} \prod_{j=1}^n P(z_{lj} | u_{lj}^{(m)}), \quad (12.62)$$

где  $Z_i$  -  $i$ -я ветка принятой последовательности  $Z$ ;  $U_i^{(m)}$  - ветка отдельной последовательности кодовых слов  $U^{(m)}$ ;  $z_{ji}$  -  $j$ -й кодовый символ  $Z_i$ ;  $u_{ji}^{(m)}$  -  $j$ -й кодовый символ  $u_i^{(m)}$ , а каждая ветка состоит из  $n$  кодовых символов.

При вычислениях удобнее пользоваться логарифмом функции правдоподобия, поскольку это дает возможность произведение заменить суммированием. Можем воспользоваться таким преобразованием, поскольку логарифм как монотонно возрастающая функция не внесет изменений в выбор окончательного кодового слова. Логарифмическую функцию правдоподобия можно определить как

$$\gamma_U(m) = \lg P(Z | U^{(m)}) = \sum_{l=1}^{\infty} \lg P(Z_l | U_l^{(m)}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \lg P(z_{lj} | u_{lj}^{(m)}). \quad (12.63)$$

Теперь задача декодирования состоит в выборе пути вдоль дерева на рис. 12.23 или решетке на рис. 12.24 таким образом, чтобы  $\gamma_u(m)$  было максимальным. При декодировании сверточных кодов можно использовать как древовидную, так и решетчатую структуру. В случае древовидного представления кода игнорируется то, что пути снова объединяются. Для двоичного кода количество возможных последовательностей, которые состоят из  $L$  кодовых слов, равна  $2^L$ . Поэтому декодирование полученных последовательностей, которое обосновывается на принципе максимального правдоподобия с использованием древовидной диаграммы, нуждается в методе исчерпывающего сравнения  $2^L$  нагроможденных логарифмических метрических свидетельств правдоподобия, которые описывают все варианты возможных последовательностей кодовых слов. Поэтому рассматривать декодирование на основе принципа максимального правдоподобия с помощью древовидной структуры практически невозможно.

**Модели каналов: мягкое или твердое принятие решений.** Перед тем как начать разговор об алгоритме, который задает схему принятия максимально правдоподобного решения, сначала рассмотрим модель канала. Последовательность кодовых слов  $U^{(m)}$ , определенная словами ветки, каждое из которых состоит из  $n$  кодовых символов, можно рассматривать как бесконечный поток в отличие от блочного кода, где исходные данные и их кодовые слова делятся на блоки строго определенного размера. Последовательность кодовых слов, показанная на рис. 12.19, выдается сверточным кодером и подается на модулятор, где кодовые символы превращаются в сигналы. Модуляция может быть низкочастотной (например, модуляция импульсными сигналами) или полосовой. Вообще за такт кодирования в сигнал  $s_i(t)$  превратится  $l$  символов, где  $l$  - целое, причем  $i = 1, 2, \dots$ , а  $M = 2^l$ . Если  $l = 1$ , модулятор превратит каждый кодовый символ в двоичный сигнал. Предполагается, что канал, по которому передается сигнал, искажает сигнал гауссовым

шумом. После того как искаженный сигнал принят, он сначала обрабатывается демодулятором, а потом подается на декодер.

Рассмотрим ситуацию, когда двоичный сигнал передается за отрезок времени  $(0, T)$ , причем двоичная единица подается сигналом  $s_1(t)$ , а двоичный нуль - сигналом  $s_2(t)$ . Принятый сигнал имеет вид  $r(t) = s_i(t) + n(t)$ , где  $n(t)$  - взнос гауссовой помехи с нулевым средним. Детектирование  $r(t)$  происходит в два основных этапа. На первом этапе принятый сигнал переводится в число  $z(T) = a_i + n_0$ , где  $a_i$  - компонент сигнала  $z(T)$ , а  $n_0$  - компонент шума. Компонент шума  $n_0$  - это случайная переменная, значение которой имеют гауссовое распределение с нулевым средним. Итак,  $z(T)$  также будет случайной гауссовой величиной со средним  $a_1$  или  $a_2$  зависимо от того, какую величину было отправлено - двоичную единицу или двоичный нуль. На втором этапе процесса детектирования принимается решение о том, какой сигнал было передано. Это решение принимается на основе сравнения  $z(T)$  с порогом. Условные вероятности  $z(T)$ ,  $p(z|s_1)$  и  $p(z|s_2)$ , изображенные на рис. 12.25, обозначены как правдоподобие  $s_1$  и  $s_2$ . Демодулятор, приведенный на рис. 12.19, превращает упорядоченный по времени набор случайных переменных  $\{z(T)\}$  в кодовую последовательность  $Z$  и подает ее на декодер.

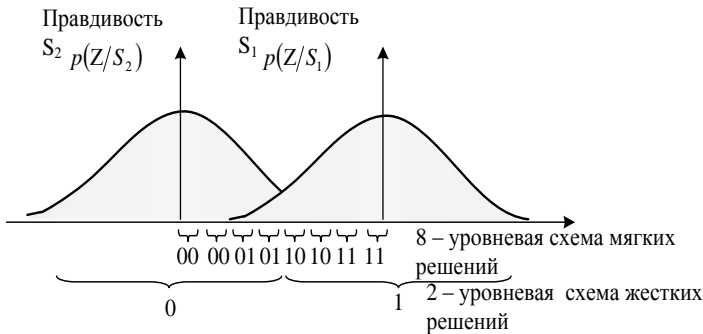


Рис. 12.25. Жесткая и мягкая схемы декодирования

Выход демодулятора можно настроить по-разному. Можно реализовать его в виде жесткой схемы принятия решений относительно того, единицу или нуль подает  $z(T)$ . В этом случае выход демодулятора квантуется на два уровня - нулевой и единичный, а дальше соединяется с декодером. Поскольку декодер работает в режиме жесткой схемы принятия решений, которые принимает демодулятор, такое декодирование называется жестким.

Аналогично демодулятор можно настроить так, чтобы он подавал на декодер значения  $z(T)$ , квантованное более чем на два уровня. Такая схема обеспечивает декодер большим количеством информации, чем твердая схема решений. Если выход демодулятора имеет более чем два равных квантования, то декодирование называется мягким.

На рис. 12.25 на оси абсцисс изображены восемь (3-битовых) уровней квантования. Если в демодуляторе реализована твердая схема принятия двоичных решений,



он отправляет на декодер только один двоичный символ. Если в демодуляторе реализована мягкая двоичная схема принятия решений, квантованная на восьми уровнях, он отправляет на 3-декодер битовое слово, которое описывает интервал, который соответствует  $z(T)$ . В сущности, поступление такого 3-битового слова вместо одного двоичного символа эквивалентно передаче декодеру *меры вероятности* вместе с решением относительно кодового символа. Согласно рис. 12.25, если из демодулятора поступила на декодер последовательность 111, это означает, что с очень высокой степенью вероятности кодовым символом была 1, тогда как переданная последовательность 100 означает, что с очень низкой степенью вероятности кодовым символом была 1. Вполне понятно, что каждое решение, принятое декодером относительно сообщения, должно быть твердым. То, что после демодулятора *не принимается твердое решение* и на декодер поступает больше данных (мягкое принятие решений), можно понимать как промежуточный этап, необходимый для того, чтобы на декодер поступило больше информации, с помощью которой он потом сможет восстановить последовательность сообщения.

Сейчас существуют блочные и сверточные алгоритмы декодирования, функционирующие на основе твердой или мягкой схемы принятия решений. Однако при блочном декодировании мягкая схема принятия решений, как правило, не используется, поскольку ее значительно сложнее реализовать, чем схему твердого принятия решений. Чаще всего мягкая схема принятия решений применяется в *алгоритме сверточного декодирования Витерби*, поскольку при декодировании Витерби мягкое принятие решений лишь немного усложняет вычисление.

*Способность сверточного кода к коррекции  $t$  ошибок* характеризуется количеством ошибочных кодовых символов, которое можно исправить в каждом блоке кода путем декодирования по методу максимального правдоподобия.

Вместе с тем при декодировании сверточных кодов способность кода к коррекции ошибок нельзя сформулировать так лаконично. При декодировании по принципу максимального правдоподобия код способен исправить  $t$  ошибок в пределах нескольких длин кодового ограничения (от 3 до 5). Точное значение длины зависит от распределения ошибок. Для конкретного кода и модели ошибки длину можно ограничить с использованием методов передаточной функции кода.

*Систематический сверточный код* - это код, в котором входной  $k$ -кортеж тоже фигурирует как часть исходного  $n$ -кортежа кодового слова, которое отвечает этому  $k$ -кортежу.

Двоичный систематический кодер со степенью кодирования  $1/2$  и  $K = 3$  изображен на рис. 12.26. Для линейных блочных кодов любой несистематический код можно превратить в систематический с такими самыми пространственными характеристиками блоков. В случае использования сверточных кодов это не так. Причина в том, что сверточные коды сильно зависят от *просвета*. При построении сверточного кода в систематической форме, когда даны длина кодового ограничения и степень кодирования, максимально воз-

можное значение просвета *снижается*.

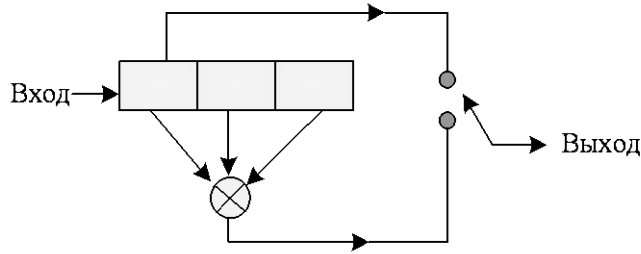


Рис. 12.26. Систематический сверточный кодер (степень кодирования  $1/2$ ,  $K = 3$ )

Максимальный просвет в случае, если степень кодирования равна  $1/2$ , для систематического и несистематического кодов для  $K$ , изменяющемся от 2 до 8, приведен в табл. 12.5. При большой длине кодового ограничения результаты отличаются еще сильнее.

Таблица 12.5

Длина кодового ограничения	Просвет систематического кода	Просвет несистематического кода
2	3	3
3	4	5
4	4	6
5	5	7
6	6	8
7	6	10
8	7	10

*Катастрофическая ошибка возникает, когда конечное количество ошибок в кодовых символах вызывает бесконечное количество битовых ошибок в декодированных данных.*

Мессе (Massey) и Сейн (Sain) указали необходимые и достаточные условия для сверточного кода, при которых возможно распространение катастрофических ошибок. Условием распространения катастрофических ошибок для кода со степенью кодирования  $1/2$ , реализованного на полиномиальных генераторах, будет наличие у генераторов общего полиномиального множителя (степени, не меньшей единицы).

**Например**, на рис. 12.27, а изображен кодер ( $K=3$ , степень кодирования  $1/2$ ) со старшим полиномом  $g_1(X)$  и младшим

$$g_2(X): g_1(X)=1+X, g_2(X)=1+X^2 \quad (12.64)$$

Генераторы  $g_1(X)$  и  $g_2(X)$  имеют общий полиномиальный множитель  $1+X$ , поскольку  $1+X^2=(1+X)(1+X)$ .

Итак, в кодере, показанном на рис. 12.27, а, может происходить *накопление катастрофической ошибки*.

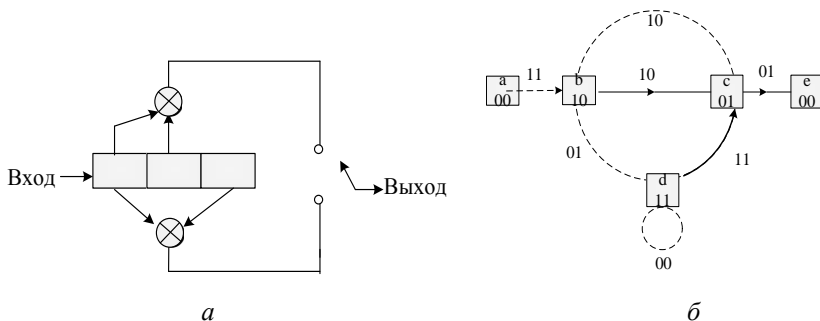


Рис. 12.27. Кодер, в котором возможно накопление катастрофической ошибки:  
 а - кодер; б - диаграмма состояния

*Катастрофическая ошибка может появиться тогда и только тогда, когда любая петля пути на диаграмме состояний кода произвольной степени кодирования имеет нулевой весовой коэффициент (нулевое расстояние к нулевому пути).*

Единственное преимущество описанного прежде систематического кода заключается в том, что он никогда не будет катастрофическим, поскольку каждая петля должна содержать, по крайней мере, одну ветку, порождаемую ненулевым входным битом. Итак, каждая петля должна содержать ненулевой кодовый символ. Тем не менее, можно показать, что только небольшая часть несистематических кодов (кроме того, в котором все сумматоры имеют парное количество соединений) является катастрофической.

**Граница рабочих характеристик сверточных кодов.** Можно показать, что при когерентной модуляции в канале с адаптивным белым гауссовым шумом вероятность битовой ошибки

$$P_B \leq Q \sqrt{2d_f E_c / N_0} \exp(d_f E_c / N_0) dT(D, N) / dN \Big|_{N=1, D=\exp(-E_c / N_0)}, \quad (12.65)$$

где  $E_c / N_0$  - отношение энергии канального символа к спектральной плотности мощности шума,  $E_c / N_0 = rE_b / N_0$  ( $r = k / n$  - степень кодирования;  $E_b / N_0$  - отношение энергии информационного бита к спектральной плотности мощности шума). Итак, для кода со степенью кодирования 1/2 и просветом  $d_f = 5$  в случае использования когерентной схемы BPSK и твердой схемы принятия решений при декодировании можем записать

$$P_B \leq Q \left( \sqrt{\frac{5E_b}{N_0}} \right) \exp \left( \frac{5E_b}{2N_0} \right) \frac{\exp(-5E_b / 2N_0)}{[1 - 2 \exp(-E_b / 2N_0)]^2} \leq \frac{Q(\sqrt{5E_b / 2N_0})}{[1 - 2 \exp(-E_b / 2N_0)]^2}. \quad (12.66)$$

*Эффективность сверточного кодирования* определяется как уменьшение (выраженное в децибелах) отношения  $E_b / N_0$ , необходимого для достижения определенной вероятности появления ошибок в кодированной системе сравнительно с некодированной системой с той самой модуляцией и характе-

ристиками канала.

Верхние границы эффективности кодирования приведены в табл. 12.6.

Таблица 12.6

Коды со степенью кодирования 1/2			Коды со степенью кодирования 1/2		
$K$	$d_f$	Верхняя граница, дБ	$K$	$d_f$	Верхняя граница, дБ
3	5	3,97	3	8	4,26
4	6	4,76	4	10	5,23
5	7	5,43	5	12	6,02
6	8	6,00	6	13	6,37
7	10	6,99	7	15	6,99
8	10	6,99	8	16	7,27
9	12	7,78	9	18	7,78

Они сравниваются с некодированным сигналом с когерентной модуляцией для нескольких значений минимальных просветов сверточного кода. Длина кодового ограничения в гауссовом канале с твердой схемой принятия решений при декодировании изменяется от 3 до 9. В таблице отображен тот факт, что даже при использовании простого сверточного кода можно достичь значительной эффективности кодирования. Реальная эффективность кодирования будет изменяться в зависимости от необходимой вероятности появления битовых ошибок.

Оценки эффективности кодов, которые сравниваются с некодированным сигналом с когерентной модуляцией, реализованной аппаратным путем или путем моделирования на компьютере, в гауссовом канале с мягкой схемой принятия решений при декодировании приведены в табл. 12.7.

Таблица 12.7

Некодированное значение $E_b / N_0$ , дБ	Степень кодирования	1/3			1/2		2/3		3/4	
	$R_b$	7	8	5	6	7	6	8	6	9
6,8	$10^{-3}$	4,2	4,4	3,3	3,5	3,8	2,9	3,1	2,6	2,6
9,6	$10^{-5}$	5,7	5,9	4,3	4,6	5,1	4,2	4,6	3,6	4,2
11,3	$10^{-7}$	6,2	6,5	4,9	5,3	5,8	4,7	5,2	3,9	4,8

Некодированное значение  $E_b / N_0$  представлено в крайнем левом столбце. Из табл. 12.17 можно видеть, что эффективность кодирования возрастает с уменьшением вероятности появления битовой ошибки. Однако эффективность кодирования не может возрастать бесконечно. Как вытекает из табл. 12.17, она имеет верхнюю границу. Эту границу (в децибелах) можно выразить как эффективность кодирования:  $\leq 10 \lg (rd_f)$ , где  $r$  - степень кодирования, а  $d_f$  - просвет.

### Основные выводы

Форматирование источника сообщений - это процесс аналого-цифрового преобразования информационного сигнала источника сообщения в цифровой сигнал с помощью дискретизации и квантования сигнала и его представления в двоичной системе исчисления.

Кодирование источника сообщений проводится с целью обеспечения компактного представления данных, сокращения объема информации, которая вырабатывается источником, и для повышения скорости ее передачи или сокращения полосы частот.

Существуют два типа систем сжатия данных:

- системы сжатия без потерь информации (неразрушительное сжатие);
- системы сжатия с потерями информации (разрушительное сжатие).

Выбор системы неразрушительного или разрушительного сжатия зависит от типа данных, которые подлежат сжатию.

Передача данных по каналам связи и их хранение всегда происходит при наличии помех. Принятое (воспроизведенное) сообщение определенной мерой отличается от переданного, т.е. на практике невозможна абсолютно точная передача при наличии помех в канале связи (в системе хранения).

Источники данных имеют ограниченный динамический диапазон и вырабатывают начальные сообщения с определенным уровнем искажений и ошибок. Этот уровень может быть большим или меньшим, но абсолютной точности воспроизведения достичь невозможно.

Критерием качества кода относительно кодирования источника сообщения является средняя длина кодовых слов.

Арифметическое кодирование нуждается в большой (в пределе бесконечной) точности вычислений, которая приводит к недопустимо высокой сложной реализации.

Простым и широко используемым для сжатия изображений и звуковых сигналов методом неразрушительного кодирования является метод дифференциального кодирования и кодирования длины повторений.

Задача помехоустойчивого корректирующего кодирования - обеспечение целостности информационных объектов с применением помехоустойчивых корректирующих кодов.

Помехоустойчивым корректирующим кодированием называется такой вид кодирования, который дает возможность реализовать программные, аппаратные или программно-аппаратные средства выявления и устранения искажений в информационных сообщениях.

Сверточным кодированием называется алгоритм кодирования, согласно которому кодер зависит не только от информационных символов в данный момент, а и от предыдущих символов на его входе или выходе.

Оптимальным является декодер, который работает по принципу максимального правдоподобия и минимизирует вероятность ошибки в информационном сообщении при условии, что все переданные последовательности равновероятные.

Сверточные (рекуррентные, цепи) коды используются для кодирования непрерывной последовательности двоичных символов путем введения в эту последовательность специальных проверочных (избыточных) символов с целью выявления и исправления искажений в информационных сообщениях.

**Вопросы для самоконтроля**

---

1. Раскройте содержание разрушительного и неразрушительного сжатия информации.
2. В каком случае код является однозначно декодированным?
3. Раскройте понятие «префиксности кода».
4. Выведите необходимое и достаточное условия префиксности.
5. Определите алгоритм построения кодового дерева Хаффмана.
6. В чем заключается кодирование последовательностей сообщений?
7. Раскройте алгоритм декодирования арифметического кода.
8. Раскройте понятие «код с конечной памятью».
9. На какие группы делятся все словарные методы кодирования?
10. Объясните основные способы (механизмы) обеспечения целостности (и в определенном значении - доступности) информации в условиях естественных действий.
11. Объясните особенности способов обеспечения целостности информационных объектов с применением помехоустойчивых корректирующих кодов.
12. Объясните принципы построения помехоустойчивых кодов.
13. Что такое относительная скорость и избыточность кода?
14. Объясните принципы построения двоичных кодов с проверкой на четность или нечетность (контроль по модулю 2).
15. Объясните принцип построения кодов Хэмминга. Какие их возможности относительно обнаружения и исправления ошибок?
16. Объясните алгоритмы кодирования и декодирования с применением кодов Хэмминга.
17. Построение циклических кодов. Чем определяется их корректирующая способность?
18. Объясните алгоритмы кодирования и декодирования с применением циклических кодов.
19. Объясните принципы построения сверточных кодов. Какие их возможности относительно обнаружения и исправления искажений?

---

**Conclusions**

---

Message source formatting is a process of analog-to-digital conversion of message source information signal into a digital signal by sampling and quantization of signal and its representation in binary system of calculation.

Messages source coding is conducted to ensure a compact data representation, to reduce information volume generated by source and to improve transmission speed or reduce frequency band.

There are two types of data compression systems: compression systems without information loss (nondestructive compression); compression systems with in-

formation loss (destructive compression).

Nondestructive or destructive compression system's choice depends on type of data submitted for compression.

Data transmission via communication channels and its storage always occur with interferences. Therefore received (reproduced) message is always to a certain measure differs from transmitted, i.e. in practice absolutely accurate transmission is impossible in presence of interferences in communication channel (storage system).

Data sources have limited dynamic range and produce initial message with certain level of distortion and error. This level may be larger or smaller, but absolute fidelity is impossible to achieve.

Code quality criterion with respect to message source encoding is the average length of code words.

Arithmetic coding demands significant (infinite) accuracy of calculations, which leads to unacceptably sophisticated implementation.

Simple and widely used method for compressing images and audio signals by means of nondestructive method of coding is method of differential coding and repetition length encoding.

Task of interference immune correction coding is to ensure integrity of information objects using interference immune correcting codes.

Interference immune correcting coding is coding type, which allows implementing software, hardware or software-hardware detection and removal of distortions in information messages.

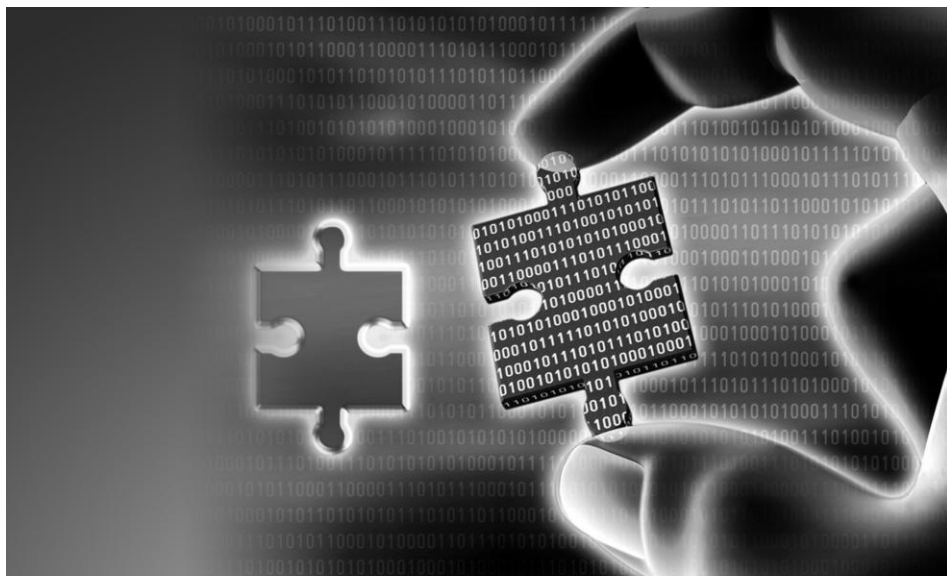
Convolutional coding is an encoding algorithm by which encoder is dependent not only on information symbols at the moment, but also on previous symbols at its input or output.

Optimal decoder operates on the principle of maximum likelihood, and minimizes the probability of error in information message on condition that all transmitted sequences are equiprobable.

Convolution codes are used to encode a continuous sequence of binary symbols by introducing special test (redundant) symbols in this sequence in order to identify and correct distortions in information messages.

**Ключевые слова**

кодирование источника сообщений	encoding of source of reports
коды с памятью	codes with memory
коды без памяти	codes without memory
помехоустойчивый корректирующий код	antigambling correcting code
сверточный двоичный код	binary displacing code
корректирующая способность кода	correcting ability of code
избыточность кода	code surplus



## ШИФРОВАНИЕ И ДЕШИФРОВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

13

- 13.1. Модели и системы шифрования
- 13.2. Шифрование в каналах связи
- 13.3. Алгоритмы и системы симметричного и асимметричного шифрования (криптографической защиты информации)
- 13.4. Электронная цифровая подпись
- 13.5. Стеганографические методы
- 13.6. Методы криптоанализа



### 13.1. Модели и системы шифрования

Термины *шифрование* и *кодирование* означают преобразование сообщений, которые выполняются передатчиком, а термины *дешифрации* и *декодирования* - соответствующие обратные преобразования, которые осуществляются получателем информации.

Греческое слово «криптография» происходит от слов «*kryptos*» (тайный, спрятанный) и «*grapho*» (запись) и *охватывает разработку методов и средств обеспечения безопасности передачи информационных сообщений.*

Разработка и внедрение методов и средств безопасности передачи информационных сообщений на основе криптографических преобразований является задачей криптографов. Криптоаналитики нарушают эту безопасность, используя криптоанализ, соориентированный на взлом шифротекстов (шифров), которые представляют собой данные, представленные в зашифрованной форме (со скрытым семантическим содержанием), т.е. образованные после шифрования (криптографического преобразования) открытого текста (с нескрываемым семантическим содержанием).

До появления информационных технологий криптография состояла из алгоритмов на символьной основе. Разные криптографические алгоритмы либо заменяли одни символы другими, либо переставляли символы.

Стремительное развитие криптографические системы приобрели в годы первой и второй мировых войн. Появление вычислительных средств в 1950-х годах ускорило разработку и усовершенствование методов шифрования.

Современная криптография базируется на последних достижениях математики, ряда фундаментальных физических и инженерных дисциплин в сочетании с новейшими информационными технологиями.

Основными направлениями использования криптографических методов (в том числе в ИИС) стали передача конфиденциальной информации в каналах связи, установление подлинности переданных сообщений, хранение информации (документов, баз данных) на носителях в зашифрованном (закрытом) виде. Появление новых мощных вычислительных систем, новейших сетевых технологий и нейронных моделей постоянно побуждает к созданию новых криптосистем и внедрению тщательного анализа и совершенствованию уже известных методов.

В основу каждой закрытой информационной системы положено использование алгоритмов шифрования как основного средства сохранения конфиденциальности информации.

**Шифрование** - процесс преобразования алфавита сообщения ( $i=1, 2, \dots, K$ )  $A\{\lambda_i\}$  ( $i=1, 2, \dots, K$ ) в алфавит выбранных кодовых символов  $R\{x_j\}$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ) на основе строго определенного алгоритма или математической функции с целью обеспечения конфиденциальности, т.е. предотвращение исключения полезной информации из канала передачи данных несанкционированным пользователем (рис. 13.1).



Рис. 13.1. Структурная схема процесса шифрования

*Криптографическим алгоритмом* называют алгоритм или математическую функцию, которая используется для шифрования и расшифровывания открытого текста из алфавита сообщения  $A\{\lambda_i\}$ .

*Алфавит сообщения*  $A\{\lambda_i\}$  ( $i=1, 2, \dots, K$ ) - конечное множественное число знаков, используемых для шифрования информации.

*Текст (открыт текст)* - упорядоченный набор знаков  $M$  из элементов алфавита  $A\{\lambda_i\}$ , который содержит полезную информацию.

Под *шифровкой* в широком смысле понимают процесс преобразования исходного текста, который называют также открытым текстом, в зашифрованный текст.

*Расшифровка* - процесс, обратный шифрованию, то есть восстановление открытого текста из алфавита сообщения  $A\{\lambda_i\}$  ( $i=1, 2, \dots, K$ ) на основе определенного ключа (алгоритма или обратной математической функции) с целью получения полезной информации из зашифрованного текста (рис. 13.2).



Рис. 13.2. Структурная схема процесса расшифровки

*Ключ* - информация (обратная математическая функция или алгоритм), необходимая для беспрепятственного шифрования и расшифровки текстов.

*Пространство ключей* ( $K$ ) - это набор возможных значений ключа, который может представлять собой алгоритм, обратную математическую функцию или последовательность символов алфавита.

*Дешифрация* - процесс, обратный к шифрованию, то есть восстановление открытого текста из алфавита сообщения  $A\{\lambda_i\}$  ( $i=1, 2, \dots, K$ ) без знания ключа (алгоритма или обратной математической функции) с целью несанкционированного исключения необходимой информации из зашифрованного текста (рис. 13.3).

*Криптостойкость* - временная характеристика шифра, который определяет его стойкость к дешифрации без знания ключа.



Рис. 13.3. Структурная схема процесса дешифрации

Процесс криптографического закрытия данных может осуществляться как программно, так и аппаратно. Аппаратная реализация имеет существенно большую стоимость, хотя ей присущи и важные преимущества: высокая производительность, простота, защищенность. Программная реализация наиболее практична благодаря гибкости в использовании.

В общей системе шифрования открытый текст обозначается буквой  $M$ . Это может быть поток битов, текстовый файл, битовое изображение, цифровое видео и т.п. Обозначим шифротекст как  $C$  (ciphertext), функцию шифрования - как  $E$ . Математическая модель шифрования будет иметь вид  $E(M) = C$ , а функция расшифровывания  $D(C) = M$ .

Поскольку содержанием шифрования и расшифровывания сообщения является восстановление начального открытого текста, должно выполняться равенство  $D(E(M)) = M$ .

*Криптографическая система шифрования (криптосистема)* - это совокупность методов и средств криптографической защиты информации, использование которых обеспечивает надлежащий уровень защищенности информации, которая обрабатывается, сохраняется или передается по информационно-коммуникационным каналам связи.

Алгоритмы и системы шифрования можно классифицировать (рис. 13.4).

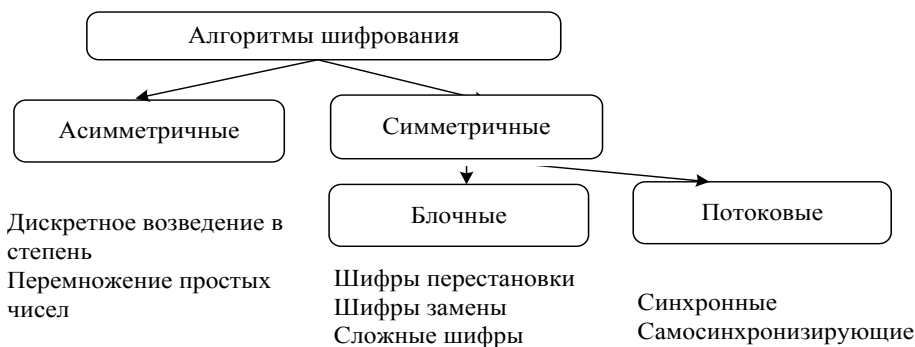


Рис. 13.4. Классификация криптографических алгоритмов

*Симметричная криптосистема* - называется система, которая осуществляет процесс шифрования и расшифровывания полезного сообщения (открытого текста) на основе использования одного ключа (рис. 13.5).

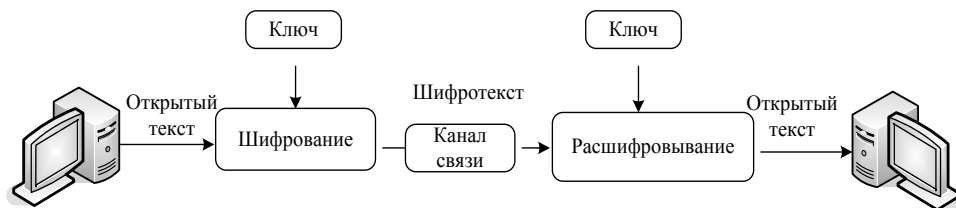


Рис. 13.5. Шифрование и дешифрование с ключом

*Поточными алгоритмами (поточными шифрами)* называются алгоритмы с последовательной (битной или байтной) обработкой открытых текстов.

*Блочными алгоритмами (блочными шифрами)* называются алгоритмы, которые работают с группами последовательностей (битов, байтов), которые образуют открытый текст, или с группами текстов.

Для алгоритмов, которые используются в компьютерных модемах, типичный размер блока составляет 64 бита.

Шифрование и расшифровка с использованием симметричного алгоритма описывается как  $E_K(M) = C$ ,  $D_K(C) = M$ .

*Асимметричной криптосистемой* называется система, которая осуществляет шифрование и расшифрование полезного сообщения (открытого текста) с использованием двух ключей: открытого и закрытого (секретного), математически связанных друг с другом (рис. 13.6).

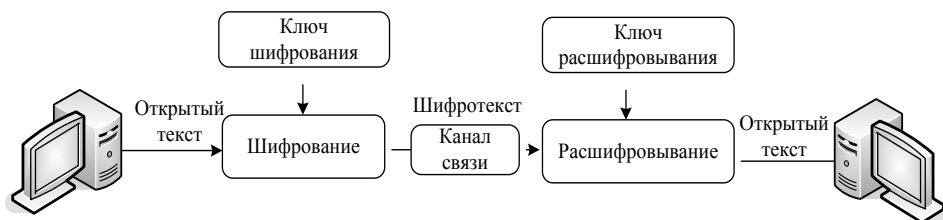


Рис. 13.6. Шифрование и дешифрование с двумя разными ключами

Информация шифруется с помощью открытого ключа, доступного всем, а расшифровывается с помощью закрытого ключа, известного только получателю сообщения. Более того, ключ расшифровывания нельзя раскрыть ключом шифрования.

Шифрование с открытым ключом  $E$  обозначается как  $E_K(M) = C$ .

Хотя открытый и закрытый ключи разные, расшифровывание с соответствующим закрытым ключом обозначается как  $D_K(C) = M$ .

Иногда сообщения шифруются закрытым ключом, а расшифровываются открытым, который используется для цифровой подписи.

**Требования к современным криптографическим системам защиты информации:**

зашифрованное сообщение должно поддаваться чтению только при наличии ключа;

количество операций, необходимых для определения использованного ключа шифрования за фрагментом зашифрованного сообщения и соответствующего ему открытого текста, должно быть не меньше от общего количества возможных ключей;

количество операций, необходимых для дешифрации информации путем перебора любых ключей, должно выходить за пределы возможностей современных вычислительных систем (с учетом возможности использования сетевых вычислений) или нуждаться в высоких расходах на эти вычисления;

знание алгоритма шифрования не должно влиять на надежность защиты;

незначительное изменение ключа должно приводить к существенному изменению вида зашифрованного сообщения даже при шифровании того же открытого текста;

незначительное изменение открытого текста должно приводить к существенному изменению вида зашифрованного сообщения даже при использовании того же ключа;

структурные элементы алгоритма шифрования должны быть неизменными;

дополнительные биты, что вводятся в сообщение в процессе шифрования, должны быть полно и надежно спрятанными в зашифрованном тексте;

длина зашифрованного текста не должна превышать длину исходного текста;

не должно быть простых и легко устанавливаемых зависимостей между ключами, последовательно используемыми в процессе шифрования;

любой ключ из множественного числа возможных значений должен обеспечивать надежную защиту информации;

алгоритм должен допускать как программную, так и аппаратную реализацию, при этом изменение длины ключа не должно привести к качественному ухудшению алгоритма шифрования.

### 13.2. Шифрование в каналах связи

Одной из важных характеристик информационной сети есть ее деление на так называемые уровни модели ISO/OSI, каждая из которых отвечает за соблюдение определенных условий и выполнение функций. Такое деление на уровни имеет фундаментальное значение для создания стандартных информационно-коммуникационных сетей. В теории шифрования данных передача по каналам связи информационно-коммуникационной сети может осуществляться на любом уровне модели OSI. На практике это обычно делается или на самых низких, или на наивысших уровнях. Если данные шифруются на нижних уровнях, шифрование называется *канальным*. Если шифрование данных выполняется на верхних уровнях, то оно называется *сквозным*. Оба этих подхода к шифрованию данных имеют свои преимущества и недостатки.

**Канальное шифрование.** При канальном шифровании шифруются абсолютно все данные, которые проходят через каждый канал связи, включая

открытый текст сообщения, а также информацию о его маршруте трансляции и об используемом коммуникационном протоколе (рис. 13.7). Однако в этом случае любой интеллектуальный сетевой узел будет вынужден расшифровывать входной поток данных, чтобы соответствующим образом его обработать и опять зашифровать для передачи на другой узел сети.



Рис. 13.7 Канальное шифрование

Канальное шифрование является эффективным средством защиты информации в информационно-коммуникационных сетях. Поскольку шифрованию подвергаются все данные, которые передаются от одного узла сети к другому, у криптоаналитика нет никакой дополнительной информации о том, что служит источником переданных данных, их назначение, какая их структура и т.п. А если еще позаботиться и о том, чтобы, пока канал простаивает, передавать по нему случайную битовую последовательность, посторонний наблюдатель не сможет даже сказать, где начинается и где заканчивается текст переданного сообщения. Не слишком сложной является и работа с ключами. Одинаковыми ключами стоит обеспечивать только два соседних узла сети связи, которые потом могут изменять используемые ключи независимо от других пар узлов.

Наибольший недостаток канального шифрования связан с тем, что данные придется шифровать при передаче по каждому физическому каналу компьютерной сети. Отправка информации в незашифрованном виде по одному из каналов ставит под угрозу обеспечение безопасности всей сети в целом. В итоге стоимость реализации канального шифрования в больших сетях может оказаться излишне большой. Кроме того, при использовании канального шифрования дополнительно нужно защищать каждый узел информационной сети, через который проходят переданные по сети данные. Если абоненты сети полностью доверяют друг другу и каждому ее узлу, размещенному в защищенном от проникновения злоумышленников месте, на этот недоста-



**Хорст Фейстель**  
(**Horst Feistel**,  
1915—1990),

родился в Берлине, а в 1934 году переехал в США. Закончил Гарвардский университет со степенью магистра в области физики. На время работы в компании IBM приходится наиболее известные работы Фейстеля в области криптографии. Фейстель одним из первых ученых (которые не работали на заказ правительства) начал изучать теорию блочных шифров. Наибольшую популярность ему принес общий метод создания алгоритмов шифрования, который получил его имя. Работы Фейстеля заложили основу для шифров Luciferi Data Encryption Standards (DES).

ток канального шифрования можно не обращать внимания. Однако на практике такая ситуация случается редко.

**Сквозное шифрование.** При сквозном шифровании криптографический алгоритм реализуется на одном из верхних уровней модели OSI. Шифрованию подлежит только содержательная часть сообщения, которое нужно передать по сети. После зашифровывания к ней добавляется служебная информация, необходимая для маршрутизации сообщения, и результат направляется на низшие уровни с целью отправления адресату. Теперь сообщения не нужно постоянно расшифровывать и зашифровывать при прохождении через каждый промежуточный узел сети связи. Сообщение остается зашифрованным на всем пути от отправителя к получателю (рис. 8.8).



Рис. 13.8. Сквозное шифрование

Основная проблема, с которой сталкиваются пользователи информационно-коммуникационных сетей, где применяется сквозное шифрование, связана с тем, что служебная информация, используемая для маршрутизации сообщений, передается по сети в незашифрованном виде. Опытный криптоаналитик может добыть для себя полезную информацию, зная кто, с кем, как долго и в какие часы общается через компьютерную сеть. Для этого ему даже не нужно быть в курсе предмета общения.

Сквозное шифрование, в отличие от канального, характеризуется более сложной работой с ключами, поскольку каждая пара пользователей компьютерной сети должна быть обеспечена одинаковыми ключами, прежде чем они смогут связаться друг с другом. К тому же, поскольку криптографический алгоритм реализуется на верхних уровнях модели OSI, приходится также иметь дело со многими существенными разногласиями в коммуникационных протоколах и интерфейсах в зависимости от типов компьютерных сетей и подсоединенных к сети компьютеров. Все это осложняет практическое применение сквозного шифрования.

**Комбинированное шифрование.** Комбинирование канального и сквозного шифрования данных в информационной сети обходится значительно дороже, чем канальное или сквозное шифрование отдельно. Однако именно такой подход дает возможность как можно лучше защитить данные, переданные по сети. Шифрование в каждом канале связи не позволяет злоумышленнику анализировать служебную информацию, используемую для маршрутизации. А сквозное шифрование уменьшает вероятность доступа к незашифрованным данным в узлах сети.

При комбинированном шифровании работа с ключами происходит раздельно: сетевые администраторы отвечают за ключи, которые используются

при канальном шифровании, а о ключах, которые применяются при сквозном шифровании, заботятся сами пользователи.

**Аппаратное шифрование.** Большинство средств криптографической защиты данных реализовано в виде специализированных аппаратных устройств. Эти устройства встраиваются в линию связи и осуществляют шифрование всей переданной по ней информации. Преимущество аппаратного шифрования над программным предопределяется несколькими причинами. Аппаратное шифрование имеет большую скорость. Криптографические алгоритмы состоят из огромного количества сложных операций, что продельваются над битами открытого текста. Современные универсальные компьютеры плохо приспособлены для эффективного выполнения этих операций. Специализированное оборудование дает возможность выполнять их намного быстрее. Аппаратуру более легко физически защитить от проникновения извне. Программа, которая выполняется на персональном компьютере, практически незащищена. Вооружившись отладчиком, злоумышленник может тайком внести в нее изменения, чтобы снизить стойкость используемого криптографического алгоритма, и никто ничего не заметит. Что же касается аппаратуры, то она обычно размещается в специальных контейнерах, которые делают невозможным изменение схемы ее функционирования. Чип покрывается сверху специальным химическим составом, и в результате любая попытка взломать защитный слой этого чипа приводит к самоуничтожению его внутренней логической структуры. И хотя иногда электромагнитное излучение может быть хорошим источником информации о том, что происходит внутри микросхемы, от этого излучения легко избавиться, экранировав микросхему. Аналогично можно экранировать и компьютер, хотя сделать это намного сложнее, чем в случае миниатюрной микросхемы.

**Программное шифрование.** Любой криптографический алгоритм можно реализовать в виде соответствующей программы. Преимущества такой реализации очевидны: программные средства шифрования легко копируются, они просты в использовании, их нетрудно модифицировать в соответствии с конкретными потребностями. Во всех распространенных операционных системах есть встроенные средства шифрования файлов. Обычно они предназначены для шифрования отдельных файлов, и работа с ключами полностью положена на пользователя. Поэтому применение этих средств нуждается в особенном внимании: во-первых, в любом случае нельзя хранить ключи на диске вместе с зашифрованными с их помощью файлами, а во-вторых, незашифрованные копии файлов необходимо стереть сразу же после шифрования. Обычно злоумышленник может добраться до компьютера и незаметно внести нежелательные изменения в программу шифрования. Однако основная проблема не в этом. Если злоумышленник сможет проникнуть в помещение, где установлен компьютер, он вряд ли будет возиться с программой, а просто установит скрытую камеру в стене, подслушивающее устройство в телефон или датчик для ретрансляции электромагнитного излучения в ком-



пьютер.

**Сжатие и шифрование.** Алгоритмы сжатия данных весьма пригодны для общего использования с криптографическими алгоритмами. На это есть две причины. При раскрытии шифра криптоаналитик больше всего полагается на избыточность, присущую любому открытому тексту. Сжатие помогает лишиться этой избыточности.

Шифрование данных является достаточно трудоемкой операцией. При сжатии уменьшается длина открытого текста, и тем самым сокращается время, которое будет потрачено на его шифрование. Нужно только не забыть сжать файл, прежде чем он будет зашифрован, а не после того.

После шифрования файла с помощью высококачественного криптографического алгоритма полученный шифротекст сжать не удастся, поскольку его характеристики будут близкими к характеристикам совсем случайного набора букв. Кстати, сжатие может служить своеобразным тестом для проверки качества криптографического алгоритма: если шифротекст поддается сжатию, этот алгоритм есть смысл заменить на лучший.

Для обеспечения надежной защиты передачи информации стоит воспользоваться автономным аппаратным шифрованием. В отличие от программного средства защиты такое устройство обойти по большей части невозможно.

### **13.3. Алгоритмы и системы симметричного и асимметричного шифрования (криптографической защиты информации)**

Рассмотрим методы шифрования, которые чаще всего используются на практике. Речь идет о блочных шифрах. Блочные алгоритмы шифрования являются основным средством криптографической защиты информации, которая сохраняется или передается по общедоступной сети.

Преимущества практического приложения: возможность эффективной программной реализации на современных аппаратно-программных средствах; высокая скорость шифрования/расшифровывания как при аппаратной, так и при программной реализации; высокая стойкость; при этом стойкость алгоритма блочного шифрования может быть доказана с помощью математического аппарата.

Входная последовательность блочных алгоритмов шифрования разбивается на участки определенной длины, преобразования в алгоритме блочного шифрования происходят над каждым блоком отдельно. Соответственно исходная последовательность алгоритма блочного шифрования состоит из блоков, длина которых равняется длине входных блоков.

В случае, когда длина открытого текста не кратна длине входных блоков в алгоритме шифрования, применяется операция *дополнения* последнего блока открытого текста к необходимой длине. Дополнение осуществляется приписыванием необходимого количества нулей или случайного набора символов. В общем случае содержание того, чем мы дополняем блок открытого текста, не играет никакой роли с точки зрения криптографической стойкос-

ти. На приемной стороне необходимо знать, какое количество символов было прибавлено, потому рядом с отмеченными дополнениями приписывается длина этих данных.

Вариантом практического применения блочных алгоритмов является использование их для обеспечения имитозащиты переданной по каналам связи информации.

*Имитозащита сообщения* - процесс введения дополнительного блока (имитовставки) в конце разбитого на блоки информационного сообщения. Для внедрения имитовставки применяются алгоритмы блочного шифрования в режиме гаммирования с самовосстановлением или шифрования со сцеплением блоков.

Специфика организации разных типов защищенных каналов связи обусловила появление алгоритмов блочного шифрования (рис. 13.9):

*метод простой замены, или режим электронной кодовой книги (Electronic Codebook Mode - ECB);*

*метод гаммирования, или режим по модулю, который равняется мощности алфавита;*

*метод гаммирования с самовосстановлением, или гаммирования с обратной связью (Cipher-Feedback mode - CFB);*

*метод многоалфавитной подстановки;*

*метод шифрования со сцеплением блоков (Cipher Block Chaining mode - CBC);*

*метод гаммирования с обратной связью на выходе (Output-Feedback mode - OFB).*

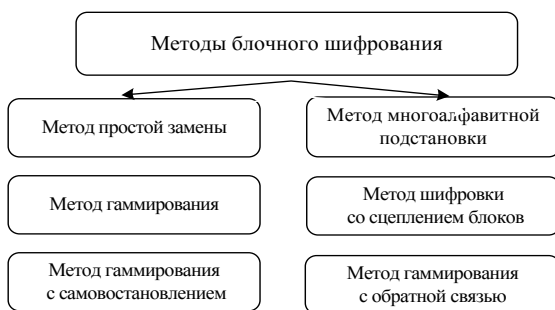


Рис.13.9. Методы алгоритмов блочного шифрования

Все разнообразие симметричных криптосистем основывается на описанных дальше базовых методах.



**Тахер Ель-Гамаль (Taher ElGamal, 1955),**

криптограф, потомок египтян, которые эмигрировали в США. В 1985 г. опубликовал статью "Криптосистемы с открытым ключом и схема подписи, которая основывается на дискретных логарифмах". Схема подписи Ель-Гамала стала основанием для алгоритма цифровой подписи DSA. Он также принимал участие в разработке протоколов оплаты кредитной карточкой и интернет-схем оплаты. Ель-Гамаль был директором по разработкам компании RSA Security, прежде чем основал и возглавил в 1998 году компанию Security.

**Метод многоалфавитной подстановки** - это самый простой вид преобразований, который заключается в замене символов исходного текста на другие (того же алфавита) по более-менее сложному правилу. В случае многоалфавитной подстановки каждый символ исходного текста по определенному закону превращается в символ зашифрованного текста. При этом закон преобразования изменяется от символа к символу.

Для обеспечения высокой криптостойкости системы нужно использование ключей большого размера. К этому классу принадлежат криптосистемы с одноразовым ключом, которые имеют абсолютную теоретическую стойкость.

**Метод перестановки** - метод криптографического преобразования, которое заключается в перестановке символов исходного текста по некоторому правилу. Шифры перестановки не используются в чистом виде, поскольку их криптостойкость недостаточна.

**Метод гаммирования** - это преобразование исходного текста, при котором его символы добавляются (по модулю, который равняется мощности алфавита) к символам псевдослучайной последовательности, сгенерированной по некоторому правилу. Гаммирование нельзя полностью выделить в отдельный класс криптографических преобразований, поскольку отмеченная псевдослучайная последовательность может генерироваться, например, с помощью блочного шифра. В случае, когда последовательность случайна (например, полученная от физического датчика) и каждый ее фрагмент используется только один раз, получаем криптосистему с одноразовым ключом.

**Метод простой замены.** В этом режиме блоки открытого текста шифруются независимо от других блоков на одном ключе (рис. 13.10). Этот режим назван *режимом электронной кодовой книги*, поскольку теоретически существует возможность создать книгу, в которой каждому блоку открытого текста будет отвечать блок зашифрованного текста.

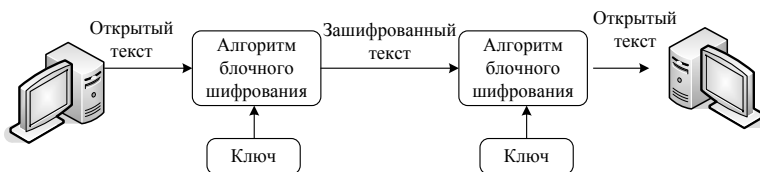


Рис. 13.10. Режим простой замены

Однако в случае, когда длина блока равняется 64 бит, книга содержит 264 записей, и каждая книга будет отвечать одному ключу.

Шифрование может быть описано зависимостью  $C_i = F(P_i)$  для  $i = 1, \dots, N$ , где  $C_i$  и  $P_i$  - блоки соответственно зашифрованного и открытого текста, а  $F$  - криптографическое преобразование, реализованное алгоритмом блочного шифрования.

Идентичные блоки открытого текста на том же ключе будут зашифрованы одинаково. С точки зрения криптоанализа этот режим является наиболее

«слабым» (поскольку существует большое количество криптографических атак).

**Метод усложненного гаммирования.** В этом режиме алгоритм блочного шифрования используется для усложнения предыдущей гаммы, выработанной одноканальной линией задержки (рис. 13.11). Ошибка во время передачи всего сообщения приводит к искажению при расшифровывании только одного блока. Таким образом, в случае использования этой методики делается невозможным распространение ошибки за счет рассинхронизации узлов вычисления предыдущей гаммы на передающей и приемной сторонах.

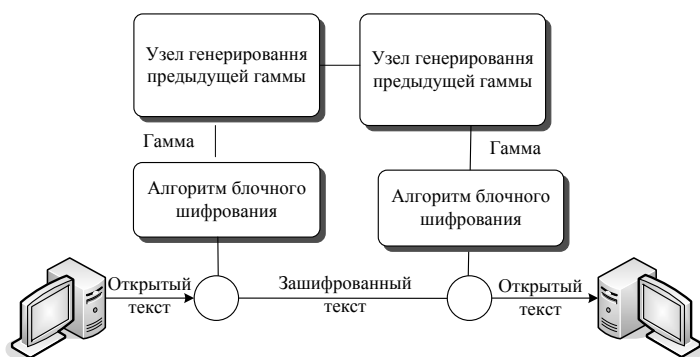


Рис. 13.11. Режим гаммирования

Для предотвращения этого нежелательного явления на практике применяются устройства синхронизации работы шифраторов, если шифратор реализуется аппаратно. Начальное состояние узла создания исходной гаммы задается инициализирующим вектором (синхропосылка), который передается по открытым каналам связи в зашифрованном или открытом виде. Гамма, полученная узлом генерации предыдущей гаммы, обрабатывается согласно алгоритму блочного шифрования, после чего результирующая гамма подытоживается по модулю с блоком открытого текста.

Шифрование можно представить как  $C_i = P_i \oplus F(Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , где  $Y_j$  - созданная гамма;  $Y_i$  - синхропосылка.

**Метод гаммирования с самовосстановлением.** Этот режим характеризуется тем, что шифратор в этом случае имеет свойство самосинхронизации (рис. 13.12). Начальное заполнение накопления, которое на практике обычно реализуется в виде регистра сдвига, есть синхропосылкой  $Y_i$ , которая передается по открытому каналу передачи данных. Математическое представление шифрования имеет вид  $C_1 = P_1 \oplus F(Y)$ ,  $C_i = P_i \oplus F(Y_{i-1})$ . Соответственно расшифровывание имеет вид  $P_1 = C_1 \oplus F(Y)$ ,  $P_i = C_i \oplus F(C_{i-1})$ .

**Асимметричные системы** характеризуются тем, что для шифрования и дешифрации используются разные ключи, связанные между собой некото-

рой математической зависимостью. При этом отмеченная зависимость такая, что найти один ключ, зная другой, путем вычислений очень трудно.

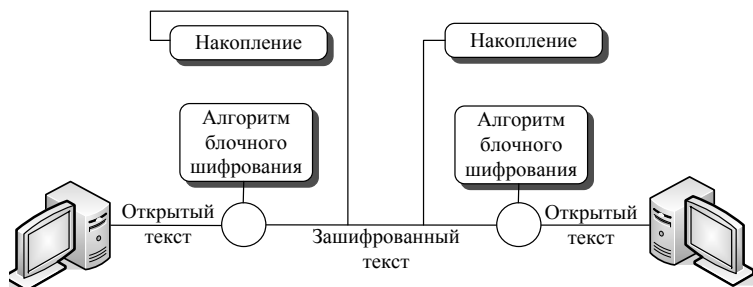


Рис. 13.12. Режим гаммирования с самовосстановлением

Один из ключей (например, ключ шифрования) может быть общедоступным, и в этом случае проблема получения общего секретного ключа для связи отпадает. Если сделать общедоступным ключ расшифровывания, то на базе полученной системы можно построить систему аутентификации переданных сообщений. Поскольку по большей части один ключ из пары делается общедоступным, такие системы получили также название *криптосистем с открытым ключом*.

Криптосистема с открытым ключом определяется тремя этапами реализации алгоритмов: генерации ключей, шифрования и расшифровывания.

Алгоритм *генерации ключей* открыт, любой пользователь может подать ему на вход случайную строку  $r$  надлежащей длины и получить пару ключей  $(k_1, k_2)$ . Один из ключей (например,  $k_1$ ) публикуется - он называется открытым, а второй - его называют *секретным* - сохраняется в тайне.

Алгоритмы шифрования  $E_{k_1}$  и расшифровки  $D_{k_2}$  таковы, что для любого открытого текста  $m$

$$m D_{k_2}(E_{k_1}(m)) = m.$$

Рассмотрим теперь гипотетическую атаку злоумышленника на эту систему. Злоумышленнику известен открытый ключ  $K_1$ , но неизвестен соответствующий секретный ключ  $K_2$ . Противник перехватил криптограмму  $d$  и пытается найти сообщение  $m$ , где  $d = E_{k_1}(m)$ . Поскольку алгоритм шифрования открыт, противник может просто последовательно перебрать все возможные сообщения длины  $n$ , вычислить для каждого такого сообщения  $m_i$  криптограмму  $d_i = E_{k_1}(m_i)$  и уравнивать ее с  $d$ . То сообщение, для которого  $d_i = d$ , и будет открытым текстом. Если система имеет такие технические возможности, то открытый текст будет найден достаточно быстро. А в худшем случае перебор будет выполнен за время порядка  $2^n(n)$ , где  $T(n)$  - время, необходимое для шифрования сообщения длины  $n$ . Если сообщения имеют длину порядка 1000 бит, то такой перебор невыполним на практике ни на одном из

мощных компьютеров.

Мы рассмотрели лишь один из возможных способов атаки на криптосистему и самый простой алгоритм поиска открытого текста, названный алгоритмом *полного перебора*. Используется также другое название - *метод грубой силы*. Другой самый простой алгоритм поиска открытого текста - угадывание. Этот очевидный алгоритм требует небольших вычислений, но срабатывает с очень малой вероятностью (при больших длинах текстов). В действительности противник может пытаться атаковать криптосистему разными способами, используя разные более тонкие алгоритмы поиска открытого текста. Кроме того, злоумышленник может попробовать возобновить секретный ключ, используя знания (в общем случае несекретные) о математической зависимости между открытым и секретным ключами. Естественно считать криптосистему стойкой, если любой такой алгоритм нуждается практически в неисполнимом объеме вычислений или срабатывает с очень малой вероятностью. (При этом противник может использовать не только детерминированные, но и вероятностные алгоритмы). Это и есть теоретически сложный подход к определению стойкости.

Для его реализации относительно того или другого типа криптографических систем необходимо выполнить такие действия:

- 1) *дать формальное определение системы соответствующего типа;*
- 2) *дать формальное определение стойкости системы;*
- 3) *доказать стойкость конкретной конструкции системы этого типа.*

**Односторонние (однаправленные) функции асимметричных криптографических систем.** Центральным понятием в теории криптографических систем является понятие односторонней функции.

*Односторонней функцией называется эффективно вычисляемая математическая функция, для обращения которой (т.е. для поиска хотя бы одного значения аргумента которой по заданному значению функции) не существует эффективных алгоритмов восстановления.*

Формальное понятие односторонней функции описывается так.

**Четная функция  $f$  называется односторонней,** если:

- 1) существует алгоритм  $A$ , который для любого  $x$  вычисляет  $f(x)$ ;
- 2) для любой полиномиальной вероятности  $P\{f(A(f(x))) = f(x)\} \leq 1/p(n)$ .

Второе условие означает следующее. Любая полиномиальная вероятностная машина Тьюринга  $A$  может по данным  $y$  найти  $x$  из уравнения  $f(x) = y$  лишь с очень малой вероятностью.

Отметим, что требование правдивости опустить нельзя. Поскольку длина входного слова  $f(x)$  машины  $A$  равняется  $t$ , ей может просто не хватить времени на выписывание строки  $x$ .

Существование односторонних функций является необходимым условием стойкости многих криптосистем. Рассмотрим функцию  $f$ , в которой

$f(r) = K_1$ . Она вычисляется с помощью алгоритма  $G$ . Покажем, что когда  $f$  - не односторонняя функция, то криптосистема неустойчива.

Отметим, что существует полиномиальный вероятностный алгоритм  $A$ , вращающий  $f$  с вероятностью, по крайней мере,  $1/p(n)$ , для некоторого полинома  $p$ . Злоумышленник может подать на вход  $K_1$  и получить с указанной вероятностью некоторое значение  $r'$  из прообраза. Далее злоумышленник подает  $r'$  на вход алгоритма  $G$  и получает пару ключей  $(K_1, K'_2)$ .

Хотя  $K'_2$  не обязательно совпадает с  $K_2$ , по определению криптосистемы  $D_{K'_2}(E_{K_1}(m)) = m$  для любого открытого текста  $m$ .

Поскольку  $K'_2$  найдено с вероятностью  $1/p(n)$ , схема нестойкая.

**Функцией-ловушкой** называется односторонняя функция, для которой обратную функцию вычислить просто, если есть некоторая дополнительная информация, и сложно, если такой информации нет.

Криптосистемы с открытым ключом основываются на односторонних функциях-ловушках. При этом открытый ключ определяет конкретную реализацию функции, а секретный ключ подает информацию о ловушке.

Кто-либо, кому известна ловушка, может легко вычислять функцию в обоих направлениях, но тот, у кого такой информации нет, может выполнять вычисление только в одном направлении.

Прямое направление используется для шифрования и верификации цифровых подписей, а обратное - для расшифровывания и выработки цифровой подписи. Во всех криптосистемах с открытым ключом чем большая длина ключа, тем более существенное разногласие между усилиями, необходимыми для вычисления функции в прямом и обратном направлениях (для того, кто не имеет информацию о ловушке).

**Алгоритм шифрования Эль-Гамала.** Криптосистема Эль-Гамала — это криптосистема с открытым ключом, который основывается на свойствах логарифмизации. Система содержит как алгоритм шифрования, так и алгоритм цифровой подписи. Алгоритм Эль-Гамала базируется на том, что свойство дискретного логарифмирования в конечном простом поле является сложной задачей с вычислительной точки зрения, которая нуждается в значительных вычислительных ресурсах. Множественное число параметров системы содержит простое число  $p$  и целое число  $g$ , степень которого по модулю  $p$  порождает множество элементов  $Z_p$ .

У пользователя  $A$  есть секретный ключ  $a$  и открытый ключ  $y$ , где  $y = g^a \pmod{p}$ . Допустим, что пользователь  $B$  желает послать сообщение  $m$  пользователю  $A$ . Сначала  $B$  выбирает случайное число  $k$ , меньше  $p$ . Далее он вычисляет  $y_1 = g^k \pmod{p}$  и  $y_2 = m \oplus (y^k \pmod{p})$ , где  $\oplus$  означает побитовое «ИЛИ».  $B$  посылает  $A$  пары  $(y_1, y_2)$ . После получения зашифрованного текста пользователь  $A$  вычисляет выражение для определения открытого

текста на основе операции по модулю  $p$ :  $m = (y_1^a \bmod p) \oplus y_2$ . Известен вариант этой схемы, когда операция  $\oplus$  заменяется умножением по модулю  $p$ . Это удобнее в том понимании, что в первом случае текст (или значение хеш-функции) необходимо разбивать на блоки той же длины, что и число  $y^k \pmod p$ . Во втором случае в этом нет потребности и можно обрабатывать блоки текста предварительно заданной фиксированной длины (меньше длины числа  $p$ ).

**Алгоритм шифрования Ривеста – Шамира – Адлемана (RSA).** Наиболее известной асимметричной криптосистемой стала система на базе алгоритма RSA, который является первой практической реализацией на основе однонаправленной функции, предложенной Диффи и Хеллманом (рис. 13.13).

Рассмотрим процесс формирования ключа шифрования и расшифровывания с помощью RSA.

**Формирование ключа.** Для формирования ключа получателю необходимо выполнить такие операции:

1. Выбрать два случайных простых числа  $p$  и  $q$ , которые удовлетворяют условию  $|p| \approx |q|$ .

2. Вычислить  $N = pq$ .

3. Вычислить  $\phi(N) = (p-1)(q-1)$ .

4. Выбрать случайное целое число  $e < \phi(N)$ , что удовлетворяет условию  $\gcd(e, \phi(N)) = 1$ , и найти такое целое число  $d$ , в котором  $ed \equiv 1 \pmod{\phi(N)}$ . (Поскольку  $\gcd(e, \phi(N)) = 1$ , это уравнение имеет решение  $d$ , которое можно найти с помощью расширенного алгоритма Евклида.)

5. Использовать пару  $(N, e)$  как параметры открытого ключа, тщательным образом защитить числа  $p$ ,  $q$  и  $\phi(N)$  и запомнить число  $d$  как закрытый ключ.

**Шифрование.** Для того чтобы переслать получателю секретное сообщение, которое имеет длину  $m < N$ , отправитель создает шифротекст  $c$   $c \leftarrow m^e \pmod N$ . С точки зрения отправителя, пространство начальных сообщений представляет собой множество всех положительных чисел, меньше числа  $N$ .

**Расшифровка.** Чтобы расшифровать шифротекст



**Рональд Лин Ривест (Ronald Linn Rivest, 1947),**

криптограф. Наиболее известен изобретением алгоритма RSA вместе с Леонардом Адлеманом и Ади Шамиром. Ривест также изобретатель симметричных алгоритмов шифрования RC2, RC4, RC5 и соавтор RC6. Ему также принадлежит авторство криптографических хеш-функций MD2, MD4 и MD5. В 2006 г. опубликовал свое изобретение системы голосования Three Ballot - инновационной системы, способной различать, учтен ли голос конкретного избирателя при сохранении тайны голосования.



$c$ , получатель выполняет вычисление по формуле:  $m \leftarrow c^d \pmod{N}$ .

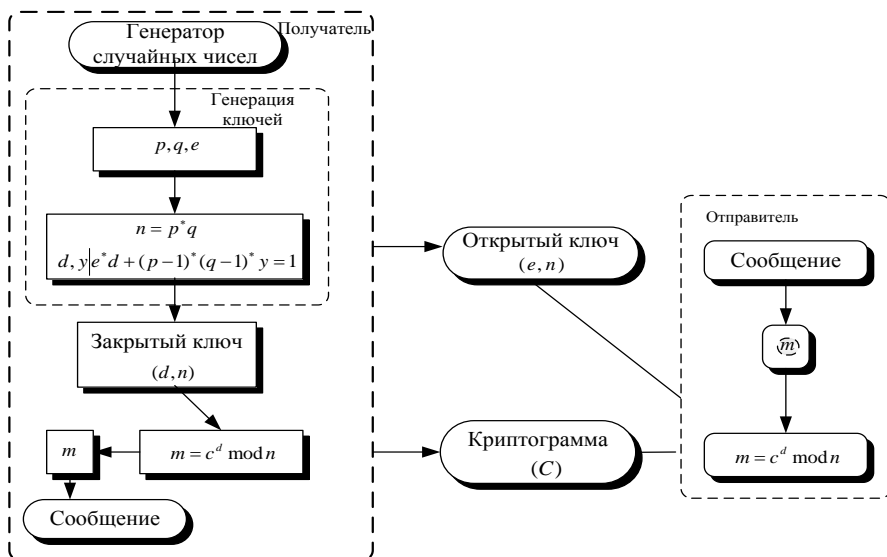


Рис. 13.13. Общая схема криптосистемы RSA

**Криптосистемы, базирующиеся на алгоритме эллиптических кривых.** Алгоритм Эль-Гамала базируется на том, что операция логарифмирования в конечном простом поле является сложным техническим заданием. Однако конечные поля являются не единственными структурами алгебраизма, в которых можно поставить задание относительно вычисления дискретного логарифма. В 1985 г. Коблиц и Миллер независимо друг от друга предложили использовать для построения криптосистем структуры алгебраизма, определенные на множественном числе точек на эллиптических кривых. Рассмотрим случаи определения эллиптических кривых над простыми конечными полями произвольной характеристики и над полями Галуа характеристики 2.

Пусть  $p > 3$  — простое число;  $a, b \in GF(p)$  такие, что  $4a^2 + 27b^2 \neq 0$ . Эллиптической кривой  $E$  над полем  $GF(p)$  (эллиптической кривой в форме Вейерштрасса) называется множество решений  $(x, y)$  уравнения над полем  $GF(p)$  вместе с дополнительной точкой  $\infty$ , которую называют бесконечно отдаленной точкой

$$y^2 = x^3 + ax + b. \tag{13.1}$$

Обозначим количество точек на эллиптической кривой  $E$  через  $\# E$ . Верхний и нижний пределы для  $\# E$  определяются теоремой Хассе:  $p + 1 - 2\sqrt{p} \leq \# E \leq p + 1 + 2\sqrt{p}$ .

Зададим бинарную операцию на  $E$  (в аддитивной записи) такими правилами:

- 1)  $\infty + \infty = \infty$ ,
- 2)  $\forall (x, y) \in E, (x, y) + \infty = (x, y)$ ,
- 3)  $\forall (x, y) \in E, (x, y) + (x, -y) = \infty$ ,

- 4)  $\forall (x_1, y_1) \in E, (x_2, y_2) \in E, x_1 \neq x_2, (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_3, y_3)$ , где  $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$ ,  $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2, y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1$  и  $\lambda = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ ,
- 5)  $\forall (x_1, y_1) \in E, y_1 \neq 0, (x_1, y_1) + (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ,  
 где  $x_2 = \lambda^2 - 2x_1, y_2 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1$  и  $\lambda = (3x_1^2 + a)/2y_1$ .

Множественное число точек эллиптической кривой  $E$  из заданной таким образом операции образует абелеву группу (рис. 13.14).

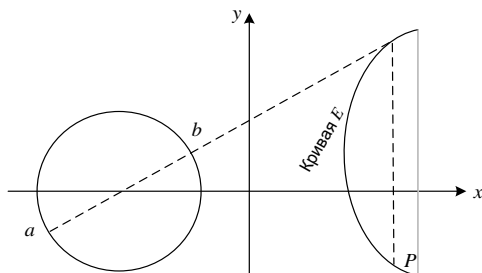


Рис. 13.14. Эллиптическая кривая

Если  $\#E = p + 1$ , то кривая  $E$  называется *суперсингулярной*. Эллиптическая кривая, которая не является суперсингулярной кривой  $E$  над полем  $GF(2^m)$  характеристики 2, задается следующим способом. Пусть  $m > 3$  - целое число. Пусть  $a, b \in GF(2^m), b \neq 0$ .

Эллиптической кривой  $E$  над полем  $GF(2^m)$  называется множественное число решений  $(x, y)$  уравнения

$$y^2 + xy = x^3 + ax + b \quad (13.2)$$

над полем  $GF(2^m)$  вместе с бесконечно отдаленной точкой. Количество точек на кривой  $E$  также определяется теоремой Хассе  $q + 1 - 2\sqrt{q} \leq \#E \leq q + 1 + 2\sqrt{q}$ ,

где  $q = 2^m$ . Более того,  $\#E$  парное.

Операция сложения с  $E$  в этом случае задается такими правилами:

- 1)  $\infty + \infty = \infty$ ;
- 2)  $\forall (x, y) \in E, (x, y) + \infty = (x, y)$ ;
- 3)  $\forall (x, y) \in E, (x, y) + (x, x + y) = \infty$ ;
- 4)  $\forall (x_1, y_1) \in E, (x_2, y_2) \in E, x_1 \neq x_2, (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_3, y_3)$ , где  $x_3 = \lambda^2 + \lambda + x_1 + x_2 + a$ ,  $y_3 = \lambda(x_1 + x_3) + x_3 + y_1$  и  $\lambda = (y_1 + y_2)/(x_1 + x_2)$ ;
- 5)  $\forall (x_1, y_1) \in E, x_1 \neq 0, (x_1, y_1) + (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ , где  $x_2 = \lambda^2 + \lambda + a$ ,  $y_2 = x_1^2 + (\lambda + 1)x_3$  и  $\lambda = x_1 + y_1/x_1$ .

В этом случае множество точек эллиптической кривой  $E$  из заданной таким способом операции также образует абелеву группу.

Пользуясь операцией добавления точек на кривой, можно естественно определить



**Ади Шамир**  
(Adi Shamir, 1952),

израильский криптограф. Один из изобретателей (вместе с Ронам Ривестом и Леонардом Адлеманом) алгоритма RSA. Является одним из изобретателей схемы аутентификации Feige-Fiat-Shamir. Сделал существенный вклад в развитие криптографии и информатики.

операцию умножения точки  $P \in E$  на произвольное целое число  $n$ :  $nP = P + P + \dots + P$ , где операция добавления выполняется  $n$  раз.

Теперь построим одностороннюю функцию, на основе которой можно будет создать криптографическую систему.

Пусть  $E$  - эллиптическая кривая,  $P \in E$  - точка на этой кривой. Выберем целое число  $n < \#E$ . Тогда как прямую функцию выберем произведение  $nP$ . Для его вычисления по оптимальному алгоритму понадобится не более чем  $2 \log_2 n$  операций добавления. Обратную задачу сформулируем таким образом: по заданной эллиптической кривой  $E$ , точке  $P \in E$  и произведению  $nP$  найти  $n$ .

Теперь мы можем описать *криптографический протокол*, аналогичный известному протоколу Диффи - Хеллмана. Для установления защищенной связи двое пользователей  $A$  и  $B$  совместно выбирают эллиптическую кривую  $E$  и точку  $P$  на ней. Далее каждый из пользователей выбирает свое секретное целое число - соответственно  $a$  и  $b$ . Пользователь  $A$  вычисляет произведение  $aP$ , а пользователь  $B$  - произведение  $bP$ . Далее они обмениваются вычисленными значениями. При этом параметры самой кривой, координаты точки на ней и значения произведений являются открытыми и могут передаваться по незащищенным каналам связи. Потом пользователь  $A$  умножает полученное значение на  $a$ , а пользователь  $B$  - на  $b$ . Согласно свойствам операции умножения на число выполняется равенство  $a \cdot bP = b \cdot aP$ . Таким образом, оба пользователя получают общее секретное значение (координаты точки  $abP$ ), которое смогут использовать для получения ключа шифрования. Заметим, что злоумышленнику для возобновления ключа придется решить сложную с вычислительной точки зрения задачу определения  $a$  и  $b$  по известным  $E$ ,  $P$ ,  $aP$  и  $bP$ .

### 13.4. Электронная цифровая подпись

Использование электронной цифровой подписи (ЭЦП) - это процесс, который обеспечивает целостность сообщений (документов), переданных незащищенными информационно-коммуникационными каналами общего пользования в системах обработки информации разного назначения, с гарантированной идентификацией ее автора (лица, которое подписало документ).

*Цифровая подпись (цифровая сигнатура)* - циф-

ровая последовательность данных, которая образуется в результате асимметричного криптографического преобразования начальной информации (открытого текста) и дает возможность получателю проверить источник и целостность данных, а также осуществить защиту информации от фальсификации или подделки.

*Практическая реализация электронной цифровой подписи* базируется на использовании однонаправленной функции, которая шифруется секретным ключом отправителя с целью расшифровывания лишь части сообщения, - его дайджеста (ключ-идентификатор), который защищает информацию от несанкционированного изменения. Процедуру эффективной генерации ЭЦП иллюстрирует рис. 13.15.



Рис. 13.15. Схема генерации ЭЦП

Проверку ЭЦП можно осуществить следующим методом (рис. 13.16):

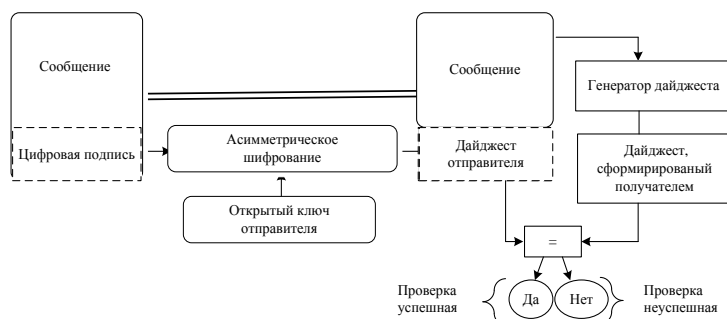


Рис. 13.16. Проверка сгенерированной ЭЦП

Основные угрозы при использовании цифровой подписи (рис. 13.17):

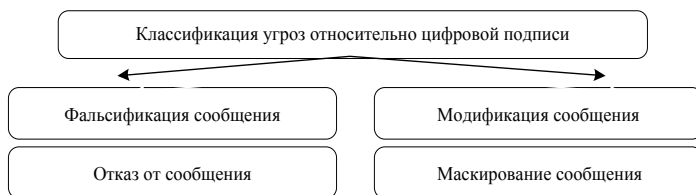


Рис. 13.17. Угрозы при использовании цифровой подписи

**Цифровые подписи, основанные на асимметричных криптосистемах.** Для формирования системы ЭЦП чаще всего используют криптографическую систему Ривеста - Шамира - Адлемана.

**Пример.** Формирование системы ЭЦП на базе алгоритма Ривеста - Шамира - Адлемана.

Пользователь *A* производит цифровую подпись, предназначенную для пользователя *B* сообщения *M*, с помощью преобразования  $SIG(M) = E_{e_B, n_B}(E_{d_A, n_A}(M))$ .

При этом он использует свое секретное преобразование  $E_{e_B, n_B}$  и открытое преобразование пользователя *B*. Далее он передает пользователю *B* пары  $\langle M, SIG(M) \rangle$ .

Пользователь *B* может верифицировать это подписание сообщения сначала с помощью своего секретного преобразования  $E_{d_B, n_B}$  с целью задержки

$$E_{d_A, n_A}(M) = E_{d_B, n_B}(SIG(M)) = E_{d_B, n_B}(E_{e_B, n_B}(E_{d_A, n_A}(M))), \quad (13.3)$$

а затем с помощью открытого преобразования  $E_{e_A, n_A}$  пользователя *A* для получения сообщения *M*

$$M = E_{e_A, n_A}(E_{d_A, n_A}(M)). \quad (13.4)$$

Затем пользователь *B* сравнивает полученное сообщение *M* с тем, которое он получил в результате проверки ЭЦП, и принимает решение относительно подлинности или ложности полученного сообщения.

В рассмотренном примере проверить подлинность ЭЦП может только пользователь *B*. А если нужно обеспечить возможность верификации ЭЦП произвольным пользователем (например, при циркулярной рассылке документа), то алгоритм обработки ЭЦП упрощается, и подпись выполняется по формуле  $SIG(M) = E_{d_A, n_A}(M)$ .

В таком случае любой пользователь осуществляет верификацию с использованием открытого преобразования отправителя (пользователя *A*):

$$M = E_{e_A, n_A}(SIG(M)) = E_{e_A, n_A}(E_{d_A, n_A}(M)). \quad (13.5)$$

Вместо криптосистемы *RSA* для подписи сообщений можно использовать и любую другую асимметричную криптосистему.

Недостатком такого подхода является то, что производительность асимметричной криптосистемы может оказаться недостаточной. Возможным решением является приложение специальной эффективной вычислительной функции, названной *хеш-функцией*, или *функцией хеширования*. Входом этой функции является сообщение, а выходом — слово фиксированной длины, намного более малой, чем длина исходного сообщения.

ЭЦП производится по той же схеме, но при этом используется не именно сообщение, а значение хеш-функции от него. Это существенно убыстряет генерирование и верификацию ЭЦП.

Иногда желательно, чтобы ЭЦП была разной, даже если дважды подписывается то же сообщение. Для этого в процесс генерирования ЭЦП необходимо внести элемент «случайности». Соответствующий способ предложил Эль-Гамаль аналогично тому, как это делается в системе шифрования, которая носит его имя.

**Пример.** Формирование системы ЭЦП на базе алгоритма Эль-Гамалья.

Выбирается большое простое число *p* и целое число *g*, что является первобыт-

ным элементом в  $Z_p$ . Эти числа публикуются. Потом выбирается секретное число  $x$  и вычисляется открытый ключ для проверки подписи  $y = g^x \pmod{p}$ .

Дальше для подписи сообщения  $M$  вычисляется его хеш-функция  $m = h(M)$ . Выбирается случайное целое  $k$ , где  $1 < k < (p-1)$ , взаимно простое из  $p-1$  и вычисляется  $r = g^k \pmod{p}$ . После этого с помощью расширенного алгоритма Эвклида решается относительно  $s$  уравнение  $m = xr + ks \pmod{p-1}$ . Подпись представляет собой пару чисел  $(r, s)$ . После генерирования подписи значение  $k$  уничтожается.

Получатель подписанного сообщения вычисляет хэш-функцию сообщения  $m = h(M)$  и проверяет выполнение равенства  $y^r r^s \pmod{p} = g^m$ . Корректность этого равенства очевидна

$$y^r r^s = g^{x \cdot r} g^{k \cdot s} = g^{x \cdot r + k \cdot s} = g^m \pmod{p}. \quad (13.6)$$

Еще одну аналогичную схему предложил Шнорр. Как обычно,  $p$  - большое простое число;  $q$  - простой делитель  $(p-1)$ ;  $g$  - элемент порядка  $q$  в  $Z_p$ ;  $\kappa$  - случайное число;  $x$  и  $y = g^x \pmod{p}$  - соответственно секретный и открытый ключ. Уравнения генерирования подписи приобретают вид

$$r = g^{\kappa} \pmod{p}; \quad e = h(m, r); \quad s = \kappa + x e \pmod{q}. \quad (13.7)$$

Подписью является пара  $(r, s)$ . На приемном конце вычисляется значение хеш-функции  $e = h(m, r)$  и проверяется выполнение равенства  $r = g^s y^{-e} \pmod{p}$ , при этом действия по показателю степени генерируются по модулю  $q$ .

**Стандарт цифровой подписи (алгоритм DSS).** В США принят стандарт на генерирование и верификацию ЭЦП, который получил название DSS (Digital Signature Standard). В соответствии с этим стандартом ЭЦП производится по такой схеме:

1. Предварительный этап. Выбираются числа  $p$ ,  $q$  и  $g$ , где  $p$  - простое число длины  $l$ , где  $l$  кратное 64 и  $512 \leq l \leq 1024$ ;  $q$  - простой делитель числа  $p-1$  длиной 160 бит;  $g$  - элемент порядка  $q$  в  $Z_p$ . Эти три числа являются открытыми данными. Выбирается секретный ключ  $x$ ,  $1 \leq x \leq q$  и вычисляется открытый ключ для проверки подписи  $y = g^x \pmod{p}$ .

2. Генерирование ЭЦП. Вычисляется значение хеш-функции от сообщения  $h(m)$ . При этом используется алгоритм безопасного хеширования SHA (Secure Hashing Algorithm), на который ссылается стандарт. Значение хеш-функции  $h(m)$  имеет длину 160 бит. Дальше тот, кто ставит подпись, выбирает случайное значение  $k$ ,  $1 \leq k < q$ , вычисляет значение  $k^{-1} \pmod{q}$  и пары значений:  $r = g^k \pmod{p} \pmod{q}$ ;  $s = k^{-1}(h(m) + xr) \pmod{q}$ .

Эта пара значений  $(r, s)$  и является электронной подписью под сообщением  $M$ . После генерирования цифровой подписи значение  $k$  уничтожается.

3. Верификация ЭЦП. Пусть было принято сообщение  $m_1$ . Тогда урав-

нение проверки выглядит таким образом:

$$r \equiv g^{h(m_1) \cdot s^{-1}} \cdot y^{r \cdot s^{-1}} \pmod{p} \pmod{q}. \quad (13.8)$$

Действительно:

$$\begin{aligned} g^{h(m) \cdot s^{-1}} \cdot y^{r \cdot s^{-1}} \pmod{p} \pmod{q} &= g^{h(m) \cdot s^{-1}} \cdot g^{x \cdot r \cdot s^{-1}} \pmod{p} \pmod{q} = \\ &= g^{s^{-1}(h(m)+xr)} \pmod{p} \pmod{q} = g^{(k^{-1}(h(m)+x \cdot r)^{-1}(h(m)+xr)} \pmod{p} \pmod{q} = \\ &= g^{(k^{-1})^{-1}(h(m)+xr)^{-1}(h(m)+xr)} \pmod{p} \pmod{q} = g^k \pmod{p} \pmod{q} \equiv r. \end{aligned}$$

**Цифровые подписи, основанные на симметричных криптосистемах.**

Двухключевая криптография возникла, потому что ряд новых криптографических протоколов типа протокола цифровой подписи не удалось эффективно реализовать на базе традиционных криптографических алгоритмов. Однако это возможно. И первыми, кто обратил на это внимание, были родоначальники криптографии с открытым ключом У. Диффи и М. Хеллман, которые предложили подход, дающий возможность выполнять процедуру цифровой подписи одного бита с помощью блочного шифра. Прежде чем изложить эту идею, сделаем несколько замечаний о сущности и реализации цифровой подписи.

Практически все современные алгоритмы ЭЦП базируются на так называемых сложных математических задачах типа факторизации больших чисел или логарифмирования в дискретных полях. Однако невозможность эффективного решения этих задач численными методами математики не доказана, потому весьма возможно, что в ближайшем будущем эти задачи будут решены, а соответствующие схемы сломаны.

**Пример.** Алгоритм ЭЦП на основе классического блочного шифра Диффи и Хеллмана.

Допустим, в нашем распоряжении есть алгоритм шифрования, который оперирует блоками данных  $X$  размера  $n$ , и ключ, который используется, размером  $nK : |X| = n, |K| = nK$ . Структура ключевой информации в схеме такая: секретный ключ подписи  $k_s$  выбирается как произвольная (случайная) пара ключей  $k_0, k_1$  используемого блочного шифра.

Таким образом, размер ключа подписи равняется удвоенному размеру ключа используемого блочного шифра

$$|K_s| = 2|K| = 2n_k. \quad (13.9)$$

Ключ проверки является результатом шифрования двух блоков текста  $X_0$  и  $X_1$  с ключами  $k_0$  и  $k_1 : k_v = (C_0, C_1) = (E_{k_0}(X_0), E_{k_1}(X_1))$ , где параметром схемы являются данные, несекретные и известные стороне, которая проверяет подпись. Таким образом, размер ключа проверки подписи равняется удвоенному размеру блока использованного блочного шифра  $|k_v| = 2|X| = 2n$ . Алгоритм Sig генерирования ЭЦП для бита  $t (t \in \{0,1\})$  заключается просто в выборе соответствующей половины из пары, которая составляет секретный ключ подписи.

Алгоритм Ver проверки подписи базируется на проверке уравнения  $E_{k_t}(X_t) = C_t$ , справедливого при нашем  $t$ . Получателю известны все используемые при этом величины. Таким образом, функция проверки подписи

$$\text{Ver}(t, s, k_V) = \begin{cases} 1, & E_s(X_t) = C_t, \\ 0, & E_s(X_t) \neq C_t. \end{cases} \quad (13.10)$$

Покажем, что эта схема работоспособна, для чего проверим выполнение необходимых свойств схемы цифровой подписи.

1. *Невозможность подписать бит  $t$ , если неизвестен ключ подписи.* Действительно, для выполнения этого злоумышленнику пришлось бы решить уравнение  $E_s(X_t) = C_t$  относительно  $s$ , что эквивалентно определению ключа для известных блоков шифрованного и соответствующего ему открытого текста, что вычислительно невозможно в результате использования стойкого шифра.

2. *Невозможность подобрать другое значение бита  $t$ , что подходило бы под заданную подпись.* Возможных значений бита всего два, а вероятности выполнения двух приведенных дальше условий одновременно очень малые, учитывая использование криптостойкого алгоритма  $E_s(X_0) = C_0$ ,  $E_s(X_1) = C_1$ .

3. *Невозможность подобрать другое значение бита  $t$ , что подходило бы под заданную подпись.* Возможных значений бита всего два, а вероятности выполнения двух приведенных дальше условий одновременно очень малые, учитывая использование криптостойкого алгоритма  $E_s(X_0) = C_0$ ,  $E_s(X_1) = C_1$ .

Предложенная Диффи и Хеллманом схема ЭЦП на основе классического блочного шифра имеет такую же стойкость, как и блочный шифр, и при этом достаточно простая. Однако она имеет два существенных недостатка.

Первый недостаток заключается в том, что эта схема дает возможность подписать лишь один бит информации. В блоке большего размера придется отдельно подписывать каждый бит, потому даже с учетом хеширования сообщения все компоненты подписи - секретный ключ, проверяющая комбинация и подпись - выходят достаточно большими по размеру и более чем на два порядка превышают размер блока, который подписывается. Предположим, что в схеме используется криптографический алгоритм  $E_k$  с размером блока и ключа соответственно  $n$  и  $n_k$ . Предполагаем также, что используется функция хеширования с размером исходного блока  $n_H$ . Тогда размеры основных рабочих блоков таковы: *размер ключа подписи*  $n_{ks} = 2n_H n_k$ , *размер ключа проверки подписи*  $n_c = 2n_H n$ , *размер подписи*  $n_s = n_H n_k$ .

Второй недостаток этой схемы заключается в том, что пары ключей генерирования подписи и проверки подписи можно использовать только один раз. Действительно, выполнение процедуры подписи бита сообщения приводит к раскрытию половины секретного ключа, после чего он уже не является полностью секретным, а следовательно, его нельзя использовать повторно. Поэтому для каждого сообщения, которое подписывается, необходим свой комплект ключей подписи и проверки. Это практически делает невозможным использование рассмотренной схемы Диффи - Хеллмана в предложенном варианте в реальных системах ЭЦП.

Березин и Дорошкевич предложили модификацию схемы Диффи - Хеллмана, что фактически устраняет ее недостатки.

**Пример.** Алгоритм ЭЦП на основе классического блочного шифра Березина и





**Леонард Макс Адлеман (Leonard Max Adleman, 1945),**

профессор информатики и молекулярной биологии в университете Южной Калифорнии. Известен изобретением (1977) вместе с Рональдом Ривестом и Ади Шамиром криптосистемы RSA (Rivest – Shamir – Adleman) и исследованием ДНК-вычислений. В 1994 г. опубликовал статью, посвященную молекулярным вычислениям решения комбинаторных задач и описания экспериментального использования ДНК как вычислительной системы. Адлеман является также одним из изобретателей оригинального теста Адлемана – Помаранча – Румели (Adleman – Pomerance – Rumely) на простоту чисел.

*Дорошкевича.*

Центральным в этом подходе является алгоритм «одностороннего криптографического прокручивания», которое в известной мере может рассматриваться как аналог операции возведения в степень. Предположим, что в нашем распоряжении есть криптографический алгоритм  $E_k$  с размером блока данных и ключа соответственно  $n$  и  $n_k$  бит, причем  $n \leq n_k$ . Пусть у нас также есть некоторая функция отображения битовых блоков данных в  $n$ -бит и  $Y = P_{n \rightarrow n_k}(X)$ ,  $|X| = n$ ,  $|Y| = n_k$ . Определим рекурсивную функцию  $R_k$  «одностороннего прокручивания» блока данных  $T$  размером  $n$  бит  $k$  раз ( $k \geq 0$ ) с помощью такой

$$\text{формулы: } R_k(T) = \begin{cases} T, & k = 0, \\ E_{P_{n \rightarrow n_k}(R_{k-1}(T))}(X), & k > 0, \end{cases}$$

где  $X$  - произвольный несекретный  $n$ -битовый блок данных, являющихся параметром процедуры прокручивания.

Идея функции одностороннего прокручивания чрезвычайно проста: достаточно всего лишь нужное количество раз  $k$  выполнить такие действия: расширить  $n$ -битовый блок данных  $T$  к размеру  $n_k$  ключа использованного алгоритма шифрования; на полученном расширенном блоке как на ключе зашифровать блок данных  $X$ ; результат шифрования занести на место исходного блока данных  $T$ . Операция  $R_k(T)$  имеет важные свойства:

1. Аддитивность и коммутативность по количеству прокручиваний:

$$R_{k+k'}(T) = R_{k'}[R_k(T)] = R_k[R_{k'}(T)]. \quad (13.11)$$

2. Односторонность или необратимость прокручивания: если известно только некоторое значение функции  $R_k(T)$ , то численными методами невозможно найти значение  $R_{k'}(T)$  для любого  $k' < k$ . Если бы это было возможно, то в нашем распоряжении был бы способ определить ключ шифрования по известным входным и исходным блокам алгоритма  $E_k$ , что противоречит предположению о стойкости шифра.

Теперь покажем, как отмеченную операцию можно использовать для подписи блока  $T$ , состоящего из  $n_T$  битов.

Секретный ключ подписи  $k_s$  выбирается как произвольная пара блоков  $k_0, k_1$ , которые имеют размер блока

данных используемого блочного шифра, т.е. размер ключа генерирования подписи равняется удвоенному размеру блока данных использованного блочного шифра  $|k_s| = 2n$ .

Ключ проверки подписи вычисляется как пара блоков, которые имеют размер блоков данных использованного алгоритма по таким формулам

$$k_C = (C_0, C_1) = [R_{2^{nT}-1}(K_0), R_{2^{nT}-1}(K_1)]. \quad (13.12)$$

В этих вычислениях также используются несекретные блоки данных  $X_0$  и  $X_1$ , которые являются параметрами функции «одностороннего прокручивания», они непременно должны быть разными. Таким образом, размер ключа проверки подписи также равняется удвоенному размеру блока данных использованного блочного шифра  $|k_s| = 2n$ .

Вычисление и проверку ЭЦП выполняют таким образом.

Алгоритм SIGNT получения ЭЦП для  $n$ -битового блока  $T$  заключается в исполнении «одностороннего прокручивания» обеих половин ключа подписи соответственно  $T$  и  $2^{nT} - 1 - T$  раз

$$s = \text{Sig}_{nT}(T) = (s_0, s_1) = R_T(k_0), R_{2^{nT}-1-T}(k_1). \quad (13.13)$$

Алгоритм VERNT проверки подписи состоит из проверки истинности соотношений:  $R_{2^{nT}-1-T}(s_0) = C_0$ ,  $R_T(s_1) = C_1$ , которые должны выполняться для настоящего блока данных  $T$ .

$$\begin{aligned} R_{2^{nT}-1-T}(s_0) &= R_{2^{nT}-1-T}(R_T(k_0)) = R_{2^{nT}-1-T+T}(k_0) = R_{2^{nT}-1}(k_0) = C_0, \\ R_T(s_1) &= R_T(R_{2^{nT}-1-T}(k_1)) = R_{T+2^{nT}-1-T}(k_1) = R_{2^{nT}-1}(k_1) = C_1. \end{aligned}$$

Таким образом, функция проверки подписи приобретает вид

$$\text{Ver}(T, s, k_C) = \begin{cases} 1, & R_{2^{nT}-1-T}(s_0) = C_0 \mid R_T(s_1) = C_1, \\ 0, & R_{2^{nT}-1-T}(s_0) \neq C_0 \mid R_T(s_1) \neq C_1. \end{cases} \quad (13.14)$$

Покажем, что для этой схемы выполняются необходимые условия работоспособности схемы подписи. Допустимо, что в распоряжении злоумышленника есть  $n$ -битовый блок  $T$ , его подпись  $s = (s_0, s_1)$  и ключ проверки  $k_C = (C_0, C_1)$ . Пользуясь этой информацией, злоумышленник пытается найти правильную подпись  $s' = (s'_0, s'_1)$  для другого  $n$ -битового блока  $T'$ . Для этого ему нужно решить такие уравнения относительно  $s'_0$  и  $s'_1$ :  $R_{2^{nT}-1-T}(s'_0) = C_0$ ,  $R_T(s'_1) = C_1$ . В распоряжении злоумышленника есть блок данных  $T$  с подписью  $s = (s_0, s_1)$ , что дает ему возможность вычислить одно из значений  $s'_0$  и  $s'_1$ , даже не имея ключа подписи

- 1) если  $T < T'$ , то  $s'_0 = R_{T'}(k_0) = RT' - T(R_T(k_0)) = RT' - T(s_0)$ ;
- 2) если  $T > T'$ , то  $s'_1 = R_{2^{nT}-1-T'}(k_1) = R_{T-T'}(R_{2^{nT}-1-T}(k_1)) = R_{T-T'}(s_1)$ .

Однако для нахождения второй половины подписи  $s'_0$  и  $s'_1$  соответственно в случаях 1 и 2 ему необходимо выполнить прокручивание в противоположном на-

правлении, т.е. найти  $R_k(X)$ , имея только значение для большего  $k$ , что численными методами невозможно. Таким образом, злоумышленник не может подработать подпись под сообщением, если не имеет в своем распоряжении секретный ключ подписи. Второе требование также выполняется: вероятность подобрать блок данных  $T'$ , отличающийся от блока  $T$ , имея такую же цифровую подпись, настолько мала, что ею можно пренебречь. Действительно, пусть цифровая подпись блоков  $T$  и  $T'$  одна и та же. Тогда подписи обоих блоков таковы

$$s = S_{nT}(T) = (s_0, s_1) = [R_T(k_0), R_{2^{nT}-1-T}(k_1)],$$

$$s' = S_{nT}(T') = (s'_0, s'_1) = [R_{T'}(k_0), R_{2^{nT}-1-T'}(k_1)],$$

а  $s = s'$ , следовательно, имеем

$$R_T(k_0) = R_{T'}(k_0) \text{ и } R_{2^{nT}-1-T}(k_1) = R_{2^{nT}-1-T'}(k_1). \quad (13.15)$$

Возьмем для определенности  $T \leq T'$ , тогда выполняются такие равенства:

$$RT' - T(k_0^*) = k_0^*, \quad RT' - T(k_1^*) = k_1^*, \quad \text{где } k_0^* = R_T(k_0).$$

Последнее условие значит, что одинаковое прокручивание двух разных блоков данных оставляет их значения неизменными. Вероятность такого события чрезвычайно мала, и ее можно не принимать во внимание.

Таким образом только что рассмотренная модификация схемы Диффи—Хеллмана делает возможной подпись не одного бита, а целой битовой группы. Это дает возможность в несколько раз уменьшить размер подписи и ключей подписи/проверки отмеченной схемы.

Однако нужно понимать, что увеличение размера подписываемых битовых групп приводит к экспоненциальному увеличению объема необходимых вычислений, а следовательно, начиная с некоторого значения, а работа схемы становится неэффективной. Предел «умного размера» подписываемой группы составляет около 10 бит, а блоки большего размера одинаково необходимо подписывать «вразнобой».

**Размер ключей и подписи.** Найдем размеры ключей и подписи, а также объем необходимых для реализации схемы вычислений.

Пусть размер хеш-блока и блока используемого шифра одинаковые и равняются  $n$ , а размер подписываемых битовых групп *равняется*  $nT$ . Предположим также, что когда последняя группа содержит меньшее количество битов, то обрабатывается она так же, как полная  $n$ -битовая группа. Тогда размеры ключей подписи/проверки и самой подписи совпадают:

$$|K_S| = |K_C| = |s| = 2n \lceil n/n_T \rceil \approx 2n^2/n_T \text{ бит,}$$

где  $\lceil x \rceil$  - округление числа  $x$  к ближайшему целому в направлении роста.

Число операций шифрования  $E_K(X)$ , необходимое для реализации процедур схемы, определяется приведенными дальше соотношениями:

при генерировании информации о ключе  $W_K = 2(2^{nT} - 1) \lceil n/n_T \rceil \approx 2^{nT+1} n/n_T$  ;

при генерировании и проверке подписи  $W_S = W_C = (2^{nT} - 1) \lceil n/n_T \rceil \approx 2^{nT} n/n_T$  .

Размер ключа подписи и проверки подписи можно дополнительно уменьшить такими приемами.

1. Нет необходимости сохранять ключи подписи отдельных битовых групп,

*их можно динамически производить в нужный момент времени с помощью генератора криптостойкой гаммы. Ключом подписи в этом случае будет обычный ключ, использованный в схеме подписи блочного шифра.*

2. Аналогично нет необходимости хранить массив ключей проверки подписи отдельных битовых групп блока, достаточно хранить значение хеш-функции этого массива. При этом алгоритм генерирования ключа подписи и алгоритм проверки подписи будут дополнены еще одним шагом - вычислением проверяющих комбинаций отдельных битовых групп.

Таким образом, проблема размера ключей и подписи решена, однако второго недостатка схемы - одноразовости ключей - не устранено, поскольку это невозможно в рамках подхода Диффи – Хеллмана.

Для практического использования такой схемы, рассчитанной на подпись  $N$  сообщений, отправителю необходимо хранить  $N$  ключей подписи, а получателю -  $N$  ключей проверки, что достаточно неудобно.

Эту проблему можно решить так же, как была решена проблема ключей для множественных битовых групп - генерацией ключей подписи для всех  $N$  сообщений из одного мастерского ключа и свертыванием всех проверяющих комбинаций в одну контрольную комбинацию с помощью алгоритма вычисления хеш-функции. Такой подход решил бы проблему размера сохраненных ключей, но привел бы к необходимости вместе с подписью каждого сообщения высылать отсутствующие  $N-1$  проверяющих комбинаций, необходимых для вычисления хеш-функции массива всех контрольных комбинаций отдельных сообщений. Понятно, что такой вариант не имеет преимуществ по сравнению с выходным.

Авторы предложили механизм, который дает возможность значительно снизить остроту проблемы. Его основная идея — вычислять контрольную комбинацию (ключ проверки подписи) не как хеш-функцию от линейного массива проверяющих комбинаций всех сообщений, а попарно — с помощью бинарного дерева. На каждом уровне проверяющая комбинация вычисляется как хеш-функция от конкатенации двух проверяющих комбинаций младшего уровня. Чем высший уровень комбинации, тем больше отдельных ключей проверки «учитывается» в ней.

Допустим, что наша схема рассчитана на  $2^L$  сообщений. Обозначим через  $C_i^{(l)}$   $i$ -ю комбинацию  $l$ -го уровня.

Если нумерацию комбинаций и уровней начинать с нуля, то выполняется условие  $0 \leq i < 2^{L-l}$ , а  $i$ -я проверяющая комбинация  $l$ -го уровня рассчитана на  $2^l$  сообщений с номерами от  $i \cdot 2^l$  к  $(i+1) \cdot 2^l - 1$  включительно. Комбинаций нижнего, нулевого, уровня будет  $2^L$ , а последнего, верхнего,  $L$ -го уровня - одна, которая и является контрольной комбинацией всех сообщений, на которые рассчитана схема.

На каждом уровне, начиная с первого, проверяющие комбинации рассчитываются по формуле

$$C_i^{(l+1)} = H(C_{2i}^{(l)} \parallel C_{2i+1}^{(l)}),$$

где через  $A \parallel B$  обозначен результат конкатенации двух блоков данных  $A$  и  $B$ , а через  $H(X)$  - процедура вычисления хеш-функции блока данных  $X$ .

При использовании отмеченного подхода вместе с подписью сообщения необходимо передать не как в исходном варианте, а только  $\log_2 N$  контрольных комби-



**Витфилд Диффи**  
(Whitfield Diffie,  
1944),

получил степень бакалавра по математике в Массачусетском технологическом институте (1965). В 1976 году вместе с еще одним известным специалистом в области криптографии Мартином Хеллманом опубликовал статью "Новые направления в криптографии", в которой предлагался радикально новый метод работы с распределенными ключами, который решал одну из фундаментальных проблем криптографии - так называемый метод обмена ключей Диффи - Хеллмана.

наций. Передаваться должны комбинации, которые отвечают смежным отраслям дерева на пути от конечной вершины, которая отвечает номеру использованной подписи, к корню.

**Функции хеширования.** Функция хеширования может использоваться для выявления модификации сообщения. Т.е. она может служить криптографической контрольной суммой (ее называют также *кодом выявления изменений*, или *кодом аутентификации сообщения*).

Хеш-функция  $H$  (функция хеширования; функция расстановки) - функция, которая используется для математического преобразования сообщения переменной длины  $M$  в блок данных фиксированной длины  $H(M)$  (значение функции) и однозначно отображает произвольно выбранный открытый текст (аргумент функции).

*Значение хеш-функции* - множество значений целых чисел, которые принадлежат заданному диапазону и образованы в результате вычисления хеш-функции (рис. 13.18). Теоретически возможно, что два разных сообщения могут быть сжаты в ту же свертку (так называемая ситуация «столкновения»).

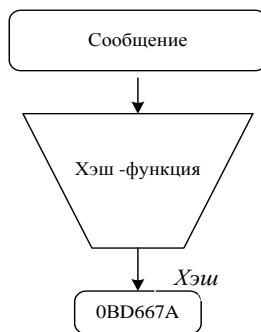


Рис. 13.18. Схематическое изображение хеш-функции

Поэтому для обеспечения стойкости функции хеширования необходимо предусмотреть способ избежать столкновения. Полностью столкновений избежать нельзя, поскольку в общем случае количество возможных сообщений превышает количество возможных исходных значений функции хеширования. Однако вероятность столкновения должна быть низкой.

Для того чтобы функция хеширования могла быть должным образом использована в процессе аутентифи-

кации, она должна иметь такие свойства:

- 1) хеш-функцию  $H$  можно применить к аргументу любого размера;
- 2) исходное значение  $H$  является фиксированным;
- 3) значение  $H(x)$  достаточно просто вычислить для любого  $x$ . Скорость вычисления хеш-функции должна быть такой, чтобы скорость генерирования и проверки ЭЦП при использовании хеш-функции была значительно больше, чем при использовании самого сообщения;
- 4) для любого  $y$  с вычислительной точки зрения невозможно найти  $x$ , где  $H(x) = y$ ;
- 5) для любого фиксированного  $x$  с вычислительной точки зрения невозможно найти  $x' \neq x$ , где  $H(x') = H(x)$ .

Свойство 5 гарантирует, что нельзя найти другое сообщение, которое дает ту же свертку. Это предотвращает подделку и также позволяет использовать  $H$  в качестве криптографической контрольной суммы для проверки целостности.

Свойство 4 эквивалентно потому, что  $H$  является односторонней функцией. Стойкость систем с открытыми ключами зависит от того, что открытое криптопреобразование является односторонней функцией-ловушкой. Напротив, функции хеширования являются односторонними функциями, которые не имеют ловушки.

*Инфраструктура открытых ключей (Public Key Infrastructure — PKI)* — это интегрированный комплекс методов и средств (набор служб) для обеспечения внедрения и эксплуатации криптографических систем с открытыми ключами (рис. 13.19).

Технология PKI заключается в использовании двух математически связанных цифровых ключей, которые имеют такие свойства:

один ключ может использоваться для шифрования сообщения, которое может быть расшифровано только с помощью второго ключа;

если известен один ключ, с помощью вычислений невозможно определить второй. Один из ключей открыт для всех, а второй имеет частный характер и сохраняется в защищенном месте. Ключи могут использоваться для аутентификации или шифрования цифровой подписи электронных данных.

PKI служит не только для создания цифровых сертификатов, но и для хранения огромного количества сертификатов и ключей, обеспечения резервирования и возобновления ключей, взаимной сертификации, ведения списков аннулированных сертификатов и автоматического возобновления ключей и сертификатов по окончании срока их действия.

Основными атрибутами сертификата является имя и идентификатор субъекта, информация об открытом ключе субъекта, имя, идентификатор и цифровая подпись уполномоченного из выдачи сертификатов, серийный номер, версия и срок действия сертификата, информация об алгоритме подписи и т.п. Важно, что цифровой сертификат содержит цифровую подпись на основе секретного ключа доверительного центра.



Рис. 13.19. Компоненты инфраструктуры открытых ключей

*Центр сертификации* (Certificate Authority - CA), или *доверительный центр*, - объект, уполномоченный создавать, подписывать и публиковать сертификаты. СА имеет также полномочия идентифицировать пользователей. Основными операциями, которые выполняет СА, являются издание, возобновление и аннулирование сертификата.

Действия СА ограничены политикой сертификации, которая диктует ему, какую информацию он должен вмещать в сертификат. СА публикует свою политику сертификации так, чтобы пользователи могли проверить соответствие сертификатов этой политике.

*Список аннулированных сертификатов* (Certificate Revocation List - Crl) - список сертификатов, признанных недействительными в период их действия в случае компрометации секретного ключа или изменения атрибутов сертификата с момента его выпуска.

*Хранилище сертификатов* - специальный объект PKI, где сохраняются выпущенные сертификаты и списки отозванных сертификатов. Оно не является обязательным компонентом PKI, но значительно упрощает доступ к ресурсам и управлению системой.

К хранилищу предъявляются такие требования: простота доступа; доступ должен быть стандартным; возобновление информации; встроенная защищенность; простое управление; совместимость с другими хранилищами (необязательное требование).

Хранилище упрощает систему распространения сертификатов.

Фактически действующим стандартом доступа к хранилищу является LDAP (Light-weight Directory Access Protocol), упрощен протокол доступа к каталогу. Он наиболее адекватен как стандарт для хранения и вытягивания сертификатов после их генерации, поддерживается большинством серверных операционных систем и баз данных и достаточно открытый для того, чтобы его могли поддерживать практически любые инфраструктуры с открытыми ключами.

*Центр регистрации* (Registration Authority - RA) является дополнительным компонентом системы PKI, которая дает возможность авторизованному CA аутентифицировать пользователей и проверять информацию, которая заносится в сертификат. К его функциям могут принадлежать генерирование и архивирование ключей, сообщения об аннулировании сертификатов и т.п. В некоторых системах CA выполняет функции RA. CA выдает сертификат RA (если он присутствует в системе), причем RA выступает как объект, подчиненный CA. Но RA не может выпускать сертификаты.

**Конечный пользователь** (End Entity - EE) - пользователь сертификата PKI и владелец сертификата. Т.е. конечный пользователь - это объект, который использует некоторые услуги и функции системы PKI. Конечный пользователь может быть владельцем сертификата или объектом, который спрашивает сертификат.

Взаимодействие между разными компонентами инфраструктуры открытых ключей иллюстрирует рис. 13.20.

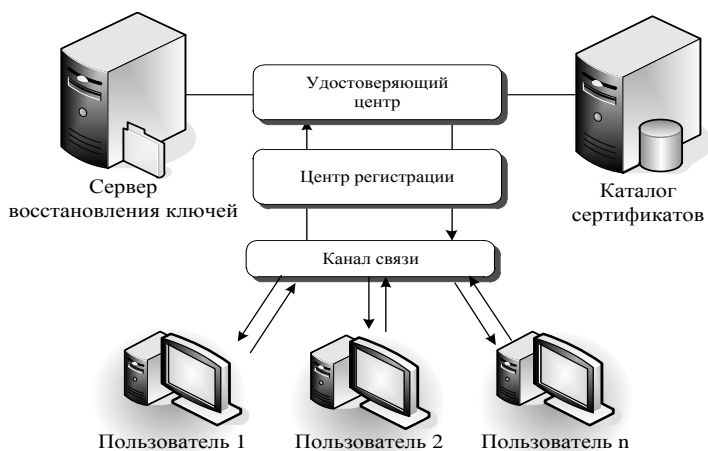


Рис. 13.20. Взаимодействие между компонентами инфраструктуры открытых ключей

### 13.5. Стеганографические методы

В переводе с греческого *стеганография* означает тайнопись (steganos - тайна, секрет; graphy - запись), а ее история насчитывает тысячелетие. Стега-



нографическую защиту информации можно реализовать с помощью разных технических, химических, физических и психологических методов.

Стеганография не заменяет, а дополняет криптографию. Соккрытие сообщения методами стеганографии значительно снижает вероятность выявления самого факта передачи сообщения. А если это сообщение к тому же зашифровано, то оно имеет еще один, дополнительный, уровень защиты.

*Стеганография* - это совокупность методов утайки факта укрывательства исходного информационного сообщения (открытого текста) в другом сообщении, которое имеет аналоговую природу (оцифрованный непрерывный сигнал) с целью обеспечения конфиденциальности, т.е. предотвращение исключения полезной информации из информационного потока несанкционированным пользователем.

**Модели и задачи систем стеганографического шифрования.** Классификация известных стеганографических методов приведена на рис. 13.21.



Рис. 13.21. Классификация стеганографических методов

*Материальные методы* - используют для скрытия информации на базе физических или химических свойств стеганографического контейнера (объекта, в какой внедряется секретная информация) или просто контейнера, а также средств внедрения в него информации.

Таковыми свойствами, например, может быть прозрачность, габаритные размеры, цвет контейнера или способность внедренной информации проявляться в результате определенного влияния. Разработка и исследование таких стеганографических методов связана с изучением свойств различных материальных носителей информации и соответствующих способов (не общепринятых) ее внедрения.

К материальным стеганографическим методам можно отнести невиди-

мые чернила, микроточки и т.п. В современном контексте стандартными носителями информации является аудио-, видео- и вычислительная техника.

*Информационные методы* - используют для укрывательства данных на базе свойств информационного наполнения контейнера. Методы этого класса разделяют на лингвистические и цифровые.

*Лингвистические методы* используют избыточность языка или другой среды, которая не содержит ни букв, ни цифр (рисунки, взаимное расположение объектов и т.п.). К этому классу можно также отнести метод генерации текста, необходимого для укрывательства секретного сообщения, а также методы, которые базируются на изменении положения строк на странице или слов в предложении и т.п.

*Цифровые методы* базируются, с одной стороны, по большей части на том, что файлы, которые не нуждаются в абсолютной точности, могут быть несколько видоизменены без потери функциональности, а с другой - на отсутствии специального инструментария или неспособности органов чувств человека различать незначительные изменения в таких файлах (рис. 13.22).



Рис. 13.22 Классификация методов цифровой стеганографии

1. **По способу выбора контейнера** различают методы стеганографии безальтернативной, суррогатной, стеганографии, что выбирает, и стеганографии, что конструирует. Безальтернативная стеганография использует определенный заранее известный контейнер и не предусматривается возможность его выбора. Суррогатная стенография - может быть применена к определенному контейнеру, случайно выбранному из набора допустимых. Стеганография, что выбирает, базируется на генерации большого количества альтернативных контейнеров, из которых дальше по отдельным характеристикам выбирается наиболее эффективный для внедрения информации. Стеганография, которая конструирует, предусматривает в зависимости от сообщения саму генерацию контейнера, при этом моделируются его необходимые статистические свойства.

**2. По способу доступа к информации** различают поточные и фиксированные методы. Поточные характеризуются включением в контейнер в режиме реального времени непрерывных битовых потоков данных сообщения, а соответствующие контейнеры имеют большие размеры, что делает их привлекательными для передачи значительных объемов секретной информации.

Фиксированные методы используют контейнеры определенной длины, например текстовые, кодовые, графические, звуковые или другие файлы. В отличие от поточных здесь заранее известны длина контейнера и его наполнения, а следовательно, могут быть априорно оценены с точки зрения их эффективности относительно заданного сообщения и стеганографического преобразования. Чаще на практике используют именно контейнеры фиксированной длины как более удобные и доступные.

**3. По способу организации контейнеров** различают систематические и несистематические методы стеганографии. В систематических информационных биты контейнера можно отделить от шумовых, в которые и будет внедрена секретная информация. В несистематических методах такого деления нет, а потому для выделения сообщения необходимо проработать все биты контейнера.

**4. По способу возобновления сообщения** стеганографические методы бывают эталонные и безэталонные. При возобновлении секретной информации в некоторых стеганографических методах необходимо иметь эталон контейнера, чтобы обеспечить его надежное хранение и защита от несанкционированного использования. Большинство современных методов не нуждаются в наличии такого эталона контейнера, а для его формирования осуществляется специальная обработка стеганограммы.

**5. По методу обработки контейнера** цифровые методы разделяются на непосредственные и спектральные. При использовании непосредственных методов обработке подлежат биты самого контейнера, как, например, в методе наименьшего значимого бита. Спектральные методы базируются на использовании дискретных унитарных преобразований, например Фурье, Уолша, Вейвлета, высокой и низкой корреляции и др. При использовании методов этой группы обработке подлежит соответствующий спектральный контейнер.

**6. По назначению** различают методы, направленные на скрытую передачу информации (информацию внедрено в контейнер), защиту прав на цифровые объекты (защите подлежит контейнер), аутентификацию данных и скрытую аннотацию документов.

В пределах стеганографии защита прав на цифровую интеллектуальную собственность осуществляется с помощью внедрения в объект защиты цифровых водяных знаков, что активно применяется для защиты от копирования и несанкционированного использования цифровых фотографий, аудио- и видеозаписей и других данных.

**7. По типу контейнеров** различают методы, которые используют тек-

стовые, графические, аудио- и видеосреды. Каждый выделенный класс сориентирован на максимальное использование особенностей соответствующей среды. Например, графические методы используют особенности человеческого зрения, такие как чувствительность к контрасту, размеру, форме, цвету, местоположению. Аудиометоды используют модель человеческого слуха и основные психоакустические принципы.

**8. По способу встраивания информации (в контейнер)** методы разделяются на форматные и неформатные. Форматные базируются на особенностях формата хранения данных, которые представляют собой файл-контейнер. В рамках таких методов формат хранения пустого контейнера анализируется с целью отыскания тех служебных полей в заголовке файла, изменение которых в конкретных условиях не повлияет на функциональность контейнера. Это могут быть служебные поля, которые не используются современными программами, не полностью заполнены поля комментариев и т.п. Неформатные основываются на внедрении информации не в заголовке, а непосредственно в данные пустого файла-контейнера. Они базируются на двух принципах. Во-первых, некоторые виды файлов-контейнеров не нуждаются в абсолютной точности представления своих внутренних данных, например файлы, которые содержат оцифрованное изображение или звук, могут быть в некоторой степени видоизменены без потери их функциональности. Во-вторых, сигнальная система человека неспособна отличить незначительные градации, например в цвете изображения или в качестве звука. Неформатные методы всегда ведут к появлению в контейнере дополнительного шума, который инициирует несущественное ухудшение изображения или звука, но они являются более перспективными (сравнительно с форматными) благодаря лучшей стойкости и пропускной способности создаваемого стеганографического канала.

**Стеганографические системы и их модели.** В настоящее время стеганография фактически является одним из путей поддержки информационной безопасности и дает возможность организовать связь, которая скрывает сам факт наличия секретных данных. Стеганографические методы активно используются для защиты информации от несанкционированного доступа, противодействия системам мониторинга и управления ресурсами сетей, маскировки программного обеспечения от незарегистрированных пользователей, защите авторского права на некоторые виды интеллектуальной собственности, а также для аутентификации цифровых объектов.

*Стеганографическая система (стеганосистема)* является совокупностью методов и средств относительно формирования секретного информационного потока данных с целью укрывательства факта передачи полезной информации (открытого текста).

*Стеганографическим контейнером* называется сообщение, в которое будет размещена (скрыта) полезная информация или секретные данные.

Любой файл или поток данных может быть *цифровым контейнером*, ес-

ли контейнер не содержит секретного сообщения, то его называют пустым, а тот, который содержит полезные данные, — *заполненным*, или стеганоконтейнером (*стеганограммой*).

*Стеганографическим каналом (стеганоканал)* называется информационно коммуникационный канал связи, по которому передается стеганоконтейнер.

Секретный ключ, необходимый для внедрения информации в контейнер, называется *стеганоключом*, или просто *ключом*. В зависимости от количества уровней защиты в стеганосистеме может использоваться один или больше ключей.

Факт отправления контейнера к получателю не должен быть подозрительным и не должно быть заметных отклонений контейнера от нормы.

Обозначим через  $C$  (container) множество всех возможных контейнеров, через  $P$  (plaintext) множество всех возможных открытых текстов, а  $|C|$  и  $|P|$  - количество контейнеров и количество открытых текстов соответственно в  $C$  и  $P$ , так как  $|P| \leq |C|$ . Для упрощения предположим, что любой открытый текст из  $P$  бинарный  $P = \{0, 1\}^P$ . Модель стеганографической системы можно подать схематично (рис. 13.23).

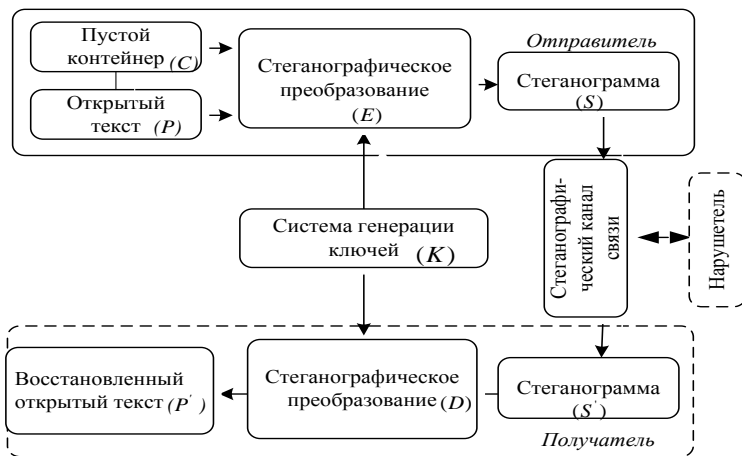


Рис. 13.23. Обобщенная модель стеганографической системы

Стеганографические системы разделяются на: *безключевые, симметричные (одноключевые, системы с секретным ключом)* и *асимметричные (двухключевые, системы с открытым ключом)*.

Безключевой стеганосистемой называется совокупность  $(C, P, E, D)$ , базирующаяся на стеганографических преобразованиях  $(E: C \times P \rightarrow C$  и  $D: C \rightarrow P)$ , которые применяются для внедрения и восстановления открытого текста из контейнера, причем  $D[E(c, p)] = p$  для  $\forall p \in P$ , где  $C$  - множе-

ство возможных контейнеров;  $P$  - множество возможных открытых текстов.

Из определения вытекает, что функционирование безключевых стеганосистем происходит без стеганографического ключа, и потому их безопасность базируется на укрывательстве функций  $E$  и, что противоречит принципу Керкгофа, в соответствии с которым стойкость системы должна определяться только секретностью ключа.

*Симметричной стеганосистемой* называется совокупность  $(C, P, K, E_k, D_k)$ , где  $C$  - множество возможных контейнеров;  $P$  - множество возможных открытых текстов;  $K$  - алгоритм генерации ключей;  $E_k$  - преобразования, которые моделирует процесс вживления (если в качестве начальных данных взяты  $c \in C, p \in C$  и ключ  $(k)$ , порожденный  $K$ ) и создает стегано-контейнер  $s \in C$ ;  $D_k$  - преобразования, которые моделирует процесс восстановления, если  $s' = s$  и  $k$ , и формирует бинарное  $p$ . Если объект  $s$  содержал скрытый открытый текст  $p$ , то  $p' = p$ .

Такой тип стеганосистем нуждается в наличии закрытого информационного потока данных, недоступного никому, кроме отправителя и получателя, и предназначенного для обмена стеганографическими ключами. Отметим, что для некоторых алгоритмов при возобновлении скрытой информации необходим начальный контейнер или другие данные, которых нет в стеганограмме. Такие алгоритмы будем считать случаем части симметричных стеганосистем, для которых  $k = c$  или  $k = c \times k'$ , где  $k'$  - дополнительный набор секретных ключей.

*Симметричной стеганосистемой* называется совокупность  $(C, P, K, E_{K_1}, D_{K_2})$ , где  $C$  - множество возможных контейнеров;  $P$  - множество возможных открытых текстов;  $K$  - алгоритм генерации ключей, который порождает пары ключей  $(k_1, k_2)$ , где  $k_1$  и  $k_2$  соответственно открытый и секретный ключи, которые используются для внедрения и восстановления открытого текста;  $E_{K_1} : C \times P \times k_1 \rightarrow C$  - преобразования, которые моделирует процесс внедрения открытого текста;  $D_{K_2} : C \times k_2 \rightarrow P$  - преобразования, которые моделируют процесс восстановления открытого текста, причем  $D_{K_2} [E_{K_1}(c, p, k_1, k_2)] = p$  при  $\forall p \in P$  и  $\forall c \in C$ .

При построении стеганосистем нужно учитывать следующие положения.

Стойкость системы полностью определяется секретностью ключа, с помощью которого можно установить факт наличия внедренного открытого текста и его содержание, а структура стеганосистемы, детали ее реализации, характеристики множественных чисел открытых текстов и контейнеров известны. Единственная неизвестная информация - это ключ.

Только при наличии соответствующего стеганоключа можно найти и возобновить скрытый открытый текст сообщения или доказать его существование. Если становится известным факт существования скрытого открытого

текста, то это не должно давать возможность его возобновить из контейнера, пока ключ сохраняется в секрете. Отсутствует возможность статистически доказать существование скрытого открытого текста, а его отыскание без знания ключа является сложной вычислительной задачей. Обеспечивается необходимая пропускная способность создаваемого системой стеганографического канала связи. Стеганосистема должна быть приемлема по сложности вычислительной реализации.

Нарушитель не должен иметь никаких технических или других преимуществ перед пользователем в распознавании или раскрытии содержания скрытых открытых текстов.

По уровню обеспечения секретности стеганографические системы разделяются на теоретически стойкие, практически стойкие и неустойчивые системы (рис. 13.24).



Рис. 13.24. Классификация стеганосистем по уровню обеспечения секретности

*Основные характеристики стеганографических систем:* стойкость; вычислительная сложность; пропускная способность стеганографических каналов связи.

Рассмотрим подробнее стойкость стеганосистемы, с помощью которой оценивается безопасность ее использования.

*Стойкостью стеганосистемы* называется способность системы скрывать от несанкционированного пользователя факт передачи внедрения открытых текстов и противостоять попыткам разрушить, обезобразить, возобновить или заменить их, а также способность подтвердить или опровергнуть подлинность информации.

В стеганографии от нарушителя скрывается сам факт существования секретной информации.

*Стойкой стеганосистемой* является система, для которой нарушители, наблюдая за информационным обменом между отправителем и получателем, не смогут обнаруживать, а тем более считывать внедренные в контейнер скрытые данные.

**Принципы защиты информации в стеганографических системах.** Нарушитель стеганографических систем (рис. 13.25) может быть пассивным, активным, злонамеренным и в зависимости от этого он может создавать разные угрозы.

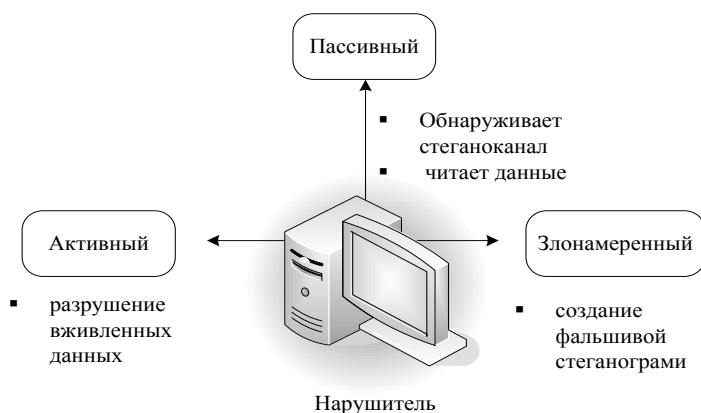


Рис. 13.25. Возможные типы нарушителей в стеганографических системах

Пассивный нарушитель может лишь обнаружить факт наличия стеганоканала и (возможно) читать внедренные данные. Активный нарушитель может влиять на информацию, которая проходит каналом связи (не только обнаруживать и читать скрытые данные, но и полностью или частично разрушать их). Такой нарушитель может изменять контейнер независимо от того, пустой он или заполненный, тем более, что разрушить внедренные данные иногда легче, чем прочесть. Злонамеренный нарушитель наиболее опасен, он имеет возможность не только разрушать, но и создавать фальшивую стеганограмму.

Для осуществления той или другой угрозы нарушитель (аналитик) в основном применяет типы атак, приведенные на рис. 13.26.

*Атака на основе выбранного скрытого открытого текста.* В этом случае аналитик (стеганоаналитик) имеет возможность предлагать для передачи собственные открытые тексты и анализировать стеганограммы.

*Адаптивная атака на основе выбранного скрытого открытого текста.* Эта атака является случаем части предыдущей и характеризуется возможностью аналитика адаптивно выбирать сообщение для навязывания в зависимости от результатов анализа предыдущих стеганограмм.



*Атака на основе выбранного заполненного контейнера.* Стеганоаналитик имеет возможность создавать стеганограммы для выбранного им открытого текста с целью определения образцов стеганограмм, которые могут идентифицировать использование анализируемой стеганосистемы.



Рис. 13.26. Типы атак на стеганографическую систему

*Атака на основе известного пустого контейнера.* В этом случае стеганоаналитик сравнением известного пустого контейнера с предусмотренной стеганограммой может всегда определить факт наличия стеганоканала. Контейнер может быть известен приближенно, с некоторой погрешностью. В этом случае есть возможность построения стойкой стеганосистемы.

*Атака на основе выбранного пустого контейнера.* В этом случае стеганоаналитик должен возмочь заставить отправителя пользоваться предложенным контейнером.

*Атака на основе известной математической модели контейнера или его части.* При этом атакующий пытается определить разницу между подозрительным внедренным открытым текстом и известной ему моделью. Отправитель и атакующий могут иметь разные модели, тогда выигрывает тот, кто имеет лучшую модель.

В общем случае сигналы-контейнеры могут поддаваться возмущениям двух типов:

1. *Стандартные процедуры «легальной» обработки контейнеров всегда связаны с внесением в них дополнительного шума.*
2. *Контейнер может поддаваться определенному влиянию со стороны активного или злонамеренного нарушителя.*

Рассмотренные возмущения по большей части не преднамеренные, а являются следствием естественных возмущений, присущих каналам передачи

данных и разным вариантам обработки информации типа печати, сканирования и т.п. Количественная оценка стойкости стеганографической системы защиты от внешних влияний является сложным заданием, которое на практике обычно выполняется методами системного анализа, систематического моделирования или экспериментального исследования. Как правило, стеганосистема должна обеспечивать следующую модель защиты информации (рис. 13.27).

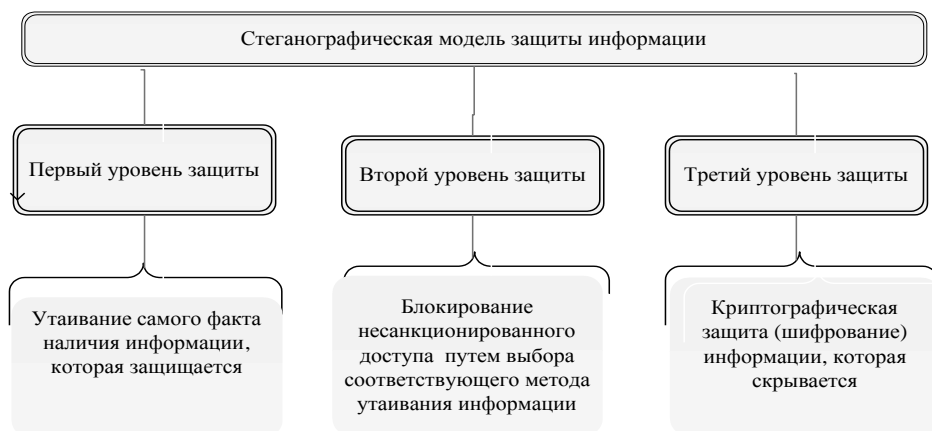


Рис. 13.27. Трехуровневая стеганографическая модель защиты информации

**Методы компьютерной стеганографии.** *Метод наименьшего значимого бита* (НЗБ) или LSB-метод (Least Significant Bits) является одним из наиболее распространенных неформатных методов. Его сущность заключается в замене нескольких младших битов в байтах данных файла-контейнера битами скрываемого сообщения. Существуют модификации LSB-метода, которые отличаются выбором подмножества данных файла-контейнера, в которые внедряется сообщение, стратегией изменения значений данных и другими деталями. Абсолютное большинство из модификаций метода наименьшего значимого бита сориентировано на графические растровые форматы файлов-контейнеров.

**Спектральные методы цифровой стеганографии.** Рассмотренный метод наименьшего значимого бита имеет ряд преимуществ, связанных с простотой реализации (и, как следствие, высоким быстродействием программных продуктов на его основе) и сравнительно высокой пропускной способностью созданного стеганоканала. Однако его можно использовать только для решения заданий, которые не требуют высокой стеганостойкости, поскольку LSB-метод не является стойким практически относительно всех активных атак противника, например относительно дополнительного зашумления, фильтрации, конвертации цветов, сжатия с потерями, геометрических преобразований и т.п.

Более стойкими к разнообразным искажениям являются методы, которые скрывают сообщение в спектральной области *файла-контейнера*. В отличие от LSB-метода здесь возможно внедрение информации в те зоны контейнера-изображения, которые несут наиболее существенную информацию, - в низкие частоты. Попытка возобновить или отобразить сообщение в таком случае может привести к заметным искажениям самого изображения, что сделает его непригодным для эксплуатации. Спектральные методы цифровой стеганографии достаточно разнообразны и некоторые из них используются в комбинации с LSB-методом и широкополосной модуляцией.

Для частотного представления данных файла-контейнера используют дискретные ортогональные преобразования, такие как дискретное преобразование (ДКП) косинуса, дискретное преобразование Фурье, вейвлет-преобразования, преобразования Карунена - Лоева, Адамара, Хаара и др.

Приложение к контейнерам-изображений дискретных ортогональных преобразований выполняет три основных задания (рис. 13.28).



Рис. 13.28. Основные задачи применения дискретных ортогональных преобразований к контейнерам-изображениям

В общем случае дискретное изображение является матрицей отсчетов функции, которая описывает распределение яркости на условно непрерывном изображении. Использование дискретного ортогонального преобразования может значительно снизить межэлементную корреляцию, при этом достигается концентрация максимально возможной части энергии выходного дискретного сигнала в минимально возможном количестве спектральных коэффициентов.

### 13.6. Методы криптоанализа

*Криптоанализ* - это совокупность методов относительно получения и восстановления открытого текста (полезного сообщения) из зашифрованного текста без знания секретного ключа (алгоритма или математической функции восстановления).

Успешно проведенный криптоанализ может раскрыть открытый текст или ключ. Он может также обнаружить слабые места в криптосистемах, что в конечном итоге приведет к предыдущему результату. (Раскрытие ключа не криптологическими способами называется компрометацией.)

Попытка реализации криптоанализа называется *раскрытием*. Основное предположение криптоанализа, в первый раз сформулированное в XIX ст Датчманом А. Керкхофсом, заключается в том, что безопасность полностью определяется ключом. В реальном мире криптоаналитики не всегда имеют докладную информацию, такое предположение является производительной рабочей гипотезой. Существует несколько типов криптоаналитического раскрытия открытого текста (рис. 13.29).



Рис. 13.29. Типы криптоаналитических раскрытий открытого текста

Относительно каждого из них, как правило, предусматривается, что криптоаналитик имеет всю полноту знания об используемом алгоритме шифрования:

1. *Раскрытие с использованием только шифротекста*. У криптоаналитика есть шифротексты нескольких сообщений, зашифрованных тем самым алгоритмом шифрования. Задание криптоаналитика заключается в раскрытии открытого текста как можно большего количества сообщений или, что лучше, в получении ключа (ключей), использованного для шифрования сообщений, для дешифрации других сообщений, зашифрованных тем же ключом.

Дано:  $C_1 = E_k(P_1)$ ,  $C_2 = E_k(P_2)$ , ...,  $C_i = E_k(P_i)$ .

Получить: или  $P_1, P_2, \dots, P_i; k$  или алгоритм получения  $P_{i+1}$ , если извест-

но  $C_{i+1} = E_k(P_{i+1})$ .

2. *Раскрытие с использованием открытого текста.* У криптоаналитика есть доступ не только к шифротекстам нескольких сообщений, но и к открытому тексту этих сообщений. Его задание заключается в получении ключа (или ключей), использованного для шифрования сообщений, для дешифрации других сообщений, зашифрованных тем самым ключом (ключами).

Дано:  $P_1, C_1 = E_k(P_1), P_2, C_2 = E_k(P_2), \dots, P_i, C_i = E_k(P_i)$ .

Получить: или  $k$ , или алгоритм получения  $P_{i+1}$ , если известно  $C_{i+1} = E_k(P_{i+1})$ .

3. *Раскрытие с использованием выбранного открытого текста.* У криптоаналитика не только есть доступ к шифротекстам и открытым текстам нескольких сообщений, но и возможность выбирать открытый текст для шифрования. Это предоставляет больше вариантов, чем раскрытие с использованием открытого текста, поскольку криптоаналитик может выбирать зашифрованные блоки открытого текста, который может дать больше информации о ключе. Его задание заключается в получении ключа (или ключей), использованного для шифрования сообщений или алгоритма, который дает возможность дешифровать новые сообщения, зашифрованные тем самым ключом (или ключами).

Дано:  $P_1, C_1 = E_k(P_1), P_2, C_2 = E_k(P_2), \dots, P_i, C_i = E_k(P_i)$ , где криптоаналитик может выбрать  $P_1, P_2, \dots, P_i$ .

Получить: или  $k$ , или алгоритм получения  $P_{i+1}$ , если известно  $C_{i+1} = E_k(P_{i+1})$ .

4. *Адаптивное раскрытие с использованием открытого текста.* Это частный случай раскрытия с использованием выбранного открытого текста. Криптоаналитик не только может выбирать зашифрованный текст, но также может строить свой следующий выбор на базе полученных результатов шифрования. При раскрытии с использованием выбранного открытого текста криптоаналитик мог выбрать для шифрования только один большой блок открытого текста. При адаптивном раскрытии с использованием выбранного открытого текста он может выбрать меньший блок открытого текста, потом выбрать следующий блок, используя результаты первого выбора, и т.д.

Существует, по крайней мере, еще три типа криптоаналитического раскрытия.

5. *Раскрытие с использованием выбранного шифротекста.* Криптоаналитик может выбрать разные шифротексты для дешифрации и имеет доступ к дешифрованным открытым текстам. Например, у криптоаналитика есть доступ к «черному ящику», который выполняет автоматическую дешифрацию.

Его задание заключается в получении ключа.

Дано:  $C_1, P_1 = D_k(C_1), C_2, P_2 = D_k(C_2), \dots, C_i, P_i = D_k(C_i)$ .

Получить:  $k$ .

Раскрытие из использованного выбранного шифротекста также эффективно для симметричных алгоритмов. (Иногда раскрытие с использованием выбранного открытого текста и раскрытия с использованием выбранного шифротекста вместе называют раскрытием с использованием выбранного текста.)

6. *Раскрытие с использованием выбранного ключа.* Такой тип раскрытия значит не то, что криптоаналитик может выбирать ключ, а что у него есть некоторая информация о связи между разными ключами.

7. *Преступный криптоанализ.* Криптоаналитик угрожает, шантажирует или истязает кого-нибудь, пока не получит ключ. Взятничество иногда называется раскрытием с покупкой ключа. Это мощные способы раскрытия, которое часто является наилучшим путем сломать алгоритм.

**Безопасность алгоритмов.** Разные алгоритмы предоставляют разные уровни безопасности в зависимости от того, насколько трудно сломать алгоритм. Если стоимость излома алгоритма выше, чем стоимость зашифрованных данных, вы, скорее всего, в безопасности. Если время излома алгоритма больше, чем время, в течение которого зашифрованы данные должны сохраняться в секрете, то вы также, скорее всего, в безопасности. Если объем данных, зашифрованных одним ключом, меньше, чем объем данных, необходимый для излома алгоритма, и тогда вы, скорее всего, в безопасности.

Важно, чтобы значимость данных всегда оставалась меньше, чем стоимость излома системы безопасности, которая защищает данные.

Ларс Кнудсен (Lars Knudsen) разделил раскрытие алгоритмов по таким категориям (приведенным в порядке уменьшения значимости):

1. *Полное раскрытие.* Криптоаналитик получил ключ  $K$ , где  $D_k(C) = P$ .
2. *Глобальная дедукция.* Криптоаналитик получил альтернативный алгоритм  $A$ , эквивалентный  $D_k(C)$  без знания  $K$ .
3. *Местная (или локальная) дедукция.* Криптоаналитик получил открытый текст для перехваченного шифротекста.
4. *Информационная дедукция.* Криптоаналитик получил некоторую информацию о ключе или открытый текст. Такой информацией могут быть биты ключа, ведомости о форме открытого текста и т.п.

*Алгоритм является безусловно безопасным, если независимо от объема шифротекстов у криптоаналитика информации для получения открытого текста недостаточно. В сущности, только шифрование одноразовыми блокнотами невозможно раскрыть в случае бесконечных ресурсов.*

Все другие криптосистемы поддаются раскрытию с использованием сведений из полученного шифротекста простым перебором возможных ключей. Это называется раскрытием *грубой силой*.

Криптография больше интересуется криптосистемами, которые трудно сломать вычислительным способом. Алгоритм считается *вычислительно безопасным* (или, как иногда его называют, *сильным*), если он не может быть сломан с использованием доступных ресурсов теперь или в будущем. Срок «доступные ресурсы» достаточно расплывчатый.

Сложность раскрытия можно измерять разными способами:

1. *Сложность данных*. Объем данных, используемых на входе операции раскрытия.
2. *Сложность обработки*. Время, нужное для проведения раскрытия. Часто называется коэффициентом работы.
3. *Требования к памяти*. Вместимость памяти, необходимая для раскрытия.

Как эмпирический метод сложность раскрытия определяется по максимальному из этих трех коэффициентов. Некоторые операции раскрытия допускают взаимосвязь коэффициентов: более быстрое раскрытие возможно за счет увеличения требований к памяти.

Тогда как сложность раскрытия остается постоянной (пока какой-либо криптоаналитик не придумает лучший способ раскрытия), мощность компьютеров растет. За последние 50 лет вычислительные мощности феноменально выросли, и нет никаких причин думать, что эта тенденция не продлится. Много криптографических приемов пригодны для параллельных компьютеров: задача разбивается на миллиарды маленьких фрагментов, для решения которых не нужно межпроцессорное взаимодействие. Объявление алгоритма безопасным просто потому, что его нелегко взломать, используя современную технику, по крайней мере, ненадежно. Хорошие криптосистемы проектируют стойкими к взлому с учетом развития вычислительных средств на многие годы вперед.

---

### ***Основные выводы***

---

Криптоалгоритм - алгоритм, предназначенный для реализации любого метода шифрования данные.

Криптографический ключ - последовательность символов, которая обеспечивает возможность шифрования и дешифрации.

Криптографическая система с открытым ключом основывается на криптографии с открытым ключом. Самыми известными практическими реализациями этого типа есть системы Диффи - Хеллмана, RSA и Ель-Гамала.

Хеш-функция (хеш-функция; функция хеширования; функция расстановки) - функция, которая используется для выработки блока данных фиксированной длины (значение функции), которая однозначно отображает произвольно выбранный открытый текст (аргумент функции).

Значение хеш-функции - множественное число значений целых чисел,

которые принадлежат заданному диапазону и образованные в результате вычисления хеш-функции.

Цифровая подпись (цифровая сигнатура) - цифровая последовательность данных, которая образуется в результате асимметричного криптографического преобразования начальной информации и позволяет получателю проверить источник и целостность данных, а также осуществить защиту от фальсификации или подделки.

Алгоритм побайтового блочного шифрования - криптографический алгоритм, в котором во время шифрования и расшифровывания используются только операции над байтами.

Стеганографическая защита - обеспечение укрывательства самого факта существования конфиденциальных сведений при их передаче, хранении или обработке.

Стеганографическая система - это совокупность средств и методов, которые используются с целью формирования скрытого (незаметного) канала передачи информации.

Направления стеганографии: внедрение информации с целью ее скрытой передачи; внедрение цифровых водяных знаков; внедрение идентификационных номеров; внедрение заглавий.

Процесс проведения стеганоанализа - оценка перехваченного контейнера на предмет наличия в нем скрытого сообщения.

Сообщение и контейнер - основные стеганографические понятия.

Конфиденциальное сообщение - секретная информация, наличие которой необходимо скрыть.

Контейнер - несекретная информация, которую можно использовать для укрывательства сообщения.

Пустой контейнер (или так называемый контейнер-оригинал) - это контейнер, который не содержит скрытую информацию.

Заполненный контейнер (контейнер-результат) - контейнер, который содержит скрытое сообщение.

Поточный контейнер - последовательность битов, которые непрерывно изменяются.

Фиксированный контейнер - размеры и его характеристики являются предварительно известными.

Теоретически стойкая (абсолютно надежная) стеганосистема - это система, которая осуществляет укрытие информации лишь в тех фрагментах контейнера, значения элементов которых не превышают уровень шумов или ошибок квантования, и при этом теоретически доказано, что невозможно создать стеганоаналитический метод выявления скрытой информации.

Практически стойкой стеганосистемой называется система, которая проводит такую модификацию фрагментов контейнера, изменения которых могут быть обнаружены, но известно, что на данный момент необходимы стеганоаналитические методы у нарушителя отсутствуют или пока еще не разра-



ботаны.

Неустойчивой стеганосистемой называется система, которая скрывает информацию таким образом, что существующие стеганоаналитические средства позволяют ее обнаружить.

Криптография объединяет принципы, методы и средства преобразования данных с целью маскировки (шифрование) содержания информации для гарантирования ее конфиденциальности и целостности.

Криптоанализ (криптографический анализ) - изучение системы защиты сообщений и (или) исследования ее входных и исходных сообщений с целью выделения скрытых переменных или истинных данных, включая начальный текст.

---

### ***Вопросы для самоконтроля***

---

- 1. В чем назначение стеганографии?*
- 2. Чем отличается криптография от стеганографии?*
- 3. Как классифицируются стеганографические методы?*
- 4. Объясните, как происходит в пределах стеганографии защита прав на цифровую интеллектуальную собственность.*
- 5. В чем заключается сущность метода наименьшего значимого бита?*
- 6. Как классифицируются спектральные методы цифровой стеганографии?*
- 7. Какие существуют основные виды атак на стеганографическую систему?*
- 8. Какие существуют основные типы криптоаналитического раскрытия информации?*
- 9. Какой принцип положен в основу алгоритмов из постановочным и перестановочным шифром?*
- 10. Где нашли приложение программные постановочные шифры?*
- 11. Какие два основных типа алгоритмов основываются на ключах?*
- 12. На какие категории разделяются симметричные алгоритмы?*
- 13. Почему асимметричные алгоритмы называются алгоритмами «с открытым ключом»?*
- 14. Какая разница между симметричной и асимметричной криптосистемами?*
- 15. Какие базовые криптографические преобразования используются в алгоритме шифрования RSA?*
- 16. Приведите примеры симметричных алгоритмов шифрования данных.*

### *Conclusions*

---

Cryptalgorithm is an algorithm for implementation of any data encryption method. Cryptographic key is a sequence of characters that provides possibility of encryption and decryption.

Cryptographic system with public key is based on public key cryptography. Most famous practical implementations of this type of system are Diffie-Hellman, RSA, and El Gamal systems.

Hash function (hashing function) is a function that is used to generate a fixed-length data block (function value), which clearly displays randomly chosen plaintext (function argument).

Hash function value is a plural integer numbers values which belong to specified range and formed as a result of computing hash function.

Digital signature is a digital data sequence, which is formed as a result of asymmetric cryptographic transformation of initial information and allows the recipient to verify source and integrity of data, and implement protection against falsification or forgery.

Byte block encryption algorithm is a cryptographic algorithm that during encryption and decryption uses only bytes operations.

Steganographic protection is ensuring harboring the fact of confidential information existence during transmission, storage or processing.

Steganographic system is a set of means and methods that are used to form a latent (invisible) information transmission channel.

Steganography directions: embedding information with the further aim of hidden transmission; embedding of digital watermarks; embedding of identification numbers; titles embedding.

Steganoanalysis process is assessment of intercepted container in order to identify hidden messages in it.

Message and container are basic steganographic notions.

Confidential message is classified information, which presence should be hidden.

Container is unclassified information that could be used to hide message

Empty container (or original container) is a container that does not contain hidden information.

Filled container (container-result) is a container that contains a hidden message.

Stream container is a bit sequence that changes continuously.

Fixed container – is the one with preliminary known dimensions and characteristics .

Theoretically stable (absolutely reliable) steganosystem is a system that carries information shelter only in those container fragments which element values do not exceed noise level or quantization errors, and at the same time it is theoretically proven that it is impossible to create a steganoanalytical method for

detecting hidden information.

Practically stable steganosystem is a system where changes of container fragments could be detected, but it is known that at the moment needed stegananalytical methods are not available to intruder or has not yet been developed.

Unstable steganosystem is a system that hides information in a way that existing stegananalytical means allow detecting it.

Cryptography combines principles, methods and means of data conversion for masking (encryption) information content to ensure its confidentiality and integrity.

Cryptanalysis (cryptography analysis) is a study of message protection system and (or) a research of its input and output messages in order to separate hidden variables or true data, including initial text.

*Ключевые слова*

криптография	cryptography
стеганография	steganography
шифр	cipher
цифровая подпись	digital signature
контейнер	container



## **ЗАЩИТА ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ ОТ НЕСАНКЦИОНИРОВАННОГО ДОСТУПА**

**14**

- 14.1. Методы несанкционированного доступа к ресурсам информационных систем
- 14.2. Средства защиты от несанкционированного доступа
- 14.3. Моделирование систем и процессов защиты информации
- 14.4. Противодействие сетевому несанкционированному доступу

### 14.1. Методы несанкционированного доступа к ресурсам информационных систем

Проблема несанкционированного доступа (НСД) к ресурсам информационных систем обострялась с развитием информационных технологий и тотального использования компьютерных сетей во всех сферах деятельности общества.

Решение задач разработки и выбора соответствующих эффективных методов и средств защиты в значительной мере зависит от ряда факторов, связанных с самым процессом несанкционированного доступа. Поскольку спектр несанкционированных действий достаточно разнообразный, то основой классификации могут быть базовые признаки (рис. 14.1).



Рис. 14.1. Классификация несанкционированного доступа по базовым признакам

*Мануальный НСД* (подсматривание, собирание мусора, изъятие информационных носителей, подмена положений включателей режимов и т.п.) реализуется при прямом участии человека без использования любых специальных средств.

*Автоматизированный НСД* (рис. 14.2) осуществляется при постоянном участии оператора с использованием широкого спектра программных и аппа-

ратных средств, подключением дополнительных терминалов, использованием сетевых анализаторов и т.п.

*Автоматический НСД* реализуется без участия человека, как правило, с использованием специализированных программных средств, функционирование которых базируется на вирусных технологиях. Примером автоматического НСД может быть заражение компьютера вирусом во время подключения к глобальной сети Интернет без участия человека (рис. 14.3).

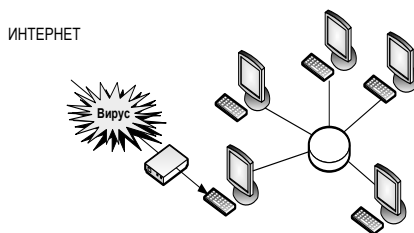
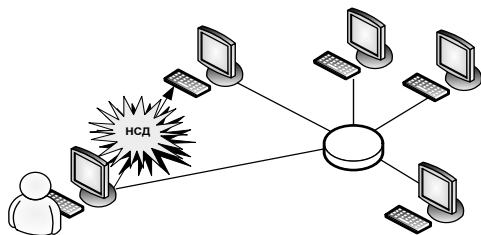


Рис. 14.2. Пример автоматизированного НСД Рис. 14.3. Пример автоматического НСД

*Постполитизационный НСД* базируется на использовании недостатков в уже реализованной политике безопасности. Такими недостатками могут быть неправильно построенные правила разделения доступа, использование программных и аппаратных средств с недостаточным уровнем защищенности, счета при блокировании каналов утечки информации с ограниченным доступом и т.п. Например, если пользователю и администратору сети предоставлены одинаковые права доступа к серверу, то неавторизованная сторона, получив права доступа пользователя 1, сможет реализовать НСД к информационным ресурсам на уровне прав администратора (рис. 14.4, а).

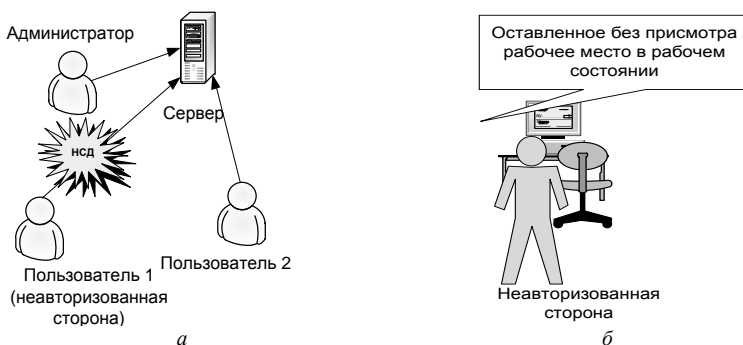


Рис. 14.4. Примеры постполитизационного и деполитизационного НСД

*Деполитизационный НСД* связан с ошибками и небрежностью, которые случаются при реализации мероприятий с обеспечением уже имеющейся политики безопасности. Это прежде всего связано с человеческим фактором (недостаточная административная поддержка, некорректное выполнение

функций защиты, несвоевременное реагирование на нештатные ситуации и т.п.). **Например**, если пользователь оставляет свое рабочее место, не придерживаясь политики безопасности (не заканчивает сеанс работы или не блокирует компьютер), то неавторизованная сторона за время его отсутствия имеет доступ к информационным ресурсам через некорректность выполнения пользователем функций защиты (см. рис. 14.4, б).

Если НСД к ресурсу осуществляется в локализованной области его расположения (локальная вычислительная сеть, рабочая станция, принтер, носитель информации, операционная система, приложения и т.п.), то он называется *локальным*, а в противоположном случае - *отдаленным*. **Например**, локальный НСД может быть реализованный внутри сегмента (физического объединения станций с помощью коммутационных устройств не выше от канального уровня). При этом источник НСД и ресурс, который подвергнулся несанкционированному действию, будут находиться в пределах одного сегмента. Примеры реализаций локального и отдаленного НСД изображены соответственно на рис. 14.5, а и 14.5, б. Локальный НСД реализуется неавторизованной стороной в одном сегменте сети, а несанкционированный доступ происходит через сеть Интернет.

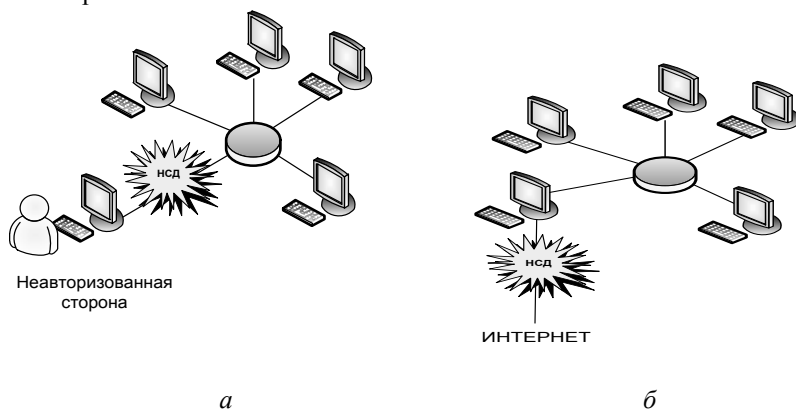


Рис. 14.5. Реализация локального и отдаленного НСД

*Межсегментный НСД* может быть примером отдаленного НСД, когда источник и ресурс находятся в разных сегментах компьютерной сети, например кампусной. В первом случае инициатором НСД бывает легальный пользователь, который, например, из файла-сервера через рабочую станцию осуществляет копирование конфиденциальных данных на внештатный носитель информации.

В результате своего действия (например, визуального просмотра данных из терминала) *пассивный НСД* не осуществляет непосредственного влияния на ресурсы и может не нарушить их характеристик безопасности, например при перехвате зашифрованных данных. В результате *активного НСД* на ресурсы осуществляется непосредственное влияние (изменение конфигурации, нарушение функциональности и т.д.) и поднимаются их характеристики безопасности. Практически все типы отдаленного НСД являются активными, т.е. такими, что делают принципиально возможным его выявление, поскольку в результа-

те непосредственного влияния, происходят определенные изменения. А пассивный НСД, в отличие от активного, не оставляет следов вмешательства. **Например**, перехват спутникового сигнала без его модификации является пассивным НСД (рис. 14.6).

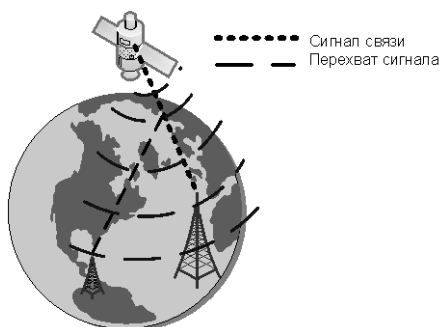


Рис. 14.6. Реализация пассивного НСД

Перехват сообщения неавторизованной стороной с дальнейшей его модификацией является активным НСД (рис. 14.7).



Рис. 14.7. Реализация активного НСД

*Условный НСД* инициализируется в случае возникновения определенного события (механизм логической бомбы) и, в свою очередь, может быть как пассивным, так и активным. Примером инициализации пассивного условного НСД может быть передача от потенциальной цели запроса определенного типа, который и будет условием начала атаки. Например, таким условием могут быть DNS- и ARP-запросы в стеке протоколов TCP/IP.

*Активный условный НСД* осуществляет постоянный мониторинг состояния отдельных ресурсов, и в случае определенного изменения указанного состояния формируется сигнал инициализации. Примером такой ситуации может быть событие, связанное с прерыванием сеанса работы пользователя с сервером без стандартной команды, например LOGOFF. Момент инициализации безусловного НСД не сопровождается определенным изменением состояния ресурсов и определяется источником атаки.



*Программный НСД* базируется на специальных микро- или макрокодированных средствах (например, суперзапинговых утилитах, внутренних командах, сценариях автоматизации и т.п.), которые функционируют в пределах информационных систем для реализации своих функций.

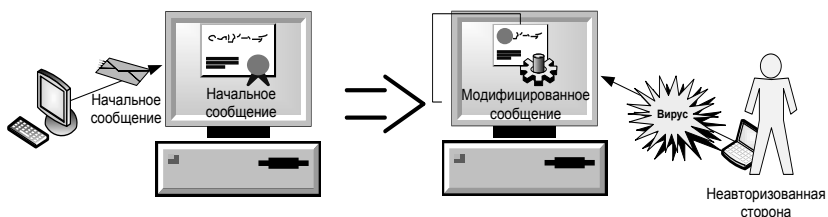


Рис. 14.8. Реализация программного НСД

Например, отдаленный компьютер (рис. 14.8) отправляет сообщение на рабочую станцию, к которой несанкционированно подключается неавторизованная сторона с помощью портативного компьютера и реализует заражение этой станции вирусом, который модифицирует указанное сообщение.

*Аппаратный НСД* базируется на разнообразных механических, электрических, электромеханических, электронных, электронно-механических и других устройствах, которые используются автономно или в объединении с другой аппаратурой для выполнения соответствующих функций.

*Нетипичный НСД* реализуется на базе средств, которые не принадлежат к аппаратным или программным, таким например, как взрывчатка, радиоактивные материалы, кислоты, щелочи, насекомые, грызуны и т.п.

В процессе реализации *НСД с обратной связью* нарушитель получает от ресурса, который подвергся несанкционированным действиям, ответ на эти действия, чтобы в дальнейшем осуществлять НСД на более эффективном уровне благодаря анализу реакций объекта НСД на те или другие изменения.

Примером НСД с обратной связью является сканирование портов специальным программным обеспечением (рис. 14.9).

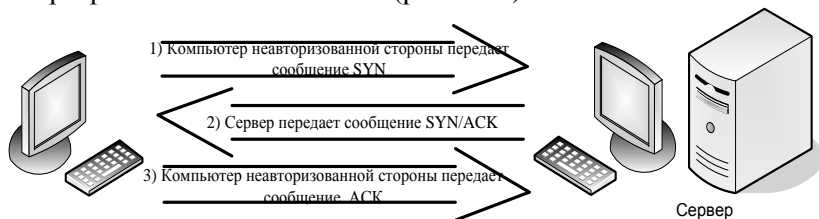


Рис. 14.9. Реализация НСД с обратной связью

Во время сканирования на порты сервера отправляется пакет синхронизации SYN. Если на это сообщение приходит ответ (обратная связь) в виде пакета SYN/ACK, то это означает, что сканированный порт находится в состоянии ожидания и можно выполнять следующее действие.

НСД без обратной связи реализует свои действия независимо от реакции ресурса, который подвергнулся несанкционированным действиям. Примером таких несанкционированных действий есть отказ в обслуживании. Например, блокирование маршрутизатора (рис. 14.10), что приводит к отказу в обслуживании. При реализации НСД происходит нарушение основных характеристик

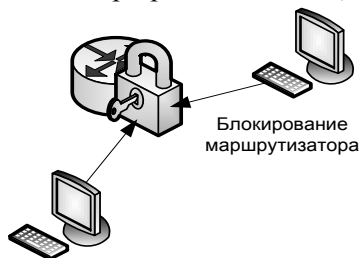


Рис. 14.10. Реализация НСД без обратной связи

безопасности ресурсов информационных систем:

*конфиденциальность* - характеристика безопасности ресурсов, отражающая их свойство доступности без соответствующих полномочий. Фактически ресурсы не могут быть доступными (или раскрытыми) неавторизованной стороне, т.е. для нее их якобы нет. В свою очередь, авторская сторона (например, обслуживающий персонал, пользователь, программы), с соответствующими полномочиями, имеет полный доступ к ресурсам;

*целостность* - характеристика безопасности ресурсов, отражающая их свойство противостоять несанкционированному изменению. Например, пользователь, нагромождающий информацию, имеет право ожидать, что содержимое его файлов останется неизменным несмотря на целенаправленные влияния, отказы программных или аппаратных средств. По этой характеристике ресурсы не испытывают изменений со стороны неавторизованной стороны;

- *доступность* - характеристика безопасности ресурсов, отражающая возможности их использования в заданный момент времени соответственно предоставленным полномочиям. Фактически авторская сторона в любой момент времени получает неограниченный доступ к необходимому ресурсу.

В этом контексте по типу нарушений указанных характеристик НСД бывает: К-действенный (нарушение конфиденциальности ресурсов); Ц-действенный (нарушение целостности ресурсов); Д-действенный (нарушение доступности ресурсов). Если в процессе НСД нарушаются разные характеристики безопасности, то результирующий тип будет комбинированным на базе основных, например КЦД-действенный НСД, нарушающий конфиденциальность, целостность и доступность ресурсов.

По природе взаимодействия с ресурсами информационной системы НСД бывает *физическим* и *логическим*. Для первого характерна физическая форма взаимодействия в виде разного рода прямых блокирований, повреждений, проникновений, краж и т.п., например: размыкание электрических соединений, повреждение носителей информации, разукомплектование, преодоление физической границы защиты, подслушивание, перехват побочных электромагнитных излучений и наведений и т.п.

**Примером** физической формы НСД могут быть перехваты побочных электромагнитных излучений из монитора компьютера специализированной аппаратурой

(рис. 14.11).

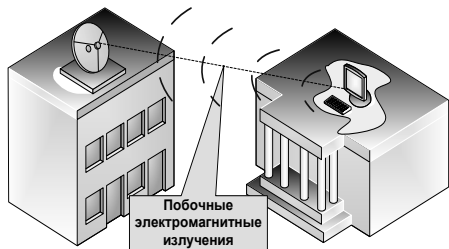


Рис. 14.11. Реализация физического НСД

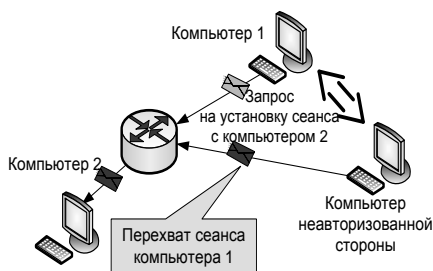


Рис. 14.12. Пример логического НСД

Логическому НСД не присуще прямое физическое взаимодействие с ресурсами. Речь идет о вмешательстве в логику событий, например, анализ протоколов, переписка, определение паролей, перехваты сеансов связи (рис. 14.12) и т.п.

*Монономный НСД* реализуется с одного источника на другой конкретный ресурс. Такой НСД называют также *нераспределенным*. Например, монономный НСД можно реализовать с помощью сканирования портов компьютера с определенным IP-адресом (рис. 14.13).

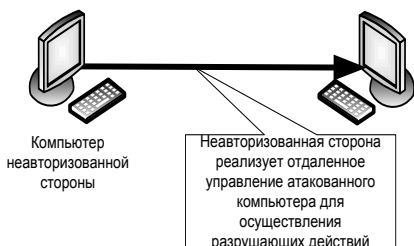


Рис. 14.13. Пример монономного НСД

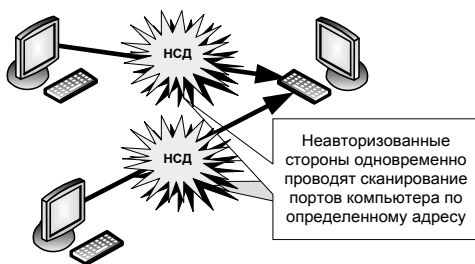


Рис. 14.14. Пример полиномного НСД

*Полиномный НСД* осуществляется одновременно с нескольких (двух и больше) источников на один ресурс и направленный на достижение одной конкретной цели. Такой НСД называют также *распределенным* (рис. 14.14).

*Монополичный НСД* реализуется с одного источника одновременно на несколько (два и больше) ресурсов и направляется на достижение конкретной цели (рис. 14.15).

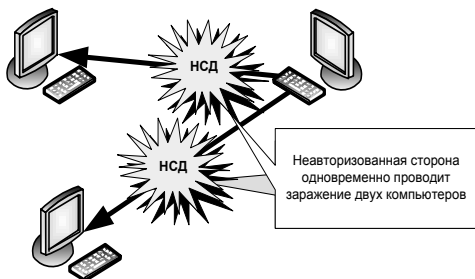


Рис. 14.15. Пример монополичного НСД

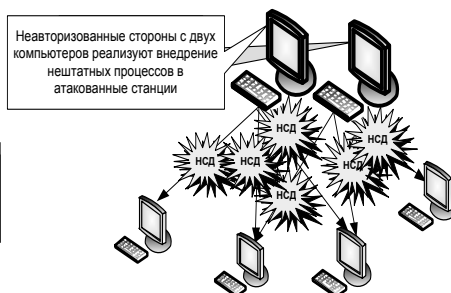


Рис. 14.16. Пример полиполичного НСД

*Полиполичный НСД* объединяет в себе *полимономную* и *монополичную* технологии, согласно которым множество источников осуществляет НСД на множество ресурсов, чтобы достичь одной конкретной цели (рис. 14.16).

*Фрагментированный НСД* базируется на принципе декомпозиции и поэтапной реализации, например на использовании механизма разбивки IP-пакетов (на множество мелких) и дальнейшей их передаче (рис. 14.17).



Рис. 14.17. Пример фрагментированного НСД

Такое фрагментирование дает возможность обходить системы выявления атак, которые не рассчитаны на противодействие декомпозиционным технологиям.

НСД, реализующийся без использования значений по умолчанию (**например**, программная закладка BackOffice по умолчанию использует порт 31337, но это значение можно изменить, например на 31336), ориентирован на преодоление систем выявления атак, базирующихся на сигнатурных (шаблонных) технологиях по аналогии с антивирусами или программами, предназначенными для защиты от сигнатурных вирусов.

Скрытые атаки используют разнообразные мероприятия (подмена контрольных сумм, перехват разнообразных данных, модификация ядра операционной системы, использование стандартных или похожих на стандартные имен и т.п.), которые дают возможность оставаться невыявленными в локализованной области атакованного ресурса. Технология *скрытого НСД* по своей идеологии подобна технологии *стелс-вирусов*.

*Пигибекинговский НСД* базируется на НСД к временно неконтролируемому ресурсу, например путем проникновения в информационную систему в результате временного отсутствия или после некорректного завершения сеанса работы легального пользователя.

*Маскарадный НСД* базируется на формировании такого поведения нарушителя, которое дает ему возможность выдать себя легальным источником, например посредством обмана (spoofing) атаковать вычислительную сеть (с протоколом ТС/IP), присваивая IP-адрес, с помощью которого удастся обойти систему защиты.

*Косвенный НСД* базируется на том, что нападение осуществляется через

третье лицо (посредника), а истинный источник нападения остается неизвестным. При этом часто используются маскарадные технологии (рис. 14.18).

*Социотехнический (социоинженеринговый) НСД* связан с получением данных (например, имен пользователей, паролей, телефонных номеров отдаленного доступа и т.п.) от атакованных объектов в процессе информационного обмена (рис. 14.19).

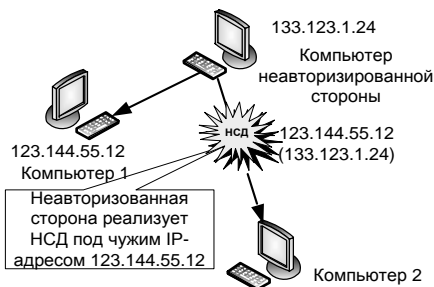


Рис. 14.18. Пример косвенного НСД

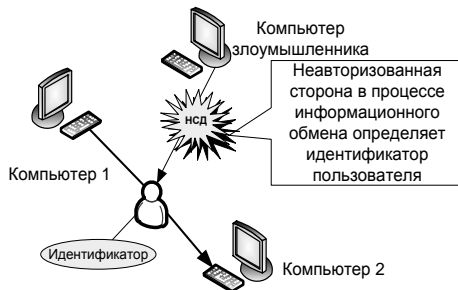


Рис. 14.19. Пример социотехнического НСД

*Криптоаналитический НСД* базируется на использовании широкого спектра криптоаналитических методов и средств для взлома ресурсов, защищенных разными криптографическими средствами.

К неспецифичным категориям НСД принадлежат те, которые не имеют указанных особенностей реализации. При этом следует учитывать, что технологии НСД постоянно развиваются, т.е. соответствующие возможности будут расширяться.

*Расширяющий НСД* (рис. 14.20) сориентирован на получение больших полномочий на права доступа к ресурсу, например, на вход в локальную вычислительную сеть с правами администратора, получение доступа на запись к полям баз данных, изменение атрибутов файлов и т.п.



Рис. 14.20. Пример реализации расширяющего НСД

*Искажаемый НСД* связан с осуществлением любых прямых изменений в целевом ресурсе (например, подделка полей баз данных, подмена информационных носителей, изменение времени и дат и т.п.).

*Перегрузочный НСД* направлен на загрузку ресурса до такого уровня, что он становится непригодным для использования. Результатом таких несанкциониро-

ванных действий может быть невозможность использования, перегрузка, препятствование использованию (отказ в обслуживании) и т.п. **Примером** такого НСД (рис. 14.21) может быть перегрузка маршрутизатора.



Рис. 14.21. Реализация перегрузочного НСД

*Информационный НСД* связан со сбором необходимых данных (как правило, для реализации дальнейших действий) и не предусматривает осуществления прямого НСД к ресурсу. **Например**, получение информации в результате анализа публикаций, использование системных утилит для выявления активных рабочих станции, сервисов и т.п. (рис. 14.22).

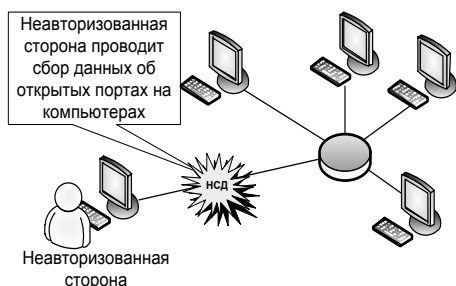


Рис. 14.22. Пример информационного НСД



Рис. 14.23. Пример задерживающего НСД

*Распространительный НСД* направлен на получение доступа к ресурсу и его раскрытие без соответствующих полномочий, например несанкционированное получение файла данных с паролями и их публикация на хакерских сайтах или рассылка среди абонентов вычислительной сети.

*Разворовывающий НСД* состоит в использовании ресурса без нанесения прямого убытка, например без снижения качества обслуживания пользователей осуществляется временное изъятие части памяти (для расширения возможностей другой системы), загрузка телекоммуникационных каналов, использование рабочей станции или сетевого сервиса и т.п.

*Задерживающий НСД* предназначен для временной задержки ресурса с целью снижения его актуальности. **Например**, задержка шифрограммы на промежуточном узле при ее передаче телекоммуникационными каналами общего пользования (рис. 14.23).

*Уничтожающий НСД* ориентирован на безвозвратную ликвидацию ре-

сурса, например изъятие файла, измельчение информационного носителя, низкоуровневое форматирование жесткого диска с целью уничтожения данных и т.п. (рис. 14.24).

*Простой НСД* (рис. 14.25) означает несложные в реализации действия, направленные на выполнение отдельных процедур (сканирование портов, анализ трафика, поиск активных рабочих станций, отдаленное управление и т.п.)

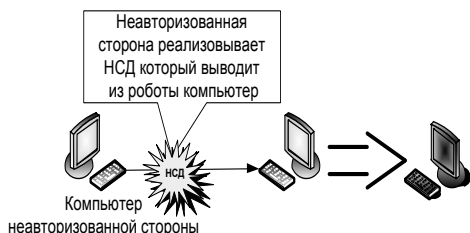


Рис. 14.24. Пример уничтожающего НСД



Рис. 14.25. Пример простого НСД

*Сложный НСД* является комбинацией простого НСД, предназначенного для реализации ряда необходимых функций, например выявление активной рабочей станции и действий относительно отдаленного управления ею.

*Системный НСД* строится на основе сформированного системного подхода с многошаговой комбинацией действий в сочетании с простым НСД для эффективной реализации специально направленного комплекса функций. Например, это может быть поиск активных рабочих станций, мониторинг трафика, сканирование, взлом ОС и рабочих приложений, несанкционированное копирование данных и заметание следов.

*Международная организация стандартизации (ISO)* предложила семиуровневую эталонную модель с целью разделения функций разных протоколов в процессе передачи информации от одного абонента другому. Таких классов функций выделено семь. Они получили название уровней, каждый из которых выполняет определенные задачи в процессе передачи блока информации, причем соответствующий уровень со стороны приемника тем, которые выполнены на этом уровне на передающей стороне (источнике). В этой связи *НСД по семиуровневой эталонной модели* можно определить как:

- физический НСД, кодирующийся параметром  $K0(2) = 20$ ;
- канальный НСД, кодирующийся параметром  $K1(2) = 21$ ;
- сетевой НСД, кодирующийся параметром  $K2(2) = 2^2$ ;
- транспортный НСД, кодирующийся параметром  $K3(2) = 23$ ;
- сеансовый НСД, кодирующийся параметром  $K4(2) = 24$ ;
- представление данных, кодирующееся параметром  $K5(2) = 25$ ;
- прикладной НСД, кодирующийся параметром  $K6(2) = 2^6$ .

На физическом уровне обеспечиваются необходимые механические, электрические, функциональные и процедурные характеристики для установления, поддержания и размыкания физического соединения.

На *канальном уровне* обеспечиваются функциональное и процедурное средства для установления, поддержания и высвобождения линий передачи данных между абонентами сети (терминалами и узлами сети).

На *сетевом уровне* обеспечиваются функциональное и процедурное средства для обмена служебной информацией между двумя объектами транспортного уровня сети (т.е. устройствами, которые поддерживают протоколы на транспортном уровне с помощью сетевого соединения). Гарантируется независимость поведения объектов транспортного уровня от схемы маршрутизации и коммутации. На *транспортном уровне* обеспечивается оптимизация коммутационного обслуживания (поддерживаемого реализацией более низких уровней связи) с помощью прозрачной передачи данных между абонентами в рамках сеанса.

На уровне *представления данных* обеспечивается совокупность служебных операций, которые можно выбрать на прикладном уровне для интерпретации переданных и получаемых данных. Эти служебные операции содержат управление информационным обменом, отображение данных и управление структурированными данными. Служебные операции этого уровня представляют собой основу всей семиуровневой модели и дают возможность связывать в единое целое терминалы и средства вычислительной техники любых типов.

На *прикладном уровне* обеспечивается непосредственная поддержка прикладных процессов и программ конечного пользователя и управление взаимодействием этих программ с разными объектами сети передачи данных.

С НСД связаны такие понятия, как *доступ* и *перехват*. Под *доступом* (access) понимают взаимодействие между ресурсами информационных систем, которое обеспечивает передачу информации между такими ресурсами, а в процессе доступа к информации (access to information) реализуются, в частности ее копирование, модификация, уничтожение, инициализация и т.п. Различают *несанкционированный* и *санкционированный доступы*. Если доступ к ресурсам системы осуществляется, например, с нарушением или вне правил размежевания доступа, то такой доступ - *несанкционированный*. Одним из базовых действий, которое порождает НСД, являются перехваты (intercept), под которыми понимают *несанкционированное* получение информации незаконным подключением к каналам связи (например, прямой перехват) визуально (например, подсматривание) или с помощью радиотехнических средств (например, косвенный перехват).

По действию на информацию различают *активный* и *пассивный перехваты*, а по типу подключения - *прямое* и *косвенное*.

*Активный перехват* (active eavesdropping) - это такой перехват, во время которого у неприятеля есть возможность не только перехватывать сообщение, а и влиять на него, например задерживать или изымать сигналы, которые передаются по каналам связи.

*Пассивный перехват* (passive tapping) - получение информации с воз-



возможностью только наблюдать за обменом сообщениями (например, с целью выявления разнотипной системной информации в вычислительной сети (ВС)), не влияя на него.

*Прямой перехват* (direct eavesdropping) - перехват информации при непосредственном подключении (например, дополнительного терминала) к линии связи. Прямой перехват можно обнаруживать проверкой линии связи.

*Косвенный перехват* (indirect eavesdropping) - перехват информации (например, индуктивных волн) без использования непосредственного подключения к линии связи (threat). Такой перехват тяжело определить, поскольку нет непосредственного присоединения терминального оборудования к линии связи.

**Разрушительные программные влияния.** *Разрушительное программное влияние* - это программный код или его части, с помощью которых осуществляется угроза хотя бы одной характеристике безопасности определенных ресурсов информационных систем. Разрушительные влияния можно поделить на такие группы: компьютерные вирусы (вирусы), логические бомбы, тайные ходы и лазейки; программы раскрытия паролей, репликаторы, сетевые программные анализаторы, суперзапинговые утилиты, троянские кони.

**Вирус.** Программа, способная к многократному самовольному созданию своего тела, которая по обыкновению модифицирует (заражает) другие программы, записанные в файлах или системных областях, для дальнейшего воспроизведения нового тела и получения управления с целью модификации записей, уничтожения файлов, загрузки ресурсов и выполнения других разрушительных влияний в информационной системе.

**Логические бомбы.** Программа, которая инициируется с возникновением разных событий, например открытие определенного файла, обработка заданных записей и другие действия с целью нарушения безопасности ресурсов информационных систем. Используются, например, для разворовывания с помощью изменения определенным образом (в свою пользу) кода программы, которая реализует финансовые операции.

**Тайный ход.** Уязвимость в системе, которую специально создал разработчик или которая возникла случайно и фактически является дополнительным способом проникновения в систему.

**Программы раскрытия паролей.** Программы по обыкновению предназначены для угадывания паролей (например, архивированных файлов) подбором вариантов, возможных для использования символов или проникновение в систему с помощью словаря. Программы, которые основываются на последнем методе, осуществляют взлом системы парольной защиты подбором элементов одного или нескольких словарных файлов, сложенных специально или взятых из серверов или жестких дисков локальных станций.

**Репликаторы.** Программы, которые при выполнении создают несколько своих копий в информационной системе. Например, когда репликатор создает только одну копию и после этого выполняет ее, то память системы быстро переполняется, чем ограничивается доступ к определенным компонентам системы.

**Сетевые анализаторы.** Программно-аппаратные средства (в отдельных случаях программы, которые запускаются из рабочей станции, подключенной к сети), предназначенные для считывания любых параметров потока данных в информационной системе.

**Суперзапинг.** Разрушительное влияние, связанное с несанкционированным использованием утилит для модификации, уничтожения, копирования, раскрытия, вставки, применения или запрета применения данных информационной системы.

**Троянские кони.** Специализированная программа, которая, как правило, выступает от лица других программ и разрешает действия, отличные от определенных в спецификации, которые используются программным обеспечением.

Со временем этот перечень может дополняться новыми составляющими, поскольку уровень роста программного и аппаратного обеспечения настолько интенсивный, что его даже тяжело спрогнозировать.

Некоторые из разрушительных программных влияний, **например** логические бомбы или троянские кони, могут быть реализованы в виде программных закладок («жучков»), которые умышленно внедряются в тело определенных программ с целью реализации разрушительных действий на характеристики безопасности ресурсов информационных систем. Например, в командный процессор операционной системы можно установить программную закладку, которая является резидентной, выполняет функции логической бомбы (активизируется во время запуска DISKREET.EXE с нортоновских утилит) и назначается для записи в определенное место на диске (по обыкновению сектор, помеченный как сбойный) паролей, которые вводятся из клавиатуры. В этом случае такая закладка нарушает не только целостность командного процессора, а и конфиденциальность данных, которые передаются к нужной утилите с клавиатуры.

## 14.2. Средства защиты от несанкционированного доступа

Индустрия современных средств защиты информации от НСД определяется широким номенклатурным арсеналом. Такие средства с практической точки зрения можно поделить на такие классы: аппаратные, программные, программно-аппаратные, криптографические, стенографические, организационные, законодательные и морально-этические.

Базовые требования к любому средству защиты информационных систем можно разбить на пять категорий (рис. 14.26).

**Аппаратные средства** - разнообразные механические, электрические, электромеханические, электронные, электронно-механические и другие устройства и системы (например, источники бесперебойного питания, криптографические вычислители, электронные идентификаторы и ключи, устройства для выявления «жучков», генераторы шума и т.п.), функционирующие автономно или встраиваемые или соединяющиеся с другой аппаратурой с целью блокирования действий дестабилизирующих факторов и решения

других задач защиты информации.



Рис. 14.26 Базовые требования к средствам защиты информационных систем

*Программные средства* - специальные программы (например, антивирусы, шифрование данных, реализация алгоритмов цифровой подписи, разделение доступа, оценки рисков, определение уровня безопасности, организация экспертиз и т.п.), которые функционируют в пределах информационных систем для решения задач защиты информации.

*Программно-аппаратные средства* - взаимосвязанные аппаратные и программные средства (например, банковские системы электронных платежей, информационные системы конфиденциальной связи, автоматизированные системы контроля доступа персонала и транспортных средств в режимные зоны и т.п.), функционирующие автономно или в составе других систем с целью решения задач защиты информации.

*Криптографические средства* - средства, предназначенные для защиты информации путем криптографического преобразования информации (шифрование, дешифровка), которое реализуется с помощью асимметричных или симметричных криптографических систем. Асимметричные криптографические системы базируются на криптографии с открытым ключом. Например, известнейшими практическими реализациями этого типа являются системы Диффи - Хеллмана, RSA и Эль-Гамала. Симметричные криптографические системы базируются на криптографии с секретным ключом, наиболее известным из которых является, например, DES и т.п.

Практическое использование современных криптографических средств тесно связано с фундаментальными исследованиями в этой области и осуществляется через соответствующие аппаратные, программные и аппаратно-программные средства, например системы Тессера, Клиппера, Криптона и т.п. Следует отметить, что с этим классом средств тесно связан криптоанализ, эффективно используемый для испытания надежности криптографических систем.

*Стеганографические средства* сориентированы на утаивание информации в такой форме, когда сам факт ее наличия не очевиден, например утаи-

вание данных в звуковых или графических файлах, которые входят в состав ОС Windows.

*Организационные средства защиты информации* - это множество процессов и действий (например, контроль за утилизацией носителей информации с ограниченным доступом, планирование мероприятий по восстановлению утраченной информации, аудит систем защиты, реализация экспертиз и т.п.), осуществляемых на всех технологических этапах (проектирование, изготовление, модификация, эксплуатация, утилизация и т.п.) и ведущих к созданию, усовершенствованию, упорядочению и согласованности взаимосвязей и взаимодействию их компонент с целью решения задач защиты информации. Разрабатывая организационные средства, необходимо учитывать, чтобы в общем множестве механизмов защиты они могли самостоятельно или в комплексе с другими средствами решать задачи защиты, обеспечивать эффективное использование средств других классов, а также рационально объединять все средства в единую целостную систему защиты. Следует отметить, что множество всех нужных и потенциально возможных организационных средств не определены и не существует формальных методов формирования их перечня и содержания. Учитывая это, основными методами формирования организационных средств можно считать лишь неформально-эвристические.

*Законодательные средства защиты информации* являются множеством нормативно-правовых актов (конвенции, законы, указы, постановления, нормативные документы и т.п.), действующих в определенном государстве и обеспечивающих юридическую поддержку для решения задач защиты информации. Вообще с помощью законодательных средств определяются права, обязанности и ответственность относительно правил взаимодействия с информацией, нарушение которых может повлиять на состояние ее защищенности. В мировой практике основу указанных средств составляют патентное и авторское право, национальные законы о государственной тайне и обработке информации в информационных системах, лицензирование, страхование, сертификация, классификационные нормативные документы и т.п.

*Морально-этические средства* - моральные нормы и этические правила, которые сложились в обществе, коллективе и объекте информационной деятельности, нарушения которых отождествляется с несоблюдением общепринятых дисциплинарных правил и профессиональных идеалов. Примером таких средств может быть кодекс чести, этикет, этика хакера и т.п.

**Категории средств защиты программного обеспечения.** Как показывает практика, наиболее дорогой составляющей информационной системы есть ее программное обеспечение. Поэтому разработка программных средств защиты информации для защиты программного обеспечения с практической точки зрения - наиболее привлекательные задачи. Вопрос защиты программного обеспечения от хакеров (относительно его копирования и динамических

и статических исследовательский приемов) острее возникает перед его разработчиками и владельцами. Из системных позиций защита программного обеспечения осуществляется целым комплексом средств, который начинается законодательными актами и заканчивается конкретными аппаратными разработками. Известны такие категории средств защиты программного обеспечения (рис. 14.27): собственные, в составе информационной системы, с запросом информации, активные и пассивные.

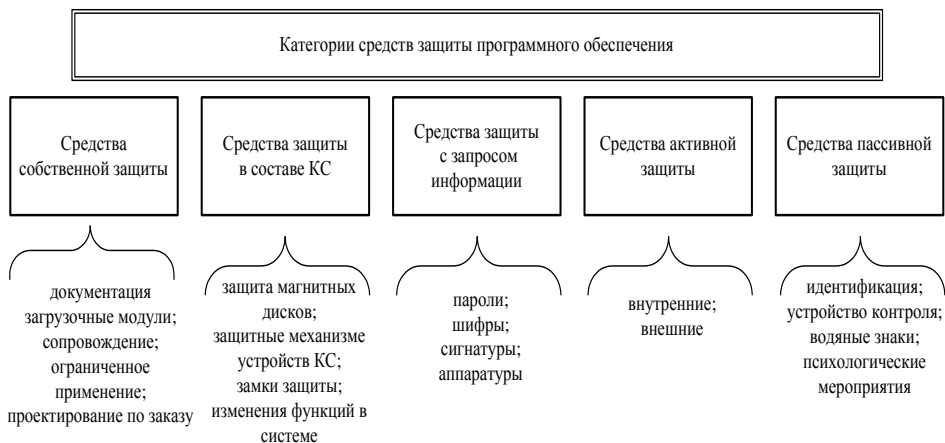


Рис. 14.27. Категории средств защиты программного обеспечения

*Средства собственной защиты* определяют элементы защиты, которые содержатся в самом программном обеспечении или сопровождают его. К ним относятся документация, распространение продукции в виде исполнительных модулей, сопровождение программ разработчиком, ограничение применения, проектирование на заказ, встроенные идентификационные метки владельца и авторское право.

К *средствам защиты в составе информационных систем* относят защиту магнитных дисков, защитные механизмы самых устройств информационных систем, замки защиты доступа и изменение функции в системе.

Среди механизмов защиты магнитных дисков нужно выделить две группы:

1. Препятствие непосредственному копированию программ из диска на диск.
2. Защита программ от реассемблирования и настройщиков.

Реассемблеры и настройщики дают возможность подать программу в форме, более доступной для восприятия, а также помогают выучить логику защиты и оперативно осуществить модификацию программ. Первая группа защищает программу от несанкционированного воспроизведения, вторая - от несанкционированной ревизии. Эти группы не взаимосвязанные, поскольку программы, предназначенные для свободного распространения, могут быть защищены от настройщиков и реассемблеров, и, наоборот, разные программные

продукты могут быть защищены не только от копирования. Наиболее надежная защита обеспечивается одновременным применением двух групп, поскольку ее преодоление в программе, скопированной из защищенного диска, будет связано с преодолением защиты второй группы. Итак, программы, защищенные от настройщиков и реассемблеров, которые содержатся на стандартном диске, могут быть легко скопированы, а те, что расположены на защищенном диске и не содержат второй группы, могут быть легко изучены и модифицированы с целью преодоления механизмов защиты.

Программы, которые используют *средства защиты с запросом информации* для дальнейшего выполнения предназначенных функций, осуществляют запрос на введение дополнительной информации, представленной, например, в виде ключевых слов. В структуру указанных средств входят пароли, криптографические шифры, сигнатуры на основе уникальных характеристик информационных систем и аппаратуры защиты.

*Средства активной защиты* разделяют на внешние и внутренние; они активизируются в случае возникновения определенных (нештатных) обстоятельств, подпадающих под контроль, например неправильно введенные пароли, исчерпанное время пользования или количество запусков, неправильная контрольная сумма участков программы и т.п.

*Средства пассивной защиты* охватывают методы идентификации программ, устройства контроля событий, водяные знаки, которые препятствуют созданию копии, и психологические мероприятия. С помощью этих средств осуществляется подтверждение подлинности, контроль доступа, поиск доказательств несанкционированного копирования и т.п.

*Программные средства защиты* являются важнейшей и необходимой частью механизма защиты современных информационных систем и могут быть как автономными, так и входить в состав разного программного обеспечения. Это прежде всего связано с такими их свойствами, как универсальность, гибкость, надежность, простота реализации, возможность модификации и усовершенствование. С универсальностью связана решаемость широкого круга задач защиты программными средствами. Гибкость ассоциируется с тем, что они могут адаптироваться к конкретным условиям функционирования информационных систем, а также к структуре информационных систем, например быть составной частью ОС, функционировать как самостоятельные пакеты программ защиты, распределяться между отдельными компонентами системы и т.д. С надежностью связана высокая программная стойкость в случае продолжительной непрерывной работы и удовлетворение высоких требований относительно достоверности влияний управления при наличии разных дестабилизирующих факторов. Простота реализации программных средств защиты очевидна сравнительно с возможностью реализации любых других средств. Возможности их модификации и усовершенствования определяются самой природой. Основными недостатками их использования является то, что они дополнительно загружают процессор, что приво-

дит к увеличению времени реагирования на запросы и, соответственно, к уменьшению эффективности работы, а также к уменьшению емкости доступной и внешней оперативной памяти.

Следует отметить, что индустрии этого направления присуща стихийность развития программ защиты, которая, с одной стороны, не дает гарантий полноты имеющихся средств, а с другой - не исключает дублирования тех самых задач защиты. Учитывая изложенное, можно выделить три принципиально важных требования к формированию программных средств защиты: *функциональная полнота, гибкость и унифицированность использования.*

*Принцип сквозного модульного построения* заключается в том, что каждую из программ любого уровня (объема) подают в виде системы модулей, каждый из которых должен быть целиком автономным и иметь стандартные вход и выход, которые обеспечивают комплексирование с любыми другими модулями.

*Представление машиннезависимым языком* означает, что программные модули должны быть такими, чтобы их с минимальными усилиями можно было включать в состав программного обеспечения любой информационной системы. Полную универсализацию представления модулей можно обеспечивать представлением их в виде блок-схемы, детализированной настолько, чтобы каждый блок можно было реализовывать малым количеством операторов наиболее распространенных языков высокого или низкого уровня.

### 14.3. Моделирование систем и процессов защиты информации

В процессе развития теории и практики информационной безопасности сформировались *эмпирический, теоретический и теоретико-эмпирический методологические подходы* к оценке уязвимости информации.

Суть *эмпирического* подхода заключается в том, что на основе продолжительного сбора и обработки данных реальных проявлений угроз информации и размеров причиненного убытка исключительно эмпирическим путем устанавливаются зависимости между потенциально возможным убытком и коэффициентами, которые характеризуют частоту проявления соответствующей угрозы и значение размера убытка.

Исходной предпосылкой при разработке моделей являются предположения, что при нарушении защищенности информации наносится некоторый убыток, а обеспечение защиты информации связано с затратами. Ожидаемую стоимость защиты можно определить суммой затрат на защиту и убытками от ее нарушения (рис. 14.28). Очевидно, что оптимальным решением является выделение средств на защиту информации в размере  $B_{\text{опт}}$ , поскольку именно при этом обеспечивается минимизация общей стоимости защиты информации. Для того чтобы воспользоваться этим подходом к решению проблемы, необходимо определить ожидаемые потери от нарушения защищенности информации и зависимость между уровнем защищенности и затратами на ее защиту.



Рис. 14.28. Стоимость защиты информации

Затраты, которые обеспечивают необходимый уровень защищенности, зависят от полного множества угроз информации, потенциальной опасности от реализации каждой из них и размеров затрат, необходимых для их нейтрализации. Поскольку оптимальный уровень затрат на защиту отвечает уровню ожидаемых убытков от нарушений безопасности, то достаточно определить только уровень убытка. Ожидаемые убытки от  $i$ -й угрозы информации можно определить по известной эмпирической зависимости  $R_i = 10^{(S_i + V_i - 4)}$ , где  $S_i$  и  $V_i$  — коэффициенты, которые характеризуют возможную частоту возникновения соответствующей угрозы и значение возможного убытка при ее возникновении. Значение этих коэффициентов было определено на основе заключений экспертов.

Ожидаемая частота появления угрозы	$S_i$	Значение возможного убытка при возникновении угрозы (USD)	$V_i$
почти никогда	0	1	0
1 раз в 1000 лет	1	10	1
1 раз в 100 лет	2	100	2
1 раз в 10 лет	3	1000	3
	....	10000	4
	....	100000	5
2 раза в неделю	6	1000000	6

Суммарный убыток определяется выражением  $R_i = \sum_{V_i} \alpha_i V_i$ , где  $\alpha_i$  — весовой коэффициент.

Рассмотренная модель является достаточно приближительной, а увеличение ее адекватности приводит к сложным аналитическим выкладкам, которые базируются на методах теории вероятностей и принятия решений.

**Модель с полным перекрытием.** Развитием моделей оценки угроз информационных систем являются модели их нейтрализации, т.е. модели защиты, наиболее общей из которых есть модель *системы с полным перекрытием*.



ем. Построение этой модели базируется на том, что в механизме защиты должно содержаться, по крайней мере, одно средство для перекрытия любого потенциально возможного канала утечки информации. Рассмотрим методику формального описания моделирующей системы.

1. Составляется полный перечень объектов  $O$  системы, которые подлежат защите.

2. Составляется полный перечень потенциально возможных угроз  $T$  информации.

3. Составленные таким образом множества объединяются в двудольный граф с соблюдением условия: ребро  $\langle t_i, o_j \rangle$  существует тогда и только тогда, когда угроза  $t_i$  есть реальной для объекта  $o_j$ .

4. Для каждого ребра в графе определяется количественная мера соответствующей угрозы для соответствующего объекта.

5. Формируется множество  $M$  средств защиты информации в вычислительной системе.

6. Определяется количественная мера возможности противодействия каждого средства защиты каждой из угроз. Если возможность противодействия превышает уровень угрозы, соответствующее ребро графа исключается.

Если множество  $M$  такое, что устраняются все ребра графа, то такая система является **системой с полным перекрытием**.

Одной из разновидностей *теоретически* строгих моделей являются модели систем разделения доступа к ресурсам информационных систем.

В общем случае сущность этих моделей можно описать так. Информационная система является *системой множественного доступа*, т.е. к тем самым ее ресурсам имеет права доступа некоторое количество пользователей (процессов). Если любые из указанных ресурсов защищаются, то доступ к ним осуществляется лишь при наличии соответствующих полномочий. При этом система разделения доступа является механизмом, который регулирует такой доступ. По этому механизму не должен быть разрешен доступ пользователям (процессам), которые не имеют на это полномочий, и не должно быть отказано в доступе пользователям (процессам), которые имеют соответствующие полномочия.

Рассмотрим *теоретико-эмпирический* подход к оценке информации.

По определению, базовым есть показатель уязвимости информации в одном структурном ресурсе информационной системы относительно одного дестабилизирующего фактора и относительно одного нарушителя одной категории (для факторов, связанных с преступными действиями людей).

Для определения базовых показателей уязвимости разных видов применяются аналитические модели, которые дают возможность определять искомые величины (в данном случае - показатели впечатлительности информации) путем проведения вычислений по заранее установленным (выведенным) зависимостям.

Приведем некоторые аналитические модели.

1. **Нарушение физической целостности информации.** Введем такие

обозначения:  $P_{i \text{ вх}}^{(u)}$  - вероятность того, что на вход  $i$ -го структурного компонента поступает информация с затронутой целостностью;  $P_{ijk}^{(u)}$  - вероятность того, что целостность информации (обрабатываемой, сохраненной, переданной), которая содержится в  $i$ -м структурном компоненте, будет затронута под влиянием  $j$ -го дестабилизирующего фактора  $u$  (в случае преступных действий людей) относительно одного нарушителя  $k$ -й категории. Для тех дестабилизирующих факторов, которые не связаны с преступными действиями людей, индекс  $k$  игнорируется, т.е. значения  $P_{ijk}^{(u)}$  для всех  $k$  одинаковые и зависят только от  $i$  и  $j$ ;  $P_{ijk \text{ вых}}^{(u)}$  - вероятность того, что целостность исходной из  $i$ -го компонента информации нарушена под влиянием  $j$ -го дестабилизирующего фактора  $u$  (в случае преступных действий людей) относительно одного нарушителя  $k$ -й категории (относительно индекса  $k$  исполняется высказанное только что замечание).

Соответственно теореме умножения вероятностей случайных событий величину  $P_{ijk \text{ вых}}^{(u)}$  (нарушение целостности исходной информации) можно представить зависимостью  $P_{ijk \text{ вых}}^{(u)} = 1 - (1 - P_{i \text{ вх}}^{(u)})(1 - P_{ijk}^{(u)})$ .

Раскрыв скобки и выполнив тождественные преобразования, окончательно получим

$$P_{ijk \text{ вых}}^{(u)} = P_{i \text{ вх}}^{(u)} + [1 - P_{i \text{ вх}}^{(u)}] P_{ijk}^{(u)} P. \quad (14.1)$$

Графически эта зависимость представлена семейством кривых, приведенных на рис. 14.29.

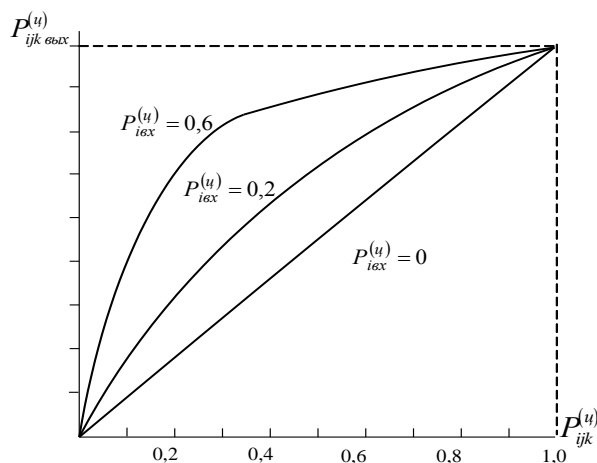


Рис. 14.29. График значений базовой вероятности нарушения физической целостности информации

Как видим, на эту модель есть определенные ограничения. Здесь предполагается, что разные дестабилизирующие факторы влияют на информацию независимо друг от друга, а процесс нарушения целостности ресурсов информационной системы не зависит от того, затронута ли целостность информации, которая поступает на его вход.

Поэтому правомерность использования такой модели необходимо обосновать. События  $P_{ijk}^{(u)}$  являются сложными с той точки зрения, что для их осуществления необходимо одновременное проявление соответствующего дестабилизирующего фактора и собственно нарушение целостности информации вследствие его действия. Если вероятность первого события обозначить через  $P_{ijk}^{(u, n)}$ , а второго - через  $P_{ijk}^{(u, h)}$ , то  $P_{ijk}^{(u)} = P_{ijk}^{(u, n)} \cdot P_{ijk}^{(u, h)}$ . Подставляя это значение в формулу (14.1), получаем  $P_{ijk \text{ вых}}^{(u)} = P_{i \text{ вх}}^{(u)} + [1 - P_{i \text{ вх}}^{(u)}] \cdot P_{ijk}^{(u, n)} \cdot P_{ijk}^{(u, h)}$ .

Значение  $P_{ijk \text{ вых}}^{(u)}$  и является базовым показателем уязвимости с точки зрения нарушения целостности исходной информации. Тем не менее для его использования необходимы значения  $P_{ijk}^{(u)}$  для всех структурных компонентов и всех дестабилизирующих факторов информационной системы. Следует отметить, что формирование всего множества значений этих величин связано с определенными трудностями.

**2. Несанкционированное получение информации.** С точки зрения несанкционированного получения информации главную опасность представляют преступные действия людей. Введем такие обозначения:  $P_{ikl}^{(n, l)}$  - вероятность доступа нарушителя  $k$ -й категории в  $l$ -ю зону  $i$ -го ресурса информационной системы;  $P_{ijl}^{(n, k)}$  - вероятность наличия (проявления)  $j$ -го канала несанкционированного получения информации в  $l$ -й зоне  $i$ -го ресурса информационной системы;  $P_{ijkl}^{(n, h)}$  - вероятность доступа нарушителя  $k$ -й категории к  $j$ -му каналу несанкционированного получения информации в  $l$ -й зоне  $i$ -го компонента при условии доступа нарушителя в зону;  $P_{ijl}^{(n, i)}$  - вероятность наличия информации, которая защищается, в  $j$ -м канале несанкционированного получения информации в  $l$ -й зоне  $i$ -го компонента в момент доступа туда нарушителя. Укажем, что зоны являются составными, например, если  $l = 1,5$  (рис. 14.30), то первая зона является внешней (первый рубеж), а пятая - внутренней (последний рубеж).

**Классические мандатные модели целостности и разграничения доступа.** Модель мандатного разграничения доступа, которая получила название модели Белла - Лападула (БЛМ), до сих пор влияет на исследования и разра-

ботки в области компьютерной безопасности. Идеи, заложенные в БЛМ, могут быть использованы при построении разных политик безопасности.

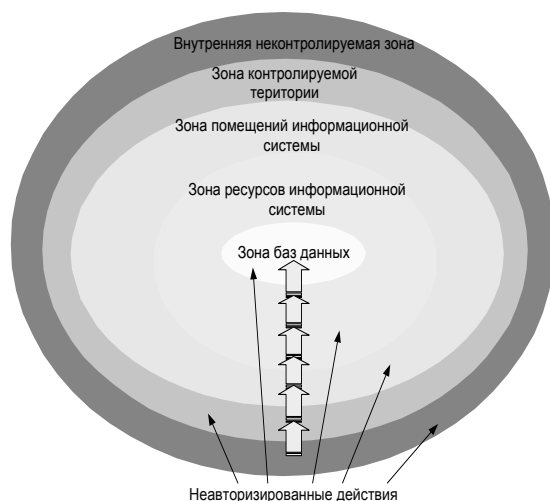


Рис. 14.30. Пример схемы возможных несанкционированных действий в информационной системе

Принципы, которые положены в основу БЛМ, происходят от бумажного документирования информации с ограниченным доступом, а Белл и Лападула перенесли известные подходы обеспечения безопасности в информационные технологии. Здесь основным тезисом является то, что все субъекты и объекты ассоциируются с уровнями безопасности, которые варьируются от низких (неклассифицированных) уровней к высоким (совершенно секретным). Кроме того, для предотвращения утечки информации к неуполномоченным субъектам с низкими уровнями безопасности им не разрешается читать информацию из объектов с высокими уровнями безопасности. Этот тезис ведет к первому правилу БЛМ.

*Простое свойство безопасности*, известное также как правило «запрет чтения вверх» (NRU), говорит, что субъект с уровнем безопасности  $x_s$  может читать информацию из объекта с уровнем безопасности  $x_o$ , только если  $x_s$  преобладает над  $x_o$ . Это значит, что когда в системе, которая удовлетворяет правилам модели БЛМ, субъект с уровнем доступа *секретный* попытается прочитать информацию из объекта, классифицированного как целиком секретный, то такой доступ не будет разрешен.

Белл и Лападула также использовали тезис, по которому субъектам не разрешается размещать информацию или записывать ее в объекты, которые имеют низший уровень безопасности. Например, когда целиком секретный документ перемещается в неклассифицированную мусорную корзину, то может состояться утечка информации, и это привело ко второму правилу БЛМ.

*Свойство*, известное как правило «запрет записи вниз» (NWD), говорит, что субъект безопасности  $x_s$  может записать информацию в объект с уровнем безопасности  $x_o$  только если  $x_o$  имеет преимущество над  $x_s$ . Это означает, что когда в системе, которая удовлетворяет правилам модели БЛМ, субъект с уровнем доступа *целиком секретный* попытается записать информацию в неклассифицированный объект, то такой доступ не будет разрешен. Такое свойство, например, решает проблему троянских коней, поскольку запись информации на низший уровень безопасности (типичное действие троянских коней) запрещен.

Правило запрета записи является упрощением некоторых реализаций БЛМ. Так, некоторые описания содержат более подробное понятие типа доступа (например, добавление и выполнение).

Правила запрета записи и чтения БЛМ отвечают интуитивным понятиям того, как предотвратить утечку информации к неуполномоченным (неавторизованным) источникам.

Рассмотрим формализацию БЛМ. Введем обозначения:  $S$  - множество субъектов;  $OB$  - множество объектов;  $L$  - решетка уровней безопасности;  $F: S \cup O \rightarrow L$  - функция, которая применяется к субъектам и объектам и определяет уровни безопасности своих аргументов в данном стане;  $V$  - множество состояний (множество упорядоченных пар  $(F, M)$ , где  $M$  - матрица доступа субъектов системы к объектам).

Система описывается начальным состоянием  $v_0$ , определенным множеством запросов к системе  $R$  и функцией переходов  $T: (V \times R) \rightarrow V$  таким, что система переходит из состояния в состояние после выполнения запроса. В связи с этим сформулируем определения, необходимые для доказательства основной теоремы безопасности, доказанной для БЛМ.

*Определение 1.* Состояние  $(F, M)$  безопасно к чтению (NRU) тогда и только тогда, когда для  $\forall s \in S$  и для  $\forall o \in O$  чтение  $\in M[s, o] \rightarrow F(s) \geq F(o)$ .

*Определение 2.* Состояние  $(F, M)$  безопасно к записи (NWD) тогда и только тогда, когда для  $\forall s \in S$  и для  $\forall o \in O$  запись  $\in M[s, o] \rightarrow F(o) \geq F(s)$ .

*Определение 3.* Состояние безопасно тогда и только тогда, когда оно безопасно к чтению и записи.

**Теорема.** Система  $(v_0, R, T)$  безопасна тогда и только тогда, когда состояние  $v_0$  безопасно и  $T$  такое, что для любого состояния  $v$ , достигнутого с  $v_0$  после выполнения конечной последовательности запросов из  $R$ ,  $T(v, c) = v^*$ , где  $v = (F, M)$  и  $v^* = (F^*, M^*)$ , переходы системы  $(T)$  из состояния в состояние подлежат таким ограничениям для  $\forall s \in S$  и для  $\forall o \in OB$ :

если чтение  $\in M^*[s, o]$  и чтение  $\notin M[s, o]$ , то  $F^*(s) \geq F^*(o)$ ;

если чтение  $\in M[s, o]$  и  $F^*(s) < F^*(o)$ , то чтение  $\notin M^*[s, o]$ ;

если запись  $\in M^*[s, o]$  и запись  $\notin M[s, o]$ , то  $F^*(o) \geq F^*(s)$ ;

если запись  $\in M[s, o]$  и  $F^*(o) < F^*(s)$ , то запись  $\notin M^*[s, o]$ .

**Доказательство.** 1. *Необходимость.* Предположим, что система безопасна, а состояние  $v_0$  безопасно по определению. Если есть некоторое состояние  $v$ , достигнутое из состояния  $v_0$  после выполнения конечной последовательности

запросов из  $R$ , таких что  $T(v, c) = v^*$ , хотя  $v^*$  не удовлетворяет одно из двух первых ограничений для  $T$ , то  $v^*$  будет достижимым состоянием, но таким, что противоречит ограничению безопасности по чтению. Если  $v^*$  не удовлетворяет одному из двух последних ограничений для  $T$ , то  $v^*$  будет достижимым состоянием, но противоречащим ограничению безопасности по записи. В любом случае система опасна.

2. *Достаточность.* Предположим, что система опасна. В этом случае или состояние  $v_0$  должно быть опасным, или должно быть опасным состояние  $v$ , достижимое из состояния  $v_0$  после выполнения конечной последовательности запросов из  $R$ . Если  $v_0$  опасно, то все доказано, а если  $v_0$  безопасно, то предположим, что  $v^*$  - первое в последовательности запросов опасное состояние. Это означает, что есть безопасное состояние  $v$ , такое что  $T(v, c) = v^*$ , где  $v^*$  - опасное. Но это противоречит четырем ограничениям безопасности на  $T$ .

Несмотря на все преимущества, выяснилось, что при использовании БЛМ в контексте практического проектирования и разработки реальных информационных систем возникает ряд технических вопросов, которые являются логическим следствием преимуществ БЛМ - ее простоты. Проблемы возникают при рассмотрении вопросов построения политик безопасности для конкретных типов систем, т.е. на менее абстрактном уровне рассмотрения. При данном рассмотрении системный компонент модели усложняется, что может привести к неадекватности БЛМ в ее классической форме, что инициировало широкую полемику по поводу применимости БЛМ для построения безопасных систем.

**Мандатная модель контроля целостности (модель Биба).** Известно, что в БЛМ важность или чувствительность субъектов и объектов возрастает с повышением в иерархии уровней безопасности. При рассмотрении моделей контроля целостности запись вверх может быть угрозой в том случае, когда субъект с низким уровнем безопасности модифицирует или уничтожает данные в объекте, который лежит на более высоком уровне. Поэтому, исходя из задач целостности, существует требование запрета такой записи. Придерживаясь подобных аргументов, можно рассматривать чтения снизу как поток информации, которая идет от объекта нижнего уровня и поднимает целостность субъекта высокого уровня. Поэтому достаточно вероятно, что и такое чтение необходимо запретить.

Два таких наблюдения сделал в середине 1970-х годов Кен Биба. Они были последовательно внесены в модель безопасности, которая с того времени называется *моделью целостности Биба* (или просто *моделью Биба*), который подал ее в таком же виде, что и БЛМ, хотя правила его модели являются полной противоположностью правилам БЛМ. По обыкновению рассматриваются три вариации модели Биба: мандатная модель целостности; модель снижения уровня субъекта; модель снижения уровня объекта, а общий термин «модель Биба» используется для обозначения любой или сразу всех трех моделей. Для мандатной модели контроля целостности известно формальное описание, и ее часто называют *инверсией БЛМ*. Это довольно точное название, поскольку основные правила этой модели противоположны правилам БЛМ и отображаются как «запрет чте-

ния снизу» (NRD) и «запрет записи вверх» (NWU). Определим их в сроках субъектов, объектов и нового типа уровней безопасности - *уровней целостности*, к которым введено отношение преимущества.

Правило NRD мандатной модели целостности Биба определяется как запрет субъектам на чтение информации из объекта с более низким уровнем целостности. Правило NRD является полной противоположностью NRU БЛМ, за исключением того, что здесь используются уровни целостности (а не безопасности, как в БЛМ), а правило NWU (запрет субъектам на запись информации в объект с более высоким уровнем целостности) является полной противоположностью правилу NWD БЛМ для того самого случая уровней целостности.

Одним из преимуществ этой модели является то, что она унаследовала много важных характеристик БЛМ, включая ее простоту и интуитивность. Это означает, что проектировщики реальных систем могут легко понять сущность этих правил и использовать их для принятия решений при проектировании. Кроме того, поскольку мандатная модель целостности Биба, как и БЛМ, базируется на простой иерархии, ее легко объяснить и отобразить пользователям системы. Тем не менее эта модель является очевидным разногласием с правилами NRU и NWD. Это означает, что когда необходимо построить систему, которая предотвращает угрозы секретности и целостности, то одновременное использование правил моделей БЛМ и Биба может привести к ситуации, в которой уровни безопасности и целостности будут достигаться противоположными способами.

Рассмотрим формальное описание модели Биба. Для этого приведем простые математические конструкции, которые помогут описать разные правила, которые образуют эту мандатную модель.

Пусть существуют множества субъектов и объектов, где уровни целостности субъекта или объекта  $x$  обозначаются как уровень ( $x$ ) и для них введено отношение *преимущества*. Используя эти определения, сформулируем правила NRD и NWU мандатной модели целостности Биба в терминах булевой функции *РАЗРЕШИТЬ*:

NRD:  $\forall s \in \text{субъекты}, v \in \text{объекты}$ :

*РАЗРЕШИТЬ* ( $s, o$ , чтение) тогда и только тогда, когда уровень ( $o$ ) *преобладает* над уровнем ( $s$ ).

Этот тип определения предусматривает условия, при которых функция *РАЗРЕШИТЬ* приобретает значение *истинной*. Определение утверждает, что для всех определенных субъектов и объектов операция чтения разрешена только в том случае, когда выполняется условие преимущества. Правило NWU является обратимым к использованию отношения преимущества, как это показано в таком определении:

NWU:  $\forall s \in \text{субъекты}, v \in \text{объекты}$ :

*РАЗРЕШИТЬ* ( $s, o$ , запись)  $\Leftrightarrow \text{clearance}(s) \geq \text{classification}(o)$ .

Это определение утверждает, что для всех субъектов и объектов операция записи разрешается только в том случае, когда выполняется условие преимущества. Сходство определения этих двух правил правилам модели БЛМ может предоставить удобный способ для разработчиков системы предусмотреть возможность переконфигурирования правил БЛМ таким образом, чтобы поддерживать мандатную модель целостности Биба.

Модель снижения уровня субъекта (вторая модель Биба) связана с небольшим ослаблением правила чтения снизу. Эта модель не разрешает субъектам с высокой целостностью читать информацию из объектов с низкой целостностью. Такое прави-

ло гарантирует, что информация из объекта с низкой целостностью не нарушит целостности субъекта. Но в этой модели субъекта разрешается осуществлять чтение снизу, в результате которого уровень целостности субъекта снижается к уровню целостности объекта.

Модель снижения уровня объекта (третья модель Биба) связана с ослаблением правил записи вверх, т.е. вместо полного запрета записи вверх модель разрешает такую запись, но снижает уровень целостности объекта к уровню целостности субъекта, который осуществляет запись.

#### 14.4. Противодействие сетевому несанкционированному доступу

Основой современных информационных систем являются компьютерные сети, на которые также распространяются действия прежде описанных методов НСД. В общем случае сеть организации фактически является неоднородным рядом компьютеров разной конфигурации и назначения, управляемых разными операционными системами и связанных между собой с помощью сетевого оборудования. В таких условиях осуществить надежную защиту от несанкционированных действий при взаимодействии с внешними сетями можно лишь с помощью специализированных программно-аппаратных комплексов, которые обеспечивают соответствующую защиту. Такие комплексы называют межсетевыми экранами, межсетевыми фильтрами, экранированными фильтрами, брандмауэрами или системами FireWall, которые устанавливают на стыке между внутренней и внешней сетями и возлагают на них функции противодействия.

**Функции межсетевого экранирования.** Как уже отмечалось, для защиты от несанкционированного межсетевого доступа брандмауэр располагается между сетью, подлежащей защите (внутренней), и сетью, из которой возможен НСД (внешней) (рис. 14.31), при этом все внутрисетевые взаимодействия осуществляются только через экранированный фильтр, организационно входящий в состав внутренней сети.

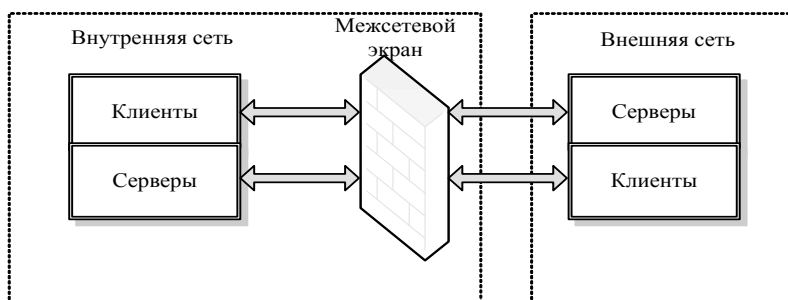


Рис. 14.31. Схема подключения брандмауэра

Межсетевой экран должен учитывать протоколы информационного обмена, которые положены в основу функционирования внутренней и внешней сетей, а если протоколы отличаются, то брандмауэр должен поддерживать многопротокольный режим работы, обеспечивая протокольное преобразование



уровней соответственно модели OSI для взаимодействия открытых сетей.

Для межсетевого экрана отдельно задаются правила, которые ограничивают доступ из внутренней сети во внешнюю (и наоборот) и в общем случае его работа базируется на динамическом выполнении двух групп функций: фильтрации информационных потоков и посредничества в межсетевом взаимодействии.

При этом простые межсетевые экраны сориентированы на выполнение только одной из указанных функций, а комплексные - обеспечивают совместное их выполнение. Для принятия управленческих решений относительно используемых сервисов брандмауэр должен получать, запоминать, выбирать и обрабатывать информацию, полученную от всех коммуникационных уровней и прикладных программ. Полнота и правильность управления требуют, чтобы комплексный брандмауэр имел возможность анализа и использования ряда факторов:

информации о соединении - информации от всех семи уровней в пакете;  
истории соединений - информации, полученной от предыдущих соединений;

состояния уровня прикладной программы - информации о состоянии, полученной из других прикладных программ;

агрегативного элемента - вычисление разнообразных зависимостей, которые базируются на всех перечисленных факторах.

При экранировании отдельного компьютера поддерживается доступность сетевых сервисов и уменьшается нагрузка, инициированная внешней активностью, которая снижает уязвимость защищенных внутренних сервисов компьютера, поскольку сначала неавторизованная сторона должна преодолеть механизм защиты экранированного фильтра.

**Базовая задача брандмауэра** - фильтрация трафика, связанная с выборочным пропуском данных через экранированный фильтр (иногда с выполнением некоторых преобразований).

Фильтрация осуществляется на основе ряда правил, которые загружаются в экран, и сетевых аспектов, которые выражают принятую политику безопасности. С этих позиций брандмауэр удобно представить как последовательность фильтров (рис. 14.32), которые обрабатывают информационные потоки на основе интерпретации отдельных правил фильтрации путем:

анализа информации по заданным в интерпретированных правилах критериям, например по адресам получателя и (или) отправителя, по типу прикладной программы, для которой предназначена информация, и т.п.

принятия на основе интерпретированных правил одного из таких решений:

- 1) не пропустить данные;
- 2) обработать данные от лица получателя и вернуть результат отправителю;
- 3) передать данные на следующий фильтр для продолжения анализа;
- 4) пропустить данные, игнорируя следующие фильтры.

При фильтрации могут задаваться и дополнительные действия (посред-

ничества), например преобразование данных, регистрация событий и т.п., и тогда соответствующие правила фильтрации определяют перечень условий, по которым с использованием указанных критериев анализа осуществляются: разрешение или запрет дальнейшей передачи данных; выполнение дополнительных защитных функций.

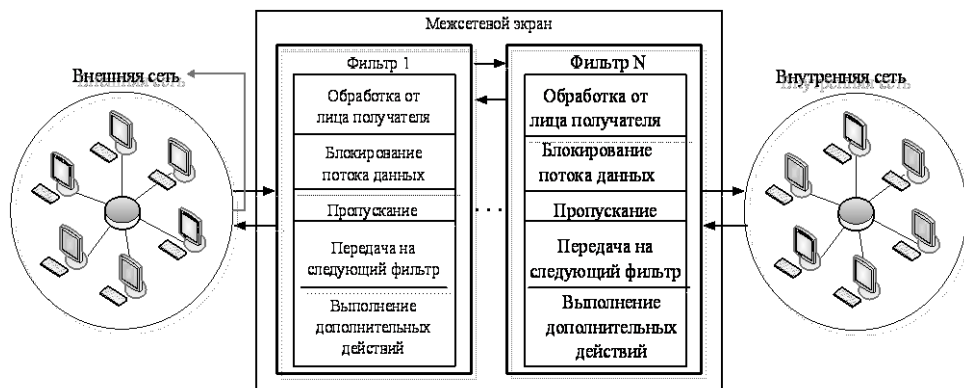


Рис. 14.32. Логическая структура межсетевого экрана

Критериями анализа информационного потока могут использоваться: служебные поля пакетов сообщений, которые содержат сетевые адреса, идентификаторы, адреса интерфейсов, номера портов и другие важные данные; непосредственное содержание пакетов сообщений (например, на наличие компьютерных вирусов), что подлежат проверке; внешние характеристики информационного потока, например, временные и частотные характеристики, объем данных и т.п.

Используемые критерии анализа зависят от уровней модели OSI, на которых осуществляется фильтрация, а в общем случае действует правило: чем выше уровень модели OSI, на котором брандмауэр фильтрует пакеты, тем выше и обеспечиваемый им уровень защиты.

Еще одной базовой функцией брандмауэра является выполнение посреднических функций, которые он осуществляет с помощью специальных экранированных программ (агентов)-посредников, которые являются резидентными и контролируют (запрещают, разрешают) передачу пакетов между внешней и внутренней сетью.

В случае доступа из одной сети в другую сначала устанавливается логическое соединение с программой-посредником, которая проверяет допустимость запроса межсетевого взаимодействия и в случае соответствующего разрешения устанавливает соединение с необходимым компьютером. В дальнейшем обмен между компьютерами сетей осуществляется через программного посредника, который может выполнять фильтрацию трафика и осуществлять другие защитные функции.

Функции фильтрации межсетевого экрана может выполнять без программ-посредников, обеспечивая прозрачное взаимодействие между внут-

ренной и внешней сетями. Программные посредники, в свою очередь, могут и не осуществлять соответствующей фильтрации.

В общем случае экранированные агенты, блокируя прозрачную передачу, могут выполнять еще ряд функций (рис. 14.33).

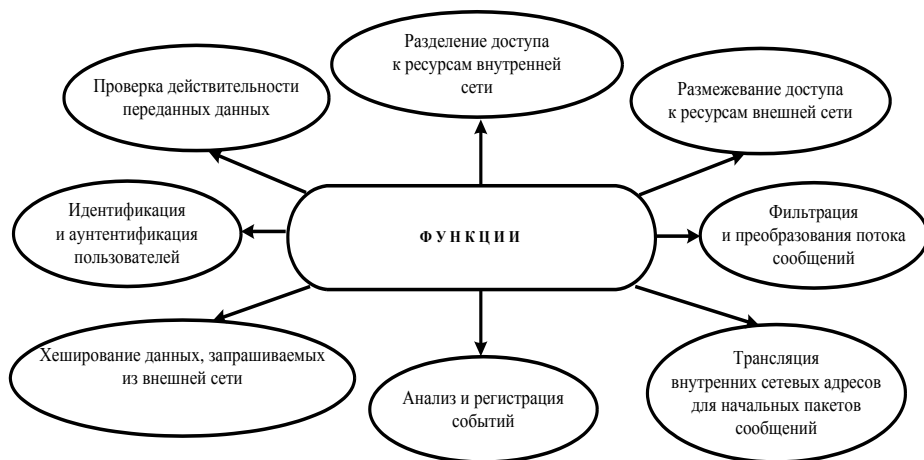


Рис. 14.33. Базовые функции экранирующих агентов

Идентификация и аутентификация пользователей необходимы для обеспечения высокой степени безопасности при их доступе к сети, при этом для предотвращения перехвата пароль не передается в открытом виде через общие коммуникации. Наиболее эффективным способом аутентификации является использование одноразовых паролей, а также применение цифровых сертификатов, выданных доверительными органами (например, центром распределения ключей).

**Проверка действительности** получаемых и переданных данных является особенно актуальной функцией для аутентификации не только электронных сообщений, а и мигрирующих программ (например, Java), относительно которых может быть выполнена подделка. Эта функция связана с контролем цифровых подписей, при этом также могут применяться цифровые сертификаты.

Разделение доступа к ресурсам внутренней или внешней сети при обращении к межсетевому экрану реализуется с помощью функций идентификации и аутентификации пользователей способами, идентичными поддерживаемым на уровне операционных систем. Функция разделения доступа базируется на одном из следующих подходов:

- разрешение доступа только по определенным адресам во внешней сети;
- фильтрация запросов по обновленным спискам недопустимых адресов и блокирование поиска с нежелательными ключевыми словами;
- накопление и возобновление санкционированных информационных ресурсов внешней сети в массиве памяти брандмауэра и полный запрет доступа во внешнюю сеть.

**Фильтрация и преобразование потока сообщений** выполняется посред-

ником на основе заданного набора правил, при этом различают:

экранированные агенты, сориентированные на анализ потока сообщений для определенных видов сервиса (например, FTP, HTTP, Telnet и т.п.);

универсальные экранированные агенты, которые обрабатывают все сообщения, например с целью поиска и обезвреживания компьютерных вирусов, прозрачного шифрования данных и т.п.

**Трансляция внутренних сетевых адресов** реализуется для всех пакетов, которые идут из внутренней сети во внешнюю. Для этих пакетов осуществляется автоматическое преобразование IP-адресов компьютеров-отправителей в один IP-адрес, ассоциированный с брандмауэром, из которого передаются все пакеты, исключая прямой контакт между внутренней и внешней сетью, а IP-адрес брандмауэра становится единственным активным IP-адресом, который попадает во внешнюю сеть. Это позволяет спрятать топологию внутренней сети и иметь внутри сети собственную систему адресации, не согласованную с внешней (например, Интернет), что эффективно решает проблему расширения адресного пространства.

**Анализ и регистрация событий**, реагирование на определенные события, а также анализ зарегистрированной информации и составление отчетов дают возможность выявить попытки несанкционированных действий. Эффективность брандмауэра в значительной мере зависит от эффективности выполнения этой функции, которая разрешает формировать предупредительные сигналы при выявлении нападения.

Система регистрации, сбора и анализа статистики обрабатывает адреса клиентов и сервера, идентификаторы пользователей, время сеансов и соединений, количество переданных и принятых данных, действия администратора и пользователей и т.п. и предоставляет администраторам подробные отчеты и оповещает об определенных событиях в режиме реального времени.

**Хеширование данных**, запрашиваемых при доступе пользователей внутренней сети к информационным ресурсам внешней, осуществляется с помощью сети накопления информации на пространстве жесткого диска брандмауэра (технология проху-сервера). Поэтому если при запросе нужна хешированная информация, то она предоставляется без обращения к внешней сети, что существенно ускоряет доступ.

Экранированные агенты надежнее обычных фильтров и обеспечивают высокую степень защиты, но снижают производительность обмена данными между сетями и не имеют достаточной прозрачности для прикладных программ и конечных пользователей.

**Особенности межсетевого экранирования.** Брандмауэры поддерживают безопасность межсетевого взаимодействия на разных уровнях эталонной модели OSI, где функции защиты существенным образом отличаются. В этой связи комплексный брандмауэр подают в виде совокупности неделимых экранов, сориентированных на отдельный уровень модели OSI. Обычно ком-

плексный экран функционирует на сетевом, сеансовом и прикладном уровнях эталонной модели, соответственно различают экранирующий маршрутизатор и шлюзы сеансового и прикладного уровней (рис. 14.34).

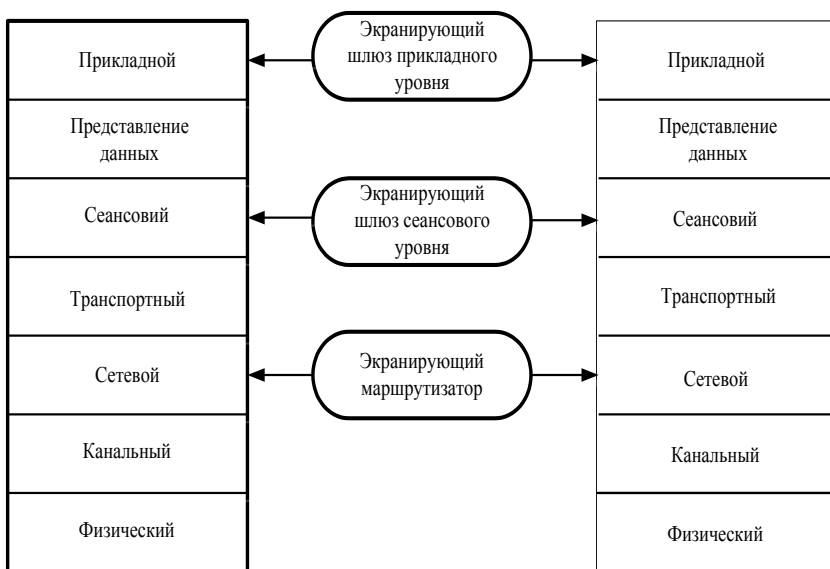


Рис. 14.34. Типы межсетевых экранов, функционирующих на отдельных уровнях модели OSI

Используемые в сетях протоколы не всегда однозначно отвечают модели OSI, и потому указанные экраны могут отображать и соседние уровни эталонной модели, например шлюз прикладного уровня может зашифровывать сообщение при их передаче и расшифровывать принятые данные. Тогда он функционирует на уровнях представления данных и прикладных.

Межсетевые экраны каждого из типов имеют свои преимущества и недостатки, но надежную защиту обеспечивают только комплексные системы, которые объединяют все виды экранирования.

**Экранирующий шлюз прикладного уровня** (пакетный фильтр) предназначен для фильтрации пакетов сообщений. Он обеспечивает прозрачное взаимодействие между внутренней и внешней сетями, функционируя на сетевом уровне модели OSI, а также может охватывать и транспортный. Решение о пропуске пакета принимается независимо по заданным правилам фильтрации на основе анализа пакетов сетевого и транспортного уровней (рис. 14.35). Адреса отправителя и получателя могут быть IP-адресами, которые определяются при формировании пакета и остаются неизменными при передаче его через сеть. Тип пакета содержит код протокола, который соответствует сетевому или транспортному уровню. Флаг фрагментации пакета определяет наличие или отсутствие фрагментации. Номера портов источника и получателя однозначно идентифицируют прикладную программу отправителя, а также

прикладную программу, для которой предназначен этот пакет. Для возможности фильтрации пакетов по адресам портов необходимо знание принятых в сети соглашений относительно выделения номеров портов протоколам высокого уровня.

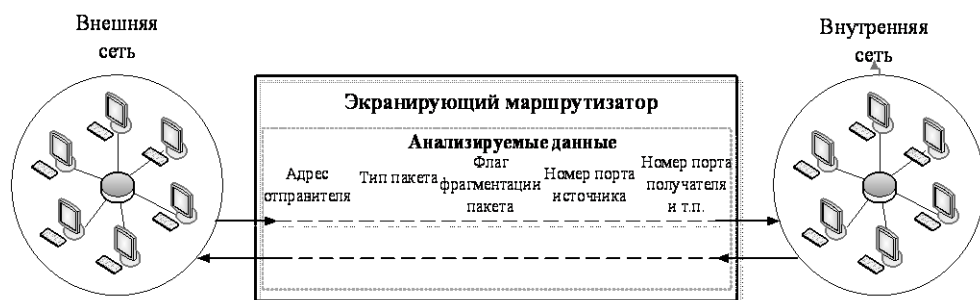


Рис. 14.35. Схема функционирования пакетного фильтра

Экранирующие маршрутизаторы не обеспечивают высокой степени безопасности, так как проверяют только заголовки пакетов и не поддерживают таких функций, как аутентификация конечных узлов, шифрование пакетов, проверка их целостности и т.п. Эти маршрутизаторы чувствительны к таким атакам, как подделка исходных адресов, несанкционированная модификация содержимого пакетов сообщений, а обход таких экранов реализуется на основе формирования заголовков пакетов, которые удовлетворяют правилам фильтрации.

**Экранирующий шлюз сеансового уровня** предназначен для контроля виртуальных соединений и трансляции адресов (например, IP-адрес) при взаимодействии с внешней сетью. Он функционирует на сеансовом уровне модели OSI, охватывает транспортный и сетевой уровни, а защитные механизмы принадлежат к функциям посредничества.

Контроль виртуальных соединений заключается в контроле квитирования связи и передачи информации из установленных виртуальных каналов.

При контроле квитирования осуществляется контроль установки виртуального соединения между узлами внутренней и внешней сетей путем определения допустимой связи на основе информации, которая содержится в заголовках пакетов сеансового уровня, протокола TCP. Однако если пакетный фильтр при анализе заголовков проверяет только номера портов источника и получателя, то экранирующий шлюз сеансового уровня анализирует другие поля, которые относятся к процессу квитирования связи. Определение шлюзом допустимости запроса на сеанс связи осуществляется по алгоритму (рис. 14.36).

После установления соединения с компьютером внешней сети шлюз действует от лица клиента, следит за выполнением квитирования связи, например по протоколу TCP, а примером базового критерия фильтрации может быть возможность DNS-сервера определить IP-адрес клиента и ассоциированное с ним имя. Рассмотрим процедуру квитирования связи на примере обмена TCP-пакетами, где флагом SYN обозначается синхронизация, а ACK - подтверждение (рис. 14.37).

Первый пакет сеанса TCP, обозначенный флагом SYN, содержит произвольное число, например 01100100, и является запросом клиента на открытие

сеанса. Компьютер внешней сети, который получил этот пакет, посылает ответ, обозначенный флагом ACK, и содержит число на единицу больше, чем в принятом пакете (в нашем случае 01100101), подтверждая таким образом прием пакета SYN от клиента. Кроме того, осуществляя обратную процедуру, компьютер внешней сети посылает также клиенту пакет SYN, но уже с порядковым номером первого байта передачей данных (например, 11001000), а клиент подтверждает его получение передачей пакета ACK, содержащего число 11001001. На этом процесс квитирования связи завершается.



Рис. 14.36. Алгоритм определения допустимости запроса на сеанс связи



Рис. 14.37. Схема квитирования связи по протоколу TCP

Для экранированного шлюза сеансового уровня (рис. 14.38) сеанс считается допустимым тогда, когда при квитировании связи флаги SYN и ACK и числа заголовков TCP-пакетов оказываются логически связанными между собой. После того как шлюз определил, что компьютеры внутренней и внешней сетей являются авторизованными участниками сеанса TCP, и проверил допустимости данного сеанса, устанавливается соединение.

Для контроля виртуальных соединений используются специальные программы (канальные посредники), устанавливающие виртуальные каналы между внутренней и внешней сетями.

В основном экранирующие шлюзы сеансового уровня работают в комплексе с

экранирующими шлюзами прикладного уровня.



Рис. 14.38. Схема функционирования шлюза сеансового уровня

С точки зрения практической реализации шлюз сеансового уровня - достаточно простая и надежная программа и дополняет экранирующий маршрутизатор функциями контроля виртуальных соединений и трансляции внутренних адресов (например, IP-адреса).

Шлюз сеансового уровня имеет почти такие же недостатки, что и экранный маршрутизатор, поэтому он применяется как дополнение к экранирующему шлюзу прикладного уровня.

*Экранирующий шлюз прикладного уровня* функционирует на прикладном уровне модели OSI, охватывая также уровень представления данных, и обеспечивает наиболее надежную защиту межсетевых взаимодействий. Его защитные функции принадлежат к функциям посредничества, но, в отличие от экранированного шлюза сеансового уровня, он выполняет большее количество функций, к которым принадлежат те, что реализуются экранирующими агентами (рис. 14.39) и используются по одному для каждого обслуживаемого прикладного протокола. Прикладной шлюз, равно как и шлюз сеансового уровня, перехватывает с помощью соответствующих экранирующих агентов входные и исходные пакеты, копирует и переправляет информацию через шлюз, функционируя как сервер-посредник, кроме прямых соединений между внутренней и внешней сетями. Посредники, пользующиеся прикладным шлюзом, связаны с конкретными прикладными программами и могут фильтровать поток сообщений на прикладном уровне модели OSI.

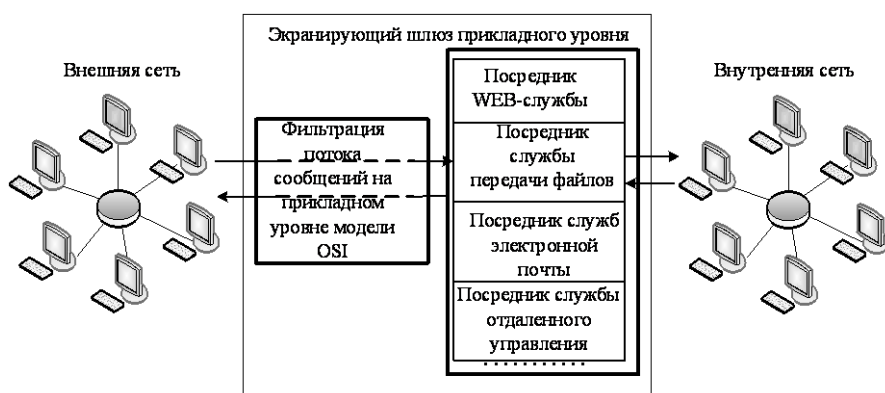


Рис. 14.39. Схема функционирования экранирующего шлюза прикладного уровня

Прикладные шлюзы в качестве посредников используют программные серверы конкретных служб (передача файлов, электронной почты, удаленного управления и



т.п.), функционирующие на брандмауэре в резидентном режиме и реализуют функции защиты.

Как и в случае экранирующего шлюза сеансового уровня, для связи между компьютерами внутренней и внешней сетей соответствующий посредник прикладного шлюза образует два соединения: от компьютеров (внутренней сети) к брандмауэру и от брандмауэра к месту назначения. Но, в отличие от канальных посредников, посредники прикладного шлюза пропускают только пакеты, генерированные теми прикладными программами, которые им поручено обслуживать. Например, программа-посредник Web-службы может обрабатывать лишь трафик, генерированный этой службой. Если в сети работает прикладной шлюз, то входные и выходные пакеты могут передаваться лишь для тех служб, для которых есть соответствующие посредники.

Во время налаживания прикладного шлюза и описания правил фильтрации сообщений используются такие параметры, как название сервиса, допустимый временной диапазон его использования, ограничение на содержание сообщений, связанных с этим сервисом, компьютеры, из которых можно пользоваться сервисом, идентификаторы пользователей, схемы аутентификации и т.п. Основные преимущества экранированного шлюза прикладного уровня: за счет возможности выполнения большого количества функций посредничества обеспечивает наиболее высокий уровень защиты локальной сети; защита на уровне приложений разрешает осуществлять большое количество дополнительных проверок, уменьшая тем самым вероятность проведения успешных атак, основанных на недостатках программного обеспечения; при нарушении трудоспособности прикладного шлюза блокируется сквозное прохождение пакетов между разделяемыми сетями, которое не снижает безопасность защищенной сети в случае отказов.

При этом экранированный шлюз прикладного уровня имеет ряд недостатков: довольно большая сложность самого брандмауэра, а также процедур его установки и конфигурирование; высокие требования к производительности и ресурсоемкости компьютерной платформы; отсутствие "прозрачности" для пользователей и снижение пропускной способности при реализации межсетевых взаимодействий.

Для эффективной защиты межсетевых взаимодействий брандмауэр должен быть правильно установлен и сконфигурирован. Для этого необходимо разработать политику межсетевого взаимодействия, определить схемы подключения межсетевого экрана и наладить параметры функционирования брандмауэра.

**Разработка политики межсетевого взаимодействия.** Политика межсетевого взаимодействия является той частью политики безопасности в организации, которая определяет требования к безопасности информационного обмена с внешним окружением. Эти требования непременно должны отражать два аспекта: политику доступа к сетевым серверам; политику работы межсетевого экрана.

*Политика доступа к сетевым сервисам* определяет правила предоставления и использования всех возможных сервисов защищаемой компьютерной сети. Должны быть заданы все сервисы, предоставляемые межсетевым экраном, определены допустимые адреса клиентов для каждого сервиса, указаны правила относительно того, когда и какие пользователи каким именно сервисом и на каком компьютере могут воспользоваться, в частности правила аутентификации компьютеров и пользователей, а также условия работы последних

вне локальной сети.

**Политика работы межсетевой экран** задает базовый принцип управления межсетевым взаимодействием, положенный в основу функционирования брандмауэра. Может быть выбран один из двух таких принципов: запрещено все, что не разрешено; разрешено все, что не запрещено.

В первом случае межсетевой экран конфигурируется так, чтобы блокировать любые неразрешенные межсетевые взаимодействия. Такой подход дает возможность адекватно реализовать принцип минимизации привилегий, а значит, с точки зрения безопасности он наилучший.

Во втором случае межсетевой экран настраивается таким образом, чтобы блокировать только запрещенные межсетевые взаимодействия, благодаря чему повышается удобство использования сетевых сервисов пользователями. Тем не менее вместе с тем снижается безопасность межсетевого взаимодействия, когда администратор может учесть не все действия, которые запрещены пользователям.

**Определение схемы подключения межсетевого экрана.** Для подключения межсетевых экранов используются разные схемы, зависящие от условий функционирования и количества сетевых интерфейсов брандмауэра. Брандмауэры с одним сетевым интерфейсом (рис. 14.40) недостаточно эффективны с точки зрения безопасности и из позиций удобства конфигурирования.

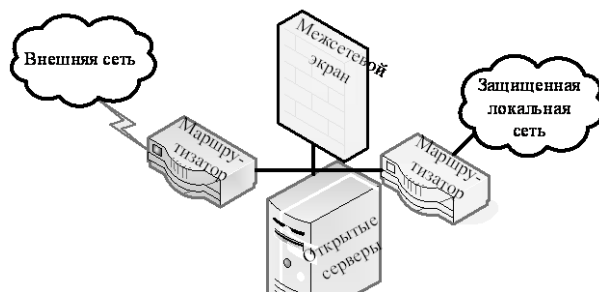


Рис. 14.40. Защита локальной сети брандмауэром с одним сетевым интерфейсом

Физически не разграничиваются внутренняя и внешняя сети, а потому не обеспечивается надежная защита межсетевых взаимодействий. Отладка таких экранов и соединение с ними маршрутизаторов - довольно сложная задача, стоимость решения которой превышает стоимость брандмауэра с двумя или тремя сетевыми интерфейсами. Поэтому будем рассматривать лишь две последних схемы подключения. При этом защищаемую локальную сеть подадим как совокупность закрытой и открытой подсетей, где открытой является та подсеть, доступ к которой со стороны внешней сети может быть целиком или частично открытым.

Среди многочисленных возможных схем подключения брандмауэров типичными являются: схема единой защиты локальной сети, схема из защищенной закрытой и незащищенной открытой подсетей и схема с распределенной защитой закрытой и открытой подсетей.

Схема единой защиты локальной сети является наиболее простым решением (рис. 14.41), согласно которому брандмауэр целиком экранирует локальную сеть от

внешней, а между маршрутизатором и брандмауэром существует только один путь для трафика.

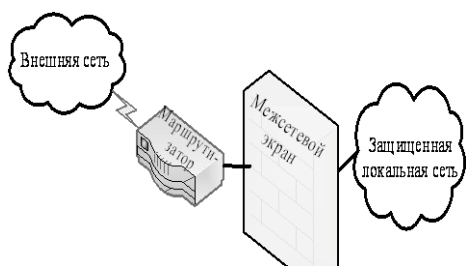


Рис. 14.41. Схема единой защиты локальной сети

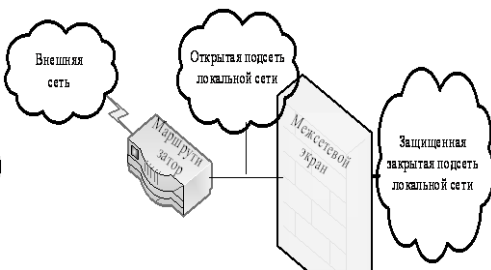


Рис. 14.42. Схема с защищенной и незащищенной открытой подсетью

При этом маршрутизатор настраивается так, что брандмауэр является единственным видимым извне узлом. Серверы, входящие в локальную сеть, защищены межсетевым экраном, но объединение серверов, доступных из внешней сети, вместе с другими ресурсами защищаемой локальной сети существенным образом снизит безопасность межсетевых взаимодействий. Поэтому эту схему подключения брандмауэра можно использовать лишь при отсутствии в локальной сети открытых серверов или когда они являются доступными из внешней сети только для ограниченного числа доверенных пользователей. При наличии в локальной сети общедоступных открытых серверов их целесообразно вынести в открытую подсеть к межсетевому экрану (рис. 14.42).

Такой способ обеспечивает высшую защищенность закрытой части локальной сети, но вместе с тем снижается безопасность открытых серверов. Некоторые брандмауэры дают возможность разместить эти серверы на себе, но такое решение не является наилучшим с точки зрения загрузки компьютера и безопасности самого брандмауэра, поэтому такую схему целесообразно использовать лишь при невысоких требованиях к безопасности открытой подсети. Если к безопасности открытых серверов выдвигаются повышенные требования, то необходимо использовать схему с распределенной защитой закрытой и открытой подсети. Такую схему можно построить на основе одного брандмауэра с тремя сетевыми интерфейсами (рис. 14.43) или двух брандмауэров с двумя сетевыми интерфейсами (рис. 14.44).

В обоих случаях доступ к открытой и закрытой подсетям локальной сети возможен только через межсетевой экран, при этом доступ к открытой подсети не дает возможности осуществить доступ к закрытой.

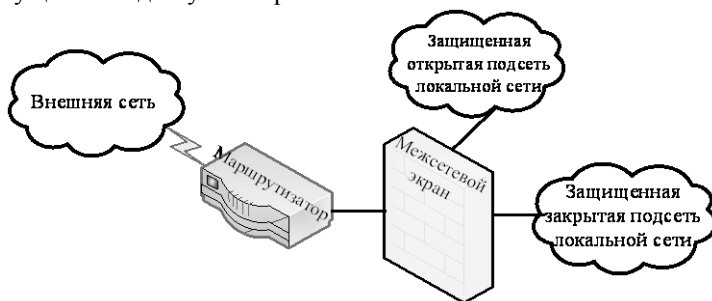


Рис. 14.43. Схема с распределенной защитой закрытой и открытой подсетей на основе одного брандмауэра с тремя сетевыми интерфейсами

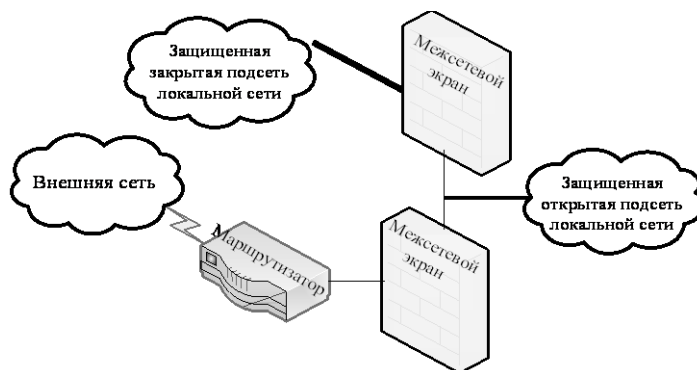


Рис. 14.44. Схема с разделной защитой закрытой и открытой подсетей на основе двух брандмауэров с двумя сетевыми интерфейсами

Из последних двух схем большую степень безопасности межсетевых взаимодействий обеспечивает схема с двумя брандмауэрами, каждый из которых образует отдельный эшелон защиты закрытой подсети, а защищенная открытая подсеть здесь выступает как экранированная подсеть, конфигурируемая таким образом, чтобы обеспечить доступ к компьютерам подсети как из внешней сети, так и из закрытой локальной. Но прямой обмен информационными пакетами между внешней сетью и закрытой подсетью невозможен. При атаке системы с экранированной подсетью необходимо преодолеть, по крайней мере, две независимые линии защиты. Средства мониторинга состояния межсетевых экранов, как правило, проявят такую попытку атаки, и администратор системы сможет своевременно начать необходимые действия относительно предотвращения НСД.

**Отладка параметров функционирования брандмауэра.** Межсетевой экран является программно-аппаратным средством защиты, состоящий из компьютера, а также операционной системы и специального программного обеспечения (часто называют брандмауэром), функционирующих на нем.

Компьютер брандмауэра должен быть довольно мощным и физически защищенным (например, содержаться в специально отведенном помещении, которое охраняется) и иметь средства защиты от загрузки операционной системы из несанкционированного носителя.

Операционная система брандмауэра также должна удовлетворять ряду требований: иметь средства размежевания доступа к ресурсам системы; блокировать доступ к компьютерным ресурсам в обход существующего программного интерфейса; запрещать привилегированный доступ к своим ресурсам из локальной сети; содержать средства мониторинга (аудита) любых административных действий.

После установления брандмауэра осуществляется отладка параметров, которая состоит из таких этапов:

- 1) формирование правил работы меж сетевого экрана соответственно разработанной политике меж сетевого взаимодействия и описание правил в интерфейсе брандмауэра;
- 2) проверка заданных правил на непротиворечивость;
- 3) проверка соответствия параметров отладки брандмауэра разработанной политике меж сетевого взаимодействия.

Сформированная на первом этапе база правил работы меж сетевого экрана яв-

ляется формализованным отображением разработанной политики межсетевого взаимодействия, а компонентами правил являются защищаемые объекты, пользователи и сервисы.

К таким объектам могут принадлежать компьютеры с одним сетевым интерфейсом, шлюзы (компьютеры с несколькими сетевыми интерфейсами), маршрутизаторы, сети и т.п. Объекты, каждый из которых имеет ряд атрибутов (сетевой адрес, маска подсети и т.п.), могут объединяться в группы. Важно обращать внимание на необходимость полного описания объектов для проверки корректности заданных правил экранирования. Такое описание возможно только тогда, когда определены все сетевые интерфейсы шлюзов и маршрутизаторов.

При описании правил работы межсетевого экрана пользователям предоставляются входные имена, которые объединяются в группы. Для пользователей отмечаются допустимые исходные и целевые сетевые адреса, диапазон дат и времени работы, а также схемы и порядки аутентификации.

Определение набора и свойств используемых сервисов осуществляется на основе встроенной в дистрибутив брандмауэра базы данных, а для нестандартных сервисов параметры могут задаваться вручную с помощью специальных атрибутов.

После формирования базы правил осуществляется ее проверка на непротиворечивость. Это очень важный момент, особенно для развитых многокомпонентных сетевых конфигураций со сложной политикой межсетевого взаимодействия.

Проверка сформированных правил на непротиворечивость выполняется автоматически, а выявленные неоднозначности устраняют путем редактирования противоречивых правил. Большинство брандмауэров после формирования базы правил выполняют процесс окончательной отладки автоматически.

Проверка соответствия параметров отладки брандмауэра разработанной политике межсетевого взаимодействия может выполняться на основе анализа протоколов работы межсетевого экрана. Однако наибольшая результативность такой проверки будет достигнута в случае использования специализированных программных средств анализа защищенности сети (сетевые сканеры).

После поиска слабых мест в конфигурации межсетевого экрана подаются рекомендации относительно их коррекции. Поиск слабых мест осуществляется на основе проверки реакции межсетевых экранов на разные типы попыток нарушения безопасности. При этом выполняется сканирование всех сетевых сервисов, доступ к которым осуществляется через межсетевой экран, а для постоянной поддержки высокой степени безопасности сети сканеры монтируются в межсетевые экраны.

При отладке межсетевого экрана следует учитывать, что он не может защитить от некомпетентности администраторов и пользователей, например через выбор пароля, который легко угадывается, неконтролируемый канал связи и т.п. Примеры уязвимостей, возникающих при организации защищенных информационных сетей и используемые для реализации НСД, приведены на рис. 14.45.

Общие требования к межсетевым экранам.

**По целевым качествам** - обеспечение безопасности внутренней защищенной сети и полный контроль над внешними подключениями и сеансами связи, а также наличие средств авторизации доступа пользователей через внешние подключения. **Например**, типична ситуация, когда часть персонала организации должна выезжать в командировку, и в процессе работы они нуждаются в доступе к некоторым ресурсам внутренней компьютерной сети организации. Брандмауэр должен надежно распознавать таких пользователей и предоставлять им необходимые виды доступа.

**По управляемости и гибкости** - наличие мощных и гибких средств управления для полного внедрения политики безопасности организации, обеспечение простой реконфигурации системы при изменении структуры сети. Если в организации есть несколько внешних подключений, в том числе и в отдаленных филиалах, то система управления экранами должна иметь возможность централизованно обеспечивать для них проведение единой политики межсетевого взаимодействия.

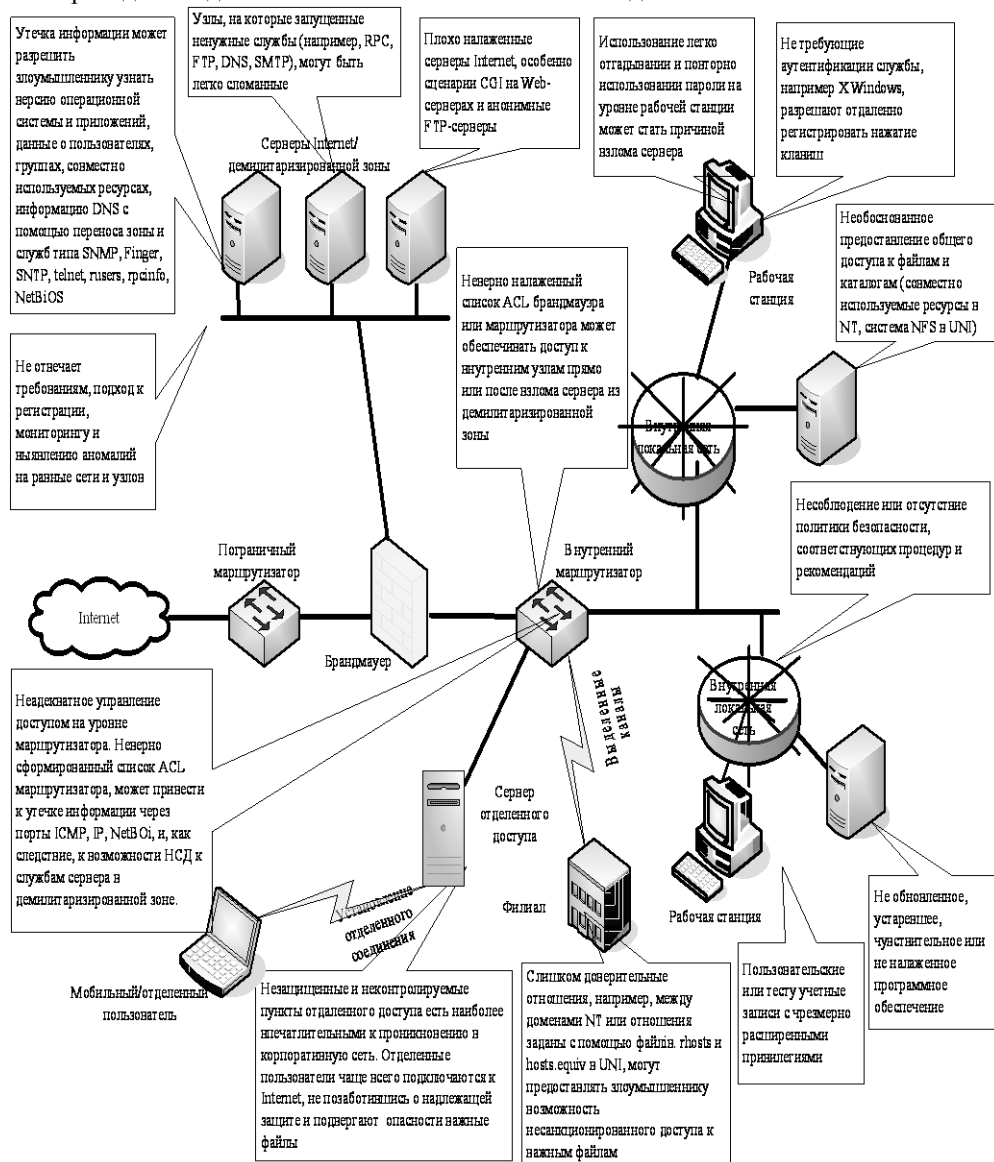


Рис. 14.45. Примеры уязвимости в информационных сетях

**По производительности и прозрачности** - достаточно эффективное функционирование и обеспечение в реальном времени обработки всего входного и выходного

трафика при максимальной нагрузке. Это необходимо для того, чтобы брандмауэр не перегружался большим количеством вызовов, что привело бы к нарушению его работы. Межсетевой экран должен работать незаметно для пользователей локальной сети и не усложнять выполнения ими легальных действий. В противном случае пользователи будут стараться любым способом обойти установленные уровни защиты.

**По самозащитности** - наличие механизмов самозащиты от любых несанкционированных воздействий. Поскольку межсетевой экран является и ключом, и дверью к конфиденциальной информации в организации, то он должен блокировать любые попытки несанкционированного изменения его параметров отладки, а также иметь развитые средства контроля своего состояния и сигнализации, обеспечивающие своевременное оповещение службы безопасности при выявлении любых несанкционированных действий и нарушений работоспособности меж сетевого экрана.

---

### **Основные выводы**

---

Конфиденциальность - характеристика безопасности ресурсов, которая отражает их свойство недоступности без соответствующих полномочий. Фактически ресурсы не могут быть доступными или раскрытыми неавторизованной стороне, т.е. для нее их якобы нет. В свою очередь, авторская сторона (например, обслуживающий персонал, пользователь, программы и т.д.), которой предоставлены соответствующие полномочия, имеет полный доступ к ресурсам.

Целостность - характеристика безопасности ресурсов, которая отражает их свойство противостоять несанкционированному изменению.

Доступность - характеристика безопасности ресурсов, которая отражает их свойство, которое заключается в возможности их использования в заданный момент времени соответственно предоставленным полномочиям. Фактически авторская сторона в случае потребности сразу в любой момент времени получает неограниченный доступ к необходимому ресурсу.

Активный перехват (*active eavesdropping*) - перехват, во время которого у неприятеля есть возможность не только перехватывать сообщение, а и влиять на него, например задерживать или изымать сигналы, которые передаются каналами связи.

Пассивный перехват (*passive tapping*) - получение информации с возможностью только наблюдать за обменом подключения с целью выявления разной системной информации в вычислительной сети, не оказывая на него никакого влияния. Пассивный перехват тяжело выявить, поскольку нет непосредственного присоединения терминального оборудования к линии связи.

Прямой перехват (*direct eavesdropping*) - перехват информации непосредственным подключением дополнительного терминала к линии связи. Прямой перехват можно обнаруживать проверкой линии связи.

Косвенный перехват (*indirect eavesdropping*) - перехват информации (например, индуктивных волн) без использования непосредственного подключения к

линии связи (threat).

Аппаратные средства - разнообразные механические, электрические, электромеханические, электронные, электронно-механические и другие устройства и системы (например, источники бесперебойного питания, криптографические вычислители, электронные идентификаторы и ключи, устройства для выявления «жучков», генераторы шума и т.п.), функционирующие автономно (встраиваемые или соединенные с другой аппаратурой) с целью блокирования действий дестабилизирующих факторов и решения других задач защиты информации.

Программные средства - специальные программы (например, антивирусы, шифрования данных, реализации алгоритмов цифровой подписи, размежевание доступа, оценки рисков, определение уровня безопасности, организация экспертиз и т.п.), которые функционируют в пределах информационных систем для решения задач защиты информации.

Программно-аппаратные средства - взаимосвязанные аппаратное и программное средства (например, банковские системы электронных платежей, комплексные информационные системы конфиденциальной связи, автоматизированные системы контроля доступа персонала и транспортных средств в режимных зонах и т.п.), которые функционируют автономно или в составе других систем с целью решения задач защиты информации.

Криптографические средства - средства, предназначенные для защиты информации путем криптографического преобразования информации (шифрование, дешифрование), которое реализуется с помощью асимметричных или симметричных криптографических систем. Асимметричные криптографические системы базируются на криптографии с открытым ключом. Например, известнейшими практическими реализациями этого типа являются системы Диффи - Хеллмана, RSA и Эль-Гамала. Симметричные криптографические системы базируются на криптографии с секретным ключом, наиболее известными практическими реализациями которых являются, например, DES и т.п.

Стеганографические средства ориентированы на утаивание информации в такой форме, когда сам факт ее наличия не очевиден, например, утаивание данных в звуковых или графических файлах, которые входят в состав ОС Windows.

Организационные средства защиты информации - это множество процессов и действий (например, контроль за утилизацией носителей информации с ограниченным доступом, планирование мероприятий по восстановлению утраченной информации, аудит систем защиты, реализация экспертиз и т.п.), осуществляемых на всех технологических этапах (проектирование, изготовление, модификация, эксплуатация, утилизация и т.п.) существования соответствующих ресурсов информационных систем и ведущих к созданию, усовершенствованию, упорядочению и согласованности взаимосвязей и взаимодействия их компонент с целью решения задач защиты информации.



Разрушительное программное влияние - это программный код или его части, с помощью которых осуществляется угроза хотя бы одной характеристике безопасности определенных ресурсов информационных систем. Разрушительные влияния можно поделить на такие группы: компьютерные вирусы (вирусы), логические бомбы, тайные хода и лазейки; программы раскрытия паролей, репликаторы, сетевые программные анализаторы, суперзапинговые утилиты, троянские кони.

Вирус - программа, способная к многократному самовольному созданию своего тела, которая по обыкновению модифицирует (заражает) другие программы, записанные в файлах или системных областях, для дальнейшего воспроизведения нового тела и получения управления с целью модификации записей, уничтожения файлов, загрузки ресурсов и выполнения других разрушительных влияний в информационной системе.

Логические бомбы - программа, которая инициируется с возникновением разных событий, например открытие определенного файла, обработка заданных записей и другие действия с целью нарушения характеристик безопасности ресурсов информационных систем. Используются, например, для разворывания с помощью изменения определенным образом (в свою пользу) кода программы, которая реализует финансовые операции.

Тайный ход - уязвимость в системе, которую нарочно создает ее разработчик, или возникшая случайно и фактически являющаяся дополнительным способом проникновения в систему.

Программы раскрытия паролей - программы, по обыкновению предназначенные для угадывания паролей (например, архивированных файлов) через перебор вариантов, возможных для использования символов или проникновения в систему с помощью словарей.

Репликаторы - программы, которые при выполнении создают несколько своих копий в информационной системе. Например, когда репликатор создает только одну и после этого выполняет ее, то память системы быстро переполняется, что ограничивает доступ к определенным компонентам системы.

Сетевые анализаторы - программно-аппаратные средства (в отдельных случаях программы, которые запускаются из рабочей станции, подключенной к сети), предназначенные для считывания любых параметров потока данных в информационной системе.

Суперзапинг - разрушительное влияние, связанное с несанкционированным использованием утилит для модификации, уничтожения, копирования, раскрытия, вставки, применения или запрета применения данных информационной системы.

Троянские кони - специализированная программа, которая, как правило, выступает от лица других программ и разрешает действия, отличные от определенных в спецификации, которые используются программным обеспечением.

Экранирующий шлюз прикладного уровня (пакетный фильтр) - устройство, предназначенное для фильтрации пакетов сообщений, обеспечивающее прозрачное взаимодействие между внутренней и внешней сетями.

Экранирующий шлюз сеансового уровня - это устройство, предназначенное для контроля виртуальных соединений и трансляции адресов (например, IP-адрес) при взаимодействии с внешней сетью.

Политика работы межсетевых экранов - это политика, которая задает базовый принцип управления межсетевым взаимодействием, положенный в основу функционирования брандмауэра.

---

### ***Вопросы для самоконтроля***

---

1. Как классифицируются НСД по автоматизации?
2. Как классифицируются НСД по инициализированным условиям?
3. Как реализуется НСД с обратной связью?
4. Можно ли реализовать монономный НСД с нескольких источников?
5. На чем базируется пигибекинговский НСД?
6. Что можно отнести к неспецифичным категориям НСД?
7. Как классифицируются средства защиты от НСД?
8. Приведите классификацию компьютерных вирусов.
9. В чем заключается сущность эмпирического подхода?
10. Раскройте содержание модели системы с полным перекрытием.
11. Какими показателями может быть оценено качество распределения кодов доступа?
12. В чем заключается сущность теоретико-эмпирического подхода при построении моделей защиты информации?
13. Раскройте основные функции межсетевых экранов.
14. Какие есть типы межсетевых экранов?
15. Что нужно для эффективной защиты межсетевых взаимодействий?
16. Раскройте сущность моделей Белла - Лападула и Биба.

---

### ***Conclusions***

---

Privacy is security characteristic of resources that reflects their characteristic of inaccessibility without appropriate authority. In fact, resources cannot be available or disclosed to unauthorized parties, i.e. they do not exist for them. In turn, the author's side (for example, service staff, users, programs, etc.), which received an appropriate authority, has full access to resources.

Integrity is security characteristic of resources that reflects their feature to

resist unauthorized change.

Availability is security characteristic of resources that reflects their feature to use them in a given moment of time according to granted authority. In fact, the author's side, when needed, immediately at any time gets unlimited access to necessary resource.

Active interception is interception, when enemy has a chance not only to intercept the message but also to affect it, for example to delay or remove signals that are transmitted by communication channels.

Passive interception is access to information with the only option to observe connection exchange in order to identify system information in computing network without affecting it. Passive interception is difficult to identify because there is no direct connection of terminal equipment to communication link.

Direct interception is information interception by direct connection of additional terminal to communication line. Direct interception could be detected by communication line test.

Indirect interception is information interception without use of direct connection to communication line.

Hardware is a variety of mechanical, electrical, electromechanical, electronic, electronic-mechanical and other devices and systems (UPS, cryptographic calculators, electronic identifiers and keys, "bugs" detecting devices, noise generators, etc.) functioning autonomously (embedded or linked with other equipment) in order to block the action of destabilizing factors and solving other tasks of information security.

Software – special programs (antiviruses, data encoding, digital signature algorithms implementation, access separation, risk estimation, security level evaluation, etc.) that function within information systems to meet information protection challenges.

Software-hardware means - interrelated hardware and software (banking electronic payment systems, complex information system of confidential communication, automated access control systems for personnel and vehicles in secure areas, etc.) that operate autonomously or as part of other systems to meet information security challenges.

Cryptographic means are means for information protection by cryptographic data conversion (encryption, decryption) that are implemented using asymmetric or symmetric cryptographic systems. Asymmetric cryptographic systems are based on open key cryptography. Known practical implementations of this type are Diffie-Hellman, RSA and ElGamal systems. Symmetric cryptographic systems are based on secret key cryptography; known practical implementations of them are DES, GOST etc.

Steganographic means are aimed on hiding information when the fact of its existence is not obvious, for example, data hiding in a sound and graphic files that are part of Windows OS.

Organizational means of information protection – is a set of processes and ac-

tions (control of limited access storage devices disposal, planning of recovery activities for lost information, audit of protection systems, expertise implementation, etc.), carried out throughout all technological stages (design, production, modification, maintenance, disposal, etc.) of existence of appropriate information systems resources and leading to creation, improvement, streamline and harmonization of linkages and interactions of its components in order to meet information security challenges.

Destructive software impact is program code or its part that threatens at least one characteristic of information systems certain resources security. Destructive effects could be divided into following groups: computer viruses (viruses), logic bombs, backdoors and loopholes; passwords disclosure programs, replicators, networking software analyzers, super-zapping utilities, trojans.

Virus is a program capable of creating its reusable arbitrary body that usually modify (infect) other programs, stored in files or system areas, for further reproduction of new body and getting control for records modification, files destruction, resources download and performing other destruction influences in information system.

Logic bomb is a program that is initiated with emergence of various events, such as particular file opening, specified records processing and other actions in order to violate characteristics of information systems resource security. They are used, for example, for, stealing by changing in certain way (in their favor) program code that implements financial transactions.

Backdoor is a system vulnerability that is deliberately created by developer or randomly emerged and in fact is an additional way to break into system.

Passwords disclosure program is a program designed for unraveling passwords (for example, archived files) through enumeration of variants (brute force method), all possible symbols or penetration into the system with the help of dictionaries.

Replicators – programs, which, while executing, create several self-copies in information system. When replicator creates self-copy and executes it, system memory becomes overloaded and it limits access to some system components.

Network analyzers – software-hardware means (in some cases – programs that are launching from workstation, connected to network), designed for reading any parameter of data stream in information system.

Super-zapping – devastating impact associated with unauthorized use of utilities for modification, deleting, copying, disclosure, insertion, use or prohibition of use of information system data.

Trojan is a specialized program that usually acts on behalf of other programs and allows actions different from that determined in specification used by the software.

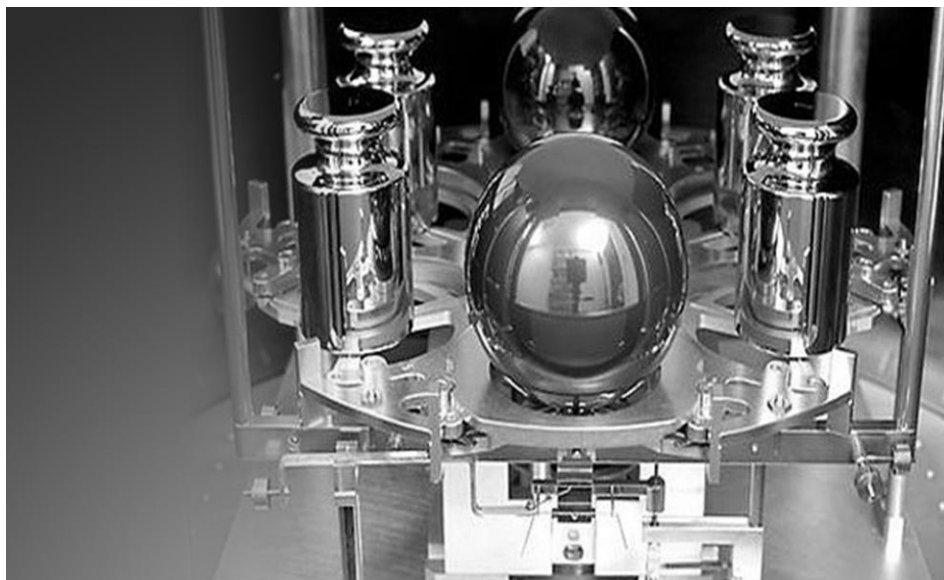
Shielding application level gateway (package filter) - a device designed for messages packages filtering, providing transparent interaction between internal and external networks.

Shielding circuit level gateway – a device designed for virtual connection control and address translation (for example, IP-address) while interacting with external network.

Firewall operational policy – policy that defines basic principle of networking interaction management, and is a basis for firewall functioning.

*Ключевые слова*

несанкционированный доступ	unauthorized access
компьютерная сеть	computer network
неавторизованная сторона	unauthorized side
атака	attack
сканирование портов	port scanning
средства защиты	security facilities
модель Белла-Лападула	Bell-LaPadula model



## **МЕТРОЛОГИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИСТЕМ**

**15**

- 15.1. Содержание метрологического обеспечения систем
- 15.2. Основные метрологические характеристики систем
- 15.3. Методы определения метрологических характеристик систем

### 15.1. Содержание метрологического обеспечения систем

Современное развитие измерительной техники, в частности ИИС, усложнение измерительных задач и условий эксплуатации средств измерений, их системное применение выдвигает новые требования к описанию свойств средств измерений. Приборы, рассчитанные на самостоятельное использование, для которых назначение класса точности однозначно определяло комплекс нормированных метрологических характеристик, практически непригодны для синтеза измерительных каналов ИИС. Комплекс метрологических характеристик должен выбираться таким образом, чтобы по некоторой совокупности метрологических характеристик средств измерений, средств вычислительной техники и характеристик других устройств, образующих измерительный канал, можно было определить метрологические характеристики всего измерительного канала. Интеллектуализация ИИС, включение в их состав вычислительного компонента с целью обработки результатов измерений, оценивания их точностных характеристик, управления процедурой измерений приводит к растущему значению метрологического аспекта разработки и использования алгоритмов и программ обработки данных.

*Метрологическое обеспечение ИИС* – система научной, технической, правовой и организационной деятельности, направленная на достижение единства процессов преобразования информации, осуществляемой в ИИС и требуемой точности результатов ее функционирования.

*Единство процессов преобразования информации* – качество процессов преобразования информации, при котором их результаты, определенные с использованием метрологических характеристик информационных средств, сопоставимы. Необходимым условием сопоставимости результатов является единообразие метрологических характеристик.

*Точность результата функционирования ИИС* – качественная характеристика системы, отражающая близость действительного результата функционирования к истинному.

*Метрологическая экспертиза* (составляющая метрологического обеспечения ИИС) – анализ и оценивание оптимальных научно-технических решений, связанных с обеспечением единства процессов преобразования информации, осуществляемых в ИИС.

Результаты анализа особенностей ИИС и возникающих в связи с этим проблем их метрологического обеспечения.

Многофункциональность

Обеспечение одновременного измерения ряда физических величин; построение обобщенных оценок на основе большого числа параметров; вычисление комплексных параметров

Наличие в составе ЭВМ

Оценивание метрологических характеристик алгоритмов и программ обработки результатов измерений

Многоканальность	Оценка, уменьшение или исключение влияния каналов друг на друга
Неразрывная связь специализированных ИИС с объектом, на котором они эксплуатируются	Проблемы проведения метрологического обслуживания в условиях невозможности привязки к эталону путем перемещения ИИС к месту нахождения эталона. Невозможность комплексной поверки измерительных каналов по условиям установки датчиков на объекте
Сложность описания объектов и их моделирования	Сложность учета влияния объектов на точность измерения в условиях неопределенности априорной информации
Агрегатный способ построения	Возможность исследования ИИС как законченного целого только на объекте
Распределенность компонентов и составных частей ИИС в пространстве	Учет влияния на метрологические характеристики различных условий эксплуатации компонентов ИИС
Возможность изменения состава ИИС в процессе эксплуатации	Сложность регламентации требований к системам на момент их выпуска
Наличие динамических режимов измерения	Необходимость исследования динамических свойств ИИС и согласование их с объектом

Объектами метрологического обеспечения ИИС являются измерительные каналы и их составляющие - измерительные и вычислительные компоненты.

Основными задачами метрологического обеспечения ИИС являются:

анализ и оценивание технических решений на соответствие нормам точности и выбору параметров, подлежащих измерению, а также обеспеченности методами и средствами измерений;

установление единого порядка передачи размера единиц физических величин ИИС;

установление единых требований к номенклатуре, нормированию и представлению метрологических характеристик измерительных каналов ИИС;

определение действительных значений метрологических характеристик измерительных каналов ИИС и их соответствия установленным нормам;

определение погрешностей вычислительных компонентов измерительных каналов ИИС и их соответствия установленным нормам;

установление полноты работ по метрологическому обеспечению ИИС и соответствия требованиям нормативных документов по метрологии;

установление требований к метрологическому надзору над ИИС и возможности его осуществления;

установление полноты работ по метрологическому обеспечению ИИС и



соответствия требованиям нормативной документации по метрологии.

Метрологическое обеспечение измерительных компонентов измерительных каналов ИИС, выпускаемых серийно, осуществляется в соответствии с нормативной документацией по метрологии с учетом требований, касающихся эксплуатационной совместимости.

Государственному метрологическому контролю и надзору подлежат ИИС, которые используются:

- в качестве рабочих эталонов для поверки средств измерительной техники (СИТ);

- для проведения государственных испытаний по утверждению типа СИТ;

- в области общественного здравоохранения;

- при производстве и контроле продуктов питания;

- в ходе осуществления мер по защите окружающей природной среды, охраны труда и техники безопасности;

- при геодезических и гидрометеорологических работах;

- при проведении торговых операций, включая все виды деятельности, связанные с определением количества и качества товаров;

- для оказания услуг связи;

- для государственного учета материальных ресурсов (электрической и тепловой энергии, газа, нефтепродуктов и т.д.);

- для проведения налоговых, таможенных и почтовых операций;

- при проведении испытаний и контроле качества продукции государственными или другими уполномоченными органами для определения соответствия продукции обязательным требованиям государственных стандартов;

- при обязательной сертификации продукции;

- для судебных, арбитражных, следственных и других экспертиз, которые проводятся от имени государственных органов;

- на транспорте для обеспечения безопасности движения;

- для регистрации национальных и международных рекордов.

**Состав работ по метрологическому обеспечению ИИС.** Состав работ зависит от стадии «жизненного цикла» ИИС (рис. 15.1).

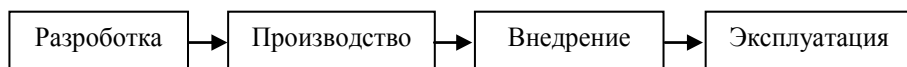


Рис. 15.1 «Жизненный цикл» ИИС

Метрологическое обеспечение ИИС осуществляется на всех этапах их жизненного цикла.

При разработке ИИС выполняют следующие работы по метрологическому обеспечению:

- метрологическую экспертизу технического задания на разработку ИИС, конструкторской и программной документации;

- разработку ИИС, программ и методик приемочных испытаний, программ

и методик метрологической аттестации ИИС, программ экспериментальных исследований ИИС, программ метрологической аттестации вычислительных компонентов, методик поверки ИИС;

государственные приемочные испытания ИИС;

метрологическую аттестацию ИИС единичного производства.

В ходе производства ИИС выполняют:

метрологическую экспертизу технологической документации на ИИС, предназначенных для серийного производства;

первичную поверку (калибровку) ИИС серийного производства.

На этапе внедрения ИИС выполняют:

метрологическую аттестацию ИИС, монтаж и наладку которых осуществляют непосредственно на объекте эксплуатации;

метрологическую аттестацию ИИС в условиях, которые отличаются от условий, для которых нормированы их метрологические характеристики;

метрологическую аттестацию вычислительных компонентов, измерительных каналов ИИС.

Во время эксплуатации ИИС выполняют:

метрологическое сопровождение вычислительных компонентов измерительных каналов ИИС;

периодическую поверку (калибровку) ИИС.

**Содержание работ по метрологическому обеспечению ИИС.** Основными работами по метрологическому обеспечению ИИС являются:

установление единых требований к метрологическим характеристикам систем;

разработка методов и средств контроля метрологических характеристик систем;

метрологическая экспертиза технической документации;

обеспечение единства и достоверности результатов функционирования ИИС путем проведения испытаний для целей утверждения типа ИИС или их единичных экземпляров;

анализ состояния метрологического обеспечения ИИС и разработка на его основе комплексных программ развития метрологического обеспечения систем;

организация и осуществление государственного метрологического контроля и надзора за состоянием и применением ИИС;

организация и проведение поверочных и калибровочных работ;

организация и проведение работ по аттестации алгоритмов обработки информации, применяемых при работе ИИС.

Анализ состояния метрологического обеспечения ИИС проводят с целью установления: возможности осуществления постоянного контроля метрологической исправности систем, находящихся в эксплуатации; соответствия разрабатываемых, изготавливаемых и находящихся в эксплуатации ИИС требованиям нормативной документации и разработке на этой основе мероприятий

по совершенствованию ИИС и их метрологического обеспечения.

Государственный метрологический контроль и надзор, ведомственный контроль устанавливают:

наличие нормативных документов, регламентирующих требования к организации и порядку проведения разработки, производства и эксплуатации ИИС, а также требования к точности результата функционирования ИИС, порядок и правила поверки ИИС;

эффективность работ по проведению метрологической экспертизы конструкторской, технологической, проектной документации;

правильность эксплуатации ИИС и организации контроля за их состоянием;

наличие необходимых эталонов для осуществления поверок;

правильность проведения поверок ИИС в процессе эксплуатации и соблюдение межповерочных интервалов.

Цель метрологической экспертизы технической документации - обеспечение эффективности метрологического обеспечения, выполнение общих и конкретных требований к метрологическому обеспечению наиболее рациональными методами и средствами. Конкретные цели метрологической экспертизы определяются назначением и содержанием технической документации.

Метрологическая экспертиза технической документации на отечественные ИИС проводится метрологическими службами организаций (предприятий), разрабатывающих, изготавливающих и эксплуатирующих ИИС, головными и базовыми организациями метрологической службы в отраслях, а также органами государственной метрологической службы и государственными научными метрологическими центрами, в том числе аккредитованными в качестве государственных центров испытаний средств измерений в установленном порядке.

Основным содержанием метрологической экспертизы технического задания (ТЗ) на разработку (проектирование) ИИС или заменяющего его документа, содержащего исходные данные для разработки, является проверка достаточности исходных требований, приводимых в проекте ТЗ, для рациональной регламентации метрологических характеристик измерительных каналов ИИС на этапе их разработки и построения эффективного способа их метрологического обеспечения на последующих этапах жизненного цикла системы.

Основным содержанием метрологической экспертизы технических условий, конструкторской, технологической, проектной и эксплуатационной документации является проверка соответствия заложенных в указанной документации комплекса метрологических характеристик измерительных каналов и их компонентов, методов и средств их определения, контроля и (или) расчета, соответствия исходным требованиям ТЗ, а также соблюдения метрологических правил, требований и норм, регламентируемых внормативной документацией. В частности, проверяют:

наличие в технических условиях и эксплуатационной документации ис-

черпывающего перечня измерительных каналов и метрологических требований к ним;

контролепригодность конструкции ИИС;

наличие в проектной документации, предназначенной для монтажа и наладки ИИС на объекте, требований к параметрам и характеристикам, необходимым для контроля качества монтажа ИИС;

наличие и содержание материалов (протоколов, актов, журналов, отчетов и т.п.) предварительных испытаний, касающихся метрологических свойств ИИС.

Аттестация алгоритмов обработки информации, применяемых при работе ИИС проводится для определения, в какой мере алгоритм вычислений соответствует функции, связывающей измеряемую величину с результатами прямых измерений (со значениями величины на входе измерительных компонентов ИИС). Обычно возникающие несоответствия вызваны возможностями вычислительной техники и вынужденными упрощениями алгоритмов вычислений (линеаризацией функций, их дискретными представлениями и т.п.).

Испытания для утверждения типа и утверждение типа проводятся для ИИС, подлежащих применению в сферах распространения государственного метрологического контроля и надзора. Испытания для добровольной "сертификации соответствия" и "сертификации соответствия" проводятся для ИИС, не подлежащих применению в вышеуказанных сферах. Если в сфере распространения государственного метрологического контроля и надзора применяется только часть из общего числа измерительных каналов ИИС, а другая часть - вне этой сферы, то испытаниям для целей утверждения типа ИИС подвергается только первая часть измерительных каналов.

Поверке и калибровке подвергаются измерительные каналы ИИС, подлежащие применению в сферах распространения государственного метрологического контроля и надзора. Содержание работ по поверке (калибровке) определяется документами на методику поверки ИИС.

При проведении метрологической аттестации вычислительных компонентов измерительных каналов ИИС на рассмотрение представляют:

программную документацию на вычислительный компонент;

информацию о диапазоне изменения входных данных и их погрешности;

программу и методику метрологической аттестации вычислительного компонента;

исходный текст программы на электронных носителях;

ведомости о технических характеристиках и параметрах средств вычислительной техники;

проект программы и методики метрологического сопровождения вычислительного компонента.

Программа и методика метрологической аттестации вычислительных компонентов может быть представлена отдельным документом или составной частью программы метрологической аттестации ИИС.

Во время проведения метрологической аттестации вычислительных компонентов определяют:

оценки погрешностей вычислительных компонентов и сопоставление их с требованиями ТЗ на разработку;

пригодность вычислительных компонентов для использования в составе ИИС.

Во время метрологического сопровождения вычислительных компонентов определяется:

оценка погрешностей вычислительных компонентов после модификации и соответствие их ТЗ задания на разработку;

степень влияния модификации вычислительных компонентов на их метрологические свойства;

целесообразность проведения метрологической аттестации вычислительных компонентов после модификации;

пригодность вычислительного компонента для использования в составе ИИС после модификации.

Метрологическое сопровождение вычислительных компонентов проводят в соответствии с программой и методикой сопровождения.

## 15.2. Основные метрологические характеристики систем

Комплексы метрологических характеристик ИИС регламентируются в нормативной, технической и проектной документации, а именно: стандартах общих технических требований (условий), стандартах технических требований (условий), технических заданиях, технических условиях, конструкторской, технической, эксплуатационной и другой документации.

**Основные принципы регламентирования и нормирования метрологических характеристик ИИС.** Метрологические характеристики отражают свойства средств измерений (измерительных каналов), оказывающие определяющее влияние на результат и точность измерений.

Нормирование метрологических характеристик - это установление комплекса метрологических характеристик и способов их представления.

Общие принципы нормирования, применяемые к ИИС:

возможность сравнения и выбора средства измерения;

возможность определения погрешности (неопределенности) измеряемой величины с учетом нормируемых метрологических характеристик практически реализуемыми методами;

возможность определения оценки погрешности (неопределенности) результатов измерений, проводимых с помощью данного средства измерения.

Комплекс метрологических характеристик должен включать в себя характеристики, инвариантные к условиям применения и режиму работы. Способы представления метрологических характеристик должны обеспечивать простоту их контроля.

Особенности ИИС обуславливают специфику регламентации их метро-

логических свойств, следует учитывать:

- особенности выпуска и комплектации систем;
- условия их эксплуатации с учетом пространственной распределенности компонентов;

- использование в составе систем сложных вычислительных устройств.

Рассмотрим подробнее это влияние.

1. Если ИИС выпускается и комплектуется как единое целое, то в нормативной документации устанавливаются метрологические характеристики измерительного канала в целом и методы их контроля. Если ИИС строится по агрегатному принципу, то тогда регламентируются расчетные метрологические характеристики и методы расчета метрологических характеристик измерительного канала системы по метрологическим характеристикам входящих в их состав компонентов, либо нормируют индивидуальные характеристики измерительного канала и методы их экспериментального определения.

2. Если все компоненты ИИС находятся в одинаковых внешних условиях, то функции влияющих величин и дополнительные составляющие погрешности (неопределенности), возникающие под их воздействием, нормируются как для обычных средств измерений. Если они находятся в различных внешних условиях, то нормирование и определение влияющих величин является исключительно сложной задачей, для решения которой прибегают к планированию эксперимента. Если функция влияния одной влияющей величины на метрологические характеристики зависит от других влияющих величин, необходимо нормировать и определять многомерные функции влияния и проводить многофакторный эксперимент.

3. Если используются аналоговые вычислительные устройства, то их рассматривают как обычный измерительный компонент системы и соответствующим образом нормируют его метрологические характеристики. Если используют сложные вычислительные устройства (включая ЭВМ), то возникает задача регламентации метрологических характеристик алгоритмов и программ вычислений.

Основной структурной единицей любой ИИС является измерительный канал - последовательная цепь измерительных компонентов, соединенная каналами связи. Началом измерительного канала является либо вход системы, либо выход промежуточного устройства, от которого расходятся несколько таких последовательных цепей; концом - выход системы либо вход системы разветвления.

Таким образом, чтобы достаточно полно описать метрологические свойства системы, необходимо нормировать метрологические характеристики:

- измерительных каналов системы;
- измерительных компонентов системы;
- аналоговых вычислительных компонентов;
- алгоритмов вычисления, реализуемых цифровыми вычислительными компонентами.

Для ИИС регламентируются метрологические характеристики измерительных каналов в целом, метрологические характеристики компонентов, которые входят в измерительные каналы в виде нормируемых значений, которые определены экспериментально и (или) по результатам соответствующих расчетов. Регламентация метрологических характеристик измерительных каналов ИИС не исключает нормирования метрологических характеристик их компонентов, что обеспечивает соответствие метрологических свойств измерительных каналов регламентированным и взаимозаменяемость компонентов.

Для измерительных каналов ИИС, как правило, регламентируются следующие характеристики, которые могут применяться как отдельно, так и в комбинациях:

- а) нормируемые метрологические характеристики и методы их контроля;
- б) значения метрологических характеристик, получаемые расчетным путем, и методы их расчета по характеристикам компонентов;
- в) перечень метрологических характеристик, которые определяются экспериментально, и методы их экспериментального определения;
- г) перечень или значения расчетных характеристик погрешности измерений, которые выполняются с помощью измерительных каналов ИИС, и методы их расчета по метрологическим характеристикам компонентов и значениям характеристик условий эксплуатации.

Для ИИС, в состав которых входит вычислительный компонент нормируются характеристики точности алгоритмов обработки результатов входных измерений для получения конечных результатов измерений, которые реализуются вычислительным компонентом в соответствии с заданной программой. Метрологические характеристики должны учесть влияние алгоритма обработки данных на методические погрешности измерений и трансформацию погрешностей исходных измерений в процессе обработки.

Окончательный выбор целесообразного способа регламентации метрологических характеристик ИИС является сложным многовариантным заданием и осуществляется на основе анализа особенностей конкретных видов ИИС.

**Метрологические характеристики измерительных каналов ИИС, которые нормируются либо определяются расчетным путем.** Комплекс метрологических характеристик для конкретных измерительных каналов ИИС, которые нормируются или получаются расчетным путем по нормированным характеристикам компонентов, выбираются из общего перечня, в который входят следующие метрологические характеристики измерительных каналов ИИС:

- 1) номинальная статическая характеристика преобразования измерительного канала ИИС, который заканчивается измерительным преобразователем или измерительным прибором со шкалой, проградуированной в единицах, отличных от единиц измерения входного сигнала измерительного канала;
- 2) выходной код, число разрядов кода, номинальная цена единицы наи-

меньшего разряда кода измерительного канала ИИС, предназначенного для выдачи результатов в цифровом коде;

3) характеристики систематической составляющей погрешности измерительного канала ИИС (граница  $\Delta_{\text{с.доп}}$  допустимого значения систематической составляющей погрешности измерительного канала ИИС). При необходимости допускается нормировать наибольшее допустимое изменение систематической составляющей на заданном интервале времени или изменение во времени границ допустимой систематической составляющей погрешности. Также дополнительно к границе  $\Delta_{\text{с.доп}}$  может быть нормировано среднеквадратическое отклонение  $\sigma(\Delta_{\text{с}})$  систематической составляющей погрешности, которая рассматривается как случайная величина, свойственная множеству измерительных каналов ИИС данного типа;

4) характеристики случайной составляющей погрешности измерительного канала ИИС:

а) граница  $\sigma_{\text{доп}}(\Delta)$  допустимого значения среднеквадратического отклонения случайной составляющей погрешности измерительного канала ИИС;

б) граница допустимого значения среднеквадратического отклонения и номинальная нормализованная (выраженная в долях дисперсии) автокорреляционная функция  $r_{\Delta}(\tau)$  или номинальная спектральная плотность  $S_{\Delta}(\omega)$  и границы допустимых отклонений от приведенных номинальных функций случайной составляющей погрешности измерительного канала ИИС;

5) характеристика погрешности  $\Delta$  измерительного канала ИИС (граница  $\Delta_{\text{доп}}$ , допустимого значения погрешности измерительного канала ИИС);

б) граница  $b_{\text{доп}}$  допустимого значения вариации выходного сигнала или показаний измерительного канала ИИС, которые заканчиваются измерительным преобразователем или прибором;

7) характеристики, отражающие взаимодействие измерительного канала ИИС с объектом;

8) динамические характеристики измерительных каналов ИИС:

а) номинальные функции связи между переменными во времени входным и выходным сигналами (передаточная функция, импульсная весовая функция, переходная характеристика, амплитудно-фазовая характеристика и т.д.) и границы допустимых отклонений от номинальных функций;

б) время установления показаний или выходного сигнала  $t_y$  измерительного канала ИИС;

(для конкретного измерительного канала ИИС динамическая характеристика из приведенного списка выбирается с учетом практической возможности ее нормировки).

9) номинальная функция влияния  $\psi(\xi)$  и границы допустимого отклонения от номинальной функции;



10) наибольшие допустимые изменения  $\Delta L(\xi)$  метрологических характеристик измерительного канала ИИС, вызванные отклонением внешних влияющих факторов и неинформативных параметров входного сигнала от номинальных значений;

11) динамические функции влияния измерительного канала ИИС. Динамические функции влияния нормируются для ИИС, подверженных резким изменениям влияющих величин (например, для ИИС, установленных на движущихся объектах), что приводит к возникновению переходных процессов в измерительных цепях измерительных каналов ИИС, которые существенно влияют на погрешность измерений. Для конкретного измерительного канала динамическая характеристика выбирается с учетом практической возможности ее нормирования;

12) характеристики линии связи, если она не входит в состав комплектующих компонентов ИИС на момент выпуска и появляется как компонент системы только при монтаже на объекте.

Рассмотрим некоторые рекомендации, которые следует учитывать при нормировании метрологических характеристик измерительных каналов ИИС.

Нормирование метрологических характеристик компонентов измерительного канала ИИС осуществляется с учетом тех же факторов, что и для измерительных каналов. Нормирование метрологических характеристик аналоговых вычислительных компонентов осуществляется аналогично нормированию метрологических характеристик измерительных компонентов.

Наибольшие допустимые границы, функция влияния или динамическая функция влияния нормируются отдельно для каждой влияющей величины; указанные характеристики нормируются также для совместных воздействий влияющих величин, если функция влияния каждой величины существенно зависит от других влияющих величин.

Если длина измерительного канала ИИС такова, что одна и та же влияющая величина для разных частей измерительного канала может одновременно принять существенно различные значения, то для такого измерительного канала нормируется  $\psi(\xi)$  или  $\Delta L(\xi)$  на каждую из указанных частей измерительного канала отдельно и для различных его частей устанавливаются различные нормальные и рабочие условия.

**Метрологические характеристики измерительных каналов ИИС, которые определяются экспериментально или расчетно-экспериментально.** Комплекс метрологических характеристик для конкретных измерительных каналов ИИС, которые определяются экспериментально, или расчетным путем по метрологическим характеристикам компонентов, полученным экспериментально, выбирается из общего перечня метрологических характеристик, в который входят следующие метрологические характеристики измерительных каналов ИИС:

- 1) градуировочная характеристика измерительного канала ИИС;
- 2) таблицы поправок измерительного канала для ИИС, которые заканчи-

ваются показывающим или регистрирующим измерительным прибором со шкалой, проградуированной в единицах входного сигнала канала;

3) характеристики систематической составляющей погрешности измерительного канала ИИС - верхняя  $\Theta_v$  и нижняя  $\Theta_n$  границы неисключенной систематической составляющей погрешности измерительного канала ИИС и вероятность  $P(\Theta_c)$  с которой неисключенная систематическая составляющая погрешности находится в данных границах. При необходимости может определяться наибольшее изменение систематической составляющей погрешности на заданном интервале времени;

4) характеристики случайной составляющей погрешности измерительного канала ИИС:

а) средне квадратическое отклонение  $\sigma(\Delta)$ , его доверительные границы и соответствующая доверительная вероятность  $P_\sigma$  ;

б) средне квадратическое отклонение  $\sigma(\Delta)$ , его доверительные границы и соответствующая доверительная вероятность  $P_\sigma$  и нормализованные автокорреляционная функция  $r_\Delta(\tau)$  или спектральная плотность  $S_\Delta(\omega)$  случайной составляющей погрешности с указанием доверительных границ этих функций и соответствующих им доверительных вероятностей  $P_r$  или  $P_s$  ;

5) вариация  $h$  выходного сигнала измерительного канала ИИС, который заканчивается измерительным преобразователем, или вариация показаний измерительного канала, который заканчивается измерительным прибором, доверительные границы ее определения и соответствующая им доверительная вероятность;

6) характеристики, которые отражают взаимодействие измерительного канала ИИС с объектом измерения и погрешности их экспериментального определения;

7) неинформативные параметры выходного сигнала измерительного канала ИИС, который заканчивается измерительным преобразователем и погрешность их экспериментального определения;

9) динамические характеристики измерительного канала ИИС:

а) функция связи между переменными во времени входными и выходными сигналами (передаточная функция, импульсная весовая функция, переходная характеристика, амплитудно-фазовая характеристика и т.д.) и погрешность ее экспериментального определения;

б) время установления показаний или выходного сигнала измерительного канала и погрешность его экспериментального определения;

(для конкретного измерительного канала ИИС динамическая характеристика из приведенного выше перечня выбирается с учетом практической возможности ее экспериментального определения);

10) функция влияния измерительного канала ИИС и погрешность ее экс-

периментального определения;

11) динамические функции влияния измерительного канала ИИС. Для конкретного измерительного канала динамическая характеристика выбирается с учетом практической возможности ее экспериментального определения.

Регламентирование метрологических характеристик компонентов проводится с учетом тех же факторов, которые предусмотрены и для измерительных каналов.

**Основные принципы контроля и определения метрологических характеристик измерительных каналов ИИС.** Контроль и определение метрологических характеристик измерительных каналов проводят с целью:

а) обеспечения качества разработки и изготовления ИИС в части соблюдения метрологических требований к ним на предприятиях, которые разрабатывают и производят ИИС;

б) проверки качества монтажа и наладки ИИС (включая соблюдение требований к параметрам линий связи, которые оказывают воздействие на метрологические характеристики измерительных каналов) в процессе и после установки ИИС на объекте; возможности проведения исследовательской эксплуатации и передачи в постоянную эксплуатацию в части соблюдения метрологических требований, заложенных в проекте;

в) проверки и сохранения метрологических характеристик ИИС в процессе эксплуатации.

Контроль и определение метрологических характеристик осуществляется экспериментально «сквозным методом», т.е. путем подачи на вход измерительного канала ИИС образцового сигнала (имитирует измеряемую величину) и снятие его выходного сигнала (результата измерения). Полученные в результате эксперимента значения метрологических характеристик служат непосредственно в качестве определенных или же сравниваются с нормированными значениями.

Если эксперимент проводился в конкретно реализованных условиях применения ИИС, отличных от тех (обычно нормальных), для которых нормировались или определялись метрологические характеристики измерительного канала, то полученные в процессе эксперимента значения сравниваются с рассчитанными значениями тех же характеристик, вычисленных для конкретно реализованных условий по нормированным или определенным метрологическим характеристикам компонентов, которые входят в состав измерительного канала.

Необходимыми условиями использования «сквозного метода» определения или контроля метрологических характеристик являются:

а) наличие доступа ко входу измерительного канала (ограничение доступа может быть вызвано конструкцией или способами установки датчиков, температурными условиями или наличием опасной среды в местах их расположения и т.д.);

б) возможность задания необходимого набора всех значений влияющих

величин, характерных для условий эксплуатации;

в) наличие эталонов и средств задания измеряемых величин.

Значения метрологических характеристик могут быть получены расчетным (расчетно-экспериментальным) методом. Он используется в тех случаях, когда для измерительного канала не выполняются условия «сквозного метода» контроля или определения его метрологических характеристик. Метод заключается в следующем:

а) в измерительном канале выделяется та его часть, которая состоит из компонентов (или их совокупности) с нормированными или экспериментально определенными метрологическими характеристиками, для которой применяется «сквозной метод» контроля ее метрологических характеристик (доступная часть). Желательно, чтобы в доступную часть измерительного канала входило максимальное количество его компонентов, что позволит исследовать метрологические характеристики линии связи, нормирующие и функциональные преобразователи, устройства связи с объектом, вычислительные устройства. Для современных ИИС как доступную часть целесообразно использовать измерительные каналы интегрированных компонентов, на основе которых создаются ИИС;

б) осуществляется контроль или определение метрологических характеристик доступной части измерительного канала;

в) вычисляются значения метрологических характеристик измерительного канала, значения в целом по нормированным или экспериментально определенным метрологическим характеристикам доступной части и нормированным или приписанными (по результатам ранее проведенных экспериментальных определений метрологических характеристик) недоступной части измерительного канала. Если недоступная часть измерительного канала вносит основной вклад в результирующую погрешность измерительного канала, то данный способ становится практически чисто расчетным, так как несмотря на экспериментальную проверку доступной части, ее погрешность составляет незначительную часть в суммарной погрешности измерительного канала.

При определении метрологических характеристик число экспериментов (размер выборки) и максимально допустимая погрешность измерений в данной точке диапазона измерительного канала ИИС устанавливаются в документации таким образом, чтобы для экспериментально определяемых характеристик обеспечивались доверительный интервал и доверительная вероятность не хуже, чем заданные.

Характеристики точности алгоритмов обработки результатов измерений, реализуемых вычислительным компонентом, подлежат одноразовому контролю (определению) экспериментальными, аналитическими или методами имитационного моделирования. При контроле или определении метрологических характеристик аналоговых вычислительных компонентов используются те же принципы, что и для измерительных компонентов ИИС.

### 15.3. Методы определения метрологических характеристик систем

В предыдущих разделах было показано, что любая ИИС состоит из измерительных каналов, соответственно процедура определения метрологических характеристик ИИС сводится к определению метрологических характеристик измерительных каналов. Методы определения их метрологических характеристик (МХ) можно свести к трем основным группам, которые представлены на рис. 15.2.



Рис. 15.2. Методы определения МХ измерительных каналов ИИС

Каждый из приведенных методов имеет свои специфические требования к априорной информации о ИИС, составляющих процедуры определения метрологических характеристик, условий проведения процедуры и т.д.

**Метод определения метрологических характеристик систем по метрологическим характеристикам компонентов измерительных каналов.** Необходимость применения расчетных методов определения метрологических характеристик ИИС по метрологическим характеристикам компонентов обусловлена агрегатным принципом их конструкции, т.е. наличием универсального ядра (информационно-вычислительного комплекса), на основе которого с использованием датчиков различных физических величин конструируют ИИС.

Поскольку расчетные методы предполагают идеализацию свойств системы и требуют большого объема априорной информации, их использование должно быть обосновано технико-экономическими причинами.

Методы распространяются на измерительные каналы, состоящие из последовательно включенных линейных аналоговых компонентов, а также на измерительные каналы, содержащие дискретные компоненты, влиянием дискретности которых на погрешность или неопределенность результатов измерений ИИС можно пренебречь.

Для того чтобы правильно получить исходные данные для расчетов в виде функциональных зависимостей, которые связывают метрологические характеристики с входным (выходным) сигналом, необходимо выбрать математическую модель компонента. Как правило, в нормативной документации отсутствуют данные, необходимые для построения модели. Поэтому при использовании расчетных методов необходимо провести дополнительные исследования, связанные с построением модели и проверкой ее адекватности.

В общем случае расчет номинальной функции преобразования, характе-

ристик погрешности (неопределенности) показаний ИИС основывается на последовательном приведении к выходу канала составляющих погрешности ИИС с последующим их суммированием.

Рассмотрим метрологические характеристики, подлежащие расчетам:

а) для нормальных условий эксплуатации ИИС в статическом режиме расчету подлежат:

номинальные статические характеристики преобразования измерительных каналов  $f_n(x)$ ;

систематическая составляющая погрешности каналов  $\Delta_{\text{сист.}}$ ;

случайная составляющая погрешности измерительных каналов  $\Delta^\circ$ ;

погрешности измерительных каналов  $\Delta$ ;

б) для рабочих условий эксплуатации ИИС в статическом режиме рассчитываются:

наибольшие допустимые изменения метрологических характеристик измерительных каналов вызванных изменениями внешних влияющих величин и неинформативных параметров входного сигнала,  $\Delta I(\xi)$ ;

функции влияния на метрологические характеристики измерительных каналов  $\psi(\xi)$ ;

в) для нормальных условий эксплуатации измерительных каналов в стационарном динамическом режиме рассчитываются:

амплитудно- и фазочастотные характеристики  $A_n(\omega)$  и  $\phi_n(\omega)$ ;

спектральная плотность случайной составляющей погрешности  $S_{\Delta}(\omega)$ .

Для рабочих условий эксплуатации в стационарном динамическом режиме рассчитывают функции влияния на метрологические характеристики.

В качестве исходных данных для расчета метрологических характеристик измерительных каналов используются нормированные метрологические характеристики компонентов, входящих в их состав.

1. Для расчета метрологических характеристик измерительных каналов в *статическом* режиме в *нормальных условиях* эксплуатации используются следующие метрологические характеристики компонентов, составляющих измерительный канал:

$f_{ni}(x)$  - номинальная статическая характеристика преобразования  $i$ -го компонента в виде формулы;

характеристики систематической составляющей  $\Delta_{\text{сист}}$  погрешности:

$M[\Delta_{ci}(x)]$  - математическое ожидание систематической составляющей погрешности компонентов в виде линейной функции входного сигнала;

$\sigma[\Delta_{ci}(x)]$  - среднеквадратическое отклонение систематической составляющей погрешности компонентов данного типа в виде функции входного сигнала;

характеристики случайной  $\overset{\circ}{\Delta}$  погрешности ( $\sigma_{i\text{доп.}}(\overset{\circ}{\Delta}) = \xi_i$  – предел допустимого значения среднеквадратического отклонения случайной составляющей погрешности компонентов данного типа).

В расчетных формулах, полученных с учетом взаимного влияния каналов многоканальных компонентов, которые входят в состав ИИС, используются следующие метрологические характеристики этих компонентов:

$f_{н1}(x), f_{н2}(x), \dots$  - набор номинальных статических характеристик преобразования для каждого измерительного канала каждого многоканального компонента;

$M(\Delta_{c1}), M(\Delta_{c2}), \dots$  - набор математических ожиданий систематических составляющих погрешности;

$\sigma(\Delta_{c1}), \sigma(\Delta_{c2}), \dots$  - набор среднеквадратических отклонений систематических составляющих погрешности для каждого измерительного канала каждого многоканального компонента.

2. Для расчета метрологических характеристик каналов в *статическом* режиме в рабочих условиях эксплуатации в дополнение к вышесказанным метрологическим характеристикам используются наибольшие допустимые изменения перечисленных в п. 1 метрологических характеристик, вызванные изменением внешних влияющих величин и неинформативных параметров входного сигнала или их функции влияния.

3. Исходными данными для расчета метрологических характеристик в *стационарном динамическом* режиме измерений в *нормальных* условиях эксплуатации являются:

$A_{ni}(\omega)$  – номинальная амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) компонента, который входит в измерительный канал;

$\phi_{ni}(\omega)$  – номинальная фазочастотная характеристика (ФЧХ) компонента;

$\Delta A_i(\omega)$  – наибольшее допустимое отклонение АЧХ от номинального;

$\Delta \phi_i(\omega)$  – наибольшее допустимое отклонение ФЧХ от номинального;

$S_{\Delta i}(\omega)$  – спектральная плотность случайной составляющей погрешности

данного типа.

4. В *стационарном динамическом* режиме измерения в рабочих условиях эксплуатации исходными данными наряду с характеристиками, указанными в п. 3, являются функции влияния компонентов, которые входят в канал:

$\psi \Delta A_i(\xi_1, \xi_2, \dots)$  – функция влияния на АЧХ;

$\psi \Delta \phi_i(\xi_1, \xi_2, \dots)$  – функция влияния на ФЧХ;

$\psi S_{\Delta i}(\xi_1, \xi_2, \dots)$  – функция влияния на спектральную плотность случайной

составляющей погрешности.

Исходные данные, необходимые для расчета метрологических характе-

ристик компонентов, получают из нормативно-технической документации, а в тех случаях, когда характеристики не указаны или представлены неполно, они должны быть определены путем экспериментальных исследований компонентов с использованием специальных методик.

Далее, для примера, рассмотрим методику расчета метрологических характеристик ИИС только в стационарном режиме и без учета взаимного влияния измерительных каналов.

*Расчет метрологических характеристик измерительных каналов в статическом режиме при нормальных условиях эксплуатации.*

1. Номинальная статическая характеристика измерительного канала может быть представлена как

$$f_H(x) = A^0 x + a, \quad (15.1)$$

где  $A^k = \prod_{j=k+1}^N A_j$ ,  $k=1,2,\dots,N-1$ ,  $A^N = 1$ ,  $A^0 = \prod_{i=1}^N A_i$ ,  $a = \sum_{k=1}^N A^k a_k$ ;  $N$  – количество компонентов в канале;  $A_i$  и  $a_i$  – соответственно мультипликативная и аддитивная составляющие номинального  $i$ -го компонента, номинальная статическая характеристика которого  $f_{Hi}(x)$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) задается в виде линейных функций входного сигнала  $f_{Hi}(x) = A_i x + a_i$ .

Например, для измерительного канала, состоящего из трех последовательно соединенных компонентов  $k_1, k_2, k_3$  (рис. 15.3) аддитивные и мультипликативные составляющие которых обозначим соответственно  $A_1, a_1, A_2, a_2, A_3, a_3$ , расчет номинальной функции проводится следующим образом.

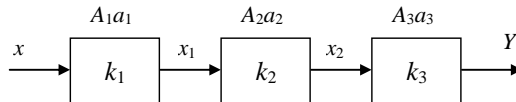


Рис. 15.3. Простая линейная модель измерительного канала

Сигнал на выходе компонента  $k_1$  можно представить как  $x_1 = A_1 x + a_1$ . Этот сигнал является входным для  $k_2$  выходной сигнал которого можно получить из выражения  $x_2 = A_2 x_1 + a_2 = A_2 (A_1 x + a_1) + a_2 = A_1 A_2 x + A_2 a_1 + a_2$ , тогда сигнал на выходе компонента  $k_3$  можно представить в виде  $x_3 = A_3 x_2 + a_3 = A_3 (A_1 A_2 x + A_2 a_1 + a_2) + a_3 = A_1 A_2 A_3 x + A_2 A_3 a_1 + A_3 a_2 + a_3$ , что соответствует формуле (15.1).

2. Расчет характеристик систематической составляющей погрешности измерительного канала в виде функций входного сигнала.

В результате расчетов оцениваются  $M[\Delta_{\text{сист}}(x)]$  – математическое ожидание систематической составляющей погрешности и  $\sigma[\Delta_{\text{сист}}(x)]$  – средне-



квадратическое отклонение систематической составляющей погрешности измерительного канала данного типа.

Исходными данными для расчета являются:

$N$  – количество компонентов в канале;

$f_{ni}(x)$  – номинальная статическая характеристика компонента данного типа в виде линейной зависимости от входного сигнала  $f_{ni}(x) = A_i x + a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ );

$M(\Delta_{ci}(x)) = B_i x + b_i$  – математическое ожидание систематической составляющей погрешности компонента данного типа в виде линейной функции входного сигнала;

$\sigma(\Delta_{ci}(x))$  – среднеквадратическое отклонение систематической составляющей погрешности компонентов данного типа (для всех компонентов), ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Для расчета  $\sigma[\Delta_{ci}(x)]$  задается в виде функции входного сигнала  $\sigma(\Delta_{ci}(x)) = \sqrt{(G_i^2 x^2 + g_i^2)}$ , где  $G_i^2$  и  $g_i^2$  – дисперсии мультипликативной и аддитивной составляющих систематической погрешности соответственно.

По исходным данным вычисляются вспомогательные величины:

$$B^k = \prod_{j=k+1}^N (B_j + A_j), \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad (15.2)$$

$$Q_i^2 = \prod_{j=i+1}^N ((B_j + A_j)^2 + G_j^2), \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \quad (15.3)$$

$$B^N = A^N = Q_N^2 = 1; \quad A^k = \prod_{j=k+1}^N A_j, \quad k = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$b = \sum_{i=1}^N B^i (b_i + a_i) - \sum_{i=1}^N A^i a_i; \quad (15.4)$$

$$B = B^0 - A^0. \quad (15.5)$$

Подставляя их в следующие формулы, находятся оценки характеристик систематической составляющей погрешности измерительного канала:

$$M[\Delta_{\text{сист}}(x)] = Bx + b, \quad (15.6)$$

$$\sigma[\Delta_{\text{сист}}(x)] = \sqrt{x^2 (Q_0^2 - (B^0)^2) + \sum_{i=1}^N (b_i^2 (Q_i^2 - (B^i)^2) + g_i^2 Q_i^2)}. \quad (15.7)$$

3. Расчет границы допустимого значения систематической составляющей погрешности  $\Delta_{\text{с. доп}}$  измерительного канала данного типа.

Исходными данными для расчета являются:

$N$  – количество компонентов, которые входят в канал;

$[0 \dots q]$  – диапазон изменения входного сигнала;

$f_{ni}(x)$  – номинальная статическая характеристика компонента данного

типа в виде линейной зависимости от входного сигнала  $f_{ni}(x) = A_i x + a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ );

$\Delta_{с.доп i}$  – граница допустимого значения систематической составляющей погрешности компонента данного типа, входящего в измерительный канал.

По начальным данным для вычисления вспомогательных величин обозначим  $\lambda_i = \Delta_{с.доп i}$ ,  $q_1 = q$ , тогда:

$$\begin{aligned} q_i &= q_{i-1} A_{i-1}, i = 2, 3, \dots, N - 1; \\ B^N &= 1; B^{i-1} = B^i (A_i + 2\lambda_i / q_i), i = 2, 3, \dots, N - 1. \\ \Delta_{с.доп.} &= \sum_{i=1}^N B^i \lambda_i. \end{aligned} \quad (15.8)$$

4. Расчет границы допустимого значения среднеквадратического отклонения случайной составляющей погрешности измерительного канала данного типа.

Исходными данными для расчета являются:

$N$  – количество компонентов, которые входят в измерительный канал;

$[0 \dots q]$  – диапазон изменения входного сигнала;

$f_{ni}(x)$  – номинальная статическая характеристика компонента данного типа в виде зависимости от входного сигнала  $f_{ni}(x) = A_i x$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ );

$\Delta_{с.доп i}$  – граница допустимого значения систематической составляющей погрешности компонента данного типа;

$\sigma_{доп.i}(\overset{\circ}{\Delta})$  – граница допустимого значения среднеквадратического отклонения случайной составляющей погрешности компонента данного типа.

Для вычисления  $\sigma_{доп.}(\overset{\circ}{\Delta})$  обозначим:  $q_1 = q$ ,  $\lambda_i = \Delta_{с.доп i}$ ,  $\chi_i^2 = \sigma_{доп.i}^2(\overset{\circ}{\Delta})$  при  $i = 1, 2, \dots, N$ . Вычисляются такие вспомогательные величины:

$$q_i = q_{i-1} A_{i-1}, i = 2, 3, \dots, N; B^N = S_N = 1; \quad (15.9)$$

$$B^{i-1} = B^i \left( A_i + \frac{2\lambda_i}{q_i} \right), i = 1, 2, \dots, N; \quad (15.10)$$

$$S_{i-1}^2 = S_i^2 \left[ \left( A_i + \frac{2\lambda_i}{q_i} \right)^2 + \frac{2\lambda_i^2}{q_i} + \frac{4\chi_i^2}{q_i^2} \right] i = 1, 2, \dots, N; \quad (15.11)$$

$$C_{ij+1} = 1; C_{ij} = \prod_{k=i+1}^{j-1} \left( A_k + \frac{2\lambda_k}{q_k} \right), j > i + 1. \quad (15.12)$$

Граница допустимого значения среднеквадратического отклонения случайной составляющей погрешности измерительного канала

$$\sigma_{\text{доп}}(\Delta) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \chi_i^2 S_i^2 + \lambda_i^2 \left( S_i^2 - (B^i)^2 \right) \right) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \sum_{j=i+1}^N S_j^2 \lambda_j C_{ij} \frac{\chi_j^2}{q_j}}. \quad (15.13)$$

5. Для расчета границы допустимого значения погрешности  $\Delta_{\text{доп}}$  измерительного канала в качестве исходных данных используют следующие характеристики:

$N$  – количество компонентов, которые входят в канал;

$[0...q]$  – диапазон изменения входного сигнала;

$f_{\text{ни}}(x)$  – номинальную статическую характеристику (для всех компонентов, которые входят в измерительный канал):  $f_{\text{ни}}(x) = A_i x$ ;

$\Delta_{\text{доп}i}$  – границу допустимого значения погрешности компонентов данного типа (для всех компонентов, которые входят в измерительный канал).

**Примечание.** Под границей допустимой погрешности измерительного канала понимается наибольшее значение величины  $\left[ \Delta_{\text{сист}} + \gamma_{\sigma}(\Delta) \right]$  в диапазоне изменения входного сигнала ( $\gamma$  – постоянная величина, которая зависит от закона распределения вероятностей погрешности).

Введем обозначения

$$\lambda_i = \alpha_i \delta_i, \quad \chi_i^2 = (1 - \alpha_i)^2 \frac{\delta_i^2}{\gamma^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (15.14)$$

где  $\alpha_i$  – параметр перебора, который при каждом  $i = 1, 2, \dots, N$  принимает значение 0 или 1.

Расчет  $\Delta_{\text{доп}}$  отвечает задаче поиска  $\max V(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  при условии, что  $\alpha_i$  может принимать одно из двух значений  $\alpha_i = 1$  или  $\alpha_i = 0$ .

По формулам (15.9) – (15.12) вычисляются вспомогательные величины  $B_i, S_i^2, C_{ij}, q_i$ . Введем функцию  $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  от величины  $\alpha_i$ :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_N) = \sum_{i=1}^N B^i \lambda_i + \gamma \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \chi_i^2 S_i^2 + \lambda_i^2 \left( S_i^2 - (B^i)^2 \right) \right) + 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i \sum_{j=i+1}^N S_j^2 \lambda_j C_{ij} \frac{\chi_j^2}{q_j}} \quad (15.15)$$

Например, при  $N=3$  необходимо вычислить восемь значений  $V(0,0,0), V(0,0,1), V(0,1,0), V(1,0,0), V(1,0,1), V(0,1,1), V(1,1,0), V(1,1,1)$  и выбрать из них наибольшее.

*Расчет метрологических характеристик измерительных каналов ИИС в статическом режиме в рабочих условиях эксплуатации:*

1. Расчет функций влияния на характеристики систематической составляющей погрешности каналов дает возможность получить:

$\Psi_{M(\Delta_{\text{сист}})}(\xi_1, \xi_2, \dots)$  – функцию влияния на  $M(\Delta_{\text{сист}})$  канала при совместном изменении влияющих величин;

$\Psi_{\sigma(\Delta_{\text{сист}})}(\xi_1, \xi_2 \dots)$  – функцию влияния на  $\sigma(\Delta_{\text{сист}})$  канала при совместном изменении влияющих величин.

В набор влияющих величин  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$  входят величины для каждого компонента измерительного канала. Взаимное влияние измерительных каналов не учитывается. Для каждого компонента, входящего в состав измерительного канала, задаются  $f_{ni}(x)$ ,  $\mathbf{M}(\Delta_{ci}(x))$ ,  $\sigma(\Delta_{ci}(x))$ .

Функция влияния на  $\mathbf{M}(\Delta_{ci})$  при совместном изменении влияющих величин определяется как

$$\Psi_{M(\Delta_{ci})} = a_{1i}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) + a_{2i}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)x,$$

где  $x$  – информативный параметр входного сигнала;  $a_{1i}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$ ,  $a_{2i}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$  – функции влияющих величин.

Для расчетов  $\Psi_{\sigma(\Delta_{ci})}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$  задается в виде функции влияющих величин

$$\Psi_{\sigma(\Delta_{ci})}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = \sqrt{\beta_{1i}^2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) + \beta_{2i}^2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)x^2},$$

где  $\beta_{1i}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$ ,  $\beta_{2i}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$  – функции влияния.

Вычисления проводятся по следующему алгоритму.

Вычисляются вспомогательные величины:

$$B_{i\xi} = B_i + \alpha_{2i}(\xi_1, \dots, \xi_p); \quad b_{i\xi} = b_i + \alpha_{1i}(\xi_1, \dots, \xi_p);$$

$$G_{i\xi}^2 = G_i^2 + \frac{1}{2}\beta_{2i}^2(\xi_1, \dots, \xi_p); \quad g_{i\xi}^2 = g_i^2 + \frac{1}{2}\beta_{1i}^2(\xi_1, \dots, \xi_p).$$

Подставляя их в формулы (15.2) и (13.3), вычисляют  $B_{i\xi}^i$ ,  $Q_{i\xi}^2$  для  $i=1, 2, \dots, N$ .

Эти величины используются для вычислений  $\mathbf{M}[\Delta_{\text{сист}}(x)]$  и  $\sigma[\Delta_{\text{сист}}(x)]$ , подставляя их в формулы (15.4) – (15.7) вместо  $B$ ,  $Q_i^2$ ,  $b$ . По формулам (15.2) – (15.9) определяются  $\sigma[\Delta_{\text{сист}}(x)]$  и  $\mathbf{M}[\Delta_{\text{сист}}(x)]$ . И как результат, вычисляются искомые функции влияния:

$$\Psi_{M(\Delta_{\text{сист}})}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = \mathbf{M}[\Delta_{\text{сист}}(x)]_{\xi} - \mathbf{M}[\Delta_{\text{сист}}(x)]$$

$$\Psi_{\sigma(\Delta_{\text{сист}})}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = \sigma[\Delta_{\text{сист}}(x)]_{\xi} - \sigma[\Delta_{\text{сист}}(x)]$$

3. Расчет наибольшего допустимого изменения  $\sigma_{\text{доп}}(\dot{\Delta})$  измерительного канала. Результат расчета – значение среднеквадратического отклонения  $\sigma_{\text{доп}}(\dot{\Delta})(\xi_1, \dots, \xi_p)$ . Исходными данными для расчета являются:

$N$  – количество компонентов в измерительном канале;

$[0 \dots q]$  – диапазон изменения параметра входного сигнала.

Для каждого компонента, входящего в измерительный канал, задаются

$$f_{ni}(x) = A_i x; \Delta_{с.доп.i} = \lambda_i; \sigma_{доп.i}(\overset{\circ}{\Delta}) = \Theta_i; \Delta(\Delta_{с.доп.i}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)) = K_i \lambda_i,$$

где  $p$  – количество влияющих величин;  $\Delta\sigma_{доп.i}(\overset{\circ}{\Delta})(\xi_1, \xi_2, \dots)$  – наибольшее допустимое изменение  $\sigma_{доп.i}(\overset{\circ}{\Delta})$  при совместном изменении влияющих величин  $\Delta\sigma_{доп.i}(\overset{\circ}{\Delta})(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = l_i \Theta_i; l_i > 0$ .

$$\text{Вычисляют величины } \lambda_{i\xi} = (1 + k_i)\lambda_i, \quad \chi_{i\xi} = (1 + l_i)\chi_i.$$

Используя  $\lambda_{i\xi}, \chi_{i\xi}$  вместо  $\lambda_i, \chi_i$ , по формулам (10.9) – (10.13) вычисляются  $\sigma_{доп}(\overset{\circ}{\Delta})_{\xi}$ . Искомую характеристику находят как

$$\Delta\sigma_{доп}(\overset{\circ}{\Delta})(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = l\sigma_{доп}(\overset{\circ}{\Delta}), \text{ где } l = (\sigma_{доп}(\overset{\circ}{\Delta})_{\xi} - \sigma_{доп}(\overset{\circ}{\Delta})) / \sigma_{доп}(\overset{\circ}{\Delta}).$$

4. Расчет наибольшего допустимого изменения  $\Delta_{доп}$  измерительного канала при совместном изменении влияющих величин  $\Delta(\Delta_{доп}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p))$ .

Результатом расчета является  $\Delta(\Delta_{доп})$ , выраженное в единицах  $\Delta_{доп}$ .

Далее для каждого компонента, входящего в состав измерительного канала, задаются:  $f_{ni}(x) = A_i x$ ; количеством влияющих величин  $p$ ;  $\Delta_{доп.i} = \delta_i$ .

Вычисляются вспомогательные величины  $\delta_{i\xi} = (1 + r_i)\delta_i$ . По формулам (15.14), (15.15) вычисляют  $\Delta_{доп}$ . Используя  $\delta_{i\xi}$  вместо  $\delta_i$ , определяют  $\delta_i$  по тем же формулам. Искомая характеристика

$$\Delta(\Delta_{доп}) = r\Delta_{доп}, \text{ где } r = (\Delta_{доп\xi} - \Delta_{доп}) / \Delta_{доп}.$$

**Методы экспериментального определения характеристик погрешности измерительных каналов ИИС.** *Общие сведения.* Методы экспериментального определения характеристик погрешности измерительных каналов, как правило, одинаковые для всех точек диапазона измерения, поэтому будем рассматривать их для одной точки диапазона. Для упрощения будем считать, что измерительный канал является простым (т. е. осуществляет прямое измерение величины или ее носителя). Выбор количества точек в диапазоне измерений проводится по соображениям линейности номинальной характеристики.

Для ИИС с линейной номинальной статической характеристикой:

если нулевое значение измеряемой величины расположено в середине диапазона измерения ИИС, то число экспериментальных точек принимается 11 (по пять точек на положительной и отрицательной частях диапазона измерения и одна точка вблизи нулевого значения);

если нулевое значение измеряемой величины расположено на краю диапазона измерения ИИС, то число экспериментальных точек принимается ра-

вным пяти.

Для ИИС с нелинейной статической характеристикой число экспериментальных точек в диапазоне измерения ИИС выбирается не меньше, чем для ИИС с линейной характеристикой, а их расположение может быть неравномерным.

В число экспериментальных включают точки, в которых ожидаются наибольшие значения характеристик погрешности, а также точки, которые отвечают нижнему и верхнему пределам измерения.

Эти точки выбираются с учетом характера нелинейности. Например:

для аналоговых ИИС при использовании в них линейной или кусочно-линейной аппроксимации нелинейных зависимостей входного сигнала ИИС от измеряемой величины целесообразно выбирать значение измеряемой величины (т. е. экспериментальные точки) в интервалах с наибольшей нелинейностью;

для аналого-цифровых ИИС, в которые входят АЦП, имеющие существенные дифференциальную и интегральную нелинейности, в состав экспериментальных включаются “критические” точки (в которых происходит потеря или деформация отдельных кодов).

Предлагаемые методы определения характеристик погрешности, исходят из того, что погрешность измерительного канала в точке, которая проверяется, состоит из систематической и случайной составляющих, а вариация пренебрежимо мала. При этом характеристиками погрешности являются:

значение систематической составной погрешности;

среднеквадратическое отклонение случайной составляющей погрешности измерения;

границы интервала, в котором с достоверностью  $P$  лежит погрешность.

Исходными данными для нахождения их точечных и интервальных оценок используются полученные экспериментально выборочные значения погрешности  $D_i$ , где  $i=1,2,\dots,n$ , которые обрабатываются в соответствии с приведенными ниже расчетными методами.

При определении характеристик погрешности простых измерительных каналов на их вход подают от эталона или необходимые значения прямоизмеряемой величины, или необходимые значения носителя прямоизмеряемой величины, соответствующие проверяемым точкам. Сигналы, которые подаются на вход и получаются на выходе измерительного канала, выражают в единицах прямоизмеряемой величины или соответствующего ее носителя.

При практическом использовании описанных ниже методов определения погрешности может понадобиться пересчет характеристик сигналов, выраженных в значениях прямоизмеряемой величины, в значения носителя или поступающего на вход канала или получаемого на его выходе. Для пересчета должны использоваться номинальные прямые и обратные функции датчиков и измерительного канала в целом, нормируемые в соответствующей документации.

Под номинальной прямой функцией  $F_{\text{ном}}$  понимается номинальная зависимость значения  $Y$  показания или носителя измерительного канала от значения  $X$  прямоизмеряемой величины или входного носителя  $Y = F_{\text{ном}}(X)$ , в частном случае возможно  $Y = X$ .

Под номинальной обратной функцией  $F_{\text{ном}}^{-1}$  понимается номинальная зависимость значения  $X$  входной величины или входного носителя от значения  $Y$  показания или носителя  $Y = F_{\text{ном}}^{-1}(X)$ , в частном случае возможно  $X = Y$ . Очевидно, что должно выполняться условие  $Y = F_{\text{ном}}^{-1}(F_{\text{ном}}(X))$ .

Для расчета интервальных оценок погрешности или ее характеристик при наличии существенной случайной составляющей погрешности рекомендуется использовать современный робастный метод обработки наблюдений, описанный в п. 15.4.3. Этот метод не отрицает использование традиционных методов обработки, основанных на предположении о нормальности закона распределения случайной составляющей погрешности и являющихся одним из возможных частных случаев робастного метода  $lp$ -оценок (когда  $p = 2$ ). Указания о допустимости использования традиционных методов даются при изложении методик определения погрешности или ее характеристик.

*Выбор метода определения погрешности.* Выбор экспериментального метода определения погрешности или ее характеристик зависит от множества факторов, которые определяют постановку и проведение эксперимента. К основным факторам, которые влияют на выбор метода, относятся:

- наличие или отсутствие априорной информации о составе и свойствах погрешностей измерительного канала;
- цель эксперимента;
- вид и состав измерительного канала.

В соответствии с составом и свойствами погрешности измерительные каналы подразделяются на две группы: с существенной и пренебрежимо малой случайной составляющей погрешности.

Целью эксперимента может быть либо определение, либо контроль характеристик погрешности измерительного канала. В процессе определения находятся точечные и (или) интервальные оценки действительных значений характеристик. В процессе контроля проверяется соответствие действительных значений характеристик регламентированным для них нормам.

Априорная информация о составе и существенности составляющих погрешности измерительных каналов могут быть получены из нормативной и технической документации на ИИС либо на основе экспериментальных исследований состава и свойств погрешностей каналов.

При отсутствии априорных сведений о составе погрешности и существенности ее составляющих проводят, руководствуясь приведенными ниже указаниями, исследование погрешностей каналов, типичных для ИИС данного типа.

Для исследований выбираются выборки (не менее пяти) однотипных измерительных каналов. Для каждой выборки определяется не менее четырех точек, которые проверяются, распределенных равномерно в пределах диапазона измерений. Для каждой точки, определяют доверительные границы и границы доверительных интервалов для систематической составляющей погрешности и для среднеквадратического отклонения случайной составляющей погрешности.

Сопоставляя результаты, полученные для всех проверяемых точек в выборке, определяют наихудшие (наибольшие) значения границ интервалов:

$D_{\text{сист.гр}}$  – для доверительного интервала систематической составляющей погрешности;

$S_{\text{гр}}$  – для доверительного интервала среднеквадратического отклонения случайной составляющей погрешности;

$D_{\text{гр}}$  – для доверительного интервала погрешности.

Выбранные наибольшие значения границ интервалов далее рассматриваются как параметры совокупности однотипных измерительных каналов.

На основе полученных данных делают вывод о возможности признания случайной составляющей погрешности пренебрежимо малой или наоборот существенной. Для этого вычисляют значение интервального коэффициента

$$K_p = \frac{D_{\text{гр}}}{\sqrt{\frac{D_{\text{сист.гр}}^2}{3} + S_{\text{гр}}^2 + \frac{q^2}{12}}},$$

где  $q$  – номинальная ступень квантования (цена единицы наименьшего разряда исходного кода); для аналоговых и аналого-цифровых каналов принимают  $q = 0$ ;

Проверяется выполнение неравенства

$$S_{\text{гр}}^2 \leq \frac{A(2-A)D_0^2}{K_p^2},$$

где  $D_0$  – предельное значение (предел допустимых значений) погрешности канала в реальных условиях его эксплуатации (если оно неизвестно, вместо него в формулу рекомендуется подставить  $D_{\text{гр}}$ );

$A$  – критерий малости составляющей погрешности (относительная погрешность расчета, обусловленная пренебрежением одной или несколькими составляющими погрешности) рекомендуется выбирать для практических расчетов  $0,1 \leq A \leq 0,2$ .

Если неравенство выполняется, то следует считать, что случайная составляющая погрешности пренебрежимо мала. В противном случае случайная составляющая не может быть признана таковой. На основании полученных данных выбирают один из приведенных ниже методов определения погреш-



ности исследуемых каналов.

**Методы определения погрешности.** Описанные здесь методы определения характеристик погрешности применимы и в том случае, когда кроме систематической и случайной составляющих погрешности измерительный канал имеет существенную вариацию, которая является дополнительной к уже указанным характеристикам. Поэтому эксперимент в соответствии с описанными методами осуществляют дважды: сначала при подходе к проверяемой точке диапазона измерения со стороны более малых, а затем – со стороны больших значений (или наоборот). При этом получают две выборки значений  $D_i^m$  и  $D_i^b$  погрешности объемом  $n/2$  каждая, которые являются исходными данными для нахождения точечных и интервальных оценок характеристик и обрабатываются в соответствии с приведенными расчетными методами.

*Метод определения погрешности аналоговых и цифро-аналоговых измерительных каналов для случая пренебрежимо малой случайной составляющей погрешности.* Структурная схема контроля погрешности приведена на рис. 15.4.

Эталон 1 задает на входе канала значения  $X$  прямоизмеряемой величины или ее носителя, соответствующие точкам диапазона измерений, которые проверяются (при определении погрешности цифро-аналоговых каналов как эталон 1 используется произвольный задатчик кода). СИТ-эталон измеряет значение  $Y$  носителя на выходе измерительного канала.

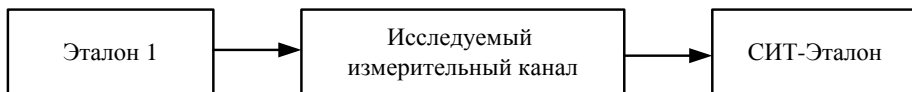


Рис. 15.4. Схема контроля погрешности

Если проверяемая точка диапазона измерений  $X$  задана в единицах прямоизмеряемой величины или ее носителя, то с помощью эталона 1 устанавливают значение входного сигнала  $X$ , считывают и регистрируют показания  $Y$  СИТ-эталона и рассчитывают значение  $D$  абсолютной погрешности, выраженное в единицах сигнала, по формуле  $D = Y - F_{\text{ном}}(X)$ , где  $F_{\text{ном}}(X)$  – значение сигнала, вычисленное для исследуемой точки  $X$  по номинальной функции преобразования.

Если проверяемая точка диапазона измерения  $Y$  задана в единицах носителя, то на эталоне 1 устанавливают такое значение входного сигнала, при котором показания СИТ-эталона равны  $Y$ . Значение абсолютной погрешности вычисляется в единицах входного сигнала измерительного канала  $D = X - F_{\text{ном}}^{-1}(Y)$ .

*Метод определения характеристик погрешности аналоговых и цифро-аналоговых измерительных каналов для случая существенной случайной составляющей погрешности.* В каждой проверяемой точке проводится не

меньше  $n = 10$  измерений  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) погрешности измерительного канала. По методике (п. 15.4.3) вычисляются точечные оценки характеристик систематической и случайной составляющих погрешности и границы доверительных интервалов для характеристик составляющих погрешности и (или) толерантные границы для погрешности.

Если не требуется большой точности эксперимента или есть основания считать, что закон распределения случайной составляющей погрешности является нормальным, можно для упрощения расчетов принять параметр  $p = 2$ . Иначе целесообразно применить робастную методику, описанную в п. 15.4.3 в полном объеме.

*Метод определения погрешности аналого-цифровых измерительных каналов для случая пренебрежимо малой случайной составляющей погрешности.* Структурная схема определения погрешности приведена на рис. 15.5.

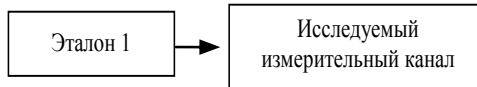


Рис. 15.5 Схема определения погрешности

Эталон 1 задает на входе измерительного канала значения  $X$  прямоизмеряемой величины или ее носителя, соответствующие проверяемым точкам диапазона измерений. На выходе канала получают код (показание)  $N$ , который может быть считан экспериментатором или автоматическим устройством. Все сигналы и коды следует выражать либо в единицах измеряемой величины, либо в единицах носителя измеряемой величины, которая поступает на вход исследуемого измерительного канала.

Точки диапазона измерений, которые проверяются, задают установкой значения  $N_0$  исходного кода или показания измерительного канала. Регулируя входной сигнал эталона 1 (уровень регуляции должен быть не более 0,25 от номинальной ступени квантования  $q$  измерительного канала), устанавливают на входе канала такое значение  $X_m$  прямоизмеренной величины или ее носителя, при котором на выходе канала или наблюдается переход от кода (показания)  $(N_0 - q)$  к заданному коду  $N_0$  точки, которая проверяется, или наступает приблизительно равночастотное чередование кодов  $(N_0 - q)$  и  $N_0$ . Значение погрешности измерительного канала при входном коде  $N_0$  вычисляют по формуле

$$|D| = |N_0 - 0,5 \cdot q - X_m| + 0,5 \cdot q.$$

*Метод определения характеристик погрешности аналого-цифровых измерительных каналов для случая существенной случайной составляющей погрешности.* Структурная схема определения погрешности приведена на рис. 15.5. Метод применяется в том случае, когда среднеквадратическое отклонение случайной составляющей погрешности превышает  $0,25q$ , т. е. при

любом значении измеряемой величины в пределах любого уровня квантования чередуются случайным образом не менее двух значений выходного кода (показаний) измерительного канала. Проверяемые точки диапазона измерений задают установкой значения  $X_0$  прямоизмеряемой величины или ее носителя.

На вход проверяемого канала подают от эталона 1 значение  $X_0$  измеряемой величины, соответствующее исследуемой точке диапазона измерений. Считывают и регистрируют  $n \geq 10$  значений  $N_i$  исходного кода (показаний) измерительного канала. Вычисляют значения погрешностей канала  $D_i = N_i - X_0$ .

**Метод расчета толерантных границ погрешности и доверительных интервалов характеристик составляющих погрешности независимо от вида закона распределения.** Исходными данными для расчета толерантных границ погрешности и границ доверительных интервалов характеристик ее составляющих в конкретной проверяемой точке являются найденные экспериментально одним из выше описанных методов выборочные значения  $D_i$  погрешности, где  $i = 1, 2, \dots, n$ , при  $5 \leq n \leq 250$ . Расчет проводится по следующей методике:

1) Определяются:

$$\text{среднее значение погрешности } D_a = \sum_{i=1}^n D_i / n;$$

$$\text{оценка второго центрального момента } M_2 = \sum_{i=1}^n (D_i - D_a)^2 / n;$$

$$\text{оценка четвертого центрального момента } M_4 = \sum_{i=1}^n (D_i - D_a)^4 / n;$$

$$\text{оценка выборочного эксцесса } E_c = M_4 / M_2^2;$$

$$\text{несмещенная оценка эксцесса } E_x = \frac{[n^2 - 2n + 3]E_c - 3(2n - 3)}{n^2 - 3n + 3 - (n - 1)E_c}.$$

Если выполняется неравенство  $1,8 < E_x \leq 6$ , то вычисляют значение параметра  $p$  по приближенной формуле

$$p = \left[ \frac{4,2}{E_x - 1,8} \right]^{0,5886}. \quad (15.16)$$

Если  $E_x > 6$ , то необходимо либо увеличить число отсчетов погрешности в эксперименте и повторить расчет, либо принять  $p = 1$ .

Если  $E_x \leq 1,8$ , то также необходимо увеличить число отсчетов погреш-

ности в эксперименте или принять  $p = 15$ .

Если повторение эксперимента невозможно, то в особенно ответственных случаях значения параметра  $p$  находят из точного уравнения

$$E_c = \frac{\Gamma(1/p)\Gamma(5/p)}{[\Gamma(3/p)]^2},$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция.

Если получено значение  $p = 1$ , это свидетельствует о возможном наличии грубого промаха в измерениях, и в качестве  $lp$ -оценки систематической составляющей погрешности принимают значение выборочной медианы.

Если получено значение  $p \geq 15$ , это может свидетельствовать о наличии вариации или о бимодальном законе распределения погрешности.

2) Рассчитывают  $lp$ -оценку систематической составляющей (математического ожидания) погрешности из условия

$$D_{p.\text{сист.}} = \arg \min_f \sum_{i=1}^n |D_i - f|^p. \quad (15.17)$$

Другими словами, нужно найти такое значение переменной  $f$ , при котором приведенная сумма будет минимальной; это значение переменной  $f$  принимается в качестве оценки систематической составляющей погрешности. Решение может быть найдено итеративным методом, при этом рекомендуется принять для первой итерации  $f = D_a$ .

Если  $f = D_a$  то  $D_{p.\text{сист.}} = D_a$ .

3) Вычисляют  $lp$ -оценку среднеквадратического отклонения случайной составляющей погрешности

$$S_p = \left(\frac{p}{n-1}\right)^{1/p} \cdot \left(\frac{\Gamma(3/p)}{\Gamma(1/p)}\right)^{1/p} \cdot \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |D_i - f|^p}.$$

Если  $p = 2$ , оценка среднеквадратического отклонения равняется

$$S_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (D_i - D_a)^2}{n-1}}.$$

4) Находят границы доверительного интервала для систематической составляющей погрешности  $D_{p.\text{сист}}$  при доверительной вероятности  $P = 0,95$

$$D_{p.\text{сист}} - t \frac{S_p}{\sqrt{n-1}} \leq D_{\text{сист}} \leq D_{p.\text{сист}} + t \frac{S_p}{\sqrt{n-1}}, \quad (15.18)$$

где  $t = \frac{0,4446 + 1,1146(a-n)}{1 + 0,57(a-n)} + 0,154 \frac{p-2}{p-0,6266}$ ;  $a = \frac{2,357(P-2)}{P+0,316}$ .

5) Находят границы доверительного интервала для среднеквадратического отклонения случайной составляющей погрешности при доверительной ве-

роятности  $P = 0,95$

$$s_p \sqrt{\frac{n-1}{\chi_2^2}} \leq s \leq s_p \sqrt{\frac{n-1}{\chi_1^2}},$$

где  $\chi_1^2 = (n-1) \frac{1-(1,2+a_1n)}{1-b_1n}$ ;  $\chi_2^2 = (n-1) \frac{1-(c_0+c_1n)}{1-c_2n}$ ;

$$a_1 = \frac{0,0189 - 0,00316p}{1 + 0,068p}; \quad b_1 = \frac{0,0388 - 0,266p}{1 + 2,27p};$$

$$c_0 = \frac{4,93 - 0,464p}{1,16p - 1}; \quad c_1 = \frac{0,0024p - 0,1255}{1 - 1,474p}; \quad c_2 = \frac{0,431 + 0,095p}{1,414p - 1}.$$

б) Находят толерантные границы погрешности для доверительной вероятности  $P = 0,95$

$$(D_{p,\text{сист}} - \chi \cdot s_p) \leq D \leq (D_{p,\text{сист}} + \chi \cdot s_p),$$

$$\chi = \frac{a_0 + a_1n}{1 + b_1n}; \quad a_0 = \frac{2,787 + 1,8244p}{1 + 0,03007p}; \quad a_1 = \frac{0,8282 + 0,576p}{1 + 0,106p}; \quad b_1 = \frac{0,264 + 0,286p}{1 + 0,072p}.$$

**Определение метрологических характеристик измерительного канала ИИС, в состав которого входит вычислительный компонент.** При метрологической аттестации вычислительных компонентов ИИС, алгоритмов обработки измерительной информации исследуются три основных группы показателей: показатели точности, стойкости и сложности.

Показатели *точности* характеризуют точность результатов, полученных с помощью алгоритма при соблюдении принятой модели входных данных.

Показатели *стойкости (надежности)* характеризуют стойкость по отношению к искажениям начальных данных, помехам, избыточным погрешностям и т. п.

Показатели *сложности* определяют трудоемкость решения задачи при использовании данного алгоритма (количество элементарных операций обработки данных).

Цель аттестации алгоритма – выбор оптимального алгоритма для решения конкретного задания (на этапе разработки системы).

Под метрологическими характеристиками программы вычислений понимают характеристики тех свойств программы, которые влияют на результат измерений и могут привести к дополнительным потерям измерительной информации.

Потери измерительной информации могут быть обусловлены:

применением приближенных методов вычислений (несовершенство методов или алгоритмов);

недостоверностью экспериментальных данных, которые поступают на вход вычислительного компонента (наследственная потеря измерительной информации);

погрешностью округления результатов вычислений.

В случае существенных ограничений вычислений (по времени расчетов, шагу дискретизации, числу операций) целесообразно исследовать функции связи между метрологическими характеристиками и этими ограничениями. Получив в процессе метрологической аттестации зависимость, например методической погрешности от шага дискретизации можно выбрать значение параметра ограничения, при котором эта погрешность будет минимальной.

Оценка метрологических характеристик программ вычислений может быть получена с помощью вычислительных экспериментов, организация которых ассоциируется с рассмотренными выше методом “образцовой меры” или методом “образцового прибора”.

В первом случае на вход вычислительного компонента подаются цифровые сигналы, которые имитируют работу аналоговой части системы (рис. 15.6, а). Необходимая последовательность числовых данных может образовываться путем считывания из устройства памяти или воспроизводиться программными средствами ЭВМ согласно заданному алгоритму.

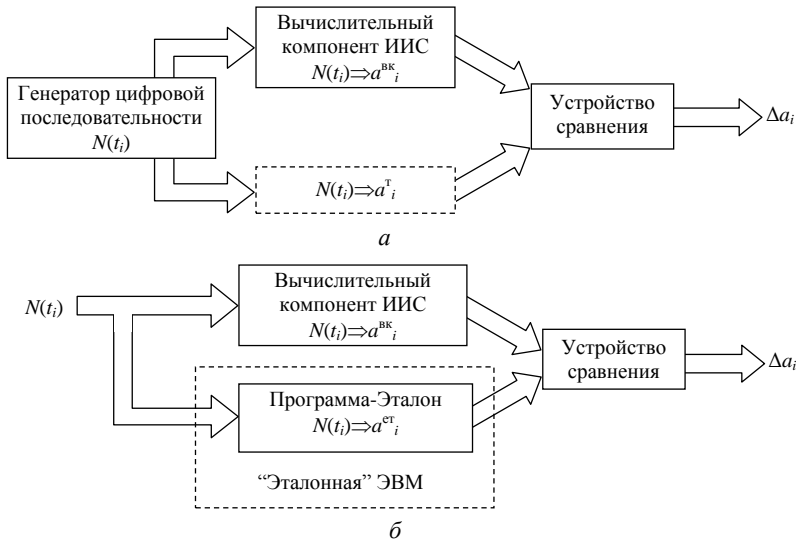


Рис. 15.6. Методы определения метрологических характеристик вычислительного компонента ИИС

Результаты обработки  $a_i^{BK}$  числовых данных  $N(t_i)$  и ожидаемые результаты их обработки  $a_i^T$ , которые поступают на вход устройства сравнения, должны быть известны с необходимой точностью. По значению полученной разности  $\Delta a_i$  принимается вывод относительно метрологических характеристик вычислительного компонента.

Для организации эксперимента по методу “образцового прибора” (рис. 15.6, б) используется имитация результатов прямых измерений (с учетом известных законов распределения данных и известной информации о вели-

чинах, которые подлежат измерению). Результат применения программы вычисления  $a_i^{\text{BK}}$  сравнивается с “идеальным” значением  $a_i^{\text{CT}}$ , определенным с учетом априорной информации об исследуемой системе (например, с помощью “эталонной” ЭВМ). Однако из-за сложности этот эксперимент во многих случаях нецелесообразен.

Метрологическая аттестация программ вычислений проводится только для аттестации программ вычислений, которые разрабатываются или не прошли метрологическую аттестацию. Повторная аттестация проводится только при изменении вычислительного компонента.

Далее рассмотрим метод определения метрологических характеристик вычислительного компонента ИИС последовательно-параллельной структуры, которые состоят из измерительных компонентов и вычислительного компонента. Измерительный компонент организован как совокупность последовательно соединенных измерительных компонентов с нормируемыми метрологическими характеристиками, который осуществляет измерение одной физической величины. На вычислительном компоненте выполняются программы, предназначенные для расчетов по результатам прямых измерений оценок результатов косвенных или совокупных измерений.

В качестве модели таких измерительных каналов принимают многополюсник, имеющий  $k$  входов и один выход. Входными величинами канала являются электрические сигналы, пропорциональные измеряемым величинам, а выходной величиной – значение величины, вычисленное с помощью программы, которая выполняется на вычислительном компоненте.

Метод определения характеристик погрешности измерительного канала основывается на моделировании электрических сигналов измерительных компонентов, которые после преобразования в код поступают в вычислительный компонент для программной обработки результатов. Во время определения характеристик погрешности измерительного канала по характеристикам измерительных компонентов моделируют измерительные сигналы, которые поступают на вход вычислительного компонента, т. е. электрические сигналы заменяют массивами числовых данных. Моделирование погрешности измерительных компонентов осуществляют, как правило, с помощью специальных программ-генераторов случайных чисел, предназначенных для формирования чисел с заданной функцией распределения и необходимыми статистическими характеристиками.

Рассматриваются следующие характеристик погрешности:

- а) систематическая составляющая погрешности  $\Delta_{\text{сист}}$ ;
- б) среднеквадратичное отклонение  $\bar{\sigma}(\Delta)$  погрешности;
- в) погрешность канала.

Процедура определения характеристик погрешности измерительного канала состоит из этапов, представленных на рис. 15.7.

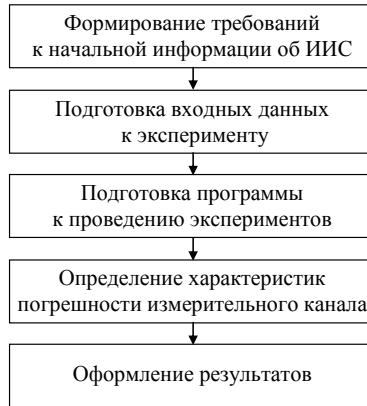


Рис. 15.7 Этапы определения характеристик погрешности измерительного канала

*Требования к начальной информации.* Информация об измерительных компонентах, входящих в измерительный канал должна содержать следующие сведения:

значение верхнего и нижнего пределов диапазона измерений каждого из измерительных компонентов;

значения математического ожидания и среднеквадратичного отклонения систематической составляющей основной погрешности измерительных компонентов.

Информация о программе, реализованной в вычислительном компоненте должна включать:

количество и название входных величин, порядок и способ введения их значений;

название величины и порядок вывода ее значений;

вид и свойства функции программы.

*Подготовка входных данных к эксперименту.* Выбор экспериментальных точек  $X_r[i]$   $r = \overline{1, K}$ , для которых проводится определение характеристик погрешности измерительного канала, осуществляют для каждой входной величины  $X_r$  на основе информации об измерительном компоненте и о виде и свойствах функции преобразования программы. Количество экспериментальных точек по  $r$ -й входной величине  $X_r$ , обозначим как  $N_r$ ,  $r = \overline{1, K}$ . Минимальное количество таких точек – три: в начале, в конце и внутри диапазона измерений допустимых значений входной величины. Если функция программы имеет разрывы, то точки разрывов дополнительно включают в число экспериментальных точек.

Выбор количества экспериментов в экспериментальных точках для каждой входной величины осуществляют на основании информации о законе



распределения погрешности измерительных компонентов и ее статистических характеристиках, а также о качестве применяемых генераторов случайных чисел, с помощью которых формируется массив входных данных в каждой экспериментальной точке  $X_r[i]$ , где  $i = \overline{1, N_r}$ .

Генератор случайных чисел (программный или физический) должен формировать массивы чисел  $\xi_r[j]$ ,  $j = \overline{1, M_r}$ , распределенных по тому же закону распределения, что и погрешность  $r$ -го измерительного компонента (с теми же статистическими характеристиками). Количество массивов входных данных в каждой экспериментальной точке по  $r$ -й входной величине  $X_r$  считают одинаковым и обозначают –  $M_r$ ,  $r = \overline{1, K}$ .

Массивы значений  $X_r[i, j]$  формируют по формуле

$$X_r[i, j] = X_r[i] \cdot (1 + \xi_r[j]), \quad (15.19)$$

где  $\xi_r[j]$  –  $j$ -е значение  $r$ -й случайной величины, сформированное с помощью  $r$ -го генератора случайных чисел.

В каждой экспериментальной точке  $X_r[i]$  формируют столько массивов входных данных  $X_r[i, j]$ , сколько необходимо для проверки статистической гипотезы о распределении случайной величины  $\xi$  по заданному закону с необходимыми статистическими характеристиками.

*Подготовка программы к проведению экспериментов* заключается в замене автоматизированного ввода входных величин (от измерительных компонентов) на ручной - с клавиатуры или на считывание подготовленных массивов входных данных с носителя, в зависимости от потребностей исследователя. Такая замена должна проводиться квалифицированным программистом (желательно разработчиком этой программы) и не должна нарушать основной алгоритм обрабатывания программы.

*Последовательность определения характеристик погрешности измерительного канала* заключается в следующем:

1. Проводят преобразование каждого из массивов входных данных  $X_r[i, j]$ , где  $r = \overline{1, K}$   $i = \overline{1, N_r}$ ,  $i = \overline{1, N_r}$ ,  $j = \overline{1, M_r}$  с помощью исследуемого программного обеспечения и фиксируют результаты наблюдений  $Y[i, j]$ ,  $i = \overline{1, N_r}$ ,  $j = \overline{1, M_r}$ .

2. При необходимости в каждой экспериментальной точке оценивают аномальность результатов по известным критериям (см. глав. 5). Исправленные результаты в  $i$ -й экспериментальной точке в  $j$ -м эксперименте обозначим  $Z[i, j]$ .

3. Проводят оценивание систематической составляющей погрешности

$\bar{\Delta}_{\text{сист}} [i]$  измерительного канала в  $i$ -й экспериментальной точке по формуле

$$\bar{\Delta}_{\text{сист}} [i] = (\bar{Z}[i] - Z[i]), \quad (15.20)$$

где  $\bar{Z}[i]$  – среднее арифметическое значение откорректированных результатов наблюдений в  $i$ -й экспериментальной точке;  $Z[i]$  – действительное (истинное) значение результата наблюдений в  $i$ -й экспериментальной точке (при входных данных с нулевой погрешностью).

Величину  $\bar{Z}[i]$  определяют по формуле

$$\bar{Z}[i] = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M Z[i, j]. \quad (15.21)$$

4. Проводят оценивание систематической составляющей погрешности измерительного канала

$$\bar{\Delta}_{\text{сист.гр}} = \max \bar{\Delta}_{\text{сист}} [i]. \quad (15.22)$$

5. Проводят оценивание дисперсии  $\bar{D}(\overset{\circ}{\Delta})$  случайной составляющей погрешности канала в  $i$ -й экспериментальной точке

$$\bar{D}(\overset{\circ}{\Delta}[i]) = \frac{1}{M-1} \cdot \sum_{j=1}^M (Z[i, j] - \bar{Z}[i])^2. \quad (15.23)$$

6. Проводят оценивание среднеквадратического отклонения  $\bar{\sigma}(\overset{\circ}{\Delta})$  случайной составляющей погрешности канала в  $i$ -й точке

$$\bar{\sigma}(\overset{\circ}{\Delta}[i]) = \sqrt{\bar{D}(\overset{\circ}{\Delta}[i])}. \quad (15.24)$$

7. Проводят оценивание среднеквадратического отклонения случайной составляющей погрешности измерительного канала:

вычисляют отношение  $G$  наибольшего значения дисперсии (в диапазоне) к сумме всех значений дисперсий (критерий Кохрена, см. гл. 5)

$$G = \left( \max \bar{D}(\overset{\circ}{\Delta}[i]) \right) / \sum_{i=1}^N \bar{D}(\overset{\circ}{\Delta}[i]); \quad (15.25)$$

вычисленное значение  $G$  сравнивают с критическим значением  $G_{\text{кр}}$ . Если  $G \leq G_{\text{кр}}$ , то следует считать, что дисперсии однородны, в противном случае – неоднородны;

если дисперсии неоднородны, то в качестве оценки среднеквадратического отклонения случайной составляющей погрешности канала принимают наибольшее значение

$$\bar{\sigma}(\overset{\circ}{\Delta}) = \max \bar{\sigma}(\overset{\circ}{\Delta}[i]); \quad (15.26)$$

если дисперсии однородны, оценкой среднеквадратичного отклонения случайной составляющей погрешности канала является среднее значение

$$\bar{\sigma}(\overset{\circ}{\Delta}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{\sigma}(\overset{\circ}{\Delta}[i]). \quad (15.27)$$

8. Оценивают границы интервала, в котором с доверительной вероятностью  $P$  находится погрешность измерительного канала:

вычисляют в каждой экспериментальной точке границы доверительного интервала  $\Delta_{\text{в}}[i] = \bar{\Delta}_{\text{сист}}[i] + t \cdot \bar{\sigma}(\overset{\circ}{\Delta}[i])$  и  $\Delta_{\text{н}}[i] = \bar{\Delta}_{\text{сист}}[i] - t \cdot \bar{\sigma}(\overset{\circ}{\Delta}[i])$ , где  $t$  – квантиль распределения Стьюдента.

границы интервала, в котором с доверительной вероятностью  $P$  находится погрешность измерительного канала  $\Delta_{\text{в}} = \max \bar{\Delta}_{\text{в}}[i]$ ,  $\Delta_{\text{н}} = \min \bar{\Delta}_{\text{н}}[i]$ .

---

### *Основные выводы*

---

Такие особенности ИИС, как многофункциональность, многоканальность, наличие вычислительного компонента, неразрывная связь специализированных ИИС с объектом, на котором они эксплуатируются, агрегатный способ построения, распределенность компонентов и составных частей ИИС в пространстве, обуславливают основные отличия их метрологического обеспечения от метрологического обеспечения других средств измерительной техники. К проблемам, которые возникают при разработке метрологического обеспечения, можно отнести: обеспечение одновременного измерения ряда физических величин; оценивание метрологических характеристик алгоритмов и программ обработки результатов; оценивание влияния измерительных каналов друг на друга; проведение метрологического обслуживания в условиях невозможности привязки к эталону; учет влияния на метрологические характеристики различных условий эксплуатации компонентов ИИС и др.

Объектами метрологического обеспечения ИИС являются измерительные каналы и их составляющие, т. е. измерительные и вычислительные компоненты.

К задачам метрологического обеспечения ИИС относятся: анализ и оценивание технических решений на соответствие нормам точности и выбору параметров; установление единых требований к номенклатуре, нормированию и представлению метрологических характеристик измерительных каналов ИИС; определение действительных значений метрологических характеристик измерительных каналов и вычислительных компонентов и их соответ-

ствия установленным нормам; установление полноты работ по метрологическому обеспечению ИИС и соответствия требованиям НД по метрологии.

Состав работ по метрологическому обеспечению определяется стадией «жизненного цикла» ИИС – разработкой, производством, внедрением и эксплуатацией ИИС.

Основными работами по метрологическому обеспечению ИИС являются: установление единых требований к метрологическим характеристикам систем; разработка методов и средств контроля метрологических характеристик; метрологическая экспертиза технической документации; анализ состояния метрологического обеспечения ИИС; организация и осуществление государственного метрологического контроля и надзора за состоянием и применением ИИС; организация и проведение поверочных работ; организация и проведение работ по аттестации алгоритмов обработки информации.

Метрологические характеристики отражают свойства средств измерений (измерительных каналов), оказывающие определяющее влияние на результат и точность измерений. Нормирование метрологических характеристик - это установление комплекса метрологических характеристик и способов их представления. Комплекс метрологических характеристик должен включать в себя характеристики, инвариантные к условиям применения и режиму работы. Способы представления метрологических характеристик должны обеспечивать простоту их контроля. При регламентации метрологических свойств ИИС следует учитывать особенности выпуска и комплектации систем, условия их эксплуатации с учетом пространственной распределенности компонентов, использование в их составе сложных вычислительных устройств.

Методы определения метрологических характеристик ИИС подразделяются на расчетные, экспериментальные и методы определения метрологических характеристик вычислительного компонента.

Расчет метрологических характеристик измерительных каналов может проводиться как для статического, так и для динамического режимов работы в нормальных и рабочих условиях эксплуатации.

Экспериментальные методы включают методы определения характеристик аналоговых, цифро-аналоговых и аналого-цифровых измерительных каналов при наличии пренебрежимо малой и существенной случайной составляющей погрешности.

Под метрологическими характеристиками вычислительного компонента понимают характеристики тех свойств программ, которые влияют на результат измерений и могут привести к дополнительным потерям измерительной информации, которые могут быть обусловлены применением приближенных методов вычислений (несовершенство методов или алгоритмов), недостоверностью экспериментальных данных, которые поступают на вход вычислительного компонента (наследственная потеря измерительной информации), погрешностью округления результатов вычислений.

Метрологическая аттестация программ вычислений проводится только

при аттестации программ вычислений, которые разрабатываются или не прошли метрологическую аттестацию. Повторная аттестация проводится при изменении вычислительного компонента.

---

**Вопросы для самоконтроля**

---

1. Что понимается под метрологическим обеспечением ИИС?
2. Перечислите основные работы по метрологическому обеспечению ИИС.
3. На каких этапах жизненного цикла осуществляется метрологическое обеспечение ИИС?
4. Охарактеризуйте общие цели метрологической экспертизы технической документации на ИИС различных видов.
5. В чем заключается сложность в осуществлении государственного метрологического контроля и надзора по отношению к информационно-измерительным системам?
6. Проанализируйте, какие проблемы в области метрологического обеспечения возникают в связи с основными особенностями ИИС.
7. В чем состоят общие принципы нормирования метрологических характеристик ИИС?
8. Какие особенности ИИС в первую очередь обуславливают специфику регламентации их метрологических характеристик?
9. Какие характеристики измерительных каналов относятся к динамическим?
10. Охарактеризуйте основные проблемы и специфические особенности экспериментальных исследований метрологических свойств ИИС.
11. Как учитывается воздействие влияющих величин при определении метрологических характеристик ИИС?
12. Сформулируйте основные принципы, используемые при определении метрологических характеристик программ вычислений.
13. От чего зависит выбор экспериментальных и расчетных методов определения и контроля метрологических характеристик измерительных каналов ИИС?
14. Назовите этапы определения характеристик погрешности измерительного канала.
15. Охарактеризуйте методы определения метрологических характеристик вычислительных компонентов ИИС.
16. Назовите методы экспериментального определения характеристик погрешности измерительных каналов.
17. Назовите классификацию методов определения метрологических характеристик измерительных каналов ИИС.

### *Conclusions*

---

IMS features such as multifunctionality, multichannel, computational component presence, specialized IMS inextricable link with object on which they operate, aggregate method of construction, distribution of IMS components and parts in space cause main differences between their metrological assurance and metrological assurance of other means of measuring techniques. Amongst problems arising during development of metrological assurance are: ensuring simultaneous measurement of a number of physical quantities, evaluation of metrological characteristics of algorithms and software for results processing, evaluation of measurement channels' influence on each other, providing metrological service in conditions of impossibility of binding to the standard, accounting for effects of various IMS components operating conditions, etc. on the metrological characteristics

IMS metrological assurance objects are measuring channels and their measuring and computing components.

IMS metrological assurance tasks: analysis and evaluation of technical solutions to meet the standards of accuracy and parameters choice, establishment of uniform standards for nomenclature, standardization and presenting of IMS measuring channels' metrological characteristics, determination of metrological characteristics valid values of measuring channels and computing components and their regulatory compliance, establishment of work completeness on IMS measurement assurance and compliance with metrology regulatory documents.

The scope of work on measurement assurance is determined by the stage of IMS "life cycle" - development, production, implementation and IMS operation.

IMS metrological assurance major work: establishing of uniform requirements for systems metrological characteristics; methods and means development of metrological characteristics control; metrological examination of technical documentation; analysis of IMS metrological assurance state; organization and implementation of state metrological control and supervision of IMS condition and use; organization and conduction of verification (calibration); organization and conduction of data processing algorithms certification.

Metrological characteristics reflect properties of measuring means (measurement channels) that have determining influence on measurement result and accuracy. Rationing of metrological characteristics - is establishing of complex metrological characteristics and methods of its presentation. Metrological characteristics complex should include characteristics invariant to operating conditions and operation mode. Ways of metrological characteristics presenting should provide control simplicity.

When regulating IMS metrology properties, system production and configuration particularities, operating conditions considering spatial components distribution, and use of complex computing devices should be considered.

Methods for IMS metrological characteristics determination are divided into calculation methods for determining, by metrological characteristics, of components that are part of measurement channel, experimental methods and methods of determination of computational component metrological characteristics.

Calculation of measuring channels metrological characteristics can be performed for both static and dynamic modes, and in normal and actual operating conditions.

Experimental methods include methods of characteristics determination of analog, digital-to-analog and analog-to-digital measurement channels in the presence of negligible and substantial random error component.

Metrological characteristics of computational component are characteristics of those programs properties that affect measurement result and could lead to additional losses of measurement information that might be caused by application of approximate calculation methods (imperfect methods or algorithms), unreliability of experimental data that are coming to input of computational component (hereditary loss of measurement information), rounding error of calculation results.

Metrological attestation of calculations programs is undertaken only for attesting computations programs under development or failed to pass metrological attestation. Re-attestation is possible after the change of computational component.

***Ключевые слова***

метрологическое обеспечение	metrology assurance
метрологическая аттестация	metrology attestation
метрологические характеристики	metrology characteristics
вычислительные программы	computational programs
вычислительный компонент	computational component

**Предметный указатель****Subject index**

- Абсолютная погрешность 19  
 Алгоритм ортонормирования Грама – Шмидта 196  
 Алгоритмы шифрования данных 696  
 Алгоритм шифрования Эль-Гамала 702  
 Алгоритм шифрования Ривеста – Шамира - Адлемана (*RSA*) 703  
 Алфавит сообщения 685  
 Амплитуда 115  
 Аналоговый интерфейс 420  
 Аналого-цифровое преобразование 488  
 Аппаратные средства 501  
 Аппроксимация 153  
 Архитектура компьютера 500  
 Арифметическое кодирование 632  
 Асимметричная криптосистема 699  
 Атака 726
- Байт 82  
 Базис Котельникова 148  
 Белый шум 139  
 Бит 79  
 Бод 525
- Вариационный ряд 255  
 Вероятностная модель угла 284  
 Вероятность 133  
 Восстановление 153  
 Выборка 166, 255  
 Выборочные круговые характеристики случайных углов 289  
 Вычислительный компонент 21  
 Выявления сигналов на фоне помех 591
- Гаммирование 698  
 Гильбертовы пространства 217  
 Гипотезы о дисперсии 267  
 Гипотезы о наличии 272  
 Данные 78  
 Датчик 352
- Absolute error  
 Gram-Schmidt orthonormality algorithm  
 Data encryption algorithms  
 El Gamal encryption algorithm  
 Rivest - Shamir – Adleman encryption algorithm  
 Message alphabet  
 Amplitude  
 Analog interface  
 Analog-to-digital conversion  
 Hardware  
 Approximation  
 Computer architecture  
 Arithmetical coding  
 Asymmetrical cryptosystem  
 Attack
- Byte  
 Kotelnikov basis  
 White noise  
 Bit  
 Baud
- Variational series  
 Probabilistic model of angle  
 Probability  
 Recovery  
 Sample  
 Selected circle characteristics of random angles  
 Computational component  
 Signals detection on noise background
- Gamming  
 Hilbert spaces  
 Hypotheses about dispersion  
 Hypotheses about presence  
 Data  
 Sensor



Двоичные циклические коды 658	Binary cycle codes
Двоичный код 625	Binary code
Двоичный код Голея 651	Golay binary code
Декодирование 564	Decoding
Дешифрация 685	Decryption
Дискретизация 115, 170, 448	Discretization
Дискретное преобразование Фурье 166	Fourier discrete transformation
Дискретный канал 575	Discrete channel
Дискретный сигнал 156	Discrete signal
Дисперсия 135	Dispersion
Дифференциальные и разностные уравнения 234	Differential and difference equations
Древоподобный код 627	Tree code
Евклидово пространство 191	Euclidean space
Замены метод шифрования 698	Replacement encryption method
Заряд 36	Charge
Защита информации 51	Information protection
Измерение 18,255	Measurement
Измерительная информация 18	Measurement information
Измерительный преобразователь 21, 352	Measurement converter
Измерительный прибор 21	Measurement device
Измерительный сигнал 19	Measurement signal
Имитовставка 697	Data authentication code
Интервальные оценки 261	Interval estimates
Интерполяция экспериментальных данных 228	Experimental data interpolations
Интерфейс 510	Interface
Интерфейс USB 538	USB interface
Информационно-измерительная система 16, 51	Information-measurement system
Информационный сигнал 114	Informational signal
Информация 76	Information
Исправление ошибок 637	Error correction
Источник информации 105	Information source
Кадры 548	Frames
Канал 544	Channel
Канал связи 88	Communication channel
Каналы передачи данных 565	Data transmission channel
Квантование 450	Quantization

Ключ 685	Key
Код 625	Code
Кодирование 560, 620, 651, 452, 543	Coding
Кодирование источника сообщений 621	Message source coding
Коды с памятью 634	Codes with memory
Коды Хаффмана 630	Huffman codes
Коды Хэмминга 649	Hamming codes
Коды Рида – Соломона 654	Reed-Solomon codes
Код Шеннона 632	Shannon code
Кодовое расстояние 639	Code distance
Компаратор 21	Comparator
Компьютерная система 498	Computer system
Контейнер 695, 720	Container
Конфиденциальность 737	Privacy
Координатизация 194	Coordinatization
Корректирующий код 637	Correction code
Криптоанализ 729	Cryptanalysis
Критерии проверки согласия законов распределений 262	Criteria of consent check of distribution laws
Критерий Граббса 270	Grubbs criterion
Критерий Диксона 271	Dixon criterion
Критерий Колмогорова – Смирнова 263	Kolmogorov-Smirnov criterion
Критерий Кохрена 269	Cochran's criterion
Критерий $\chi^2$ Пирсона 262	Pearson $\chi^2$ criterion
Критерий Романовского 271	Romanovskiy criterion
Критерий Стьюдента 326	Student's criterion
Критерий Фроцини 264	Frozini criterion
Криптографический алгоритм 685	Cryptographic algorithm
Криптография 684	Cryptography
Криптосистема 686	Cryptosystem
Криптостойкость 685	Cryptostrength
Круговая дисперсия 283	Circle dispersion
Круговое среднее 283	Circle average
Линейное пространство 198	Linear space
Линейные коды 646, 658	Linear codes
Линейные операторы и матрицы 198	Linear operators and matrixes
Математические модели сигналов 144	Mathematical models of signals

Математическое моделирование 184	Mathematical modelling
Математическое ожидание 135	Mathematical expectation
Матричная алгебра 201	Matrix algebra
Матричные функции 213	Matrix functions
Матрица линейного оператора 200	Linear operator matrix
Мера 21, 36	Measure
Мера информации 81	Measure of information
Метод наименьших квадратов 231	Least square method
Методы криптоанализа 729	Cryptanalysis methods
Методы обработки результатов измерений 293	Measurement results procession methods
Методы определения метрологических характеристик ИИС 796	IMS metrological characteristics determining methods
Метрики 219	Metrics
Метрологическая надежность ИС 59	IS metrological reliability
Метрологическое обеспечение ИС 57, 782	IS metrological assurance
Метрология 16	Metrology
Метрологические характеристики 20, 354, 438, 788	Metrological characteristics
Модели процесса измерений 34	Measurement process models
Моделирование систем и процессов защиты информации 750	Information protection systems and processes modelling
Модель реального операционного усилителя 398	Real operational amplifier model
Модулятор 563	Modulator
Мощность 125	Power
Неопределенность результата измерения 46	Measurement result uncertainty
Непрерывный канал 575	Continuous channel
Неравенство Крафта 627	Kraft's inequality
Несанкционированный доступ 732	Unauthorized access
Несмещенность оценки 259	Unbiased estimates
Норма сигнала 126	Signal norm
Операторы 198	Operators
Операционный усилитель 391	Operational amplifier
Оптимальный приемник 599	Optimum receiver
Ортогональные полиномы Лагерра 223	Laguerre orthogonal polynomials
Ортогональные полиномы Лежандра 221	Legendre orthogonal polynomials

Ортогональные полиномы Чебышева 222	Chebyshev orthogonal polynomials
Ортогональные полиномы Эрмита 223	Hermite orthogonal polynomials
Ортонормированный базис 127	Orthonormal basis
Ортонормированные векторы 193	Orthonormal vectors
Открытый ключ 700	Public key
Относительная погрешность 19	Relative error
Память компьютерных систем 507	Computer system memory
Параллельный интерфейс 516	Parallel interface
Перестановки метод шифрования 698	Permutation encryption method
Плотность 134	Density
Плотность вероятности 138	Probability density
Погрешность измерения 19, 44	Measurement error
Подстановки метод шифрования 698	Substitution encryption method
Полиномиальное помехоустойчивое кодирование 652	Polynomial noiseproof coding
Помехи 575	Noise
Помехоустойчивое кодирование 635, 639	Noiseproof coding
Помехоустойчивое корректирующее кодирование 636	Noiseproof correcting coding
Помехоустойчивость систем передачи информации 609	Information transmission systems interference resistance
Помехоустойчивый корректирующий код 682	Noiseproof correcting code
Последовательный интерфейс 524	Serial interface
Правильность 19	Correctness
Преобразование Лапласа 157	Laplace transformation
Приближенные числовые операции 189	Approximate numerical operations
Производительность источников информации 89	Information sources performance
Разделение информационных каналов 601	Information channels separation
Разрушительное программное влияние 744	Destructive software impact
Распределение Мизеса 287	Von Mises distribution
Расстояние Хемминга 642	Hamming distance
Расширенная неопределенность 46	Expanded uncertainty
Регрессионный анализ 274	Regression analysis
Результат измерения 19	Measurement result
Ряд Фурье 128	Fourier series

Сверточное кодирование 638	Convolutional coding
Сеть 603	Network
Сжатие информации 622	Information compression
Сигнал 114	Signal
Систематическая погрешность 19	Systematic error
Скалярное произведение 193	Scalar product
Скорость передачи информации 579	Information transmission speed
Случайная величина 134, 327	Random quantity
Случайная погрешность 19	Random error
Случайное событие 133	Random event
Случайный процесс 135	Random process
Случайный угол 281	Random angle
Согласованная фильтрация 598	Matched filtering
Сообщение 78, 82	Message
Состоятельность оценки 259	Estimate consistency
Спектральная плотность мощности 137	Spectral power density
Среднеквадратическое отклонение 135	Standard deviation
Средства защиты 745	Protection means
Средство измерительной техники 20	Measuring equipment
Стандартная неопределенность 46	Standard uncertainty
Статистическое оценивание 314	Statistical estimation
Статистическое оценивание спектральных характеристик 334	Spectral characteristics statistical estimation
Стационарные и эргодические процессы 312	Stationary and ergodic processes
Стеганография 718	Steganography
Структура ИИС 60	IMS structure
Структуры аналоговых интерфейсов 433	Analog interfaces structures
Суммарная неопределенность 46	Total uncertainty
Сходимость 20	Convergence
Теорема Кели-Гамильтона 210	Cayley-Hamilton theorem
Теорема Котельникова 151	Kotelnikov theorem
Теорема Шеннона 580	Shannon theorem
Топологические схемы ИИС 431	IMS topologic schemes
Топологическое пространство Хаусдорфа 36	Hausdorff topological space
Точечные оценки 258	Point estimates
Физическая величина 17	Physical quantity
Функциональные пространства 216	Functional spaces
Функция 216, 539	Function

Функция Дирака 122	Dirac function
Функция корреляции 137	Correlation function
Функция-ловушка 702	Trap function
Функция распределения вероятности 138, 257	Probability distribution function
Хаб 538	Hub
Характеристическая функция случайного угла 282	Characteristic function of random angle
Хэш-функция 715	Hash function
Целостность информации 635	Information integrity
Циклический код 659	Cyclic code
Цифровая подпись 704	Digital signature
Цифро-аналоговое преобразование 474	Digital-to-analog conversion
Численные методы интегрирования 243	Numerical integration methods
Шина 502	Bus
Шифрование 684	Encryption
Ширина спектра 142	Spectrum width
Эллиптическая криптосистема 702	Elliptic cryptosystem
Энергия 124	Energy
Энтропия системы 82	System entropy
Эффективность оценки 260	Estimate effectiveness
CRC коды 663	CRC codes
Z-преобразования 158	Z-transformations

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бабак В.П.* Теоретичні основи захисту інформації: Підручник. – Книжкове вид-во НАУ, 2008. - 752 с.
2. *Бабак В.П., Белецкий А.Я., Гуржий А.Н.* Сигналы и спектры: Учебник. - К.: Кн. изд-во НАУ, 2005. – 520 с.
3. *Бабак В.П., Марченко Б.Г., Фриз М.С.* Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика: Підручник. - К.: Техніка, 2004. - 288 с.
4. *Бабак В.П., Хандецький В.С., Шрюфер Е.* Обробка сигналів: Підручник. – К.: Либідь, 1999. - 392 с.
5. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник. - М.: Высш. шк., 2000. - 462 с.
6. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Изд-е 13-е. М.: Наука, 1986. – 544с.
7. Вержбицкий В. М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. – М.: Высшая школа, 2000. – 268с.
8. *Гук М.* Интерфейсы ПК: Справочник. – СПб: Питер Ком, 1999. –416 с.
9. *Домарев В.В.* Безопасность информационных технологий. Системный подход. - К.: ООО «ТИД «ДС», 2004. - 992 с.
10. *Єременко В.С.* Статистичний аналіз даних вимірювань: навч. посібник / В.С. Єременко, Ю.В. Куц, В.М. Мокійчук, О.В. Самойліченко. - К.: Освіта України, 2013. - 320 с.
11. *Жуков Ю.Д.* Полиметрические системы: теория и практика: Монография / Ю.Д. Жуков, Б.Н. Гордеев, А.В. Зивенко и др.; под ред. Ю.Д. Жукова. – Николаев: Изд-ль Прокопчук Т.Ю., 2012. – 380 с., ил.
12. *Захаров И.П., Кукуш В.Д.* Теория неопределенности в измерениях: учеб. пособие. - Харьков: Консул, 2002. - 256 с.
13. *Зегжда Д.П., Ивашко А.М.* Основы безопасности информационных систем. - М.: Горячая линия - Телеком, 2000. - 452 с.
14. Измерения в промышленности: Справ. изд. В 3-х кн. Под ред. Профоса П.М., М.: Металлургия, 1990г.
15. Информационно-измерительные системы. Применение интеллектуальных модулей, методов и средств повышения точности физических измерений: монография / А.А. Зори, С.И. Клевцов, В.Д. Коренев и др. - Донецк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2011. - 206 с.
16. *Кузнецов В.П.* Метрологические характеристики измерительных систем. – М.: Машиностроение, 1984. – 412 с.
17. *Кузнецов Б.Ф.* Стохастические модели и методы анализа информационно-измерительных систем АСУ ТП / Ангарск: Ангарская гос. техн. академия, 2007. – 180 с.
18. *Кузьмин И.В., Кедрус В.А.* Основы теории информации и кодирования: Учебник. - К.: Вища шк., 1986. - 238 с.
19. *Куликовский К.Л., Купер В.Я.* Методы и средства измерений. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 448 с.
20. *Кухарчук В.В.* Основи метрології та електричних вимірювань : підручник / В.В. Кухарчук, В.Ю. Кучерук, Є.Т. Володарський, В.В. Грабко / –Херсон: Олді-плюс, 2013.–538 с.
21. *Новопашенный Г.Н.* Информационно-измерительные системы: Учебное пособие. М.: Высш. школа, 1977. – 208 с.

22. *Орнатский П.П.* Теоретические основы информационно-измерительной техники: Учебник. - К.: Вища шк., 1983. - 455 с.
23. Основы метрології та вимірювальної техніки: Підручник у 2 т./М. Дорожовець, В. Мотало, Б. Стадник, В. Василюк, Р. Борек, А. Ковальчик.– Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2005.–1300с.
24. Полицук Е.С. Измерительные преобразователи. Киев, 2003 г.
25. *Поліщук Є.С., Дорожовець М.М., Стадник Б.І.* та ін. Засоби та методи вимірювань неелектричних величин: Підручник / За редакцією проф. Є.С. Поліщука – Львів: Вид-во «Бескид Біт». 2012. –618 с.
26. *Раннев Г.Г.* Измерительные информационные системы: учебное пособие. М.: Академия, 2010. – 336 с.
27. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов / Пер. с англ. - М.: МИР, 1978. - 848 с.
28. *Рубичев Н.А.* Измерительные информационные системы: учебное пособие. М.: Дрофа, 2010. – 334 с.
29. Русско-украинско-английский словарь терминов по информационным технологиям / В. П. Бабак, О. Г. Байбуз, А. П. Приставка. - К.: НАУ, 2006. - 252 с.
30. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Пер. с англ. - М.: Изд. дом Вильямс, 2004. - 1104 с.
31. *Темников Ф.Е., Афонин В.А., Дмитриев В.И.* Теоретические основы информационной техники: Учеб. пособие. - М.: Энергия, 1979. - 512 с.
32. *Толкинс У., Уэбстер Дж.* Сопряжение датчиков и устройств ввода данных с компьютерами IBM PC. – М.: «Мир», 1992. – 592 с.
33. Фишер-Крипс А. С. Интерфейсы измерительных систем. Справочное руководство. –М.: Изд. Дом «Технологии», 2006.- 336 с.
34. *Цапенко М.П.* Измерительные информационные системы: Структуры и алгоритмы, системотехническое проектирование: Учебн. пособие.- М.: Энергоатомиздат, 1985. – 440 с.
35. *Ярочкин В.И.* Информационная безопасность: Учебник. - М.: Академпроект: Трикта, 2005. - 544 с.
36. Applied Measurement System / Edited by Md. Zachurul Had. – In Tech, USA, 2012.
37. *Belkhamsa Z., Wafa A.* Measuring Organizational Information Systems Success: New Technologies and Practices. Universiti Malaysia Sabah, Malaysia, 2012
38. *Herold R., Robers M.* Encyclopedia of Information Assurance. – Indiana, USA, 2010.
39. *Lin S., Costello D.J.* Error Control Coding: Fundamentals and Applications. - Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 2003.
40. *Pritchard W.L., Sciuilli J.A.* Satellite Communication Systems Engineering. - Prentice-Hall, N. J., 2006.
41. Stackpole B., Oksendahl E. Security Strategy: From Requirements to Reality. - Washington, USA, 2010.



У підручнику систематично викладено основні поняття, принципи побудови та дослідження інформаційно-вимірювальних систем, що базуються на математичному апараті перетворення вимірювальних сигналів, технологіях вимірювання, передачі та обробці сигналів і даних, на завадостійкому кодуванні, використанні сучасних інформаційно-комунікаційних каналів передачі інформації, а також на алгоритмах шифрування та дешифрування даних, що передаються, методах дослідження метрологічних характеристик тощо. Після кожної глави розміщено основні висновки, запитання для самоконтролю, а також ключові слова російською та англійською мовами.

Для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів, аспірантів, наукових та інженерно-технічних працівників і спеціалістів у сфері інформаційно-вимірювальних технологій.

The textbook systematically presents basic concepts and principles of information-measurement systems construction and studies, based on mathematical apparatus for conversion of measuring signals, measurement technologies, transmission and processing of signals and data, interference immune coding, the use of modern information and communication channels for information transmission, algorithms for encryption and decryption of transmitted data, methods of metrology characteristics studies. After each chapter main conclusions, self-control questions and key words in Russian and English can be found.

Textbook is recommended for technical specialties students of higher educational institutions, graduate students, researchers, engineers and technicians, measurement technology professionals.

Навчальне видання

**Бабак Віталій Павлович,**

**Бабак Сергій Віталійович, Єременко Володимир Станіславович,**

**Куц Юрій Васильович, Марченко Надія Борисівна, Мокійчук**

**Валентин Михайлович, Монченко Олена Володимирівна,**

**Орнатський Дмитро Петрович, Павлов Валерій Георгійович,**

**Пустовойтов Микола Олексійович, Щербак Леонід Миколайович**

## **ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ІНФОРМАЦІЙНО- ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ**

Підручник

(Російською мовою)

За редакцією чл.-кор. НАН України В. П. Бабака

Формат 70×100/16. Умов. друк. арк. 67,6. Тираж 500 пр. Зам. № 152  
Віддруковано у видавничому центрі ТОВ «Софія-А». Друк офсетний.

04053, Київ, вул. Обсерваторна, 12 Б

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 527 від 10.07.2001